

Universität des Saarlandes



Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 379

**James Gregory und „Konvergenz“ —
auf den Spuren zu seinem Algorithmus**

Horst Hischer

Saarbrücken 2016

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 379
submitted: May 19, 2016

**James Gregory und „Konvergenz“ —
auf den Spuren zu seinem Algorithmus**

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
P.O. Box 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: <http://www.math.uni-sb.de/>

James Gregory und „Konvergenz“ — auf den Spuren zu seinem Algorithmus

Den für die Analysis wesentlichen Terminus „Konvergenz“ prägte nach bisheriger Kenntnis der schottische Mathematiker und Astronom James Gregory (1638 – 1675) in seinem erstmals 1667 und dann in erweiterter Fassung 1668 erschienenen Buch „*Vera circuli et hyperbolae quadratura*“, worin er sich mit *Quadraturverfahren*, also mit *Flächeninhaltsberechnungen* befasst.

1668 erhielt Gregory die erste Professur für Mathematik in St. Andrews. Und Herbert W. Turnbull, späterer Nachfolger auf Gregorys Lehrstuhl, schreibt im von ihm zum Anlass von Gregorys 300. Geburtstag herausgegebenen Jubiläumsband (vgl. [Turnbull 1939, 54]):



Abb. 1: James Gregory

Gregory was the first mathematician to use the term convergence and apply it to series.

Doch schon fast fünf Jahrzehnte zuvor schreibt der Mathematikhistoriker Moritz Cantor am Ende des Kapitels über „Trigonometrie und Cyclometrie“ (vgl. [Cantor 1892, 655 f.] und [Cantor 1900, 717 f.]):

Von ganz anderer Seite fasste [...] James Gregory [...] die Aufgabe der Quadratur in seiner [...] *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Gregory zeigt in einer für Kreis, Ellipse und Hyperbel gemeinschaftlichen Beweisführung, dass, sofern Vielecke, deren Seitenzahl fortwährend zunimmt, der Curve einbeschrieben und umschrieben werden, die Vielecke höherer Seitenzahl einen immer weniger von einander verschiedenen Flächeninhalt besitzen. [...] Es bildet sich, wie Gregory schon in seiner Vorrede sagt, eine *Series polygonorum convergens*, *cujus terminatio est circulus*, und dieses Wort der *Convergens* kehrt im Verlauf der Schrift immer und immer wieder und ist von da an der Wissenschaft erhalten geblieben. Der Kreis ist also die Grenze, welcher beide Vielecksreihen zustreben, und zwar unter Anwendung eines Namens unserer Neuzeit als harmonisch-geometrisches Mittel.

Auch später noch wird – wohl darauf gegründet – Gregory als Namensgeber von „Konvergenz“ genannt, so beispielsweise in [Baron 1969, 228 f.] und in [Boyer 1968, 421]. Gemäß Cantor, Baron und Boyer scheint Gregory den Kreis durch eine *Folge ein- und umbeschriebener regelmäßiger Polygone* einzuschachteln, und zwar, Cantors Beschreibung präzisierend, mittels *Eckenanzahlverdoppelung*. Aufhorchen lässt Cantors Hinweis, dass Gregory sein Verfahren „*in einer für Kreis, Ellipse und Hyperbel gemeinschaftlichen Beweisführung*“ beschreibe. Und es mag vielleicht verwundern, dass Gregory hierbei die *Flächeninhalte* der auftretenden approximierenden regulären Polygone betrachtet, während Archimedes bekanntlich so den *Kreisumfang* berechnet – beginnend mit einem einbeschriebenen regulären Sechseck, numerisch bis hin zum regulären 96-Eck, was wegen damals nicht verfügbarer heutiger numerischer Möglichkeiten höchste Bewunderung verdient.

Bezogen nur auf den Kreis stellt Gregory damit scheinbar einen Algorithmus zur *Approximation des Kreisflächeninhalts* vor. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass Gregory nicht den Kreis insgesamt approximiert, sondern zunächst nur einen *Sektor* eines Kreises – das mag vielleicht plausibel machen, dass ein solches Verfahren dann, wie behauptet, für Sektoren aller „*Mittelpunktkegelschnitte*“ möglich sei, also sowohl für einen *Ellipsensektor* als auch für einen *Hyperbelsektor*.

Gregorys Algorithmus spielt im Mathematikunterricht bezüglich des *Kreisflächeninhalts* und damit für die Kreiszahl π faktisch keine Rolle, und in der mathematikhistorischen Sekundärliteratur wird er gelegentlich – wenn überhaupt – nur marginal behandelt, wobei man sich dann dort ggf. nur auf die Darstellung der Ergebnisse beschränkt, also auf die wichtigen verschachtelten Rekursionen des Algorithmus, die allerdings durchaus mit elementargeometrischen Mitteln der „Schulmathematik“ beweisbar sind.

Daher soll hier zunächst anhand des Originaltextes von Gregory seinen Ansätzen und Beweisen nachgespürt werden, jedoch beschränkt auf den *Sektor eines Kreises*, z. T. auch andeutungsweise für einen Ellipsensektor. Es wird sich dann zeigen, dass Gregorys Algorithmus für den *Kreisflächeninhalt* auch in einen solchen zur Approximation des *Kreisumfangs* modifizierbar ist und dass beide Algorithmen eine für den Mathematikunterricht interessante und praktikable Alternative zum archimedischen Verfahren bilden.



Abb. 2: Titelblatt von[Gregory 1668]

1 Gregorys Algorithmus in der Sekundärliteratur

In der ersten Auflage von 1892 gibt Cantor im eingangs dargestellten Zitat nach „Flächeninhalt besitzen“ bei den Auslassungszeichen „[...]“ auf S. 655 folgende Erläuterung an:

Er zeigt ferner, dass, wenn A das erste Sehnenvieleck, B das erste Tangentenvieleck, C, D das zweite Sehnens- beziehungsweise Tangentenvieleck ist, alsdann $C = \frac{2AB}{A+B}$, $D = \sqrt{AB}$, d. h. ersteres das harmonische, letzteres das geometrische Mittel zwischen den den Ausgangspunkt bildenden Vielecken sein muss. Ebenso entstehen natürlich weitere Sehnens- und Tangentenvielecke E, F aus C, D u. s. w.

Nach diesem Einschub fährt Cantor zunächst wie im Eingangszitat angegeben fort.

Obige Erläuterung macht bereits die Namensgebung „*harmonisch-geometrisches Mittel*“ für dieses Verfahren plausibel, jedoch bleibt noch unklar, wie Gregory auf diese beiden „Mittelwertbeziehungen“ gestoßen ist und wie er sie bewiesen hat. In der zweiten Auflage seines Werks von 1900 fügt Cantor selbstkritisch (?) eine Abbildung (nachfolgend als „Abb. 3“ bezeichnet) und eine formale Erläuterung ein, wobei er die beiden Formelzuweisungen austauscht und den Text am Ende, einen früheren Fehler behebend, korrigiert:

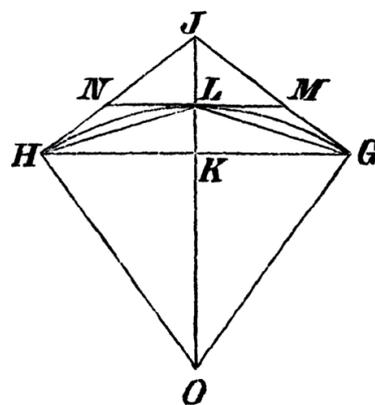


Abb. 3 (aus [Cantor 1892, 717])

Er zeigt ferner, dass, wenn A das erste Sehnenvieleck, B das erste Tangentenvieleck, C, D das zweite Sehnens- beziehungsweise Tangentenvieleck ist, alsdann $C = \sqrt{AB}$, $D = \frac{2BC}{B+C}$ sein muss, d. h. ersteres das geometrische Mittel zwischen den den Ausgangspunkt bildenden Vielecken, letzteres das harmonische Mittel zwischen dem ersten Tangentenvieleck und dem zweiten Sehnenvieleck.

Cantor schreibt danach auf S. 717 f. mit Bezug auf Abb. 3:

Sei [...] der Halbmesser OG des Kreises als Einheit gedacht und $\sphericalangle HOG = 2\varphi$ der Centriwinkel, welchen die Seite GH des regelmässigen Sehnenvierecks von n Seiten bespannt. Man sieht sofort, dass alsdann

$$\begin{aligned} A &= n \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ B &= n \operatorname{tng} \varphi \\ C &= n \sin \varphi \\ D &= 2n \operatorname{tng} \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

ist, und diese Werthe entsprechen den obigen Zusammenhängen. Ebenso entstehen natürlich weitere Sehnens- und Tangentenvielecke E, F aus C, D u. s. w.

Cantors Verwendung trigonometrischer Funktionen tritt bei Gregory in diesem Kontext jedoch nicht explizit auf. Mit den großen lateinischen Buchstaben meint Cantor hier situativ Flächeninhalte bzw. Streckenlängen. Baron geht auf S. 229 f. ebenfalls kurz auf Gregorys Verfahren ein, dann eine ähnliche Abbildung wie Cantor benutzend, wenn auch schon mit Blick auf ein Ellipsen-, „Segment“ affin verzerrt:

Gregory's main purpose, however, in the *Vera quadratura* was to make use of the idea of a convergent double sequence to define and determine as accurately as possible such magnitudes as were not expressible in terms of a rational relation. Through the skilful manipulation of inscribed and circumscribed polygons he was able to generate such a double sequence for the sector of an ellipse, circle, or hyperbola, in the general form

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{2a_n b_{n-1}}{a_n + b_{n-1}},$$

where a_n, b_n , are the areas of the $(n + 1)$ th inscribed and circumscribed figures respectively.

Man beachte in der Rekursion für b_n den Bezug auf a_n statt auf a_{n-1} in Übereinstimmung mit der späteren, entsprechend korrigierten Darstellung bei Cantor (s. o.)!

Baron erläutert obige Terme mit Bezug auf Abb. 3 wie folgt (ihre Punktbezeichnungen sind andere als bei Cantor, aber hier seien zwecks Wahrung einer gemeinsamen Darstellung Cantors Bezeichnungen verwendet):

a_0 = Flächeninhalt des Dreiecks OGH ;

b_0 = Flächeninhalt des Vierecks $OGJH$;

$a_1 = \sqrt{a_0 b_0}$ = Flächeninhalt des Vierecks $OGLH$;

$b_1 = \frac{2a_1 b_0}{a_1 + b_0}$ = Flächeninhalt des Fünfecks $OGMNH$.

Für diese Rekursionen teilt Baron keine Beweise mit, und sie verweist in ihrem Übersichtswerk nur auf das Originalwerk von Gregory.

Es wird auffallen, dass sowohl bei Cantor als auch bei Baron jeweils *Flächeninhalte multipliziert* werden, was jedoch inhaltlich keinen Sinn ergibt, weil diesem Produkt im Anschauungsraum keine physikalische Größe entspricht. Stattdessen benutzte Gregory wie die Pythagoreer *Größenverhältnisse*, also *Proportionen*.

2 Gregorys Vorgehensweise und seine Beweismethode

Gregory gibt für diesen ersten Teil seines Buches noch keinerlei Abbildungen an, und er beschreibt hier sowohl die Voraussetzungen als auch die Beweise nur verbal, wengleich durchaus plastisch (vgl. das Faksimile in Abb. 4), und er ermöglicht so eine recht gute Vorstellung der zu betrachtenden Situation:

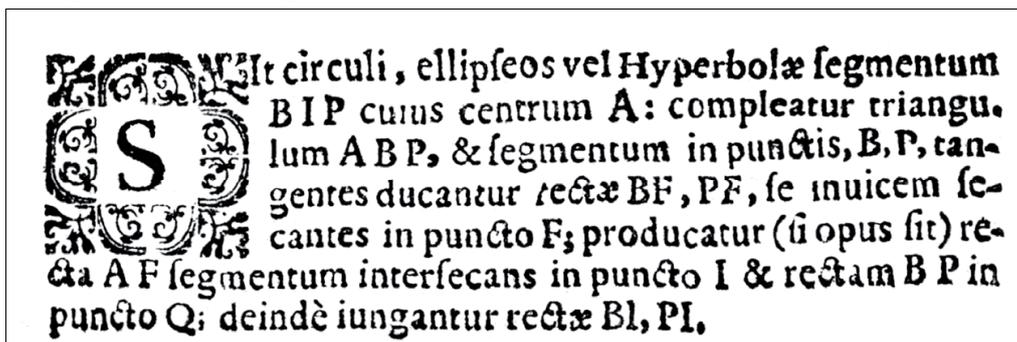


Abb. 4: Voraussetzungen in [Gregory 1668, 11]

Es ist also ein „Segment“ BIP eines Kreises (gemeint ist hier *zunächst* nur ein Kreisbogen), einer Ellipse oder einer Hyperbel mit dem Mittelpunkt A gegeben. (Der *Mittelpunkt* eines solchen Kegelschnitts ist stets der Schnittpunkt von zwei orthogonalen Symmetrieachsen). Dieser Bogen werde nun um das Dreieck ABP zu einem „Kreissegment“ ergänzt („compleatur“), wobei sich die in den Punkten B bzw. P an diesen Bogen gelegten Tangenten BF bzw. PF in F schneiden. Die Strecke AF schneidet BIP in I , und das liefert die neuen Strecken BI und PI .

Mit Bezug auf diese Beschreibung Gregorys sei links in Abb. 5 eine Situation für ein *Kreissegment* (ähnlich wie in Abb. 3) gezeigt, rechts verallgemeinert für ein *Ellipsensegment* als einem affinen Bild dieses Kreissegments (rechter Bildteil ähnlich dargestellt in [Baron 1969, 230] und in [Dehn & Hellinger 1939, 469]). Der Fall des von Gregory auch genannten Hyperbelsegments wird hier nicht betrachtet.

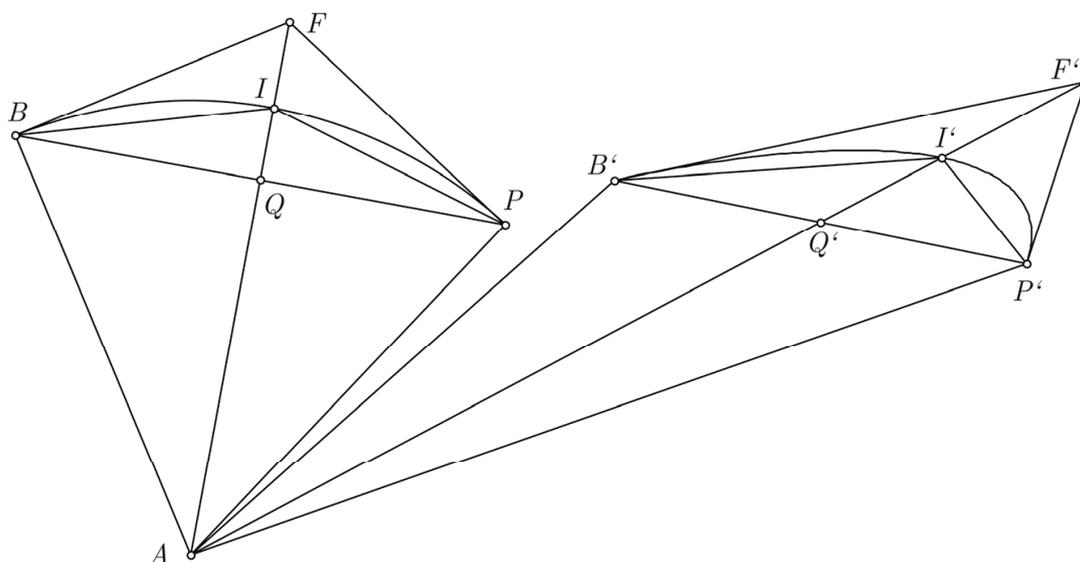


Abb. 5: Gregors Voraussetzung für ein Kreissegment bzw. für ein Ellipsensegment

Das Faksimile in Abb. 6 zeigt Gregors erstes „Theorema“ als seine „Prop. I“, hier „Satz 1“ genannt, der in sinngemäßer Übersetzung lautet:

PROP. I. THEOREMA:
Dico trapezium BAPI esse medium proportionale inter trapezium BAPF, & triangulum BAP.

Abb. 6: Satz 1 von Gregory (aus [Gregory 1668, 11])

Satz 1:

Ich behaupte, dass das Trapez BAPI die mittlere Proportionale aus dem Trapez BAPF und dem Dreieck BAP ist.

Wir verwenden hier Gregors Symbolik, bei der die „Variablen“ *Punkte*, *Längen* oder *Flächeninhalte* bedeuten, so dass also $BAPI$ der *Flächeninhalt* eines „Trapezes“ ist, womit Gregory aber wie schon Euklid ein *Viereck* meint, das weder Quadrat noch Rechteck noch Parallelogramm ist (vgl. [Euklid 1962, 2]): Im Folgenden werden wir „Trapez“ wie Gregory stets in dieser Bedeutung verwenden, um den Bezug zu seinem Text zu wahren. „Mittlere Proportionale“ ist die seit der Antike übliche Bezeichnung für das, was wir heute „**geometrisches Mittel**“ nennen.

Gregorys Satz 1 stimmt erkennbar mit der in Abschnitt 1 bei Cantor und Baron dargestellten entsprechenden Iterationsformel überein, die das geometrische Mittel enthält.

Quoniam recta AQ ducitur per F concursum duarum rectarum FB, FP , segmentum in punctis B, P , tangentium, igitur recta AQ rectam BP contactuum puncta iungentem bifariam secabit in puncto Q ; & proinde triangulum ABQ est æquale triangulo AQP , & triangulum FBQ triangulo FQP ; & igitur triangulum ABF æquale est triangulo APF ; est ergo triangulum ABF dimidium trapezii $ABFP$: eodem modo probatur triangulum ABI esse dimidium trapezii $ABIP$; & triangulum ABQ est dimidium trianguli ABP cumque triangula ABF, ABI, ABQ , eandem habeant altitudinem, inter se sunt ut bases, sed eorum bases nempe AF, AI, AQ , sunt continuè proportionales; & igitur ipsa quoque triangula sunt continuè proportionalia; & proinde eorum dupla nimirum trapezia $ABFP, ABIP$, & triangulum ABP sunt continuè proportionalia in ratione AF ad AI , quod demonstrare oportuit.

Abb. 7: Gregorys Beweis von Satz 1 (aus [Gregory 1668, 11])

Abb. 7 zeigt Gregorys verbalen *Beweis* als Faksimile. Nachfolgend sei dieser Beweis in Bezug auf die wesentlichen Gedankengänge interpretiert, ergänzt und vor allem *rekonstruiert*. Wir führen den Beweis basierend auf den Ausführungen von Gregory mit Bezug auf Abb. 4, und zwar zunächst nur für den Spezialfall eines *Kreissegments*, wobei dieser Beweis dann aber daran anknüpfend auf ein *Ellipsensegment* verallgemeinerbar ist.

Dabei werden wir *in den Beweisen* Gregorys Bezeichnungen der Vielecke bezüglich der Punktreihenfolge, so wie heute üblich, stets *mathematisch positiv* orientiert wählen. Im Unterschied zu Gregory bezeichnen wir ferner z. B. die Länge der (von ihm so bezeichneten Strecke) AF genauer mit $|AF|$ usw., entsprechend den Flächeninhalt des Trapezes $BAPF$ mit $|BAPF|$ usw., sodass wir Satz 1 wie folgt formal notieren können:

$$|BAPI| = \sqrt{|BAP| \cdot |BAPF|} \quad (1)$$

Damit kommen wir zur

Rekonstruktion von Gregorys Beweis von Satz 1 für ein Kreissegment:

- Das symmetrische Trapez $APFB$ (auf das Gregory nicht hinweist) enthält kongruente Dreieckspaare wie z. B. AQB und APQ bzw. FBQ und FQP bzw. AFB und APF . Auch AIB und API sind kongruent, was Gregory nicht erwähnt, aber dann benutzt.
- Das Dreieck AFB ist damit „halb so groß“ wie das Trapez $APFB$ (gemeint sind jetzt also jeweils und auch nachfolgend die Flächeninhalte der Figuren.)

- Entsprechend ist das Dreieck AIB halb so groß wie das Trapez $APIB$.
- Und das Dreieck AQB ist halb so groß wie das Dreieck APB .
- Die Dreiecke AFB , AIB und AQB haben dieselbe Höhe, sie haben die Grundseiten AF , AI und AQ , und ihre Flächeninhalte bzw. Längen stehen deshalb in fortgesetzter Progression, was also bedeutet:

$$|AFB| : |AIB| : |AQB| = |AF| : |AI| : |AQ|.$$

- Und so stehen auch die Flächeninhalte der Trapeze $APFB$ und $APIB$ und des Dreiecks APB in fortgesetzter Proportion zu $|AF|$, $|AI|$ und $|AQ|$ (Gregory erwähnt $|AQ|$ nicht expressis verbis), also:

$$|APFB| : |APIB| : |APB| = |AF| : |AI| : |AQ|.$$

Damit endet die explizite Beweisführung von Gregory, aber sie ist für uns so noch nicht zu Ende, denn es fehlt die im Satz 1 angekündigte Beziehung für die „mittlere Proportionale“. Das ist wohl so zu deuten, dass sie für Gregory aus dem Bisherigen „offen sichtlich“ erkennbar ist. Versuchen wir also, die für uns noch bestehende Lücke argumentativ zu schließen:

Wegen $|AB| = |AI|$ (Kreisradius) und dem auch Gregory sicherlich bekannten Kathetensatz von Euklid ist $|AQ| \cdot |AF| = |AI|^2$, was damals als Proportion $|AQ| : |AI| = |AI| : |AF|$ zu schreiben wäre.

Nun bedeutet $|APFB| : |APIB| : |APB| = |AF| : |AI| : |AQ|$ unter anderem sowohl $|APFB| : |APIB| = |AF| : |AI|$ als auch $|APIB| : |APB| = |AI| : |AQ|$, also ergibt sich mit $|AQ| : |AI| = |AI| : |AF|$ daraus $|APIB| : |APB| = |AI| : |AQ| = |AF| : |AI| = |APFB| : |APIB|$, und damit ist $|APIB| : |APB| = |APFB| : |APIB|$, was sich deutlicher mit $|APIB|$ „in der Mitte“ als $|APFB| : |APIB| = |APIB| : |APB|$ schreiben lässt. ♦

Gregory geht beim Beweis an dieser Stelle nicht explizit auf Ellipsen und Hyperbeln ein, obwohl er diese in den Voraussetzungen (Abb. 3) ausdrücklich nennt. Wir gelangen aber immerhin sofort zu einer

Beweisverallgemeinerung für einen Ellipsenabschnitt:

- Im Trapez $APFB$ sind die beiden relevanten Dreieckshöhen gleichlang: $|BQ| = |QP|$. Bei affinen Abbildungen sind auch die Bilder dieser gleichlangen, parallelen Höhen gleichlang, nämlich die Lote von B' und P' auf AF' .
- Damit sind die Bilder gleich großer Polygonflächen (Dreiecke, Trapeze) gleich groß, und alle Proportionen gelten entsprechend auch weiterhin. ♦

Anmerkungen:

1. Betrachtet man nur den Fall eines Kreises und ist man mit dem Kathetensatz der euklidischen Geometrie vertraut, so fällt Gregorys Satz bezüglich der „mittleren Proportionalen“ ins Auge. Es kann vermutet werden, dass es ihm so gegangen ist, waren ihm doch wohl elementargeometrische Grundlagen recht vertraut, wie

$$(|APFB| + |APIB|) : (2 \cdot |APIB|) = |APFB| : |APLDB|$$

Da $|APLDB|$ der gesuchte Flächeninhalt des „verfeinerten“ Fünfecks ist, würden wir in heutiger Bruchdarstellung Satz 2 auch wie folgt notieren können:

$$|APLDB| = \frac{2 \cdot |APIB| \cdot |APFB|}{|APIB| + |APFB|} \quad (2)$$

Damit ist also $|APLDB|$ das **harmonische Mittel** von $|APIB|$ und $|APFB|$.

Gregory führt den Beweis wieder verbal, wie es das Faksimile in Abb. 10 zeigt: Sein Beweis beruht auf der Betrachtung von Flächeninhalten von Polygonpaaren von Dreiecken, Trapezen und Fünfecken nebst zugehörigen Proportionen, ferner auf der Berücksichtigung von Kongruenz- bzw. Symmetrieeigenschaften und der Höhengleichheit entsprechender Figuren.

Quoniam recta AF, ducta per contactum rectæ DL cum segmento, ducitur etiam per concursum duarum re-
ctarum FB, FP, rectam DL terminantium & seg-
mentum in duobus punctis tangentium; igitur recta DL bi-
fariam secatur in puncto I; & proindè triangulum FDI æqua-
le est triangulo FIL, at triangulum ABF æquale est trian-
gulo APF; & igitur trapezium ABDI æquale est trapezio
APLI; trapezium ergò APLI dimidium est polygони AB
DLP, ducatur recta AL: manifestum est ex præcedentis æ-
monstratione triangulum AIL esse æquale triangulo ALP;
sed vt triangulum ALF ad triangulum ALI ita FA ad AI,
& vt FA ad AI ita trapezium ABFP ad trapezium ABIP; &
igitur vt trapezium ABFP ad trapezium ABIP; ita trian-
gulum ALF ad triangulum ALI; & componendo, vt trape-
zia ABFP, ABIP simul, ad trapezium ABIP, ita triangu-
lum AIL & triangulum AIL simul, hoc est triangulum AFP,
ad triangulum AIL: & consequentes duplicando, vt trape-
zia ABFP, ABIP simul, ad duplum trapezii ABIP, ita
triangulum AFP, ad trapezium AILP: at triangulum AFP
est dimidium trapezii ABFP, & trapezium AILP est dimi-
dium polygони ABDLP, & igitur vt trapezia ABFP, ABIP
simul, ad duplum trapezii ABIP, ita trapezium ABFP ad
polygonum ABDLP, quod demonstrare oportuit.

Abb. 10: Gregorys Beweis von Satz 2 (aus [Gregory 1668, 12])

Seine Argumentation werden wir schrittweise nachvollziehen, indem wir z. T. feh-
lende, aber gleichwohl offensichtlich gültige Sachverhalte zur Vervollständigung
der Argumentation rekonstruierend ergänzen.

In den ersten fünf Zeilen des Beweises in Abb. 10 beschreibt Gregory nur auftre-
tende Strecken, um die Situation in Ergänzung zu den in Abb. 4 vorliegenden Vor-
aussetzungen zu klären.

Wir kommen damit (nunmehr stets mathematisch positiv orientiert notiert) zur

Rekonstruktion von Gregorys Beweis von Satz 2 (vgl. Abb. 8):

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad |FDI| &= |FIL| & \text{(ii)} \quad |AFB| &= |APF| & \text{(iii)} \quad |AIDB| &= |APLI| \\
 \text{(iv)} \quad |APLI| &= \frac{1}{2}|APLDB| & \text{(v)} \quad |ALI| &= |APL| & \text{(vi)} \quad |ALF| : |ALI| &= |AF| : |AI| \\
 \text{(vii)} \quad |AF| : |AI| &= |APFB| : |APIB| & \text{(viii)} \quad |APFB| : |APIB| &= |ALF| : |ALI|
 \end{aligned}$$

Die Eigenschaften (i) bis (v) sind unmittelbar aus Abb. 7 ablesbar: (vi) folgt aus der Höhengleichheit der Dreiecke, analog (vii) und (viii), wobei wir (viii) auch formal aus (vi) und (vii) schließen könnten.

Nun mag Gregorys nächster Schritt Rätsel aufgeben, denn er betrachtet die Proportion $(|APFB| + |APIB|) : |APIB|$ und kommt aufgrund der Mitteilung „it̄a triangulum AIL & triangulum ALI simul“ zur Folgerung, dass dieses Verhältnis mit $|APF| : |ALI|$ übereinstimme, dass also $(|APFB| + |APIB|) : |APIB| = |APF| : |ALI|$ gelte. Wir können jedoch mit unseren heutigen Methoden die Argumentation (zumindest formal!) vervollständigen:

$$\begin{aligned}
 \text{(ix)} \quad (|APFB| + |APIB|) : |APIB| &= |APFB| : |APIB| + |APIB| : |APIB| \\
 &\stackrel{\text{(viii)}}{=} |ALF| : |ALI| + |ALI| : |ALI| \\
 &= (|ALF| + |ALI|) : |ALI| \stackrel{\text{(v)}}{=} (|ALF| + |APL|) : |ALI| = |APF| : |ALI|
 \end{aligned}$$

Hier haben *wir* in der ersten und in der dritten Umformung jeweils das Distributivgesetz benutzt. Problematisch ist dieser Schritt vor allem inhaltlich, weil erst der „Summe zweier Verhältnisse“ innerhalb der „Proportionenlehre“ ein Sinn gegeben werden müsste, was zu der (hier nur rhetorisch gestellten) Frage führt, ob dieser „Lückenschluss“ historisch korrekt haltbar ist. Ob Gregory hier möglicherweise das Distributivgesetz intuitiv oder wie selbstverständlich aus der Anschauung heraus benutzt hat, bleibe hier offen. (Es möge einer anderen historischen Untersuchung vorbehalten bleiben zu klären, ob sich eine entsprechende Begründung in seinem Werk findet oder versteckt. Immerhin können wir im vorliegenden Rahmen aus heutiger Sicht mit diesem Weg über das Distributivgesetz durchaus „leben“.)

In (ix) wurde hier ferner benutzt, dass man bei $|APIB| : |APIB|$ „Zähler“ und „Nenner“ erweiternd durch irgendwelche jeweils gleichen Maße ersetzen kann, hier also zielgerichtet durch $|ALI|$ – dieses macht Gregory unausgesprochen und raffiniert zugleich! Somit folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{(x)} \quad (|APFB| + |APIB|) : (2 \cdot |APIB|) &\stackrel{\text{(ix)}}{=} |APF| : (2 \cdot |ALI|) = (2 \cdot |APF|) : (4 \cdot |ALI|) \\
 &\stackrel{\text{(ii), (v)}}{=} (|APF| + |AFB|) : (2 \cdot (|APL| + |ALI|)) \stackrel{\text{(v)}}{=} |APFB| : |ABIP|
 \end{aligned}$$

Auch dieser Beweis ist mit derselben Argumentation wie bei Satz 1 auf Ellipsen übertragbar!

Bereits Satz 1 und Satz 2 scheinen einen Algorithmus zur iterativen Einschachtelung des Flächeninhalts eines Kreises zu begründen und damit zur Approximation von π , wie es Cantor und Baron skizzieren: Der Kreis erscheint dann als *harmonisch-geometrisches Mittel* von zwei Folgen. Dennoch hat Gregory in seinem vier Seiten umfassenden Kapitel (zunächst überraschenderweise?) noch drei weitere

Sätze formuliert und bewiesen (vgl. [Gregory 1668, 13 f.]), deren Sinn wir nachspüren wollen. Dazu betrachten wir nachfolgend nur noch die Übersetzungen der hier fortan nicht mehr dargestellten Faksimiles, wobei Gregory auch wieder die „Flächeninhalte“ meint und wir wieder alles „mathematisch positiv orientiert“ notieren:

Satz 3:

Ich behaupte, dass die Summe aus dem Dreieck BAP und dem Trapez APIB sich zum Trapez APIB genauso verhält wie das Doppelte des Trapezes APIB zum Polygon APLDB.

Formal bedeutet das also $(|BAP| + |APIB|) : |APIB| = (2 \cdot |APIB|) : |APLDB|$ oder anders

$$|APLDB| = \frac{2 \cdot |APIB|^2}{|BAP| + |APIB|}. \quad (3)$$

Auch dieser Satz gibt also – in anderer Weise – an, wie der Flächeninhalt des Segments *APLDB* eines *umbeschriebenen* $2n$ -Ecks berechnet werden kann: nämlich aus den Flächeninhalten des Segments des *einbeschriebenen* regulären n -Ecks und des Segments des *einbeschriebenen* $2n$ -Ecks!

Übertragen auf die bei Baron angegebenen Iterationsformeln (s. o.) würde dort also nur die Iterationsformel für b_n sinngemäß wie folgt zu verändern sein, wobei wir nun statt a bzw. b suggestiv e für „einbeschrieben“ bzw. u für „umbeschrieben“ notieren:

Mit Satz 1 und Satz 3 würde also gelten: Sind e_n, u_n gegeben, so ist

$$e_{2n} = \sqrt{e_n u_n} \quad (4)$$

und

$$u_{2n} = \frac{2e_{2n}^2}{e_n + e_{2n}}. \quad (5)$$

Im Vergleich dazu gilt gemäß (2) und auch mit Baron anstelle von (5) sinngemäß

$$u_{2n} = \frac{2e_{2n}u_n}{e_{2n} + u_n}. \quad (6)$$

Gregory beweist nun diesen Satz 3 und auch die nächsten beiden auf ähnliche Weise verbal wie die beiden vorherigen. Stattdessen haben *wir* allerdings verkürzend die Möglichkeit, Satz 3 zu beweisen, indem wir die Gültigkeit dieser neuen Formel (3) bzw. (5) auf Satz 1 zurückführen:

Beweis von Satz 3:

Zu beweisen ist $\frac{2e_{2n}u_n}{e_{2n} + u_n} = \frac{2e_{2n}^2}{e_n + e_{2n}}$. Äquivalenzumformung liefert

$$(2e_{2n}u_n)(e_n + e_{2n}) = 2e_{2n}^2(e_{2n} + u_n) \Leftrightarrow 2e_{2n}e_nu_n + 2e_{2n}^2u_n = 2e_{2n}^3 + 2e_{2n}^2u_n \\ \Leftrightarrow 2e_{2n}e_nu_n = 2e_{2n}^3 \Leftrightarrow e_nu_n = e_{2n}^2.$$

Die letzte Beziehung ist wahr, denn sie besagt gerade, dass e_{2n} das geometrische Mittel von e_n und u_n ist, was wegen Satz 1 gilt. ♦

Der mit Satz 1 und Satz 2 aus (4) und (6) gegebene Formelsatz kann also gleichwertig ausgetauscht werden durch den mit Satz 1 und Satz 3 gegebenen Formelsatz in (4) und (5), so dass Satz 3 also anscheinend nichts wesentlich Neues bringt. Interessant ist immerhin, dass u_{2n} gemäß Satz 3 ohne expliziten Rückgriff auf u_n berechnet wird, und zwar nur aus e_n und e_{2n} , also aus den Flächeninhalten zwei einbeschriebener Figuren, während u_{2n} gemäß Satz 1 aus u_n und dem bereits berechneten Wert für e_{2n} berechnet wird. Anders: Gemäß (5), also Satz 3, ist u_{2n} – im Gegensatz zu Satz 2 – aus nur zwei Werten zu berechnen. Beiden Wegen ist aber gemeinsam, dass u_{2n} erst dann berechnet werden kann, wenn e_{2n} schon bekannt ist.

Als *Zwischenergebnis* sei daher festgehalten:

$$\text{Sind } e_n, u_n \text{ gegeben, so ist } e_{2n} = \sqrt{e_n u_n} \text{ und } u_{2n} = \frac{2e_{2n}u_n}{e_{2n} + u_n} = \frac{2e_{2n}^2}{e_n + e_{2n}}. \quad (7)$$

Satz 4:

Ich behaupte, dass das Polygon APOIEB die mittlere Proportionale zwischen dem Polygon APLDB und dem Trapez APIB ist.

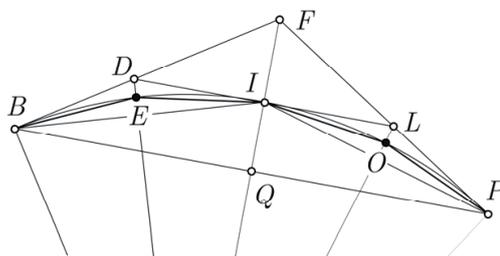


Abb. 11: zwei neue Eckpunkte in Satz 4

Wir betrachten nun Satz 4 von Gregory, in dem gemäß Abb. 11 zwei neue Punkte E und O auftreten, d. h.: Es kommt also nun noch ein Segment eines einbeschriebenen $4n$ -Ecks hinzu: Formal bedeutet das

$$|APLDB| : |APOIEB| = |APOIEB| : |APIB|. \quad (8)$$

Diese Behauptung folgt wegen $|APIB| = 2 \cdot |AIB|$, $|APLDB| = 2 \cdot |AIDB|$ und $|APOIEB| = 2 \cdot |AIEB|$ aus Satz 1. Wir können (8) aber auch mit der schon in (4) bis (7) verwendeten Symbolik notieren:

$$u_{2n} : e_{4n} = e_{4n} : e_{2n} \text{ bzw. } e_{4n} = \sqrt{e_{2n} \cdot u_{2n}} \quad (9)$$

Das bedeutet: Auch im nächsten Schritt ist der Flächeninhalt des verfeinerten Segments des einbeschriebenen $4n$ -Ecks das geometrische Mittel der Flächeninhalte der Segmente des ein- und umbeschriebenen $2n$ -Ecks! Das legt die *Vermutung* nahe, dass nun analog gemäß (6) analog für den Flächeninhalt des Segments des umbeschriebenen $4n$ -Ecks

$$u_{4n} = \frac{2e_{4n}u_{2n}}{e_{4n} + u_{2n}} \quad (10)$$

gilt, also u_{4n} als harmonisches Mittel. Gregory formuliert nun genau das als

Satz 5:

Ich behaupte, dass die Summe des Trapezes APIB und des Polygons APOIEB sich zum Polygon APOIEB genauso verhält wie das Doppelte des Polygons APOIEB zum Polygon APNKGCB.

Hier erscheinen vier neue Punkte C, G, K, N , und der Satz ähnelt ein wenig Satz 2, der eine Aussage über ein harmonisches Mittel liefert. Die Lage der vier neuen Punkte beschreibt Gregory wieder verbal, und wir können sie wie in Abb. 12 darauf bezogen verorten. Es kommt jetzt also das Segment eines umschriebenen $4n$ -Ecks hinzu.

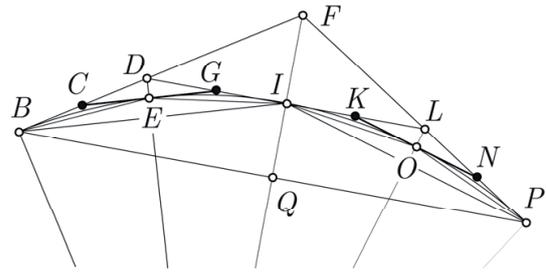


Abb. 12: vier neue Eckpunkte in Satz 5

Zunächst übersetzen wir Satz 5 wieder in eine Proportionsschreibweise:

$$(|APIB| + |APOIEB|) : |APOIEB| = (2 \cdot |APOIEB|) : |APNKGCB|.$$

Das ist aber formal dieselbe Proportion wie in Satz 3 (nicht jedoch wie in Satz 2), und sie lässt sich wie folgt durch

$$|APNKGCB| = \frac{2 \cdot |APOIEB|^2}{|APIB| + |APOIEB|}$$

auflösen oder in aktueller Symbolik als

$$u_{4n} = \frac{2e_{4n}^2}{e_{2n} + e_{4n}}. \tag{11}$$

Das zeigt nun, wie der Flächeninhalt des Segments des umschriebenen $4n$ -Ecks aus den Segmenten des einbeschriebenen $2n$ -Ecks und des umschriebenen $2n$ -Ecks berechnet wird: nämlich auf genau dieselbe Weise wie in Satz 3 für den Flächeninhalt des Segments des umschriebenen $2n$ -Ecks, so dass auch dieser Satz keines neuen Beweises bedarf, und wegen der Äquivalenz von (5) und (6) ist zugleich auch (10) bewiesen.

Auf diese fünf Sätze lässt Gregory einen neuen Abschnitt „Scholium“ (eine „Erläuterung“) folgen, der gemäß dem Faksimile in Abb. 13 mit dem Satz 6 (hier ebenso positiv orientiert notiert) beginnt:

PROP. VI. THEOREMATA.
*Dico differentiam inter triangulum ABP & trapezium APFB
 maiorem esse duplo differentie inter trapezium
 ABIP & polygonum ABDLP.*

Abb. 13 Satz 6 von Gregory (aus [Gregory 1668, 16])

Satz 6:

Ich behaupte, dass die Differenz aus dem Dreieck APB und dem Trapez APFB größer ist als die doppelte Differenz aus dem Trapez APFB und dem Polygon APLDB.

Wenn wir $|APB| < |APFB|$ berücksichtigen, so gilt damit

$$|APFB| - |APB| > 2 \cdot (|APLDB| - |APFB|).$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen e_n, u_n usw. lässt sich das wie folgt umstellen:

$$u_{2n} - e_{2n} < \frac{1}{2}(u_n - e_n). \tag{12}$$

Das bedeutet in heutiger Sprechweise, dass die Intervallfolge $\langle [e_n, u_n] \rangle$ eine Nullfolge ist und dass somit $\lim \langle e_n \rangle = \lim \langle u_n \rangle$ gilt, oder anders:

Die Folge der Flächeninhalte der dem Kreissegment einbeschriebenen Polygonsegmente konvergiert gegen die Folge der Flächeninhalte der dem Kreissegment umbeschriebenen Polygonsegmente,

und das begründet Gregorys Sichtweise der

« *Series polygonorum convergens, cujus terminatio est circulus* ».

Allerdings setzt diese Folgerung voraus, dass die hier naiv verwendeten Kennzeichnungen „einbeschrieben“ und „umbeschrieben“ stets insofern zutreffend sind, als dass also das Kreissegment tatsächlich von beiden Polygonsegmenten stets „eingeschachtelt“ wird. Von dieser elementargeometrisch evidenten „Tatsache“ sei hier Gebrauch gemacht.

Gregory beweist diesen wesentlichen Satz – als wichtiges *Konvergenzkriterium für Intervallschachtelungen* – wieder verbal (siehe [Gregory 1668, 16 f.]). Stattdessen sei hier ein Beweis kurz mit heutigen Mitteln geführt, indem die *babylonische Ungleichungskette* zur Quadratwurzelapproximation herangezogen wird, welche besagt, dass

$$0 < x < y \Rightarrow x < H(x, y) < G(x, y) < A(x, y) < y \quad (13)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $H(x, y)$ das harmonische Mittel, $G(x, y)$ das geometrische Mittel und $A(x, y)$ das arithmetische Mittel von x, y ist (vgl. z. B. [Hischer 2004, 46]) – zum harmonischen Mittel siehe auch (2).

Damit kommen wir zum

Beweis von Satz 6:

Aufgrund von Gregorys Konstruktion der beiden Polygonfolgen gilt für alle n sowohl

$$e_n < e_{2n} < u_{2n} < u_n \quad \text{als auch} \quad u_{2n} = \frac{2e_{2n}u_n}{e_{2n} + u_n} = H(e_{2n}, u_n),$$

und daraus folgt

$$0 < u_{2n} - e_{2n} = H(e_{2n}, u_n) - e_{2n} < A(e_{2n}, u_n) - e_{2n} = \frac{u_n - e_{2n}}{2} < \frac{u_n - e_n}{2} \quad \blacklozenge$$

3 Modifikation von Gregorys Algorithmus

Wie bereits eingangs angedeutet, kann Gregorys Algorithmus, mit dem der *Kreisflächeninhalt* durch eine Intervallschachtelung approximierbar ist und der damit als Grenzwert zweier verschachtelter Folgen berechenbar wird – nämlich als *harmonisch-geometrisches Mittel* –, in einen solchen für die *Kreisumfangsberechnung* modifiziert werden, und zwar ähnlich dem schon von Archimedes verwendeten Prinzip. Das sei kurz dargestellt (vgl. z. B. [Hischer 2004, 49 f.]).

Wir benutzen wieder zwei iterativ durch Eckenanzahlverdoppelung definierte Folgen regelmäßiger n -Ecke und starten z. B. mit $n = 3$ (regelmäßiges Dreieck) oder mit $n = 4$ (Quadrat) oder mit $n = 6$ (regelmäßiges Sechseck) – der Iterationsschritt geht also wieder von n nach $2n$.

Die *Kantenlänge* des einbeschriebenen bzw. des umbeschriebenen n -Ecks sei mit s_n (für „Seite“) bzw. mit t_n (für „Tangente“) bezeichnet. Für den *Umfang* S_n des einbeschriebenen bzw. T_n des umbeschriebenen n -Ecks gilt dann $S_n = n \cdot s_n$ bzw. $T_n = n \cdot t_n$. Wegen $s_n < t_n$ für alle n ist damit auch stets $S_n < T_n$.

Abb. 14 visualisiert dann mit diesen Bezeichnungen den ersten Iterationsschritt bezogen auf den Startwert $n = 4$. Aufgrund von *Ähnlichkeitsbeziehungen* zwischen je zwei Dreiecken gilt erkennbar

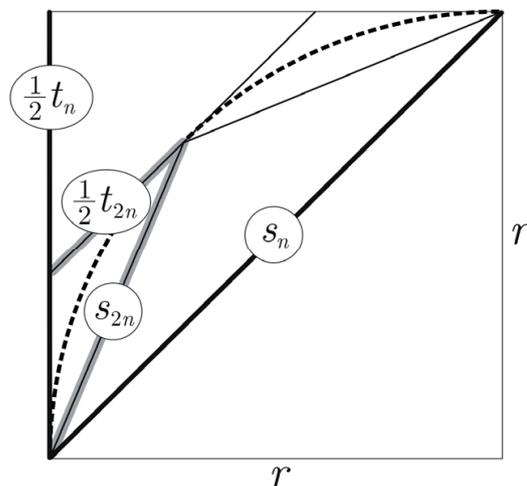


Abb. 14: Iterationsschritt – Prinzip

$$\frac{s_n}{\frac{1}{2} t_n} = \frac{t_{2n}}{\frac{1}{2} t_n - \frac{1}{2} t_{2n}} \quad \text{und} \quad \frac{s_n}{s_{2n}} = \frac{s_{2n}}{\frac{1}{2} t_{2n}},$$

und hieraus folgt

$$s_{2n}^2 = \frac{1}{2} s_n \cdot t_{2n} \quad \text{und} \quad t_{2n} = \frac{s_n \cdot t_n}{s_n + t_n}. \tag{14}$$

Mit $S_n = n \cdot s_n$ bzw. $T_n = n \cdot t_n$ ergibt sich durch elementare Umformungen daraus für die Umfänge der den Kreis einschachtelnden Polygone

$$S_{2n} = \sqrt{S_n \cdot T_{2n}} \quad \text{und} \quad T_{2n} = \frac{2S_n T_n}{S_n + T_n} \tag{15}$$

oder anders notiert:

$$S_{2n} = G(S_n, T_{2n}) \quad \text{und} \quad T_{2n} = H(S_n, T_n).$$

Analog zum Beweis von Satz 6, also von (12), ergibt sich auch bei diesem alternativen Verfahren mit Hilfe der *Polygonumfänge*, dass eine Intervallschachtelung vorliegt und also diese beiden Folgen einen gemeinsamen Grenzwert haben.

Im Vergleich zu (15) erhielt Gregory bei seiner Iteration gemäß (4), (5) und (6) für die Flächeninhalte der die Kreissegmente einschachtelnden Polygone:

$$e_{2n} = \sqrt{e_n u_n} \quad \text{und} \quad u_{2n} = \frac{2e_{2n} u_n}{e_{2n} + u_n} = \frac{2e_{2n}^2}{e_n + e_{2n}}. \tag{16}$$

Die Iterationsformelpaare (15) und (16) ähneln sich also:

- In beiden Fällen wird der Wert für das einbeschriebene $2n$ -Eck mit dem geometrischen Mittel und der für das umbeschriebene $2n$ -Eck mit dem harmonischen Mittel berechnet.

- In beiden Fällen wird ein iterierter Wert eines der beiden neuen $2n$ -Ecke auf den schon berechneten iterierten Wert des anderen $2n$ -Ecks zurückgeführt.
- In beiden Fällen werden die Iterationen der n -Eck-Folgen also verschachtelt durchgeführt, ganz im Gegensatz zum archimedischen Verfahren, bei dem die Iterationen für die ein- und umbeschriebenen Polygone unabhängig voneinander erklärt sind.
- In beiden Fällen ergibt sich der gesuchte Wert – entweder der Flächeninhalt des gewählten Kreissegments oder der Umfang des Kreises – als Grenzwert der beiden verschachtelten Folgen, nämlich als „harmonisch-geometrisches Mittel“ dieser Folgen.

Die bisherige Darstellung des alternativen Algorithmus‘ scheint den Schönheitsfehler zu haben, dass Abb. 14 nur eine Darstellung für $n = 4$ ist, obwohl die Argumentation davon nicht Gebrauch macht, sondern für beliebiges n gilt.

Das ist an Abb. 15 erkennbar, an der sofort klar wird, dass die benutzten wesentlichen Ähnlichkeitsbeziehungen stets unabhängig vom unten rechts zu sehenden „Öffnungswinkel“ des jeweils aktuellen Segments gelten.

Nun geht es nur noch darum, die verwendeten Ähnlichkeitsbeziehungen entdecken „zu lassen“. Dazu dient Abb. 16:

In jeder der beiden Teilfiguren tritt jeweils ein Paar ähnlicher Dreiecke auf (kleine Dreiecke: schraffiert; große Dreiecke: geschummert), und die Ähnlichkeit der Dreieckspaare ist mit dann elementargeometrischen Mitteln des Mathematikunterrichts erkennbar!

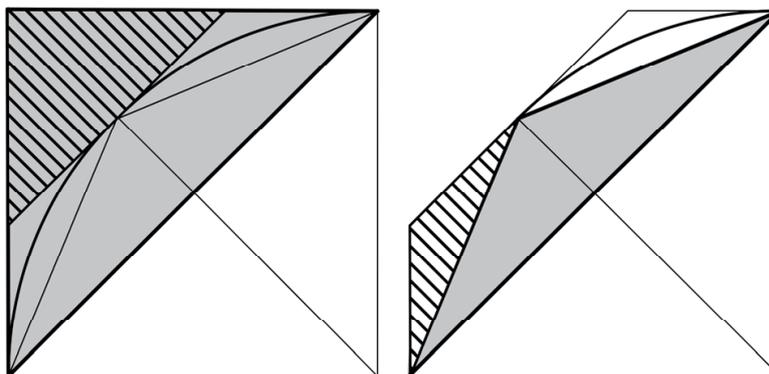


Abb. 16: Visualisierung der Ähnlichkeitsbeziehungen

Für eine *klassische Demonstration* ist es hilfreich, die Grundfiguren in Abb. 16 jeweils als Schwarz-Weiß-Zeichnungen auf Folien für den Overheadprojektor vorzubereiten, dazu die Dreiecke in farbigen Folien auszuschneiden und dann diese farbigen Dreiecke richtig „auslegen“ zu lassen.

Übereinanderlegen macht dann die Ähnlichkeit der Dreieckspaare auch „begreifbar“ (was noch besser und vorzugsweise von den Schülerinnen und Schülern im Heft möglich ist). Dieses kann und sollte dann noch argumentativ begründen werden (über Wechselwinkel bzw. Stufenwinkel an Parallelen).

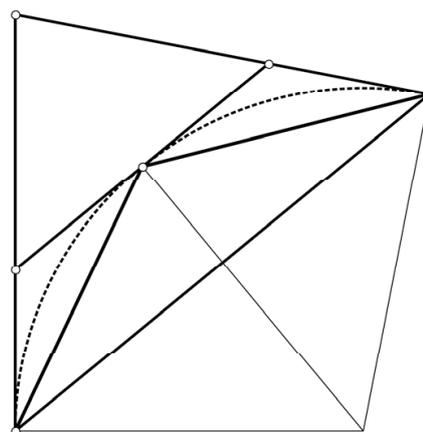


Abb. 15: Visualisierung des Iterationsschritts – allgemeiner Fall

4 Vergleich von Gregorys Verfahren mit dem Ansatz von Archimedes

Schon Archimedes hat bekanntlich ein Verfahren zur Einschachtelung des Kreises durch ein- und umbeschriebene regelmäßige Polygone benutzt, ebenfalls durch systematische Eckenanzahlverdoppelung und angefangen mit einem regelmäßigen Sechseck bis hin zum regelmäßigen 96-Eck. Er benutzt eine sehr mühselige Rechnung mit Hilfe von Abschätzungen der auftretenden „Brüche“, wie es in der Übersetzung bei [Rudio 1892, 73 – 81] wiedergegeben ist.

Im Gegensatz zu Gregory geht Archimedes jedoch nicht verschachtelt vor, sondern er betrachtet einbeschriebene und umbeschriebene Polygone separat. Es muss daher anstelle der bei Gregory verschachtelten Folgen auch unverschachtelte Darstellungen desselben Algorithmus‘ geben. Solche Darstellungen sind bekanntlich ebenfalls elementargeometrisch zu gewinnen, und sie werden z. B. in [Hischer & Scheid 1995, 21 f.] über Betrachtungen an rechtwinkligen Dreiecken alternativ zu (14) angeboten, was mittels elementarer Rechnung sofort zu folgenden Iterationen führt:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}, \quad t_{2n} = \frac{2t_n}{2 + \sqrt{4 + t_n^2}}. \quad (17)$$

Der für s_{2n} hier alternativ an zweiter Stelle angegebene Bruchterm hat den Vorteil, dass keine „Nullkatastrophe“ auftreten kann: Beim ersten Term wird nämlich s_{2n} für ein hinreichend großes n so klein (wenn auch noch nicht exakt gleich 0), dass $4 - s_n^2$ wegen der intern beschränkten Anzahl der geltenden Dezimalstellen numerisch quasi 0 ist (genauer: in der Algebra der „Maschinenzahlen“ ist s_n^2 von da an bezüglich 4 „additiv neutral“), womit numerisch $\sqrt{4 - s_n^2} = 2$ und also $s_{2n} = 0$ für alle folgenden Glieder gilt.

Wenn man z. B. (17) mit einem Tabellenkalkulationssystem programmiert, tritt dieser Fall mit Excel bei Verwendung des o. g. ersten Terms für s_{2n} etwa ab dem 28. Glied auf, und schon etwa drei Glieder vorher wird es ungenau. Bei Verwendung des Bruchterms funktioniert das Verfahren dagegen einwandfrei bis etwa zum 512. Glied, also bis etwa $n \approx 10^{154}$.

Archimedes‘ Verfahren dient der Annäherung des Kreisumfangs $2\pi r$, und Gregorys Verfahren dient der Annäherung des Kreisflächeninhalts πr^2 , in beiden Fällen also mittelbar der Approximation von π , wobei Gregory sein Verfahren ja sogar mit Satz 6 als konvergent nachgewiesen hat.

Bei Archimedes‘ Verfahren gilt wie beim modifizierten Verfahren von Gregory für die Umfänge der einschachtelnden Polygone $S_n = n \cdot s_n$ und $T_n = n \cdot t_n$. Für $r = 1$ folgt dann:

$$\lim \left\langle \frac{1}{2} S_n \right\rangle = \lim \left\langle \frac{1}{2} T_n \right\rangle = \pi. \quad (18)$$

Mit Gregorys Originalverfahren wird der Flächeninhalt eines Kreissegments durch einschachtelnde Polygonsegmente approximiert, deren Flächeninhalte wir gemäß (4) und (5) mit e_n, u_n bezeichnet haben.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei das Startsegment ein *Viertelkreis* mit $r = 1$, dann wird der Flächeninhalt des Vollkreises durch die Folgen $\langle 4e_n \rangle$ und $\langle 4u_n \rangle$ eingeschachtelt, und es folgt:

$$\lim \langle 4e_n \rangle = \lim \langle 4u_n \rangle = \pi \tag{19}$$

Wir beachten, dass wegen der Eckenanzahlverdoppelung in den Folgen zu (18) und (19) jeweils $n = n_0 \cdot 2^k$ mit einem Anfangswert n_0 (z. B. 4 oder 6) und $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Die beiden durch (18) und (19) und die zugrunde liegenden Rekursionen beschriebenen Approximationsverfahren lassen sich z. B. mittels Tabellenkalkulation programmieren und nachvollziehen.

Auch Gregory hat sein Verfahren nicht nur beschrieben und bewiesen, sondern dazu am Ende seiner Darstellung auch numerische Auswertungen sowohl für ein Kreissegment als auch für ein Hyperbelsegment vorgestellt.

Das Faksimile in Abb. 17 zeigt seine Werte speziell für einen Kreis mit dem Radius 1, wobei er mit einem regulären 4-Eck beginnt und dann die Flächeninhalte der vollständigen Polygone angibt und nicht nur die der jeweiligen im Algorithmus benutzten Segmente. Die Stellenanzahl ist beeindruckend, nur in den letzten Stellen ergeben sich (vermutlich bedingt durch Fehlerfortpflanzung) zunehmend geringe Abweichungen von den wahren Werten.

	Intra circulum	extra circulum
4	200000000000000000	400000000000000000
8	2828427124746190	3313708498984760
16	3061467458920718	3182597878074527
32	3121445152258051	3151724907429255
64	3136548490545938	3144118385245904
128	3140331156954752	3142223629942456
256	3141277250932772	3141750369168965
512	3141513801144299	3141632080703181
1024	3141572940367090	3141602510256808
2048	3141587725277158	3141595117749588
4096	3141591421543029	3141593269613390
8192	3141592345578073	3141592807595664
16384	3141592576586860	3141592692091258
Circulus intra sequentes terminos consistit		
	3141592653589789	3141592653589792
eodem omnino modo reperitur rectilineum equale cui- que sectori circulari vel elliptico ex cognito triangulo in- scripto & trapezio circumscripto.		

Abb. 17: Approximation von π aus [Gregory 1668, 44]

5 Postskriptum

Vorliegende Abhandlung basiert auf einer Interpretation und Rekonstruktion des Anfangs von Gregorys „*Vera Circuli Et Hyperbolæ Quadratura*“, flankiert durch Einbeziehung einiger marginaler Anmerkungen von Cantor, aber auch von Baron.

Daneben gibt es detaillierte Analysen zu Gregorys Werk, so etwa [Scriba 1957], [Hofmann 1950], [Turnbull 1939] und [Dehn & Hellinger 1939], die hier nachträglich gesichtet worden sind. Diese Analysen stellen Gregorys Untersuchungen fast ausschließlich in aktueller Notation dar, wie es auch bei Cantor und Baron angedeutet wird. Lediglich in dem umfassenden „Memorial“ Turnbolls, Gregorys Nachfolger auf dessen Lehrstuhl in Aberdeen, wird teilweise auch explizit die Proportionschreibweise Gregorys verwendet. Sowohl Hofmann als auch Scriba verzichteten völlig auf eine Wiedergabe oder ein Zitieren der originalen verbalen lateinischen Ausführungen Gregorys, die bei Turnbull immerhin an einigen Stellen vorkommen.

Christoph J. Scriba, Schüler von J. E. Hofmann, geht in seiner Dissertation von 1957 über „*James Gregorys frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung*“ zunächst auf Gregorys etwa 60 Seiten umfassendes o. g. Werk „*Vera Circuli*“ ein, das gemäß seiner Darstellung 1667 während Gregorys Italienaufenthaltes in Padua in einer Auflage von 150 Exemplaren erschienen ist, die jedoch schnell vergriffen war. So kam es 1668 zum Nachdruck [Gregory 1668], der inhaltlich um die „*Geometria*“ erweitert ist.

Einleitend betont Scriba die Bedeutung Gregorys neben Newton und Leibniz für die zu ihrer Zeit gerade in Entstehung befindliche Analysis, wobei er die „Analysis“ als eine damals neue „Methode“ kennzeichnet (vgl. [Scriba 1957, 6]):

An der Entwicklung dieser Methode haben vornehmlich drei Mathematiker entscheidend mitgewirkt: ISAAC NEWTON (1643 – 1727), GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) und JAMES GREGORY (1638 – 1675). Während aber die Kenntnis von der Beteiligung der beiden Erstgenannten an der Erarbeitung der Analysis sich durch die Jahrhunderte hindurch ungetrübt erhielt – vor allem infolge des sogenannten Prioritätsstreites, der noch über den Tod der beiden Männer hinaus die feindlichen Lager entzweite und eine sachliche Entscheidung unmöglich machte –, waren die Beiträge GREGORYs rasch in Vergessenheit geraten und wurden erst in unserem Jahrhundert wieder entdeckt.

Zur verbalen Darstellung der Beweise usw. durch Gregory schreibt Scriba auf S. 7:

Diese Methode aber, um die es uns hier geht, bietet er nicht in der heute üblichen Schreibweise dar – sie wurde erst nach seinem Tode von LEIBNIZ entwickelt –, sondern weithin in rein geometrischer Einkleidung und verbaler Ausdrucksweise, die dem Leser das Eindringen in seine Gedankengänge nicht gerade leicht macht. Hierin liegt ein weiterer Grund dafür, daß sich schon bald niemand mehr der Schriften GREGORYs bediente, wollte er in die Analysis eindringen, denn die vorteilhafte LEIBNIZsche Darstellung war ja weit leichter lesbar. Nichtsdestoweniger ist GREGORYs, an ARCHIMEDES anschließende Schlußweise einwandfrei. Sie ist ein schönes Beispiel dafür, wie sich ein großer Geist auch über die Fesseln einer ungefügten und schwerfälligen Bezeichnungsweise hinwegsetzt und zu neuen Ergebnissen gelangt.

Gleichwohl folgt vorliegende Abhandlung primär Gregorys verbaler Darstellung mit dem Ziel der Formalisierung der vorliegenden Proportionen, obwohl seine Darstellung „dem Leser das Eindringen in seine Gedankengänge nicht gerade leicht macht“, wie es Scriba zu Recht betont. Aber beschränkt auf den ersten Teil von Gregorys Darstellung mag gerade in dieser Entschlüsselung seiner Gedankengänge ein didaktischer Reiz liegen, zumal eine solche mit Mitteln der Schulmathematik elementar möglich ist, wie hier gezeigt werden konnte. Und die Ergebnisse dieser Entschlüsselung wurden als Iterationsformeln in aktueller Notation dargestellt, um diese so einer numerischen algorithmischen Auswertung leicht zugänglich machen zu können.

Es seien noch einige weitere Anmerkungen ergänzt:

Scriba widmet sich in seinem ersten Kapitel (S. 13 – 28) Gregorys erstem Werk, „*Vera Circuli Et Hyperbolæ Quadratura*“, und dort auf den Seiten 13 bis 20 der „*Theorie der konvergenten Doppelfolgen und deren Anwendung auf den Sektor eines Mittelpunktkegelschnitts*“, wobei er den Algorithmus (wie auch bisher in der vorliegenden Abhandlung) zunächst bezüglich eines Ellipsensegments betrachtet und mit Gregorys Einschachtelung von π abschließt (vgl. Abb. 17).

Dabei zitiert Scriba Gregorys Originalformulierungen nicht expressis, sondern er präsentiert diese vielmehr interpretierend im Sinne einer gerafften Darstellung mittels einer modernen formalen Notation, und er verwendet auch nicht Gregorys klassische Proportionsschreibweise, wohl weil er auch ein anderes Ziel verfolgt als in der vorliegenden Darstellung. Es zeigt sich, dass Margaret Barons Notation der Doppelfolgen (vgl. Abschnitt 1) Scribas Darstellung folgt, den sie auch als Quelle nennt. Scriba skizziert hier die Konvergenz der Doppelfolge zunächst nur mittels

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < b_2 < b_1 < b_0$$

und dem anschließenden Hinweis: „nach Konstruktion strebt $b_n - a_n$ gegen Null“, und er kommentiert das, Gregory übersetzend (vgl. [Scriba 1957, 15]):

GREGORY formuliert diese Tatsache so: „Wenn also der Grenzwert dieser Folge gefunden werden kann, das heißt – wenn man so sagen darf – wenn jenes letzte einbeschriebene Polygon bestimmt werden kann, das jenem letzten umbeschriebenen gleich ist, dann ist unfehlbar die Quadratur von Kreis und Hyperbel geleistet.“ Die Konvergenz der Doppelfolge faßt er in die Worte: „Die Differenz zusammengehöriger Polygone der Folge nimmt beim Fortsetzen der Folge immer mehr ab, und zwar so, daß sie kleiner als jede vorgegebene Größe gemacht werden kann.“ GREGORYs Begriff der Konvergenz, wenngleich der Anschauung entnommen, ist also bereits so abstrakt und scharf formuliert, daß wir heute darin das ε erkennen, das in keinem modernen Konvergenzkriterium fehlen darf.

Auf den Seiten 16 bis 19 widmet sich Scriba einer Analyse des bereits bei „Satz 6“ erwähnten „Scholium“, in dem „GREGORY die allgemeine Theorie konvergenter Doppelfolgen“ mit dem Konvergenzkriterium (12) entwickelt. Diese Theorie flankiert Gregorys klaren Algorithmus mit nützlichen Abschätzungen und führt ihn zur Approximation von π , wie sie im Faksimile in Abbildung 17 zu sehen ist.

Scriba geht auch kurz auf die Anwendung von Gregorys Algorithmus zur Berechnung des Flächeninhalts eines Hyperbelsegments ein (S. 20 f.):

GREGORY hat damit die Aufgabe, die er sich vorgenommen hatte, erfüllt. Er bringt jedoch noch eine ganze Reihe von Ergänzungen; sie hängen vor allem mit der Beziehung zwischen dem Logarithmus und der Fläche unter der Hyperbel zusammen. [...] Aus GREGORIUS a S. VINCENTIO wußte er, daß der Sektor einer gleichseitigen Hyperbel (Figur 2) denselben Flächeninhalt hat wie diejenige Fläche, die von dem den Sektor bestimmenden Hyperbelstück, einer Asymptote und zwei Parallelen zur andern Asymptote begrenzt wird – also demjenigen Stück, das wir heute durch das Integral über die Hyperbel erfassen. Daher läßt sich seine unendliche Doppelfolge auch zur Integration der Hyperbelfläche ausnutzen, und GREGORY berechnet, genau wie beim Kreis vorgehend, auf diese Weise

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x} = \log 10,$$

verwendet aber diesmal die Glieder bis a_{20}, b_{20} sämtlich auf 26 Stellen.

Es sei kurz angedeutet, wie man möglicherweise mit Bezug auf diesen „Satz von Gregorius a Sancto Vincentio“ zu einem Algorithmus zur Approximation eines Hyperbelsegments kommen kann. Abb. 18 zeigt dazu eine Situation zu Scribas erwähnter „Figur 2“ als *Satz von Gregorius*, der (erstaunlicherweise?) ohne Methoden der Analysis rein geometrisch beweisbar ist:

Wir gehen von einer Normalhyperbel mit orthogonalen Asymptoten aus. Behauptet wird die Flächeninhaltsgleichheit des Hyperbelsegments und der Fläche unter der Hyperbel (modern: dem Integral). Wir gehen schrittweise vor und betrachten dazu zunächst die aus Abb. 18 hervorgegangene Abb. 19.

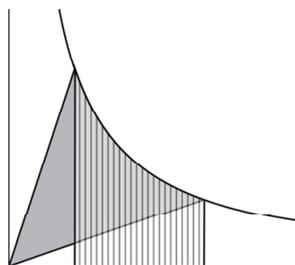


Abb. 18: Flächeninhaltsgleichheit nach Gregorius a Sancto Vincentio

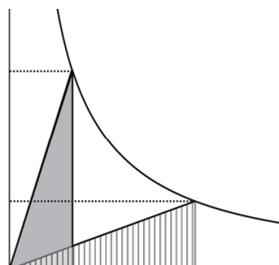


Abb. 19: flächeninhaltsgleiche Dreiecke als Teilfiguren aus Abb. 18

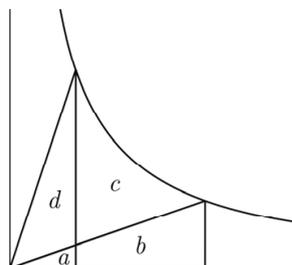


Abb. 20: Beweis der Flächeninhaltsgleichheit in Abb. 18

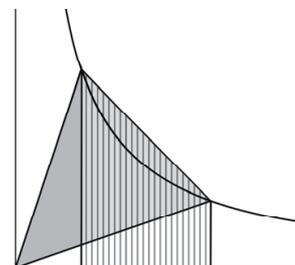


Abb. 21: Flächeninhaltsgleichheit von Dreieck und Viereck bei der Hyperbel

Fassen wir die Hyperbel als geometrischen Ort aller Punkte auf, bei denen das Produkt der Abstände von den beiden orthogonalen Asymptoten konstant ist, so folgt, dass die beiden in Abb. 19 angedeuteten Rechtecke denselben Flächeninhalt haben und damit auch die beiden Dreiecke, was bedeutet, dass alle so mit einem beliebigen Hyperbelpunkt erzeugten Dreiecke flächeninhaltsgleich sind.

Der Beweis der Flächeninhaltsgleichheit in Abb. 18 erfolgt dann mit Abb. 20:

Das Hyperbelsegment in Abb. 18 hat gemäß Abb. 20 den Inhalt $s := c + d$. Der Parallelstreifen unter der Hyperbel in Abb. 18 hat den Inhalt $p := c + b$. Wegen Abb. 19 gilt $a + d = a + b$, also folgt $b = d$ und damit $c + d = c + b$, also $s = p$.

In Abb. 21 ist zusätzlich eine Hyperbelsehne eingezeichnet, und wegen Abb. 20 sind auch hier die beiden Figuren flächeninhaltsgleich.

Literatur

- Baron, Margaret [1969]: *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford / London / Edinburgh / New York / Toronto / Sydney / Paris / Braunschweig: Pergamon Press.
- Boyer, Carl B. [1968]: *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- Cantor, Moritz [1892]: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Zweiter Band. Leipzig: Teubner. 1. Auflage.
- [1894]: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Erster Band, Leipzig: Teubner. 2. Auflage (1. Auflage 1880).
- Dehn, M. & Hellinger, E. [1939]: *On James Gregory's Vera Quadratura*. In: [Turnbull 1939, 486 – 478].
- Euklid [1962]: *Die Elemente. Buch I – XIII*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Herausgegeben und ins Deutsche übersetzt von Clemens Thaer. (Nachdruck der 1933 bis 1937 erschienenen Ausgaben bei Ostwald's Klassikern.)
- Gregorius, a Sancto Vincentio [1647]: *Opus geometricum quadraturae Circuli*. Bd. 2. Antverpia.
- Gregory, James [1667]: *Vera Circuli Et Hyperbolae Quadratura*. Patavii: Heredes Pauli Frambotti Bibliop.
- [1668]: *Vera Circuli Et Hyperbolae Quadratura, Cui Accedit Geometria Pars Universalis Inseruiens quantitatum Curvarum transmutationi & mensurae*. Patavii: Heredes Pauli Frambotti Bibliop.
- Hischer, Horst & Scheid, Harald [1995]: *Grundbegriffe der Analysis. Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht*. Heidelberg / Berlin / Oxford: Spektrum Akademischer Verlag. (Neubearbeitung von: *Materialien zum Analysisunterricht*. Freiburg im Breisgau: Herder, 1982.)
- Hischer, Horst [2004]: Mittelwertfolgen – oder: Mitten inmitten von Mitten. In: *Der Mathematikunterricht*, **50**(2004)5, 42 – 54.
- Hofmann, Joseph Ehrenfried [1950]: Über Gregorys systematische Näherungen für den Sektor eines Mittelpunktkegelschnittes. In: *Centaurus*, **1** (1950), 24 – 37.
- Rudio, Ferdinand [1892]: *Archimedes, Huygens, Lambert, Lengendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, mit einer Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Scriba, Christoph J. [1957]: *James Gregorys frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung*. (Dissertation). In: Boerner, H. & Ullrich, E. (Hrsg.): *Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar Giessen*, Heft 55. Giessen: Selbstverlag des Mathematischen Seminars, 1957, 81 Seiten.
- Turnbull, Herbert Westren (Hrsg.) [1939]: *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*. London: Published for the Royal Society of Edinburgh by G. Bell & Sons Ltd.

Ich danke der Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Bibliothek, Hannover, für die freundliche Genehmigung vom 21. 04. 2016 zur Reproduktion der Faksimiles aus [Gregory 1668]. Das vollständige Werk liegt als Digitalisat unter <http://digitale-sammlungen.gwlb.de> vor.

Ferner danke ich Kim Downie von der University of Aberdeen für die freundliche Genehmigung vom 12. 05. 2016 zur Reproduktion der Bilddatei ABDUA 30075 des Portraits von Gregory, das vermutlich von David oder John Scougal stammt. Kim schrieb mir ergänzend zu Gregory:

His first important work was in optics, and by 1663 he had published a book on the subject and had invented the reflecting telescope. Later that year he went to Italy to further his mathematical studies. There he published 2 books on calculus (as it was later known). He returned to Scotland in 1668 and became the first professor of maths at St. Andrews. In 1674 he went to Edinburgh but shortly afterwards his health began to fail and he died the following year. He shares with Newton the credit for the discovery and proof of the general binomial theorem and for the development of the theory of interpolation.