Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 130

Aliasing und Neue Medien

Ein Beitrag zur Integrativen Medienpädagogik

Horst Hischer

Saarbrücken 2005

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 130
submitted: March 04, 2005

Aliasing und Neue Medien

Ein Beitrag zur Integrativen Medienpädagogik

Horst Hischer

Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax:	+ 49 681 302 4443
e-Mail:	preprint@math.uni-sb.de
WWW:	http://www.math.uni-sb.de/

Aliasing und Neue Medien

Ein Beitrag zur Integrativen Medienpädagogik

Horst Hischer, Saarbrücken

Zusammenfassung: „Integrative Medienpädagogik“ zielt darauf ab, Medien, und zwar insbesondere die „Neuen Medien“, nicht nur zur methodischen Optimierung des Unterrichts als Unterrichtsmittel einzusetzen, sondern sie auch zum Unterrichtsinhalt werden zu lassen, wobei hieraus eine Bildungsaufgabe für nahezu alle Unterrichtsfächer (mit je fachspezifischer Akzentuierung) erwächst. Dieses Konzept wird für den Mathematikunterricht am Beispiel des „Aliasing“ bei Funktionenplottern konkretisiert, worunter bestimmte systematische Fehldarstellungen verstanden werden.

Summary: “Integrative media education” focuses on the media, particularly the “New Media”, in two educational contexts: as a tool for the improvement of teaching methods and as instruction content with a potential affinity to nearly every subject field (with specific emphasis). In this article, this concept is demonstrated in a mathematics unit dealing with the “aliasing” phenomenon of function plotters, which is to be understood as a typical misrepresentation of periodic functions.

1 Einleitung

> Die sogenannten „Neuen Technologien“ stellen einen bedeutsamen Bildungsgegenstand dar, der jedoch durch bloßen Einsatz des Computers im Unterricht nicht angemessen behandelt werden kann. Vielmehr zeigt eine Erörterung dieses Begriffs, daß Neue Technologien einen Anlaß bilden können, die Aufgabenstimmung von Schule generell zu überdenken, was über den umfassenden Begriff „Technologie“ verallgemeinernd zu dem Konzept einer „technologischen Bildung“ als einem Aspekt von Allgemeinbildung führt: Hilfen zur verantwortbaren Technikgestaltung vermitteln. Hieraus ergeben sich Konsequenzen auch für eine erneute Standortbestimmung des Mathematikunterrichts, wobei Zusammenhänge zwischen Technologie, Allgemeinbildung und Mathematik einerseits und das Verhältnis von Mathematik und Spiel im Sinne des Schaffens von „Spielräumen“ andererseits eine Rolle spielen. Solche „Spielräume“ sind erforderlich, um Freiheit und Muße im Bildungsprozeß als Gegengewicht zu kognitiven Aspekten wirksam werden zu lassen. Mathematik kann als Unterrichtsfach einen bedeutsamen Beitrag zur Ausgestaltung solcher Spielräume im Rahmen technologischer Bildung leisten.
>
> Speziell bei den „Neuen Technologien“ spielt bei der technologischen Bildung das Verhältnis von Mathematik und Informatik eine Rolle. Zwar sind fundamentale Ideen aus beiden Wissenschaften für den Bildungsauftrag der Schule bedeutsam, jedoch kann das nicht durch zwei Unterrichtsfächer Mathematik und Informatik gelöst werden. Vielmehr ist es sinnvoll, ein gewandeltes Unterrichtsfach Mathematik mit solchen Aufgaben zu betrauen. [1]

Dies ist der Abstract meiner Abhandlung „Neue Technologien als Anlaß einer erneuten Standortbestimmung für den Mathematikunterricht“ von 1991. Die hierin formulierten didaktischen Visionen halte ich zwar bis heute (bis auf gewisse sprachlich-begriffliche Nuancen von durchaus inhaltlicher Bedeutung!) unverändert aufrecht, sie haben aber leider noch immer kaum Spuren im Mathematikunterricht hinterlassen.

[1] Abstract in [1991, 3]. Literaturzitate wie [1991, 3] stehen im Folgenden für [Hischer 1991, 3].

Der derzeitige Aktionismus auf KMK-Ebene (und auch in Teilen der Didaktik der Mathematik!) im Umfeld der sog. *Bildungsstandards*, der den 1985 von Klafki erfreulicherweise in die erziehungswissenschaftliche Diskussion „heimgeholten Bildungsbegriff“ [2] verbal auf *Bildung als Produkt* reduziert und dabei den komplementär unverzichtbaren Aspekt von *Bildung als Prozess* ausblendet (oder etwa nur nicht beleuchtet?), so dass man ehrlicherweise von „*Leistungs*-Standards“ statt von „*Bildungs*-Standards“ sprechen sollte, stimmt diesbezüglich leider auch nicht hoffnungsvoll.

Die oben zitierte Abhandlung ist als Ergebnis einer Auftragsarbeit anzusehen: Am 11. 10. 1990 veranstaltete Elmar Cohors-Fresenborg in der Universität Osnabrück in Gedenken an den kurz zuvor verstorbenen Walter Hänke ein Symposium zum Thema *„Der Beitrag des gymnasialen Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung“*, und ich war gebeten worden, hierzu mit einem Vortrag inhaltlich Position zu beziehen. Anlass für die Themenwahl dieses Symposiums war einerseits die durch Wolfgang Klafki 1985 entfachte *Allgemeinbildungsdiskussion* und andererseits das 1984 von der BLK [3] verabschiedete *Rahmenkonzept für die informationstechnische Bildung in Schule und Ausbildung*, an dem sich nahezu alle Bundesländer mit Modellversuchen unterschiedlicher Akzentuierungen beteiligten. Die Vorbereitungen zu diesem Vortrag führten unter den gegebenen Randbedingungen schließlich zu dem Vortragstitel *„Warum eigentlich Mathematikunterricht? — Reflexionen zur Aufgabe des Mathematikunterrichts“*, woraus dann die o. g. Abhandlung entstand.

Im hier vorliegenden Beitrag möchte ich insbesondere auf den ersten Satz des o. g. Zitats eingehen, also darauf, dass die so genannten „Neuen Technologien“ *einen bedeutsamen Bildungsgegenstand darstellen, der jedoch durch bloßen Einsatz des Computers im Unterricht nicht angemessen behandelt werden kann*. So schrieb ich schon 1989 in diesem Sinn: [4]

> Es kann also bei dem zu entwickelnden Bildungskonzept nicht vordergründig um den Einsatz des Computers im Unterricht zur Verbesserung der Lernsituation und des Lernerfolgs gehen – das gehört in den Bereich methodischer Fragen der jeweiligen Fachdidaktik –, vielmehr muß ein solches Bildungskonzept das Anliegen verfolgen, die jungen Menschen in geeigneter Weise mit dem Problemfeld „Neue Technologien“ als einem gesellschaftlich relevanten Phänomen vertraut zu machen und ihnen damit eine Orientierungshilfe zu geben, indem man versucht, sie in die Lage zu versetzen, Chancen und Risiken dieser Techniken begründet abschätzen zu können, ihnen somit technologische Erkenntnis zu ermöglichen.

Es hat sich in den vergangenen Jahren (nicht nur bei den „Bildungsstandards“, sondern auch etwa bei „Dynamischer Geometrie“ [5] oder bei „Neuen Technologien“) gezeigt, dass mit Sprache nicht immer hinreichend sorgfältig umgegangen wird, so dass z. B. „Technologie“ sprachlich überhöhend anstelle von „Technik“ verwendet wird, wo doch das englische „technology“ nur „Technik“ bedeutet, man also dann unpassend vom „Einsatz von Technologie(n)“ spricht. Da es als müßig und vergeblich anzusehen ist, diesem unkritischen Sprachgebrauch mit dem Ziel der Veränderung einen Spiegel vorzuhalten, ist es zunächst hilfreich, andere Bezeichner zu verwenden.

---

[2] [Berg 1988, 20–21]

[3] BLK: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung u. Forschungsförderung.

[4] [1989, 98]

[5] Vgl. die Anmerkungen hierzu in [2003].

Bereits in den 1980er Jahren begann parallel zu den BLK-Modellversuchen zur informationstechnischen Bildung eine zunächst noch wenig beachtete Hinwendung von Vertretern der *Medienpädagogik* und auch generell der *Erziehungswissenschaften* zu dieser Thematik. Mittlerweile führte dies zu einer stürmischen Entwicklung mit dem *Fokus auf die „Neuen Medien“*, wenngleich die Didaktik der Mathematik in toto den damit einhergehenden Bildungsanspruch noch nicht adaptiert hat, sondern sich (weiterhin!) im Wesentlichen mit *dem Einsatz des Computers zum Verbessern des Lehrens und Lernens* begnügt (vgl. obiges Zitat).

2 Integrative Medienpädagogik – Skizze eines Konzepts

Wir wählen im Folgenden eine pädagogikbezogene Deutung von „Medien“, die eine *Doppelgesichtigkeit von Medien* zeigt und die wie folgt beschrieben werden kann: [6]

- Medien *vermitteln Kultur*, und Medien *sind* dargestellte *Kultur*.

Dies gilt auch für die sog. „Neuen Medien“ [7], die im Konzept der Integrativen Medienpädagogik eine besondere (wenn auch keine ausschließliche) Rolle spielen, und unter denen wir uns vereinfachend Computer, Hypertextdarstellungen und multimediale Lernumgebungen vorstellen können.

Wie bereits angedeutet, kann es aus pädagogischer Sicht *nicht nur um den Einsatz* von Medien gehen, sondern diese müssen auch selbst in den pädagogischen Blickpunkt geraten. Das führt zu einer Charakterisierung der *Medienpädagogik*: [8]

> Für die Behandlung pädagogischer Fragen theoretischer und praktischer Art im Zusammenhang mit Medien wird in der Literatur am häufigsten der Begriff **Medienpädagogik** verwendet [...]. Er umfaßt alle Bereiche, in denen Medien für die Entwicklung des Menschen, für die Erziehung, für die Aus- und Weiterbildung sowie für die Erwachsenenbildung pädagogische Relevanz haben. Es erscheint deshalb sinnvoll, den Begriff „Medienpädagogik“ als übergeordnete Bezeichnung für alle pädagogisch orientierten Beschäftigungen mit Medien in Theorie und Praxis zu verstehen und einzelne Aspekte der Medienpädagogik näher zu spezifizieren.

Issing hebt in diesem Sinne die Teilbereiche *Mediendidaktik*, *Medienkunde*, *Medienerziehung* und *Medienforschung* hervor, wobei ich in Übereinstimmung mit Kron [9] die Medienforschung nicht als eigenständiges Gebiet betrachte. Ich komme daher mit Bezug auf Issing zu einer Charakterisierung der ersten drei Teilbereiche: [10]

Mediendidaktik befasst sich

> mit den Funktionen und Wirkungen von Medien in Lehr- und Lernprozessen, d. h. also mit medienvermitteltem Lernen [...]. Ihr Ziel ist die Förderung des Lernens durch eine didaktisch geeignete Gestaltung und methodisch wirksame Verwendung von Medien. Die Auswahl und der Einsatz von Medien soll dabei in Abstimmung mit den Unterrichtszielen, den Unterrichtsinhalten und den Unterrichtsmethoden erfolgen sowie unter Berücksichtigung der anthropogenen und soziokulturellen Bedingungen von Schule und Umwelt [...].

---

[6] Vgl. [Kron 2000, 324 f].

[7] Detaillierte Ausführungen dazu in [2002]; es ist eine bewusste Großschreibung!

[8] [Issing 1987, 24]

[9] [Kron 2000, 322]

[10] [Issing 1987, 25 f]

Neue Medien bilden damit gewiss einen wichtigen Untersuchungsgegenstand der Mediendidaktik. Allerdings betrifft dies dann nur den bereits angesprochenen Aspekt, der überwiegend in der Didaktik der Mathematik mit Neuen Medien assoziiert wird, nämlich den *Einsatz des Computers zum Verbessern des Lehrens und Lernens*.

Medienkunde betrifft die

> Vermittlung von Kenntnissen über Medien, z. B. über die historische Entwicklung der Medien, über Medieninstitutionen und ihre Organisation, über Mediengesetzgebung, Produktionsprozesse, Technik und Gestaltung von Medien; auch die Vermittlung von Erfahrungen in der Bedienung und praktischen Handhabung von Medien zählt zu den Aufgaben der Medienkunde.

Hier erkennen wir einen *weiteren* die „Neuen Medien“ betreffenden pädagogischen Aspekt, der allerdings in bisherigen Zielsetzungen des Mathematikunterrichts bis auf Aspekte der Handhabung faktisch keine erkennbare Rolle spielt.

Medienerziehung [11]

> befaßt sich [...] vorwiegend mit den Massenmedien, aber auch mit Unterrichtsmedien. Sie hat das Ziel, zu einem bewußten, reflektierten, kritischen, d. h. sozial erwünschten Umgang mit Medien zu erziehen.

Auch Neue Medien sind daher Gegenstand von Untersuchungen zur *Medienerziehung*, wenn auch wohl bisher kaum erkennbar bezüglich des Mathematikunterrichts.

Auf dem Bisherigen aufbauend postuliere ich nun eine **Integrative Medienpädagogik** als normativen Begriff, bei dem „integrativ“ eine *zweifache Qualität* hat:

1. Alle drei Aspekte der Medien*pädagogik* – nämlich: Medien*didaktik*, Medien*erziehung* und Medien*kunde* – sind bei Planung, Durchführung und Evaluation von Unterricht *in ihrer Ganzheit* (also: *„integrativ“*!) und nicht losgelöst voneinander bzw. nur für sich isoliert zu berücksichtigen.
2. Eine so verstandene Medienpädagogik kann bei Bezug auf die Neuen Medien wegen der Komplexität des Gegenstandes nicht von einem Unterrichtsfach allein übernommen werden, auch nicht von der Mathematik oder der Informatik – vielmehr sind *im Prinzip alle Unterrichtsfächer* gemeinsam (also: *„integrativ“*!) mit je spezifischen Ansätzen (!) gefordert.

Die zweite Aussage ist zugleich eine klare Absage an das in den 1980er Jahren oft propagierte „Leitfachprinzip“, weil sich jedes „Leitfach“ damit verheben würde. Eine *integrative Medienpädagogik* kommt somit also stets in ihrem *doppelten Sinn* zum Tragen: nämlich über alle drei Aspekte der Medienpädagogik *und* über (im Prinzip) alle Unterrichtsfächer! Und hinsichtlich der drei Aspekte der Medienpädagogik ist dann speziell bezüglich der Neuen Medien zu beachten:

- **Mediendidaktik**: Computer und Internet werden eine immer wichtigere Rolle im Rahmen von Lehr- und Lernprozessen spielen, und zwar als ein *neuartiges Medium* (*Hilfsmittel* oder *Werkzeug*) bei der Aneignung von und Teilhabe an Kultur, also beim *Enkulturationsprozess*. Lehrkräfte, Didaktiker, Bildungsplaner, Softwareentwickler und Schulbuchverlage stehen hier vor großen Herausforderungen.

[11] „Medienerziehung“ wird gemäß Issing in der Literatur z. T. auch als *„Medienpädagogik im engeren Sinn“* definiert.

- **Medienkunde**: Voraussetzung für eine sinnvolle Nutzung solcher Medien ist eine *solide Kompetenz im Umgang* mit ihnen. Dazu gehören auch *Kenntnisse u. a. über Aufbau und Funktionsweise* solcher Medien, die als *grundlegend und allgemeinbildend* zu bestimmen (!) sind.
- **Medienerziehung**: Unverzichtbar zur Persönlichkeitsbildung ist eine *Anleitung zum bewussten, reflektierten und kritischen Umgang* mit solchen Medien, und zwar im Rahmen eines Allgemeinbildungskonzepts.

3 Unterrichtsmittel oder Unterrichtsinhalt, Werkzeug oder Hilfsmittel?

Bei den medien*didaktischen* Aspekten Neuer Medien geht es vorrangig um ihren *fachdidaktisch begründeten Einsatz* im Unterricht und damit um den *Umgang* mit ihnen. Hingegen werden die Neuen Medien nun sowohl unter medien*kundlichen* als auch unter medien*erzieherischen* Aspekten zum *Unterrichtsinhalt*, und sie dienen dabei der *Aufklärung* und der Vermittlung von *Haltungen* und *Einstellungen*. Damit wird zugleich klar, dass auch der *Umgang* mit den Neuen Medien und ihre *Anwendung* nicht nur mediendidaktischen Zielen dienen, sondern dass entsprechende individuelle Erfahrungen eine geradezu unverzichtbare Voraussetzung dafür sind, dass sie zum Unterrichtsinhalt werden können, indem ihre *Grundlagen und Grundstrukturen* und ihre *Bedeutung für Individuum und Gesellschaft* erörtert werden. Da nun sowohl dieser Umgang mit den Neuen Medien als auch deren Thematisierung jeweils in Unterrichts*fächern* erfolgt, liegt eine zweifache *fachdidaktische Perspektive* vor: Neue Medien in ihrer doppelten Rolle als *Unterrichtsmittel* und als *Unterrichtsinhalt*.

Die im vorigen Abschnitt vorgestellten drei medienpädagogischen Aspekte zählen methodologisch zur sog. *Bereichsdidaktik*.[12] Damit gibt es zumindest folgende zwei Perspektiven, unter denen wir die Neuen Medien betrachten können (Abb. 1):

- ***fachdidaktische Funktion*** Neuer Medien:
  – als *Unterrichtsmittel* (d. h.: als *Werkzeug* oder *Hilfsmittel*)
  – als *Unterrichtsinhalt* (d. h.: als *Gegenstand des Unterrichts*)
- ***bereichsdidaktische Sicht*** Neuer Medien:
  – *mediendidaktischer* oder *medienkundlicher* oder *medienerzieherischer* Aspekt

Die Neuen Medien spielen unter mediendidaktischem Aspekt zunächst *methodisch* als *Werkzeug oder Hilfsmittel* die entscheidende Rolle. Daneben sollte aber im Unterricht auch ihre instrumentelle Rolle für den individuellen Erkenntnis- und Lernvorgang *inhaltlich* reflektiert werden, sie können also in ihrer mediendidaktischen Rolle *auch* zum *Unterrichtsinhalt* werden.

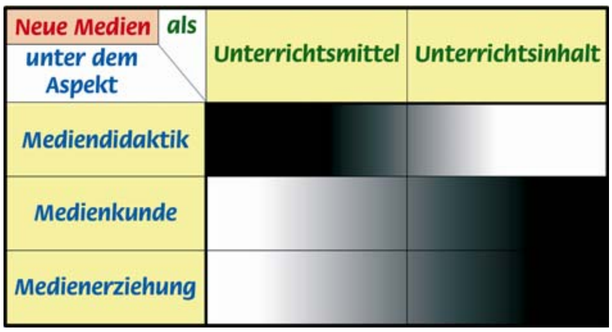

Abb. 2: Perspektivenmatrix Neuer Medien: bereichsdidaktische und fachdidaktische Sicht

[12] Vgl. [Kron 2000, 35 f].

Diese Darstellung soll deutlich machen, dass die beiden Kategorien „Unterrichtsmittel“ und „Unterrichtsinhalt“ der Perspektivenmatrix nicht trennscharf sind: dass also einerseits zum Unterrichtsmittel, dem „Instrument“, stets auch der Unterrichtsinhalt, das „Thema“ bzw. der „Gegenstand“, gehört und umgekehrt; dass jedoch andererseits „Mediendidaktik“, „Medienkunde“ und „Medienerziehung“ zwar jeweils *Schwerpunkte unterrichtlichen Handelns* beschreiben, aber dennoch *nicht voneinander zu trennen* sind. Oder anders:

- *Neue Medien als Unterrichtsmittel* gehören zwar aus bereichsdidaktischer Sicht im Rahmen von Unterrichtsplanung und -evaluation zunächst in die Mediendidaktik, aber dennoch müssen teilweise auch ihre medienkundlichen und medienerzieherischen Aspekte berücksichtigt werden, indem sie unter diesen Aspekten dann zum Unterrichtsinhalt werden.
- *Neue Medien als Unterrichtsinhalt* sind primär medienkundlich und medienerzieherisch von Bedeutung, aber hierzu müssen sie auch in gewissem Umfang mediendidaktisch betrachtet werden und also als Unterrichtsmittel verwendet werden.
- Und gleichwohl wird es unterrichtliche Situationen geben, in denen Neue Medien als Unterrichtsmittel nicht auch zum Unterrichtsinhalt werden (können oder sollen), und es wird vielfach unvermeidbar sein, dass Neue Medien als Unterrichtsinhalt nicht auch zum Unterrichtsmittel werden können oder sollen (z. B. weil eine Verwendung spezieller Medien im Unterricht gar nicht möglich ist – evtl. auch gar nicht erwünscht ist!).

Die noch nicht spezifizierte Unterscheidung der Unterrichtsmittel in *Werkzeug* und *Hilfsmittel* mag irritieren, weil sie nicht selbstredend (und ebenfalls nicht trennscharf!) ist. Sie zielt jedoch akzentuierend auf *idealtypisch grundsätzliche Unterschiede im Anwendungsbereich* solcher Medien ab: Ein ***Werkzeug*** ist – so meine implizite Definition im pädagogischen Kontext – in diesem Sinne dadurch gekennzeichnet, dass es – zumindest in einem bestimmten Bereich – recht vielseitig verwendbar ist. Ein ***Hilfsmittel*** dagegen ist (nach diesem Verständnis) weniger vielseitig, sondern es kann im Prinzip für nur einen Zweck konstruiert worden sein. So wird ein Korkenzieher in der Regel nur ein *Hilfsmittel* sein und nur in extremen Notsituationen als *Werkzeug* verwendet werden (wenn anderes nicht verfügbar ist). Ein Werkzeug verleiht seinem Benutzer aber – im Gegensatz zum Hilfsmittel – ***Macht*** im Sinne von Carl Friedrich von Weizsäcker: [13]

> Macht nenne ich die Bereitstellung von Mitteln für offengehaltene Zwecke.

So wäre beispielsweise ein Computeralgebrasystem als (vielseitiges!) *„Macht verleihendes“ Werkzeug* anzusehen, hingegen wäre ein „kastrierter“ Funktionenplotter, der nur die Veranschaulichung und Formvariablenvariation fest implementierter Funktionsterme erlaubt, ein geradezu *„ohnmächtiges“ Hilfsmittel*, das nur für vom „Autor“ vorgegebene Zwecke verwendet werden kann. [14] Diese Betrachtungen können im Prinzip zur Beurteilung jeglicher sog. *„Lehr- und Lernprogramme“* [15] dienen:

---

[13] [von Weizsäcker 1992, 19].

[14] Hierbei soll jedoch nicht geleugnet werden, dass auch ein Korkenzieher gelegentlich Macht verleihen kann.

[15] Ein fachwissenschaftlich *noch nicht* definierter Terminus – z. Z. noch extrem „fuzzy“.

Wenn Softwaresysteme „offen“ konzipiert sind, für nicht eng umgrenzte Gebiete anwendbar sind (wie z. B. Computeralgebrasysteme, Programmiersprachen), sind sie „mächtig“, sonst sind sie nur Hilfsmittel und eher „ohnmächtig“. Weitere Beispiele für solche „Werkzeuge“ in diesem Sinn aus dem Bereich der Neuen Medien wären dann etwa *im fächerübergreifenden Kontext* Programme für Textverarbeitung und Tabellenkalkulation und *in der Mathematik* z. B. Funktionenplotter.

Im Folgenden wird exemplarisch ein Unterrichtsbeispiel skizziert, das zwar auf einem mediendidaktisch wohl begründeten Einsatz basiert, das aber zugleich medienkundliche und medienerzieherische Perspektiven der vertiefenden Behandlung aufzeigt und damit einen „integrativen“ Beitrag des Faches Mathematik darstellt.

4 Aliasing als „Fehlsimulation“ bei Funktionenplottern

4.1 Das Phänomen

Funktionenplotter (nicht: „*Funktions*plotter“) sind überaus nützliche Werkzeuge, und sie liefern von termdefinierten (!) Funktionen schnell einen (in Abhängigkeit von der Auflösung) mehr oder weniger „schönen“ *Funktionsplot*. Es gibt sie als eigenständige Anwendung für PCs, sie sind heute wesentlicher Bestandteil jedes graphikfähigen Taschenrechners (GTR) und jedes Taschencomputers (TC), und man findet sie ferner als Beigabe zu den heute üblichen Computeralgebrasystemen (CAS). [16] Und so ist zu erwarten, dass Funktionenplotter auch im künftigen Mathematikunterricht zu einem selbstverständlichen, ja gar unverzichtbaren *Werkzeug* werden, so wie es im größten Teil des 20. Jahrhunderts noch Tafelwerke, Rechenschieber und Kurvenlineal waren.

Im Rahmen der Einführung und Untersuchung trigonometrischer Funktionen wird man auch $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, ... diskutieren und dabei experimentell gestützt und argumentativ begründbar den Zusammenhang zwischen dem Frequenzfaktor a bei $\sin(a\pi x)$ und der Periodenanzahl in einem Intervall, z. B. in $[-\pi,\pi]$, entdecken, dass nämlich stets genau a Perioden in $[-\pi,\pi]$ vorliegen. Doch welche Überraschung tritt ein, wenn man den Frequenzfaktor spielerisch weiter vergrößert und dabei statt erwarteter immer dichterer Ausfüllung des Bildschirms zunächst sehr merkwürdige Muster entdeckt und dann irgendwann sogar denselben Funktionsplot wie von $\sin(x)$ erhält (sic!): So erweisen sich etwa beim TI 92 oder beim Voyage 200 von Texas Instruments die Funktionsplots von $\sin(x)$ und von $\sin(239x)$ als identisch. Greift man hoffnungsvoll zu einem anderen TC, etwa dem FX 2.0 von CASIO, so sind z. B. die Funktionsplots von $\sin(x)$ und $\sin(127x)$ identisch, und auch beim Class PAD 300 von CASIO findet man eine passende Einstellung mit solch einem „verrückten“ Ergebnis (Abb. 2)! Sind etwa diese TCs fehlerhaft konzipiert? Kann man ihnen nicht trauen? – So begegnet uns hier der „Rechner als Täuscher“! [17]

---

[16] Funktionenplotter haben nichts mit Computeralgebra zu tun, sondern sie sind nur ein Appendix des sog. „numerisch-graphischen Modus“ heutiger professioneller Computeralgebrasysteme.

[17] [2002, 58]

Greifen wir nun hoffnungsvoll zu einem PC-basierten Funktionenplotter, etwa dem Plotter des in Schulen verbreiteten CAS DERIVE ™, so finden wir bei geeigneten Einstellungen denselben verheerenden Effekt: Bei einer Bildschirmauflösung von 1024 × 768 Pixel, „vertikal" nebeneinander angeordnetem Algebra- und Graphikfenster und $[-\pi, \pi]$ als horizontalem „Zeichenbereich" ergibt sich eine *augenscheinliche Übereinstimmung* der Funktionsplots von $\sin(x)$ und $\sin(497\,x)$.

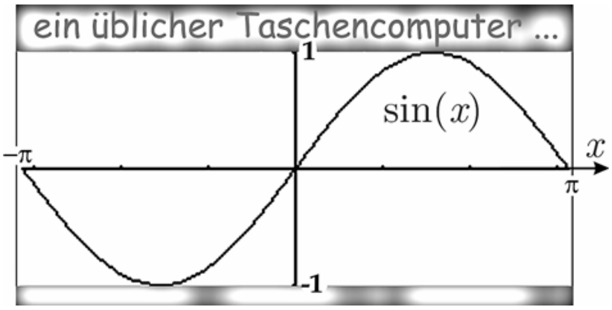

Abb. 2: Der „Rechner als Täuscher" — TI 92 und Voyage 200: Funktionsplots von $\sin(x)$ und $\sin(239x)$ sind identisch. CASIO FX 2.0: Funktionsplots von $\sin(x)$ und $\sin(127x)$ sind identisch.

4.2 Funktionsplot als Simulation einer Funktion

Das letzte Beispiel und diejenigen in Abb. 2 zeigen uns offensichtlich *Fehldarstellungen* der „richtigen" Funktionsplots. Aber was ist hier schon „richtig"? Richtig wären in diesem Zusammenhang ja nur die *gedachten Funktionsgraphen* als Punktmengen bezüglich jeweils konkret gegebener Definitionsmengen. Insofern können ja Funktionsplots fast nie „richtig" sein, weil eine diskretisierende Abbildung des ideellen, gedachten Funktionsgraphen auf die jeweils konkret verfügbaren Pixel des Displays mit den notwendigen durch algorithmische Approximation bedingten Kompromissen stattfindet. Winkelmann bezeichnet daher jeden Funktionsplot auch sinnfällig als „**Simulation**" einer Funktion. [18]

Doch was ist eine „Simulation"? Das lateinische simulo (*abbilden*, *darstellen*; auch: *vorgeben*, *erheucheln*) begegnet uns sowohl in simulacrum (*Abbild*, *Nachbildung*; auch: *Trugbild*) als auch in simulatio (*Verstellung*, *Heuchelei*, *Täuschung*)! [19] „Simulation" hat damit ursprünglich eine negative Konnotation, die aber offenbar aus unserem heutigen Bewusstsein verschwunden ist: Denn es beabsichtigt wohl niemand, eine trügerische Darstellung zu liefern, wenn es z. B. um „Modellbildung und Simulation" oder um „Simulatoren" geht! Nun zeigt uns aber Abb. 2 sowohl eine Simulation von $\sin(x)$ im heute üblichen Verständnis als auch eine Simulation von $\sin(127x)$ bzw. $\sin(239x)$ im ursprünglichen Verständnis, nämlich als „trügerische Darstellung" und damit als „Täuschung" (wenngleich hier keine täuschende Absicht der Entwickler bzw. der Hersteller unterstellt wird!). Wir werden gleichwohl solche „Fehldarstellungen" pleonastisch als „**Fehlsimulationen**" bezeichnen. [20]

Kehren wir nun zu dem am Ende von Abschnitt 4.1 skizzierten Beispiel mit DERIVE ™ zurück und variieren die Fensterbreite interaktiv mit der Maus, so erhalten wir ein Fülle verheerender „Fehlsimulationen" von $\sin(497\,x)$, die z. T. durchaus recht ästhetisch wirken, jedoch aber „wirklich falsch" sind. Dagegen erhalten wir für „hinreichend kleine" Frequenzfaktoren Simulationen, die zwar (in Abhängigkeit von der Bildschirmauflösung) wegen ihrer Stufigkeit z. T. nicht sonderlich schön ausse-

[18] [Winkelmann 1992, 41 f.]; vgl. auch die zugehörigen Ausführungen in [2002, 295 ff.].

[19] Nach einem Hinweis von Anselm Lambert.

[20] Vgl. auch hierzu die ausführliche Diskussion in [2002, 295 ff.].

hen, gleichwohl aber „im Prinzip richtig“ sind und damit *„dennoch einen gültigen Eindruck der Funktion“* [21] liefern. In diesem Sinne können und werden wir (wenn auch nicht trennscharf) zwischen *Simulationen* und *Fehlsimulationen* unterscheiden.

4.3 Analyse und Deutung des Phänomens

Wir können allerdings mit anderen Funktionenplottern auch zu ganz anderen Ergebnissen als denen mit DERIVE ™ gelangen, etwa mit PARAPLOT von Robert Triftshäuser: [22] Wenn man hier nämlich in Analogie zu DERIVE einen passenden Wert für a gefunden hat, der zu der beschriebenen „Fehlsimulation“ wie in Abb. 2 führt, so ist diese überraschenderweise *unabhängig von der Fensterbreite* — also ganz im Gegensatz zu derjenigen bei DERIVE! Das Durchforsten der Einstellungsmöglichkeiten von PARAPLOT führt dann zu der Entdeckung, dass man hier die Anzahl der (äquidistanten) Stützstellen frei wählen kann — bei DERIVE hingegen sucht man eine solche Option vergeblich. — *Dieses unterschiedliche Verhalten* der beiden Funktionenplotter kommt uns sehr gelegen: Es *führt zur Problemlösung*!

Halten wir fest: Da diese Fehlsimulation *nicht* bei allen Funktionenplottern von der Fensterbreite abhängig ist, wird sie somit (primär!) *nicht* durch die Bildschirmauflösung verursacht, sondern ihre Ursache muss bereits *rechnerintern* zu suchen sein: Der Funktionsterm wird durch die vorgegebenen bzw. gewählten Stützstellen *abgetastet*, [23] und die damit erhaltenen Koordinatenpaare $(x;\, f(x))$ bilden eine *interne Wertetabelle*, die dann auf Pixel auf dem Bildschirm abgebildet werden. [24] Das Programm PARAPLOT macht dieses Phänomen nun auch für Schülerinnen und Schüler erfahrbar und „begreifbar“, weil die *Stützstellenanzahl einzeln für jeden Funktionsterm* (!) *wählbar* ist.

Abb. 3 zeigt das Wesentliche des beobachteten Phänomens: Sukzessive werden hier $\sin(\pi x)$, $\sin(2\pi x)$, ... , $\sin(8\pi x)$ jeweils über dem Intervall $[0;\, 2]$ **„abgetastet“** (rechnerintern wird hierbei eine Wertetabelle mit äquidistanten Stützstellen erstellt), und die so gefundenen Wertepaare $(x;\, f\,(x))$ werden durch Pixel auf dem Bildschirm *linear interpoliert* dargestellt (dunkel). Als Schrittweite wurde in diesem elementaren Beispiel ¼ gewählt, d. h., hier liegen 9 *Stützstellen* und damit 8 *Abtastintervalle* vor. Die Anzahl der Abtastintervalle ist die **Abtastrate** oder **Sampling-Frequenz** f_S, es ist in diesem Beispiel also $f_S = 8$.

Bei der Abtastung von $\sin(4\pi x)$ (Frequenzfaktor $a = 4 = \frac{1}{2} f_S$) und $\sin(8\pi x)$ ($a = 8 = f_S$) ergibt sich als Fehlsimulation jeweils die x-Achse, denn die Abtastung erfolgt immer gerade im Nulldurchgang des Graphen! Die Abtastungen von $\sin(\pi x)$, $\sin(2\pi x)$ und $\sin(3\pi x)$ unterscheiden sich zwar vom Original, aber sie sind dennoch

[21] [Winkelmann 1992, 34], zitiert auch in [2002, 296].

[22] Freeware, sehr schön und sehr leistungsfähig, herunterladbar unter http://mathematikunterricht.info/.

[23] Detaillierte Ausführungen hierzu in [2004]: Und zwar liegt hier eine zweifache *Diskretisierung* vor, indem nämlich der Funktionsterm durch die vorgegebenen bzw. gewählten Stützstellen erst *abgetastet* wird und diese Abtastwerte (sog. „Samples“) dann *quantisiert* werden. Jedoch reicht es zum Grundverständnis dieser Fehlsimulation aus, die *Wirkung der Abtastung zu untersuchen*!

[24] Dabei ist eine sekundäre Fehldarstellung bei der Bildschirmdarstellung möglich, der wir hier nicht nachgehen müssen, weil sie für die grundlegende Erklärung des Phänomens entbehrlich ist.

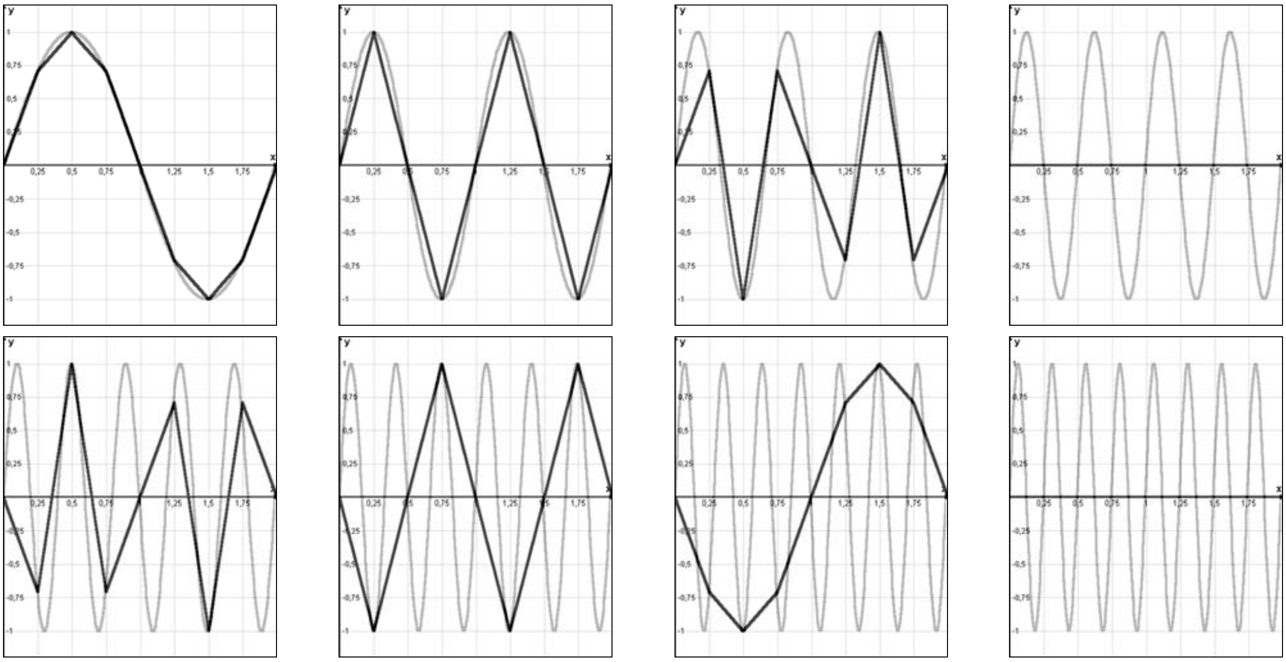

Abb. 3: Fehlsimulationen (dunkel) von $\sin(\pi x)$, $\sin(2\pi x)$, … , $\sin(8\pi x)$ über $[0;\ 2]$
(zeilenweise der Reihe nach von links oben nach rechts unten) mit der Abtastrate $f_S = 8$
in linearer Interpolation, zusätzlich „dahinter“ die „richtigen“ Simulationen (hell) mit $f_S = 500$.

jeweils in Bezug auf die dargestellte „Periodenanzahl“ dem Original noch „recht ähnlich“. Bei den anderen Abtastungen ist dieses Ähnlichkeitsmerkmal hingegen gravierend verletzt! Und wir erkennen sofort, dass bei größerer Abtastrate die durch die (übliche!) lineare Interpolation bedingte „Eckigkeit“ gar nicht mehr augenscheinlich wäre. Würden wir weitere Frequenzfaktoren hinzu nehmen, so wäre die Abtastung von $\sin(9\pi x)$ mit $f_S = 8$ identisch mit der Abtastung von $\sin(\pi x)$, und die Abtastung von $\sin(10\pi x)$ wäre identisch mit der Abtastung von $\sin(2\pi x)$ etc.

Diese elementaren *Experimente* führen induktiv zu folgenden *Entdeckungen*:

1. Die Fehlsimulationen von $\sin(a\pi x)$ wiederholen sich mit wachsendem a, genauer: Die Simulationen von $\sin(a\pi x)$ und von $\sin((a+8k)\pi x)$ sind identisch! ($k \in \mathbb{Z}$)

2. Die Samplingfrequenz f_S muss größer als die doppelte abzutastende Frequenz sein, um einen *einigermassen guten Eindruck* von der zu simulierenden Funktion zu erhalten: $f_S > 2a$

Mit der zweiten Entdeckung haben wir zugleich das *Shannonsche Abtasttheorem der Informationstheorie* plausibel gemacht, das in der Audiotechnik bedeutsam ist.

Wir können nun die in Abb. 1 dargestellte Fehlsimulation bei jedem Funktionenplotter gezielt erzeugen: [25] Die Skalierung des Graphikfensters sei wie in Abb. 3 gewählt, also das Intervall $[0;\ 2]$ für die x-Achse. Die Anzahl der Stützstellen (bzw. Abtaststellen) sei $n+1$, und damit ist die Sampling-Frequenz $f_S = n$. Die zu betrachtenden Funktionsterme werden damit genau an den $n+1$ Stellen $x_\nu = \frac{2\nu}{n}$ mit $\nu \in \{0,\ 1,\ \dots\ ,\ n\}$ abgetastet. Die erste der beiden obigen induktiven Entdeckungen führt uns dann verallgemeinernd zu dem eindrucksvollen **Satz**:

[25] Sofern die Funktionsterme äquidistant abgetastet werden, was der „Normalfall“ ist.

- Es sei f_S die Abtastfrequenz eines Funktionenplotters, $[0;\,2]$ das Abtastintervall, und ferner seien $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ beliebig gewählt. Dann gilt:
  Die Simulationen von $\sin((a+kf_S)\pi x)$ und $\sin(a\pi x)$ sind identisch.

Für den elementaren Beweis benötigen wir nur ein Additionstheorem, die Abtaststellen $x_\nu = \frac{2\nu}{n}$ und $f_S = n$, und dann folgt:

$$\begin{aligned}\sin((a+kf_S)\pi x_\nu) &= \sin(a\pi x_\nu)\cos(kf_S\pi x_\nu) + \cos(a\pi x_\nu)\sin(kf_S\pi x_\nu)\\ &= \sin(a\pi x_\nu)\underbrace{\cos(2k\nu\pi)}_{1} + \cos(a\pi x_\nu)\underbrace{\sin(2k\nu\pi)}_{0} = \sin(a\pi x_\nu)\end{aligned}$$

Mit zwei weiteren elementaren Sätzen können Bedingungen dafür angegeben werden, genau wann sich als Fehlsimulation von $\sin(a\pi x)$ die x-Achse ergibt. [26]

4.4 Aliasing

„Aliasing“ ist zunächst verallgemeinert eine *in technischen Prozessen mögliche Fehldarstellung von Graphik- oder Audiodaten*, der man teilweise bei pixelorientierten Graphikprogrammen durch die Option des „Anti-Aliasing“ zu begegnen versucht.

Wir haben hier *in der Gestalt von Fehlsimulationen* bei Funktionenplottern einen **speziellen Aliasing-Effekt** betrachtet, der durch *Überlagerung von zwei periodischen Strukturen* auftreten kann: nämlich der zu simulierenden periodischen Funktion und der äquidistanten Abtastung, die ihrerseits als eine periodische Funktion aufzufassen ist. *Damit führt jeder mathematische Funktionenplotter zwangsläufig zu derartigen Fehlsimulationen und also zu diesem Aliasing*, solange dieser Plotter (wie üblich!) auf einer äquidistanten Abtastung basiert.

4.5 Medienpädagogische Aspekte

Für den Mathematikunterricht ergibt sich nun sowohl die Aufgabe als auch die Möglichkeit, diesen Aliasing-Effekt im *medienkundlichen* Sinn zu entschlüsseln und im *medienerzieherischen* Sinn eine kritische und wachsame Haltung gegenüber den Ergebnissen zu entwickeln, die uns die Neuen Medien liefern. So plädierte Winkelmann bereits 1991 ganz im Sinne dieses medienpädagogischen Anliegens dafür, Probleme wie solche Fehlsimulationen zum Unterrichtsinhalt zu machen: [27]

> Auch hierbei muß natürlich die Simulation durch qualitative Überlegungen unterstützt werden, um etwa den Stroboskop-Effekt entlarven und aufklären zu können. [...] Die grundsätzlichen Möglichkeiten und Grenzen symbolischen und numerischen Rechnens sollen auch im Mathematik-Unterricht vermittelt werden.

Die bisherigen Ausführungen sollten exemplarisch deutlich machen, dass so etwas im Mathematikunterricht möglich ist, dass also mehr geleistet werden kann, als nur diesen Aliasing-Effekt zu demonstrieren bzw. ihn erleben zu lassen: So können wir dieses Phänomen im Mathematikunterricht als *systematische Fehlsimulation* „entlarven“ und dann anschließend diesen Effekt sogar *gezielt erzeugen*!

[26] Vgl. hierzu [2006].

[27] [Winkelmann 1992, 42], wobei dieser Aliasing-Effekt auch „Stroboskop-Effekt“ heißt.

Wir können das medienpädagogische Anliegen im Kontext dieses Beispiels wie folgt beschreiben:

- Entwicklung von Verständnis für die Ursache(n) dieses Aliasing-Effekts im *medienkundlichen* Sinn.
- Wecken eines kritisches Bewusstseins gegenüber den Möglichkeiten und Grenzen der Neuen Medien im *medienerzieherischen* Sinn,

Darüber hinaus ist anzumerken: Mit der *Interpretation des Funktionenplottens als Simulation* zeigt sich im Nachhinein, dass auch die vertraute *händische* Darstellung von Funktionen im Rahmen klassischer Kurvendiskussionen eigentlich nur eine *Simulation* (von Funktionsgraphen) ist. Aber was ***ist*** dann eigentlich ein *Funktionsgraph* oder gar eine *Funktion*? Und wir können solche Betrachtungen fortsetzen, etwa bei der Zeichnung eines Kreises. Was ***ist*** eigentlich eine Gerade, ein Kreis, ...?

Wenn wir also Neue Medien zum Unterrichts*inhalt* werden lassen, werden damit zugleich klassische philosophisch-mathematische Fragen bedeutsam, so etwa die Unterscheidung zwischen der *Idee* eines Objekts und dessen *Darstellung* – hier wirken Neue Medien auf alte Medien zurück: *Wir können damit neue Inhalte in alten sehen!*

5 Literatur

Berg, Hans Christoph [1988]: Schule braucht Bildung — Konzepte der Allgemeinbildung von den Tübinger Beschlüssen bis zum Heidelberger Allgemeinbildungs-Kongreß (1986). In: *Erziehungswissenschaft und Beruf*, 8. Sonderheft (Tagungsband), 20–41, Rinteln.

Hischer, Horst [1989]: Neue Technologien in allgemeinbildenden Schulen — Ein Beitrag zur begrifflichen Klärung. In: *Schulverwaltungsblatt für Niedersachsen* **41**(1989)4, 94–98.

— [1991]: Neue Technologien als Anlaß einer erneuten Standortbestimmung für den Mathematikunterricht (Hauptvortrag auf der 25. Bundestagung für Didaktik der Mathematik am 5.3.1991 in Osnabrück). In: *mathematica didactica* **14**(1991)1/2, 3–24.

— (Hrsg.) [1992]: Mathematikunterricht im Umbruch? — Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung“ von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 1991 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

— [2003]: Mathematikunterricht und Neue Medien — oder: Bildung ist das Paradies! In: Bender, Peter et. al. (Hrsg.): Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Tagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. vom 27. bis 29. September 2002 in Soest. Hildesheim: Franzbecker, 24–42.

— [2004]: Treppenfunktionen und Neue Medien — medienpädagogische Aspekte. In: *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)6, 36–45.

— [2006]: Abtast-Moiré-Phänomene als Aliasing. Erscheint in: *Der Mathematikunterricht*, **52**(2006)2.

Issing, Ludwig J. (Hrsg.) [1987]: Medienpädagogik im Informationszeitalter. Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Kron, Friedrich W. [2000]: Grundwissen Didaktik. München / Basel: UTB (1. Auflage 1993).

Winkelmann, Bernard [1992]: Zur Rolle des Rechnens in anwendungsorientierter Mathematik: Algebraische, numerische und geometrische (qualitative) Methoden und ihre jeweiligen Möglichkeiten und Grenzen. In: [Hischer 1992, 32–42].