Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 361

Variation — eine fundamentale Idee

Hans Schupp zu seinem 80. Geburtstag gewidmet

Horst Hischer

Saarbrücken 2015

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 361
submitted: June 10, 2015

Variation — eine fundamentale Idee

Hans Schupp zu seinem 80. Geburtstag gewidmet

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
P.O. Box 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: http://www.math.uni-sb.de/

HORST HISCHER

Variation — eine fundamentale Idee

Hans Schupp zu seinem 80. Geburtstag gewidmet

1 Prolog

Das umfangreiche und vielseitige Œuvre von HANS SCHUPP umfasst aktuell insgesamt 156 Publikationen, darunter dreizehn Monographien und ein Schulbuchwerk, [1] wobei anzumerken ist, dass er anstelle von „Didaktik der Mathematik" für die Bezeichnung „Didaktik des Mathematikunterrichts" plädiert – so hatte sein Lehrstuhl an der Universität des Saarlandes die Denomination „Mathematik und Didaktik des Mathematikunterrichts". Ganz in diesem Sinne schrieb mir Hans Schupp im Rahmen unserer fachlichen Korrespondenz: *„Es geht mir immer nur um Mathematikunterricht, um Mathematik nur in diesem Zusammenhang."*

Zwei für Schupp wichtige Aspekte seines didaktischen Schaffens seien im vorliegenden Beitrag herausgegriffen und bezüglich möglicher Zusammenhänge betrachtet: „*Variation*" und *„fundamentale Ideen"*. [2] Hervorhebenswert ist dabei, dass für ihn „Optimieren" (pars pro toto) einerseits eine *„fundamentale Idee der Mathematik"* ist (jedoch nicht des Mathematikunterrichts!), zugleich aber als *„Leitlinie des Mathematikunterrichts"* fungiert – eine sowohl feinsinnige als auch wichtige und vor allem beachtenswerte Unterscheidung! Die Vielfalt der in der Literatur zu findenden Deutungen und Bedeutungen von „fundamentale Idee" mag ihren Grund z. T. (auch) in einer dann so nicht mitgedachten Unterscheidung haben, die möglicherweise das Auftreten unterschiedlicher Termini wie „zentrale Ideen", „Leitideen" usw. erklärt (was untersuchenswert wäre, hier aber nicht untersucht wird).

Nachfolgend geht es daher – ganz im Sinne von Hans Schupp – um *fundamentale Ideen der Mathematik* derart, dass dann gewisse solcher Ideen den Mathematikunterricht *leiten* können und ihn *strukturieren* helfen. Doch was kann als „fundamentale Idee" gelten?

2 Fundamentale Ideen der Mathematik — Kriterien

Die Diskussion um fundamentale Ideen entfachte bekanntlich der Psychologe Jerome Seymour Bruner in seinem fachübergreifenden Buch „Der Prozeß der Erziehung" mit der These, dass

> die Grundlagen eines jeden Faches jedem Menschen in jedem Alter in irgendeiner Form beigebracht werden können [und dass] die basalen Ideen, die den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden, und die grundlegenden Themen, die dem Leben und der Dichtung ihre Form verleihen, ebenso einfach wie durchschlagend sind. [3]

---

[1] Seit 1967, Stand: Mai 2014, vgl. http://madipedia.de/wiki/Hans_Schupp (30. 08. 2014).

[2] Vgl. betr. „fundamentale Ideen" [Schupp 1992] in Kapitel 5 („Optimieren als fundamentale Idee der Mathematik und als Leitlinie im Mathematikunterricht") und betr. „Variation" vor allem [Schupp 2002].

[3] [Bruner 1970, 26]; die englische Originalfassung „The Process of Education" erschien 1960.

So geht es also bereits bei Bruner um *grundlegende Ideen und Themen der Wissenschaften*, die für den fachlichen Unterricht „ebenso einfach wie durchschlagend" sind und die also in diesem Sinn gemäß Schupp zu *Leitlinien des Unterrichts* werden können. Das erfordert jedoch in Bezug auf den Mathematikunterricht eine (diskursiv erarbeitete) Verständigung darüber, was zu „fundamentalen Ideen der Mathematik" zählen soll, genauer: ob man akzeptierbare Kriterien finden kann, die die Erstellung eines Katalogs solch fundamentaler Ideen ermöglichen, wobei solch ein Katalog offen und veränderbar denkbar ist.

Grundsätzliche Beiträge zur Präzisierung dessen, was unter „fundamentalen Ideen" verstanden werden kann, findet man u. a. bei [Schweiger 1992], ergänzt um wesentliche Betrachtungen von Hans Schupp. Das lässt sich zusammenfassend wie folgt darstellen: [4]

Fundamentale Ideen der Mathematik ...

🕮	… sind aufzeigbar in der *historischen Entwicklung* der Mathematik,	**Historizität**
☯	… sind, gewissermaßen als *Archetypen des Handelns und Denkens*, auch *außerhalb der Mathematik* und *vor der wissenschaftlichen Aufnahme* auffindbar,	**Archetypizität**
Σ	… geben (zumindest partiell) Aufschluss über *das Wesen der Mathematik*,	**Wesentlichkeit**

⇳	… sind tragfähig, um curriculare Entwürfe des Mathematikunterrichts *vertikal* zu gliedern,	**Durchgängigkeit**
👓	… sind geeignet, den Mathematikunterricht beweglicher und *durchsichtiger* zu gestalten.	**Transparenz**

Die *ersten drei Kriterien* sind *deskriptiv* – sie können hilfreich sein bei der *Suche* nach fundamentalen Ideen. Diese Kriterien gehen nahezu wörtlich auf [Schupp 1984, 60] zurück. [5] Die *letzten beiden Kriterien* hingegen sind *präskriptiv* oder gar *normativ*, denn sie beschreiben (überprüfbare) *Erwartungen* an einen gemäß solchen Ideen konzipierten Unterricht. Die deskriptiven Kriterien kennzeichnen *fundamentale Ideen der Mathematik* im vorseitig genannten Sinn, nicht aber die beiden letzten Kriterien, die darlegen, inwiefern solche fundamentalen Ideen ggf. zu *Leitlinien des Mathematikunterrichts* werden können.

Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, dass die *Bedeutsamkeit von Ideen* mit zunehmender Präzision abnimmt, was zu einem weiteren, vierten deskriptiven Kriterium führt:

Fundamentale Ideen der Mathematik ...

≈	… sind eher vage als präzise.	**Vagheit**

Schweiger hebt diese „Vagheit" bezüglich des Problems der Kennzeichnung und des Aufsuchens konkreter fundamentaler Ideen durchaus positiv hervor, denn *Ideen* seien vage, und sie bräuchten keine Detaillierung, was sie erst gewichtig mache. [6] Das lässt sich dann als eine *Unschärferelation* für fundamentale Ideen formulieren:

- Werden *Ideen zunehmend fundamentaler*, so wird ihre Beschreibung *zunehmend vager*, d. h., sie werden zunehmend *allgemeiner und unschärfer* – und umgekehrt!

---

4 Aus [Hischer 2012, 21], basierend auf [Hischer 1998] und [Hischer 2004].

5 Die Ergänzungen *„Handeln"* und *„wissenschaftliche Aufnahme"* im zweiten Kriterium werden bei [Schweiger 1992] noch nicht zitiert, aber [Schupp 1992, 106] führt sie auf und bezeichnet hier *„Handeln und Denken"* als *„(… höchst sublimierte) Tätigkeiten"*.

6 [Schweiger 1992, 207], vgl. auch [Schweiger 2010, 7].

[Heymann 1996] stellt sechs von ihm so genannte „zentrale Ideen“ vor: die *Idee* der *Zahl*, des *Messens*, des *funktionalen Zusammenhangs*, des *räumlichen Strukturierens*, des *Algorithmus* und des *mathematischen Modellierens*. Sie sind später (modifiziert als fünf „Leitideen“) in die sog. „Bildungsstandards“ [7] der KMK mit eingegangen: *Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall*. Hier fällt zunächst auf, dass diese jeweiligen „Ideen“ verschiedene sprachliche Ebenen betreffen: Beispielsweise wird mit „Zahl“ ein *Begriff* bezeichnet, mit „Messen“ hingegen eine *Handlung*. Zwar kann man einwenden, dass etwa die „Idee der Zahl“ kulturhistorisch kaum ohne die „Idee des Zählens“ entstehen konnte, und dennoch bleibt die Frage bestehen, weshalb diese „Ideen“ sprachlich so ungleichartig formuliert wurden. Hilfreich und überzeugend ist in diesem Zusammenhang folgende Eingrenzung von [Schweiger 1992]:

> Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien und Techniken [...]

Dieser *Aspekt der Handlung* (unter Einschluss von *Strategien* und *Techniken*) ist daher – Schweiger folgend – mit als *wesentlich* für fundamentale Ideen anzusehen. [8] Das betrifft dann fundamentale Ideen sowohl im deskriptiven als auch im normativen bzw. präskriptiven Sinn. Diese Auffassung wird dadurch gestützt, dass die Entstehung bzw. Bildung eines Begriffs – eines subjektiven Konstrukts – an eine individuelle Handlung gebunden ist, nämlich an das *Begreifen*. Und das Begreifen bezeichnet als Handlung den Prozess der Entwicklung des Begriffs *im* Individuum und *durch* das Individuum, also die *ontogenetische Begriffsentwicklung* im Kontrast zur kulturhistorischen Begriffsentwicklung. Damit sind das *Begreifen* (als Handlung) und der *Begriff* im Prozess der Begriffsentwicklung untrennbar aneinander gekoppelt – wobei dieser Prozess möglicherweise „handelnd“ beginnt, andererseits wohl prinzipiell lebenslang unabgeschlossen bleibt. Schließt man sich dieser Auffassung an, so bedeutet das allerdings, dass beispielsweise „Zahl“ für sich genommen noch keine fundamentale Idee bezeichnet, aber auch nicht das „Zählen“ für sich genommen, sondern dass vielmehr erst beide gemeinsam die fundamentale Idee ausmachen, also „Zahl“ als Bezeichnung für einen *grundlegenden Begriff* und „Zählen“ als Bezeichnung für die zugehörige *grundlegende Handlung*, kurzum:

- Eine konkrete *fundamentale Idee* offenbart sich sowohl als *grundlegende Handlung* als auch als *grundlegender Begriff*, insgesamt in deren „Symbiose“ als eine *Dyas*.

So könnte man dann z. B. einige der von Heymann erörterten „zentralen Ideen“ wie folgt kennzeichnen: *Zahl & Zählen*, *Maß & Messen*, *Algorithmus & Algorithmieren*. Dennoch wird man geneigt sein, in Kurzkommunikation von „Zahl“ als einer fundamentalen Idee zu sprechen, wobei man dabei im Blick behalten sollte, dass die hiermit verbundene Idee untrennbar auch das „Zählen“ betrifft – und vice versa.

In diesem Sinn erweist sich, dass beispielsweise auch die *Mittelwertbildung* – genauer: Mittelwert & Mittelwertbildung – die genannten Kriterien für fundamentale Ideen erfüllt. [9] Es fällt aber auf, dass diese Idee der *Mittelwertbildung* nicht in den Rahmen der sechs von Heymann genannten Ideen hineinpasst:

---

[7] Als Widerspruch in sich ein bedauerlicher sprachlicher Lapsus: „Bildung“ ist nicht standardisierbar.

[8] Dies hat Hans Schupp mir gegenüber in vielen Gesprächen betont, und es ist der Tenor in [Schupp 1984] und Schupp [1992].

[9] Vgl. [Hischer 1998], [Hischer 2003], [Hischer 2004], zusammengefasst in [Hischer 2012, 22–23].

Denn offenbar ist die Idee der Mittelwertbildung trotz der ihr anhaftenden Vagheit (es gibt eine Fülle von „Mittelwerten") viel konkreter als die sechs Heymannschen Ideen. Andererseits wirkt sie gerade wegen ihrer Konkretheit viel unterrichtsnäher als die eher zu allgemeinen Heymannschen Ideen, die wiederum wegen ihrer Allgemeinheit und damit geringen Anzahl geeignet erscheinen, in knapper Form grundsätzliche inhaltliche Aspekte des Mathematikunterrichts festzumachen. Eine Lösung aus dem Dilemma besteht in der Konzeption, *fundamentale Ideen zumindest in zwei verschiedenen, prinzipiell offen zu denkenden Ebenen mit unterschiedlichem Konkretisierungsgrad* anzuordnen, wie es Abb. 1 zeigt.

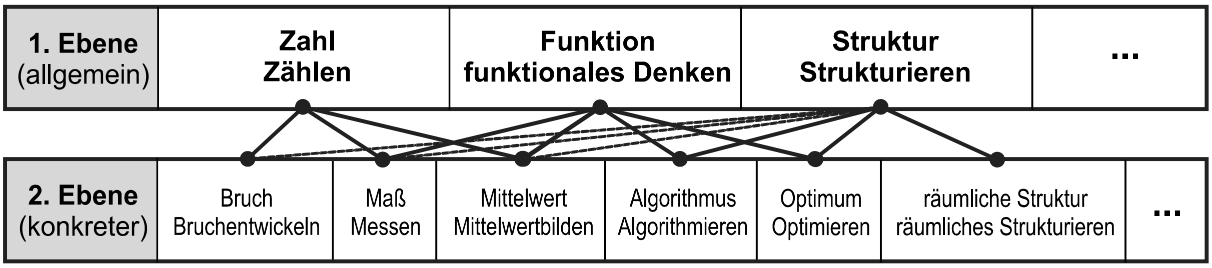

Abb. 1: Mögliche Ebenen und Beziehungen fundamentaler Ideen

Zwischen den in beiden Ebenen aufgeführten Ideen bestehen inhaltliche Zusammenhänge, wie sie unvollständig angedeutet sind. Im Unterricht wird es dann auf weiteren, nachgeordneten Ebenen unter Berücksichtigung der normativen Kriterien um das *Wecken von Grundvorstellungen zu Begriffen, Verfahren* usw. gehen, die mit diesen Ideen zusammenhängen.

3 „Variation" als fundamentale Idee der Mathematik

Hier soll nun dargelegt werden, dass das von Hans Schupp vielfach propagierte didaktische Prinzip der „Variation" – und zwar als „Aufgabenvariation" – auch im Zusammenhang mit dem von ihm für wichtig erachteten Konzept fundamentaler Ideen im Kontext von „Leitlinien des Mathematikunterrichts" zu sehen ist.

Zunächst ist anzumerken, dass der Terminus „Variation" per se bereits die erwähnte Dyas von „Begriff" und „Handlung" vereint, denn die Bedeutung von „Variation" ist „Veränderung", was wegen der Endung „-ung" verdeutlich, dass hier zugleich Produkt und Prozess gemeint sind: „Variation" ist also eine Handlung, deren Ergebnis eine „Variation" ist. Überprüfen wir nun kurz die deskriptiven Kriterien für fundamentale Ideen:

Historizität: Drei Beispiele seien skizziert: (1) Bereits in der *griechischen Antike* war die „Variation" als Handlung eine Möglichkeit zur Problemlösung, so bei den „Einschiebelösungen" der drei berühmten klassischen Probleme (Kreisquadratur, Winkeldreiteilung, Würfelverdoppelung): Diese Lösungen bzw. Lösungsversuche basierten auf einer Variation von Punkten oder anderen Objekten im Sinne einer *Bewegungsgeometrie*, zumindest auf einer gedachten bzw. vorgestellten, nicht unbedingt physischen Bewegung. In diesem Sinn entstanden auch diverse Kurven als „Ortskurven" durch reale oder gedachte Bewegung von Punkten, Strecken oder anderen Objekten. Die „Variation" war also schon zu Beginn der Mathematik als Wissenschaft ein wesentliches Prinzip der Erkenntnisgewinnung. (2) Die Lösung von Extremalproblemen ist ohne „Variation" als einem gedachten methodischen Werkzeug, also einem „Denkzeug", kaum vorstellbar, beginnend etwa bei *Fermat* und weiter bei *Jakob I Bernoulli* und *Johann I Bernoulli* mit der „Erfindung" der Variationsrechnung bis hin zur heutigen Analysis: So ist die Epsilontik der reellen Analysis als gedachte Variation auffassbar („zu jedem ε gibt es ein δ, so dass …“), und in der Funktionalanalysis werden Funktionen mit bestimmten Zielsetzungen variiert. (3) Bereits im 19. Jh. hatte der geniale *Jakob Steiner* eine lediglich vorgestellte *Bewegungsgeometrie* entwickelt (was wir heute mit großartiger Software nachvollziehen und fortsetzen können).

Archetypizität: „Variation“ ist keineswegs nur für die Mathematik typisch, sondern sie ist auch außerhalb bedeutsam: So spielt sie in der Musik bei Kompositionen als „Variation eines Themas“ eine große Rolle, weiterhin tritt sie z. B. in der Linguistik und in der Biologie auf. Aber nicht nur im Wissenschaftsbereich gibt es „Variationen“ in unterschiedlichen Kontexten, auch im Alltag ist „Variation“ als „Veränderung“ im Kontrast zur „Beharrung“ ein wesentliches Merkmal von Leben und Gestaltung und damit von Kreativität. Und in diesem Sinne ist Variation schon in vorgeschichtlicher Zeit typisch für die vielschichtige Entwicklung des Menschen.

Wesentlichkeit: Bereits ein Blick auf einige ausgewählte mathematische Termini, die im Zusammenhang mit „Variation“ gebildet sind, macht deutlich, dass „Variation“ wesentlich für die Mathematik ist (in alphabetischer Reihenfolge): Variable, variable Metriken, Variablentransformation, Variablentrennung, Varianz, Varianzanalyse, Variation der Konstanten, Variationsrechnung, Varietät, Varisolvenz. Insbesondere ist hierbei die „Variable“ hervorzuheben, die zwar (im Kontrast zur Namensgebung) nicht selber variiert wird, sondern bei der nur ihre „Belegung mit Werten“ variabel ist: Denn das Konzept einer „Variablen“ (bzw. gleichbedeutend: einer „Veränderlichen“) und die damit verbundene wesentliche Variationsmöglichkeit ist unzweifelhaft so fundamental, dass die Mathematik als Wissenschaft heute ohne einen Begriff von „Variable“ nicht vorstellbar ist.

Vagheit: „Variation“ nur als „Veränderung“ definieren zu wollen, würde dem Reichtum ihres Auftretens in der Mathematik und ihrer Bedeutung für die Mathematik nicht gerecht werden. Gleichwohl ist diese „Veränderung“ ein wichtiges – im jeweiligen Kontext konkret zu definierendes – Prinzip für die Mathematik. In diesem Sinn ist „Variation“ in der Mathematik mit einer (durchaus konstruktiven) Vagheit verbunden.

Die beiden präskriptiven Kriterien „**Durchgängigkeit**“ und „**Transparenz**“ hat Hans Schupp an dem von ihm vorgestellten didaktischen Prinzip der *Aufgabenvariation* ausführlich verdeutlicht. „Variation“ ist aber nicht nur ein wichtiges didaktisches Prinzip, sondern „Variation“ ist auch typisch für die Mathematik als Wissenschaft (s. o.), wenn auch nicht als „Aufgabenvariation“ im unterrichtlichen Sinn, sondern z. B. bei der (einschränkenden oder erweiternden) Variation von Voraussetzungen in Definitionen und Theoremen als einem kreativen Werkzeug zur Gewinnung neuer Aussagen und Einsichten. Darüber hinaus zeigen die aktuellen Möglichkeiten des experimentierenden Vorgehens in einer *Bewegungsgeometrie* mit Hilfe der Verwendung von Dynamische-Geometrie-Systemen [10] (DGS) eindringlich *Möglichkeiten entdeckenden Lernens durch Variation* – sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch Erwachsene in unterschiedlichen Rollen.

[10] Hier wird bewusst nicht die inkorrekte Bezeichnung „Dynamisches Geometrie-System“ gewählt, denn nicht dieses System (die Software), ist dynamisch, sondern allenfalls die so betrachtete bzw. erlebte Geometrie. Es liegt also ein System für eine „Dynamische Geometrie“ („unmittelbar“ im Sinne des griechischen Wortursprungs) vor. Vgl. http://madipedia.de/index.php?title=DGS&oldid=17709 (30.08.2014).

4 Ein Beispiel: Winkeldreiteilung

4.1 Problemlage

Die „konstruktive“ Winkelhalbierung mit Zirkel und Lineal ist kein Problem. *Aufgabenvariation gemäß Schupp* führt zur Frage, wie man einen gegebenen Winkel in mehr als zwei gleich große Winkel teilen kann, wobei die Teilung in 2^n Winkel unproblematisch ist.

Folgende Erwartungshaltung im Unterricht ist denkbar: Einen gegebenen Winkel mittels Zirkel und Lineal zu dritteln, dürfte ebenfalls problemlos sein, ist dies doch beim Aufteilen einer gegebenen Strecke in n gleich lange Abschnitte mittels Strahlensatz einfach, und die Halbierung eines Winkels mit Zirkel und Lineal scheint dafür eine Blaupause zu liefern: Bei gegebenem Winkel α drittele man die Sehne zwischen den Endpunkten der beiden gleich langen Schenkel mittels Strahlensatz, und die beiden entstandenen Strecken verlängere man bis zu dem Kreisbogen (Abb. 2). Jedoch: Die drei so entstandenen Dreiecke haben zwar denselben Flächeninhalt (gleich lange Basis, gleiche Höhe), aber die daraus entstandenen drei Kreisbogendreiecke sind damit dann offensichtlich nicht gleich groß. So geht’s also nicht, aber es war einen Versuch wert!

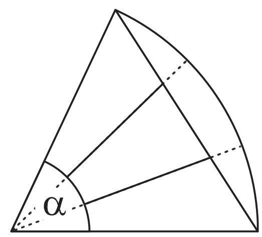

Abb. 2: Winkeldreiteilung mittels Strahlensatz?

Bereits in der griechischen Antike war die Winkeldreiteilung eines der berühmten klassischen Probleme (neben der Quadratur des Kreises und der Würfelverdoppelung), mit dem sich Mathematiker befassten. Erst mit Begründung der modernen Algebra im 19. Jahrhundert (Galois-Theorie) konnte bekanntlich bewiesen werden, dass die *Winkeldreiteilung* in einem strengen Sinn mit Zirkel und (einem nicht skaliertem) Lineal *nicht durchweg möglich* ist (wenngleich in speziellen Fällen). Dennoch sind seit der Antike vielfältige andere Werkzeuge entwickelt worden, die die Winkeldreiteilung (zumindest näherungsweise) ermöglichen. Drei solcher Werkzeuge seien kurz vorgestellt.

4.2 Lösungswerkzeug: die Trisectrix des Hippias von Elis

Die erste Kurve jenseits von Kreis und Gerade verdanken wir gemäß einem Bericht von Proklos (410 – 485) dem Sophisten **Hippias aus Elis** (geb. 460 v. Chr.), der diese um 420 v. Chr. zur Winkeldreiteilung ersonnen haben soll. Hippias bedient sich dazu einer *kinematischen Definition*, ähnlich wie später auch Archimedes bei der nach ihm benannten Spirale: Im Quadrat $ABCD$ von Abb. 3 werde die Strecke $[DC]$ parallel zu sich mit konstanter Geschwindigkeit bis in die Lage $[AB]$ verschoben, und $[AD]$ rotiere um A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bis in die Lage $[AB]$.[11] Beide Bewegungen starten gleichzeitig und hören gleichzeitig auf. Der geometrische Ort der Schnittpunkte ist die zu definierende **Trisectrix**. Abb. 3 zeigt eine *punktweise Konstruktion* dieser Trisectrix, indem die diskreten Stützstellen von Hand „glatt“ verbunden werden, wie man es auch damals gemacht haben könnte, wobei sich die auftretenden Winkelschenkel durch fortgesetzte *Winkelhalbierung* gewinnen lassen.

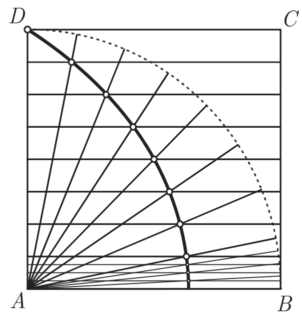

Abb. 3: punktweise Konstruktion der Trisectrix

[11] $[AB]$ bezeichnet nachfolgend die Strecke mit den Endpunkten A und B, $|AB|$ deren Länge, und $\langle AB \rangle$ ist die Gerade durch A und B.

Anstelle der verbalen Definition kann man auch eine handlungsorientierte wählen, indem man sich wie in Abb. 4 einen *„Trisectrix-Zirkel“ vorstellt*, der die kinematische Erzeugung der Trisectix *symbolisieren* soll. [12] Mit einem DGS ist die Entstehung der Trisectrix durch die animierte Erzeugung einer Ortslinie *simulierbar*. Liegt die Trisectrix wie (eine Parabelschablone) als „Kurvenlineal“ vor, so kann man mit ihr (im Rahmen der zeichnerischen Genauigkeit) spitze Winkel unter Anwendung des Strahlensatzes wie in Abb. 5 dreiteilen, die Trisectrix tritt dann als Hilfsmittel auf.

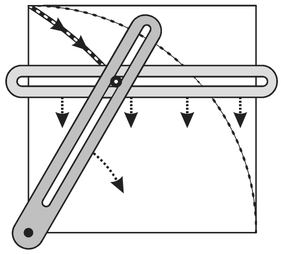

Abb. 4: „Trisectrix-Zirkel“ als Idee

In der Algebraischen Geometrie nennt man eine Kurve *„organisch erzeugbar“*, [13] wenn sie im Ganzen, also nicht nur punktweise, darstellbar ist wie z. B. eine Ellipse über die „Gärtner-Konstruktion“. Die *Trisectrix* ist hier also *nicht organisch erzeugt*. (Es entsteht aber die Frage, ob die Trisectrix *organisch erzeugbar* ist.)

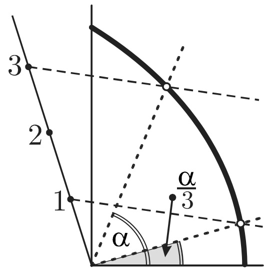

Abb. 5: Winkeldreiteilung mit Hilfe der Trisectrix

Die Variation der Aufgabe „Winkelhalbierung“ führt so zum klassischen Problem der Winkeldrittelung, das in der Antike mittels einer (zumindest gedachten) Variation von Punkten eine Ortskurve lieferte, nämlich die Trisectrix, die als Werkzeug zur Problemlösung verwendet werden konnte. Dinostratos (390 – 320) verwendete später die Trisectrix zur Quadratur des Kreises, weshalb sie auch „**Quadratrix**“ heißt.

4.3 Lösungswerkzeug: die Archimedische Spirale

Unter den auf **Archimedes von Syrakus** (287 – 212 v. Chr.) zurückgehenden Werken trägt eine den Titel „DE LINEIS SPIRALIBUS“. ([Cantor 1894, 282] nennt sie „Die Schneckenlinien oder Spiralen“. Eine ausführliche Darstellung der Kommentare von Eutocios zur den Werken von Archimedes findet sich bei [Heath 1897, 151 ff.], insbesondere im griechisch-lateinischen Originalkommentar bei [Heiberg 1881, 50 ff.].) Die hier behandelte und später nach ihm benannte **Archimedische Spirale** ist wie die Trisectrix eine kinematisch definierte Kurve (Abb. 6), deren Erzeugung Archimedes in seinem Buch wie folgt beschreibt (Formulierung aus [Cantor 1894, 291]):

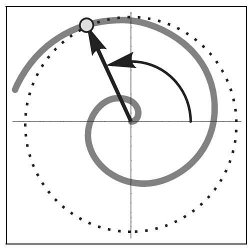

Abb. 6: Archimedische Spirale in kinematischer Entstehung

> Wenn eine gerade Linie in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte, welcher unbeweglich bleibt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, bis sie wieder dahin gelangt, von wo die Bewegung ausging, und wenn zugleich in der bewegten Linie ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit von dem unbewegten Endpunkte anfangend sich bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Schneckenlinie in der Ebene.

Auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Radialstrahl bewegt sich also mit konstanter Bahngeschwindigkeit ein Punkt vom Mittelpunkt nach außen. Die Bahnkurve dieses Punktes, also dessen „Spur“, ergibt dann diese Spirale als eine nicht begrenzt zu denkende „**Schneckenlinie**“. Auch diese Spirale kann man wie die Trisectrix punktweise konstruieren, indem man z. B. Polarkoordinatenpapier verwendet, das man kaufen oder mit

[12] Vgl. [Hischer 1994].
[13] Vgl. [Brieskorn & Knörrer 1981, 8].

einem Vektorgraphikprogramm leicht selbst herstellen kann (Abb. 7). Die Entstehung dieser Kurve ist wie bei der Trisectrix mit einem DGS durch Erzeugung einer Ortslinie simulierbar. (Auch hier stellt sich die Frage, ob die Archimedische Spirale *organisch erzeugbar* ist.) Sodann ist offensichtlich, wie eine Archimedische Spirale zur Winkeldreiteilung verwendet werden kann: Der Radialstrahl (als ein Schenkel des gegebenen Winkels) schneidet die Spirale in einem Punkt, der sich dadurch ergebende Radius wird mittels Strahlensatz gedrittelt, mit dem neuen Radius wird ein neuer Kreis um denselben Mittelpunkt gezeichnet, und dessen Schnittpunkt mit der Spirale liefert den Schenkel für den gesuchten Winkel. (Es sei angemerkt, dass man aus den Parametergleichungen $r = a \cdot t$ für den Radius und $\varphi = b \cdot t$ für den Winkel die Spiralengleichung $r = c \cdot \varphi$ erhält.)

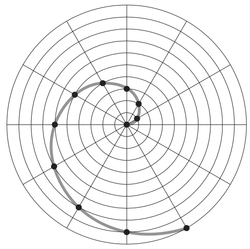

Abb. 7: Archimedische Spirale mit Polarkoordinatenpapier

4.4 Lösungswerkzeug: das Einschiebelineal nach Archimedes

Auf **Archimedes** geht das sog. „Einschiebelineal" das elegantestes Lösungswerkzeug für das Problem der Winkeldreiteilung zurück. Das z. B. in [Cantor 1984, 284 f.] beschriebene Verfahren wird mit den drei folgenden Abbildungen vereinfacht vorgestellt: In Abb. 8 sei im Kreis um M ein beliebiger spitzer Winkel $\sphericalangle QMP$ gegeben. Ferner sei von P aus eine Strecke $[PA]$ zu einem Punkt A auf der Geraden $\langle QM \rangle$ gezogen, die den Kreis in B schneidet. A soll nun so auf $\langle QM \rangle$ verschoben werden, bis $|AB| = |PM|$ ist, was auch offensichtlich möglich ist. Es gilt dann $|AB| = |PM| = |QM|$.

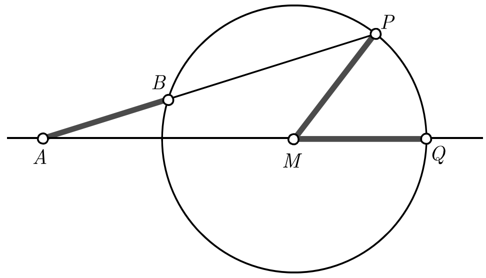

Abb. 8: Einschiebelineal – Grundsituation

Behauptung: Dann ist $\sphericalangle QMP = 3 \sphericalangle MAB$.

Beweis: Die in Abb. 9 mit α bezeichneten Winkel sind gleich groß (teils als Wechselwinkel bzw. Stufenwinkel an den als Hilfsgeraden eingezeichneten Parallelen, und das Dreieck AMB ist gleichschenklig). Das Dreieck PBM ist ebenfalls gleichschenklig, also gilt $\beta = 2\alpha$, und damit folgt

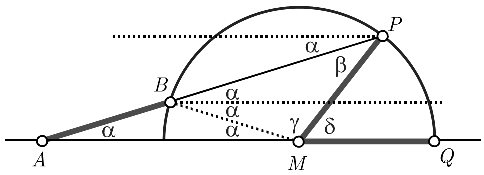

Abb. 9: Zum Beweis von Archimedes' Verfahren

$$\delta = \pi - (\alpha + \gamma) = \pi - (\alpha + (\pi - 2\alpha - \beta)) = \pi - (\alpha + (\pi - 4\alpha)) = 3\alpha. \qquad \blacklozenge$$

Die bisherige Darstellung lässt sich auch *konstruktiv invers* sehen: Man geht von dem Kreis um M aus, wählt einen Peripheriepunkt Q, ferner auf der Geraden $\langle QM \rangle$ einen Punkt A so außerhalb des Kreises, dass der Kreis um A mit dem Radius $|MQ|$ den Kreis um M in einem neuen Punkt B schneidet. Die Gerade $\langle AB \rangle$ schneidet dann den Kreis um M in einem weiteren Punkt P derart, dass $\sphericalangle QMP = 3 \sphericalangle MAB$ gilt.

Dies waren nur Vorbereitungen für ein gesuchtes technisches Verfahren zur Dreiteilung des Winkels $\sphericalangle QMP$, mit dem nun der Punkt A passend gefunden werden muss. Abb. 10 zeigt dazu modellhaft ein „Einschiebelineal" im Sinne der archimedischen Idee: Links vom Kreis um M befindet sich ein auf der Geraden $\langle QM \rangle$ fest installiertes Lineal mit einer Führungsrille für einen in ihr gleitenden Stift, der vertikal zur Zeichenebene im Punkt A des zweiten dunkelgrau dargestellten Lineals montiert ist.

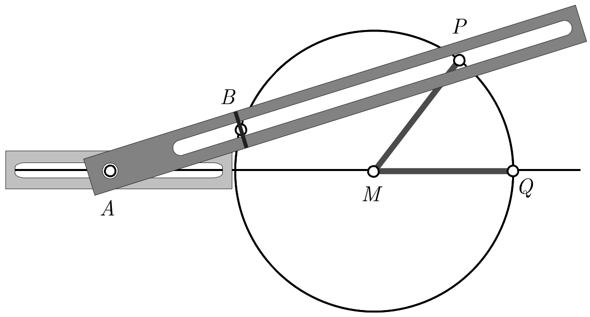

Abb. 10: Einschiebelineal nach Archimedes

Dieses zweite Lineal – es ist das „Einschiebelineal“ – ist mittels des Stifts drehbar um A gelagert, und es besitzt ebenfalls eine Führungsrille, die einen im gegebenen Punkt P des Kreises montierten weiteren Stift umgreift. Das Einschiebelineal kann damit durch horizontale Bewegung von A in der Führungsrille des ersten fixierten Lineals um den Stift von P herum gleiten, wobei sich der Abstand von A zur Kreisperipherie ändert. Auf dem Einschiebelineal wurde zuvor ein Punkt B gemäß $|AB|=|PM|$ markiert. Nun muss A nur noch so *variierend* bewegt werden, dass diese Markierung mit der Kreisperipherie zur Deckung kommt. Damit lässt sich durch manuelles „Einschieben“ jeder spitze Winkel angenähert dritteln. (Man überlege sich, ob das Verfahren auch für stumpfe Winkel funktioniert.)

Zur praktischen Durchführung benötigt man den in Abb. 10 dargestellten Apparat aber nicht wirklich, denn es genügen offenbar „Zirkel und Lineal“, wenn man wie folgt vorgeht: Man zeichnet eine Gerade $\langle QM \rangle$, einen Kreis k um M durch Q und gibt mit $P \in k$ einen Winkel $\sphericalangle QMP$ vor. Auf dem Lineal markiert man eine Strecke $[AB]$ der Länge $|PM|$ und positioniert nun das Lineal manuell so in der Zeichenebene, dass die linke Markierung A von $[AB]$ auf der Geraden $\langle QM \rangle$ liegt, die Linealkante durch den Punkt P verläuft und die rechte Markierung B von $[AB]$ auf dem Kreisrand liegt. Die so positionierte Strecke $[AB]$ ist dann neben $[AM]$ der zweite Schenkel des gesuchten gedrittelten Winkels $\sphericalangle MAB$.

Das könnte nun zu der Ansicht verleiten, dass das Winkeldreiteilungsproblem mit Zirkel und Lineal lösbar sei, jedoch wäre dies ein *Fehlschluss*, weil etwas Wesentliches nicht beachtet wurde: Das „Einschiebelineal“ besitzt eine *Längenmarkierung*. Im Sinne des Verständnisses von „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“ als einem *algebraischen Problem* (!), *nicht aber einem praktischen Problem* (!) darf aber nur die „Zeichenkante“ eines Lineals als materielle Symbolisierung eines Geradenabschnitts verwendet werden, nicht aber die zu einem handelsüblichen „Lineal“ gehörende maßstäbliche Skalierung.

Abgesehen von diesem „Linealproblem“ ist die so durch *Variation der Position des Einschiebelineals* generierte „Lösung“ nicht exakt, sondern nur manuell approximiert.

5 Nachwort

Das klassische Problem der Winkeldreiteilung erweist sich in mehrfacher Hinsicht als ein Beispiel zum Aspekt „Variation – eine fundamentale Idee“:

Im Unterricht kann es über das Schuppsche Konzept der *Aufgabenvariation* entstehen, und zwar durch eine nur geringfügig erscheinende Modifikation der bereits bekannten Konstruktionsaufgabe der Winkelhalbierung mittels Zirkel und Lineal – allerdings mit ungeahnten Folgen: Während sich eine Teilung in 4, 8, … Winkel mittels fortgesetzter Halbierung noch fast von alleine ergibt, läuft man im Falle der Dreiteilung eines beliebigen Winkels gegen die Wand, wenngleich die konstruktive Drittelung gewisser spezieller Winkel leicht möglich ist. Die Mitteilung, dass das Problem der „Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal“ die Mathematiker schon seit fast 2500 Jahren beschäftigt hat und erst im 19. Jahrhundert endgültig negativ entschieden werden konnten, sollte Verwunderung bewirken, noch dazu, wenn mitgeteilt wird, dass seitdem eine Fülle von „Lösungen“ mit anderen Werkzeugen entwickelt worden ist. Die drei dargestellten Beispiele sind im Unterricht elementar behandelbar. Es ist eine schöne Übung, die Trisectrix und auch die Spirale sorgfältig punktweise zu konstruieren, und der Einschiebeapparat kann tatsächlich gebaut werden. Darüber hinaus können alle drei Verfahren mittels DGS simulierend dargestellt werden. Ein weiteres sehr interessantes Werkzeug ist übrigens die Konchoïde („Muschellinie“), allerdings ist es komplexer und kann daher in diesem Rahmen nicht dargestellt werden.

Zugleich ist das Problem der Winkeldreiteilung ein Indiz dafür, dass „Variation“ im Sinne der eingangs aufgeführten deskriptiven Kriterien zu den *fundamentalen Ideen der Mathematik* gehört: Durch Variation der Zielsetzung entstand das Problem bereits in der Mathematik der Antike, und die in den folgenden Jahrhunderten entwickelten Lösungsversuche basierten auf der Variation gewisser geometrischer Objekte (Punkte, Strecken, Geraden, …). „Variation“ erweist sich als so fundamental für die Mathematik, dass eine Platzierung in Ebene 1 von Abb. 1 nahe liegt. Und schließlich liegt noch ein weiterer Aspekt der Variation vor: Diese drei Beispiele zeigen, dass ein konkretes Problem auf recht unterschiedliche Arten „variierend“ gelöst werden kann, und solch eine Variation ermöglicht zugleich ein vertiefendes Verständnis eines Problems und mathematischer Methoden.

Ich danke Prof. Dr. Ulrich Felgner, Univ. Tübingen, für den Gedankenaustausch und die Hinweise in einem umfassenderen größeren mathematikhistorischen Zusammenhang.

Literatur

Brieskorn, Egbert & Knörrer, Horst [1981]: Ebene algebraische Kurven. Boston / Basel / Stuttgart: Birkhäuser.

Bruner, Jerome Seymour [1970]: *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Schwann / Düsseldorf: Berlin Verlag (1. Auflage der deutschen Ausgabe).

Cantor, Moritz [1894]: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Erster Band. Leipzig: Teubner, zweite, überarbeitete und aktualisierte Auflage (1. Auflage 1880, 3. Auflage 1907).

Heath, Thomas Little [1897]: The Works of Archimedes. Edited in Modern Notation with Introductory Chapters. Cambridge: At the University Press.

Heiberg, Johan Ludvig (Hrsg.) [1881]: Archimedes – Opera Omnia. Cum Commentariis Eutocii, Vol. II. Stuttgart: Teubner. (Doppelseitig in griechisch-lateinisch.)

Heymann, Hans Werner [1996]: *Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik*. Band 13, Reihe Pädagogik. Weinheim / Basel: Beltz.

Hischer, Horst [1994]: Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (2): Lösung klassischer Probleme. Ein Beispiel für die gymnasiale Oberstufe. In: *Mathematik in der Schule*, **32**(194)5, 279–291.

— [1998]: „Fundamentale Ideen“ und „Historische Verankerung“ – dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: *mathematica didactica* **12**(1998)1, 3–21.

— [2003]: Mittelwertbildung – eine der ältesten mathematischen Ideen. In: *mathematik lehren*, 2003, Heft 119, 40 – 46.

— [2004]: Mittenbildung als fundamentale Idee. In: *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)5, 4 – 13.

— [2012]: *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur — Funktion — Zahl.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schupp, Hans [1992]: *Optimieren – Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht.* Mannheim: B. I. Wissenschaftsverlag.

— [1997]: Optimieren ist fundamental. In: *mathematik lehren*, Heft 81 (1997), 4.

— [2002]: *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Schweiger, Fritz [1982]: *„Fundamentale Ideen“ der Analysis und handlungsorientierter Unterricht*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1982. Hannover: Schroedel, 103 – 111.

— [1992]: Fundamentale Ideen – Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **13**(1992)2/3, 199 – 214.

— [2010]: *Fundamentale Ideen*. In: Schriften zur Didaktik der Mathematik und Informatik an der Universität Salzburg, Band 3. Aachen: Shaker Verlag.