

Kompetitive Algorithmen für den Börsenhandel

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Wirtschaftswissenschaft

(Dr. rer. oec)

**der Fakultät für Empirische Humanwissenschaften und
Wirtschaftswissenschaft der Universität des Saarlandes**

vorgelegt von

Michael Schwarz, M.Sc.

Juli 2018

Dekan: Univ.-Prof. Dr. Stefan Strohmeier

Erstberichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Günter Schmidt

Zweitberichterstatter: PD Dr. rer. pol. Stefan Klößner

Tag des Kolloquiums: 03.06.2019

Für meine Eltern

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2014 bis 2018 während und im Anschluss an meine Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Operations Research and Business Informatics (ORBI) an der Universität des Saarlandes.

Ein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Günter Schmidt. Er gab mir die Möglichkeit, die vorliegende Arbeit anzufertigen, und unterstützte mich während des Schreibprozesses auf außerordentliche Weise. Er lehrte mich, Herausforderungen fokussiert und strukturiert anzugehen, und prägte dadurch meine Denkweise. Zudem war er jederzeit bereit, mich bei der Anfertigung meiner Arbeit mit vielen konstruktiven Diskussionen zu unterstützen. Außerdem danke ich PD Dr. Stefan Klößner für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Ein weiterer großer Dank gilt Dr. Robert Dochow, der stets zu konstruktiven Gesprächen zur Verfügung stand und der durch sein positives Wesen eine moralische Unterstützung in jeder Phase des Schreibprozesses war.

Ebenfalls einen speziellen Dank möchte ich an Hedi Staub für die organisatorische Arbeit während meiner Zeit am Lehrstuhl richten.

Zudem danke ich den weiteren Mitarbeitern des Lehrstuhls ORBI, die mich während und nach ihrer Zeit an diesem Lehrstuhl unterstützt haben. Zu nennen sind hier Nicolas Glöckner, Melanie Holländer, Pascal Schroeder, Claude Gangolf und Mike Kersch. Es war ein Freude, mit Euch zusammenzuarbeiten.

Ein großer Dank geht zudem an meine Eltern, die mich immer und in jeglicher Hinsicht unterstützt haben.

Zuletzt danke ich meinen Freunden Benjamin Schug, Andreas Scherer und Alexander Albert für ihre moralische Unterstützung und das gewissenhafte Korrekturlesen.

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Online-Conversion Problem untersucht. Dieses beschäftigt sich mit der Konvertierung von Vermögen von einer Anlage in eine andere Anlage. Die unterschiedlichen Ausprägungen des Online-Conversion Problems werden mathematisch dargestellt und voneinander abgegrenzt. In der Literatur gibt es zur Lösung des Online-Conversion Problems einige Handelsalgorithmen, die auf Basis von Vergangenheitsdaten Entscheidungen treffen. Diese Algorithmen stellen jedoch zumeist Heuristiken ohne eine Garantie hinsichtlich der Lösungsgüte dar. Andere Handelsalgorithmen sind sogenannte kompetitive Algorithmen. Für diese Algorithmen kann durch eine theoretische Analyse eine Lösungsgarantie bestimmt werden. In dieser Arbeit werden sowohl theoretische als auch empirische Methoden zur Evaluation von Handelsalgorithmen erläutert. Diese Arbeit präsentiert zudem einen kompetitiven Algorithmus, der - zumindest für spezifische Parameter - die bisher beste Lösungsgarantie für eine konkrete Ausprägung des Online-Conversion Problems bietet. Zudem wird der Algorithmus auch hinsichtlich seiner empirischen Performanz mit zwei ausgewählten kompetitiven Algorithmen sowie zwei in der Praxis häufig verwendeten Heuristiken verglichen. Im Rahmen der empirischen Analyse wird zudem der Einfluss von Transaktionskosten sowie unterschiedlicher Handelszeiträume untersucht. Die Ergebnisse der empirischen Analyse zeigen auf, dass der vorgestellte Algorithmus je nach verwendetem Testdesign in der Lage ist, signifikant höhere Ergebnisse zu erzielen als ausgewählte Algorithmen.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xi
Tabellenverzeichnis	xiv
Variablenverzeichnis	xv
1 Einleitung	1
1.1 Grundlagen	1
1.2 Forschungsfragen	3
1.3 Aufbau der Arbeit	4
2 Analysemethoden für Algorithmen im Börsenhandel	7
2.1 Börsenhandel	7
2.1.1 Orderbuch	8
2.1.2 Transaktionskosten	11
2.2 Analysemethoden für Handelsalgorithmen	14
2.2.1 Vorüberlegungen	15
2.2.2 Arten der theoretischen Analyse	16
2.2.3 Arten der empirischen Analyse	19
2.3 Zusammenfassung	27
3 Ausprägungen des Online-Conversion Problems und Algorithmen	29
3.1 Das Online-Conversion Problem	29
3.1.1 Klassifizierung	29
3.1.2 Modelle	30
3.2 Ausgewählte Conversion Algorithmen	50
3.2.1 Uni-direktionale Algorithmen	50
3.2.2 Bi-direktionale Algorithmen	56
3.3 Zusammenfassung	59

4 Ein neuer Algorithmus für das bi-direktionale und präemptive Conversion Problem	61
4.1 Das bi-direktionale und präemptive Conversion Problem	61
4.2 Der Algorithmus 2-Reservationspreis Politik	62
4.3 Theoretische Analyse des vorgestellten Algorithmus	65
4.3.1 Kompetitive Analyse	65
4.3.2 Vergleich der Kompetitivität mit ausgewählten Algorithmen .	78
4.3.3 Prüfung auf Optimalität	89
4.4 Zusammenfassung	93
5 Empirische Analyse des vorgestellten Algorithmus	95
5.1 Fragestellungen und Methodik	95
5.1.1 Ausgewählte Performanzmaße	98
5.1.2 Testdesigns	100
5.1.3 Evaluationsmethodik	104
5.2 Datenset	105
5.3 Empirische Ergebnisse	106
5.3.1 Vergleich der Algorithmen	106
5.3.2 Einfluss von relativen Transaktionskosten	109
5.3.3 Einfluss von fixen Transaktionskosten	113
5.4 Zusammenfassung	117
5.4.1 Beantwortung der Fragestellungen	117
5.4.2 Fazit	119
6 Fazit und Ausblick	121
6.1 Fazit	122
6.2 Ausblick	123
A Beweise	125
A.1 Kompetitive Rate von 2RPP	125
A.2 Eigenschaften von Worst-Case-Sequenzen von 2RPP	126
A.3 Eigenschaften von Kehrsequenzen	130
A.4 Feststellen der Maxima	131
A.5 Alternativer Beweis für die kompetitive Rate von 2RPP	132

B Empirische Analyse	139
B.1 Symbole der verwendeten Aktien	139
B.2 Teststatistiken der Hypothesentests	139

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung eines Orderbuch in Anlehnung an Kersch (2014)	10
2.2	Vereinfachte Übersicht über empirische und theoretische Analysearten von Handelsalgorithmen	14
4.1	Beispiel für $2RPP$	64
4.2	Worst-Case-Sequenz von $2RPP$ für $k = 5$	70
4.3	WC-Sequenzen von $2RPP$ mit ausgewählten T	77
5.1	Minderungen der annualisierten Renditefaktoren durch relative Transaktionskosten	111
5.2	Minderung der annualisierten Renditefaktoren durch fixe Transaktionskosten	114
A.1	Konvertierungsmöglichkeiten für $DD\text{-}P\text{-}BC$ mit $k = 3$	137

Tabellenverzeichnis

3.1	Beispiel <i>NP-UC</i>	37
3.2	Beispiel <i>P-UC</i>	38
3.3	Beispiel <i>u'P-UC</i>	39
3.4	Beispiel <i>u'P-UC-1</i>	40
3.5	Beispiel <i>u'P-UC-L</i>	42
3.6	Beispiel <i>NP-BC</i>	44
3.7	Beispiel <i>NP-BC-h</i>	45
3.8	Beispiel <i>P-BC</i>	48
3.9	Liste der Ausprägungen des Conversion Problems	49
4.1	2RPP für $M = 8$, $m = 1$ und $\mathbf{q} = 1,5; 2,5; 3; 1,5$	64
4.2	Numerische Ergebnisse von 2RPP, <i>MRPR(k)</i> und <i>bTH'</i>	79
4.3	Numerische Ergebnisse von 2RPP, <i>BRPP</i> und <i>bTH'</i>	88
5.1	Durchschnittliche Abweichung der Preisschätzer auf historischer Basis	103
5.2	Anzahl Instanzen	106
5.3	Annualisierte Renditefaktoren	107
5.4	Mediane der Renditefaktoren	108
5.5	Ergebnisse Hypothesentest für 2RPP	109
5.6	Durchschnittlich gehandelte Volumen	110
5.7	Annualisierte und um relative Transaktionskosten bereinigte Renditefaktoren	111
5.8	Mediane der um relative Transaktionskosten bereinigten Renditefaktoren	112
5.9	Ergebnisse Hypothesentest für 2RPP im Fall relativer Transaktionskosten	113
5.10	Durchschnittliche Anzahl an Transaktionen	114
5.11	Annualisierte und um fixe Transaktionskosten bereinigte Renditefaktoren	115
5.12	Mediane der um fixe Transaktionskosten bereinigten Renditefaktoren	116
5.13	Ergebnisse Hypothesentest für 2RPP im Fall fixer Transaktionskosten	116

B.1	Teststatistiken Differenzentest (Ohne Transaktionskosten)	139
B.2	Teststatistiken Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test (Ohne Transaktionskosten)	140
B.3	Teststatistiken Differenzentest (Relative Transaktionskosten)	140
B.4	Teststatistiken Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test (Relative Transaktionskosten)	141
B.5	Teststatistiken Differenzentest (Fixe Transaktionskosten)	141
B.6	Teststatistiken Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test (Fixe Transaktionskosten)	142

Variablenverzeichnis

T	Anzahl an Handelszeitpunkte
t	Zeitpunkt mit $t \in \{1, \dots, T\}$
y	Anzahl an Anteilen, die mit einem Börsenauftrag gehandelt werden sollen
q^{lmt}	Limitpreis
l	Level im Orderbuch
$q_t^{bid,l}$	Bid-Preis auf Orderbuchlevel l zum Zeitpunkt t
$q_t^{ask,l}$	Ask-Preis auf Orderbuchlevel l zum Zeitpunkt t
$y_t^{bid,l}$	Anzahl an Anteile, die zum Bid-Preis auf Orderbuchlevel l zum Zeitpunkt t nachgefragt werden
$y_t^{ask,l}$	Anzahl an Anteile, die zum Ask-Preis auf Orderbuchlevel l zum Zeitpunkt t angeboten werden
q_t^{last}	Letzter Preis zu dem gehandelt wurde
a	Anzahl an Teilausführungen
y_i	Anteile, die in Teilausführung $i = 1, \dots, a$ gehandelt werden
q_i	Ausführungspreis der Teilausführung i
\bar{q}	Durchschnittlicher Ausführungspreis
Vol	Volumen eines Börsenauftrages
TKS	Transaktionskostensatz
$TK^{rel,Abs}$	Relative Transaktionskosten (absolut)
$TK^{rel,Proz}$	Relative Transaktionskosten (prozentual)
TK^{fix}	Fixe Transaktionskosten
q_t^{MW}	Theoretischer Marktwert zum Zeitpunkt t
LP	Liquiditätsprämie
MI	Market Impact Kosten
WK	Wartekosten
\mathbf{x}	Lösungsvektor
\mathbf{x}^*	Optimaler Lösungsvektor

$Z(\mathbf{x})$	Zielfunktion in Abhängigkeit des Lösungsvektors \mathbf{x}
Ψ	Lösungsraum
ξ	Menge an Nebenbedingungen
P	Optimierungsproblem
Γ	Problemspezifische Parameter
γ	Teilmenge der problemspezifischen Parameter
I	Inputsequenz
I^{wc}	Worst-Case Inputsequenz
Ω	Menge aller möglichen Inputsequenzen
$OPT(I)$	Wert eines Performanzmaes des optimalen Offline-Spielers auf Inputsequenz I
$ON(I)$	Wert eines Performanzmaes des Online-Spielers auf Inputsequenz I
E	Fehler
\mathfrak{B}	Menge an Vergleichsalgorithmen
r	Kompetitive Rate
PR	Performanzrate
KR	Komparative Rate
KPR	Komparative Performanzrate
N	Anzahl an beobachteten Werten
α	Irrtumswahrscheinlichkeit
H_0	Nullhypothese
H_1	Alternative Hypothese
x_j	Beobachtete Zufallsvariable mit $j = 1, \dots, N$
\bar{x}	Arithmetisches Mittel der Zufallsvariablen
ME	Median
σ	Standardabweichung
ν	Schiefe
κ	Kurtosis
TS	Teststatistik
$krit$	Kritischer Wert
W^+	Rangsumme der positiven Elemente
Df	Freiheitsgrad
D_j	Distanz zweier abhängiger Stichproben mit $j = 1, \dots, N$
A	Anzahl an Anlagen

$q_{i,t}$	Preis einer Anlage i zum Zeitpunkt t
\mathbf{q}	Diskrete Preissequenz
$\dot{\mathbf{q}}$	Stetige Preissequenz
$\mathbf{q}'(\mathbf{q})$	Kehrsequenz von \mathbf{q}
M	Obere Preisgrenze
m	Untere Preisgrenze
W_0	Startvermögen
W_t	Vermögen zum Zeitpunkt t
AI	Anlagenindikator
u'	Erlaubte Stückelung des Vermögens
s_t	Anteil des Vermögens, welcher von einer Anlage in eine andere Anlage konvertiert wird
$b_{i,t}$	Vermögen, das zum Zeitpunkt t in Anlage i investiert ist
$b_{\text{ist},t}$	Vermögen, das zum Zeitpunkt t in Yen investiert ist, bevor gehandelt wird
y_t	Anteile des Yen, die zum Zeitpunkt t gehandelt werden
d_t	Anteile des Dollar, die zum Zeitpunkt t gehandelt werden
Y_t	Anteile an Yen, die zum Zeitpunkt t gehalten werden
D_t	Anteile an Dollar, die zum Zeitpunkt t gehalten werden
s_t^{\max}	Obere Grenze für s_t
s_t^{\min}	Untere Grenze für s_t
L	Lagerkapazität
h	Anzahl erlaubter Transaktionen
q_{res}	Reservationspreis
Θ_1	Kleinstmöglicher Faktor, um den sich ein Preis im Vergleich zum vorherigen Preis reduzieren kann
Θ_2	Größtmöglicher Faktor, um den sich ein Preis im Vergleich zum vorherigen Preis erhöhen kann
t^*	Reservationszeitpunkt
k	Anzahl an Runs
T^{Ex}	Zeitpunkt, zu dem eine Preissequenz ein lokales Minimum bzw. Maximum aufweist
UG	Untergrenze für die kompetitive Rate
T_j^Y	Zeitpunkt zu dem der j -te Y-Run startet
v	Einem Preisintervall zugeordnete Zahl

X	Anzahl an lokalen Extremwerten
q^{min}	Preis, der ein lokales Minimum darstellt
q^{max}	Preis, der ein lokales Maximum darstellt
q'	Kehrpunkt
q^S	Erster Preis einer stetigen Preissequenz
q^E	Letzter Preis einer stetigen Preissequenz
q^{wc}	Erster Preis einer Worst-Case-Sequenz mit $t = 2$ Zeitpunkten
b^{wc}	Anteil, der zum Preis q^{wc} in Yen investiert wird
GV	Gehandeltes Volumen
R_t	Renditefaktor zum Zeitpunkt t
R_t^{rel}	Um relative Transaktionskosten bereinigter Renditefaktor zum Zeitpunkt t
R_t^{fix}	Um fixe Transaktionskosten bereinigter Renditefaktor zum Zeitpunkt t
R	Gesamtrenditefaktor
R^{rel}	Um relative Transaktionskosten bereinigter Gesamtrenditefaktor
R^{fix}	Um fixe Transaktionskosten bereinigter Gesamtrenditefaktor
R_A	Annualisierter Renditefaktor
$MA(n)_t$	Gleitender Durchschnitt bis zum Zeitpunkt t über n Werte
\hat{M}_t	Abschätzung der oberen Preisgrenze zum Zeitpunkt t
\hat{m}_t	Abschätzung der unteren Preisgrenze zum Zeitpunkt t

1 Einleitung

In diesem Kapitel wird das Conversion Problem vorgestellt. Dieses beschäftigt sich mit der Konvertierung von Vermögen von einer Anlage in eine andere Anlage. In diesem Zusammenhang werden die Begriffe Online-Algorithmus sowie kompetitive Analyse eingeführt. Zudem werden die Forschungsfragen vorgestellt und motiviert. Das Kapitel schließt mit der Erläuterung der Struktur dieser Thesis.

1.1 Grundlagen

Im Conversion Problem (CP) ist es die Aufgabe eines Investors, sein Startvermögen, welches in einer Anlage z. B. Dollar investiert ist, innerhalb eines gegebenen Zeitraums in eine weitere Anlage z. B. Yen zu konvertieren. Das Ziel des Investors ist es, sein Endvermögen in Yen zu maximieren. Dem Investor werden so lange neue Preise angeboten, bis er entweder einen Preis zum Handeln akzeptiert oder ihm der letzte Preis des Zeitraums angeboten wird. Diesen muss der Investor akzeptieren. Es ist nicht möglich, zu bereits abgelehnten Preisen zu handeln. Die Schwierigkeit beim Lösen dieses Problems liegt darin, dass dem Investor nicht bekannt ist, welche Preise ihm zukünftig noch angeboten werden. Es handelt sich somit um ein Online-Problem, in dem nicht alle für die Entscheidungsfindung relevanten Informationen zu Beginn vorliegen. Dies steht im Gegensatz zu Offline-Problemen, bei denen diese zu Beginn zur Verfügung stehen.

Das CP weist mehrere Ausprägungen auf. So entspricht das zuvor dargestellte Problem dem uni-direktionalen und nicht-präemptiven CP. Uni-direktional bedeutet, es kann nur von Dollar in Yen konvertiert werden. Im Gegensatz dazu kann im bi-direktionalen CP zusätzlich von Yen in Dollar konvertiert werden. Nicht-präemptiv gibt an, dass das Vermögen bei jedem Handel vollständig konvertiert werden muss. Beim präemptiven CP kann das Vermögen auch gestückelt konvertiert werden.

In der Literatur wird neben dem Online-Conversion Problem das Online-Portfolio-Selection Problem (PSP) definiert (vgl. Li und Hoi 2014). Diese beiden Handelspro-

bleme unterscheiden sich durch die Anzahl an Anlagen, mit denen gehandelt werden kann. Das CP beschränkt sich auf den Handel mit zwei Anlagen. Das PSP kann hingegen eine nach oben unbeschränkte Anzahl an Anlagen, jedoch mindestens zwei umfassen. El-Yaniv (1998, S. 45) und Dochow (2016, S. 40) zeigen, dass das CP ein Spezialfall des PSP ist.

Algorithmen, mit denen das (Online-)Conversion Problem gelöst wird, werden als (Online-)Conversion Algorithmen bezeichnet. Die Evaluation von Online-Algorithmen kann durch eine kompetitive Analyse erfolgen (vgl. z. B. El-Yaniv 1998, Damaschke et al. 2009, Lorenz et al. 2009 und Schmidt 2017). Diese dient dazu, eine Garantie für die Lösungsgüte für Online-Algorithmen zu ermitteln, und stellt somit eine Worst-Case Analyse dar. Das Ergebnis der kompetitiven Analyse ist die kompetitive Rate. Diese entspricht einer oberen Schranke für das Verhältnis der optimalen Offline-Lösung zur Lösung des Online-Algorithmus. Ein Algorithmus, für den eine kompetitive Rate angegeben werden kann, wird als kompetitiver Algorithmus bezeichnet. Kann gezeigt werden, dass ein kompetitiver Algorithmus die geringst mögliche kompetitive Rate erreicht, wird dieser als optimaler Online-Algorithmus bezeichnet. Ein Algorithmus, für den keine garantierte Lösungsgüte bestimmt werden kann, wird als Heuristik bezeichnet. Heuristiken haben das Ziel, durchschnittlich gute Ergebnisse zu erzielen, ohne dabei eine Lösungsgüte zu garantieren (vgl. Mohr 2011, S. 7).

In der Literatur werden Conversion Algorithmen oftmals mit einer kompetitiven Analyse evaluiert (vgl. z. B. El-Yaniv et al. 1992, Lorenz et al. 2009, Damaschke et al. 2009 und Schmidt 2017). Für die Bestimmung der kompetitiven Rate von Conversion Algorithmen werden für jeden Zeitpunkt, zu dem gehandelt wird, Annahmen für die Ober- und Untergrenze der Preise getroffen. Diese Grenzen können entweder konstant sein (vgl. z. B. El-Yaniv et al. 1992, al-Binali 1999, El-Yaniv et al. 2001 und Xu et al. 2011), sich in Abhängigkeit von der Zeit ändern (vgl. Damaschke et al. 2009) oder abhängig von vorhergehenden Preisen sein (vgl. Zhang et al. 2012b, Schroeder et al. 2015 und Schroeder et al. 2016). Sind die Preise abhängig vom vorhergehenden Preis, werden zwei Faktoren festgelegt, um die der nächste Preis maximal nach oben bzw. nach unten abweichen darf.

Eine weitere Methode, Algorithmen zu evaluieren, ist die empirische Analyse. Hierbei wird das Verhalten der Algorithmen auf einer Vielzahl von Kursverläufen simuliert und die Ergebnisse werden mit ausgewählten Benchmarks verglichen. Diese Methode zur Evaluation wird bei Handelsproblemen oftmals angewendet (vgl. z. B.

Gibbons et al. 1989, Cover 1991, Brock et al. 1992, Helmbold et al. 1998, Tabak und Lima 2009, Schmidt et al. 2010, Li et al. 2012 und Hsu et al. 2016).

1.2 Forschungsfragen

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei zentrale Fragestellungen untersucht:

Frage 1: Wie kann ein bi-direktonaler und präemptiver Algorithmus gestaltet sein, der eine geringere kompetitive Rate als die aktuell existierenden Algorithmen aufweist, und wie können durch die Gestaltung Transaktionskosten reduziert werden?

Das bi-direktionale und präemptive CP ist eine Ausprägung des CP, für die bisher unter der Annahme von konstanten Preisgrenzen kein optimaler Online-Algorithmus bestimmt werden konnte. El-Yaniv et al. (1992) sowie Dannoura und Sakurai (1998) bieten zwar kompetitive Algorithmen zur Lösung dieses CP, weisen jedoch auch darauf hin, dass diese (wahrscheinlich) nicht optimal sind. Dies wird zudem von Schmidt (2017) bewiesen. Daher stellt sich die Frage, wie ein Algorithmus zu gestalten ist, der eine bessere kompetitive Rate erreicht.

Ein entsprechender Algorithmus sollte zudem so gestaltet sein, dass Transaktionskosten zumindest indirekt berücksichtigt werden. So zeigen El-Yaniv et al. (1992), dass der optimale Online-Algorithmus für das uni-direktionale und präemptive CP zu jedem neuen Höchstpreis handelt, auch wenn dieser nur marginal über dem vorherigen Höchstpreis liegt. Wird nur ein geringer Anteil des Vermögens gehandelt, können jedoch unverhältnismäßige Transaktionskosten entstehen.

Die indirekte Berücksichtigung von Transaktionskosten ist in der neueren Conversion-Literatur zu finden. So haben Lorenz et al. (2009) und Zhang et al. (2011) uni-direktionale Conversion Algorithmen entwickelt, die das Intervall der möglichen Preise einer Anlage in mehrere Preiskorridore aufteilen. Diese Algorithmen handeln nur dann, wenn der neue Höchstpreis in einem höheren Preiskorridor liegt als der bisherige Höchstpreis. Auf diese Weise können Transaktionen, mit denen nur ein geringer Teil des Vermögens gehandelt wird und die damit einhergehenden Transaktionskosten reduziert werden. Jedoch geht mit dieser Vorgehensweise ein Anstieg der kompetitiven Rate im Vergleich zu El-Yaniv et al. (1992) einher. Zudem stellt Fung (2017) einen Conversion Algorithmus vor, der Transaktionskosten durch Limitierung der erlaubten Transaktionen reduziert.

Frage 2: Wie ist die empirische Performanz des vorgestellten Algorith-

mus im Vergleich zu der ausgewählter Algorithmen?

Neben einer Aussage über die kompetitive Rate ist für die Praxis die empirische Performanz eines Algorithmus von hoher Relevanz. Mit der Durchführung einer empirischen Analyse kann die kompetitive Analyse, welche eine Worst-Case Betrachtung darstellt, um eine Durchschnittsbetrachtung ergänzt werden. So sollte ein Algorithmus sowohl über eine möglichst niedrige kompetitive Rate als auch über eine gute empirische Performanz verfügen. Der Begriff gute Performanz ist jedoch relativ. So entscheidet die Performanz der anderen Algorithmen, die dasselbe Problem lösen, wie die Performanz des untersuchten Algorithmus einzuordnen ist. Die empirische Analyse in dieser Arbeit vergleicht den vorgestellten Algorithmus mit ausgewählten Algorithmen aus der Literatur. Als Performanzmaß wird eine Renditekennzahl verwendet. Zusätzlich zum Vergleich wird der Einfluss von Transaktionskosten auf die einzelnen Algorithmen dargestellt. Für kompetitive Algorithmen sind zur Anwendung in der Praxis die benötigten Preisgrenzen abzuschätzen. Die Performanz für diese Algorithmen wird sowohl für den Fall untersucht, dass die Schätzungen den exakten Werten entsprechen, als auch für den Fall, dass die Schätzwerte auf historischen Daten basieren. Die Abschätzung mit exakten Werten dient der Bestimmung einer Obergrenze für die empirische Performanz. Anhand der Schätzungen auf Basis historischer Daten wird der Einfluss der Qualität der Schätzungen auf die Performanz der Algorithmen untersucht.

1.3 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen erläutert, die benötigt werden, um die Fragestellungen zu beantworten. Dazu gehören die Darstellung des Börsenhandels, die Erläuterung von Optimierungsproblemen und die Vorgehensweise zur theoretischen sowie empirischen Analyse von (Online-)Algorithmen.

In Kapitel 3 wird ein Überblick über die bestehende Conversion-Literatur gegeben. Er enthält eine detaillierte Darstellung der unterschiedlichen Ausprägungen des Conversion Problems sowie eine Übersicht über die bereits existierenden kompetitiven Algorithmen zu deren Lösung.

Kapitel 4 widmet sich der Beantwortung von Forschungsfrage 1. Es wird ein neuer kompetitiver Conversion Algorithmus vorgestellt. Dieser basiert auf dem Konzept von Lorenz et al. (2009) und Zhang et al. (2011) zur Reduktion von Transaktionskosten. Die kompetitive Rate des Algorithmus wird mit den kompetitiven Raten ausgewählter

Conversion Algorithmen verglichen.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Beantwortung von Forschungsfrage 2. Dazu wird der Algorithmus, der in Kapitel 4 dargestellt wird, auf Basis einer empirischen Untersuchung mit ausgewählten Algorithmen verglichen.

Kapitel 6 schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick für weiterführende Forschungsfragen.

2 Analysemethoden für Algorithmen im Börsenhandel

In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen des Börsenhandels erläutert. Die Ausführungen beschränken sich auf die Investorensicht. So wird das Orderbuch vorgestellt, auf dessen Grundlage Börsenaufträge einander zugeordnet werden. Zudem wird eine Methode zur anschließenden Preisfeststellung beschrieben. Danach erfolgt ein Überblick über die damit einhergehenden Transaktionskosten. Im Anschluss werden theoretische und empirische Vorgehensweisen zur Evaluation von Algorithmen vorgestellt.

2.1 Börsenhandel

Eine Börse ist ein Handelsplatz, in dem Handelswünsche von Investoren in Form von Börsenaufträgen gesammelt und gegebenenfalls ausgeführt werden. Der Börsenhandel kann unterschiedliche Ausprägungen aufweisen, die sich durch die drei Attribute gehandelte Instrumente, Art der Handelsgeschäfte und Handelsmodell beschreiben lassen (vgl. Schmidt 1988 und Harris 2003).

Schmidt (1988, S. 2) unterscheidet hinsichtlich der Art der gehandelten Instrumente zwischen Waren-, Devisen- und Wertpapierbörsen. An Warenbörsen werden standardisierte Rohstoffe und Naturprodukte gehandelt. Devisenbörsen dienen hingegen zum Handel mit Währungen. Wertpapiere werden an Wertpapierbörsen gehandelt.

Börsen können zudem nach Art der dort ausführbaren Handelsgeschäfte eingeordnet werden. Schmidt (1988, S. 48) unterscheidet dahingehend zwischen Effektiv- und Termingeschäften. Bei Effektivgeschäften sind vertraglich vereinbarte Leistungen innerhalb einer dafür notwendigen Frist zu erbringen. Bei der Erfüllung der vereinbarten Leistungen gelten die Konditionen bei Vertragsabschluss. Dem gegenüber stehen Termingeschäfte. Bei diesen muss die vertraglich vereinbarte Leistung zu einem vereinbarten Zeitpunkt erbracht werden. Bei der Erfüllung der vereinbarten

Leistungen gelten die Konditionen zum Zeitpunkt der Erfüllung.

Das dritte Attribut ist das Handelsmodell. Dieses definiert die Umsetzung von Börsenaufträgen in Handelsgeschäfte. Die beiden grundlegenden Handelsmodelle sind der fortschreitende Handel und die Auktion (vgl. Harris 2003, S. 90-91).

Können im fortschreitenden Handel Börsenaufträge gegeneinander ausgeführt werden, so geschieht dies sofort. Ist eine Ausführung für einen Börsenauftrag mit mehreren anderen Börsenaufträgen möglich, so erfolgt eine Zuordnung dieser gemäß von der Börse definierten Prioritätsregeln (vgl. O’Hara 2015, S. 3). Der fortschreitende Handel kann in auftragsgetrieben und kursgetrieben unterschieden werden (vgl. Zantow und Dinauer 2011, S. 88). Auf auftragsgetriebenen Märkten handeln Investoren direkt miteinander. Die Börse dient ausschließlich zur Zuordnung und Abwicklung der Börsenaufträge. Auf kursgetriebenen Märkten findet hingegen kein direkter Handel zwischen Investoren statt. Käufer und Verkäufer handeln immer mit einem kursbestimmenden Marktmacher. Dieser gibt sogenannte Quotes vor, bestehend aus Ankaufs- und Verkaufskurs.

Bei Auktionen werden eingehende Börsenaufträge nicht sofort ausgeführt, sondern innerhalb einer Aufrufphase gesammelt. Im Anschluss an die Aufrufphase erfolgt eine Preisfeststellung in Abhängigkeit von allen in der Aufrufphase eingegangenen Aufträgen. Alle zustande kommenden Transaktionen werden zeitgleich zum festgestellten Preis ausgeführt (vgl. Harris 2003, S. 90). Ebenso wie im fortschreitenden Handel existieren Prioritätsregeln, nach denen die Zuweisung der einzelnen Aufträge zueinander erfolgt.

Die Varianten des Börsenhandels sind so vielfältig und unterschiedlich, dass in dieser Arbeit nur eine Form des Börsenhandels betrachtet werden kann. Für diese gilt:

1. Es werden ausschließlich Wertpapiere und Devisenpaare gehandelt.
2. Der Handel erfolgt per Effektivgeschäft.
3. Das Handelsmodell ist der auftragsgetriebene fortschreitende Handel.

2.1.1 Orderbuch

Im Orderbuch werden die von Investoren an die Börse übermittelten Börsenaufträge erfasst. Wird ein Börsenauftrag ins Orderbuch eingestellt, der gegen einen bereits

im Orderbuch befindlichen Börsenauftrag ausführbar ist, findet die Zuordnung dieser Börsenaufträge zueinander statt. Dies wird auch als Matching bezeichnet. Mit dem Matching wird auch der Preis festgelegt, zu dem die Investoren handeln. Im Folgenden wird das Orderbuch detaillierter vorgestellt. Dazu ist zunächst der Begriff Börsenauftrag genauer zu definieren.

2.1.1.1 Börsenaufträge

Durch einen Börsenauftrag übermittelt ein Investor seinen Handelswunsch an einen Handelsplatz. Ein Börsenauftrag gibt an, welches Wertpapier oder Devisenpaar an welcher Börse auf welche Weise und in welcher Menge gehandelt werden soll (vgl. Kersch 2014, S. 24 und Harris 2003, S. 68-69). Bei der Menge ist zu beachten, dass im Wertpapierhandel nur eine ganzzahlige Anzahl y an Anteilen bspw. in Form einer Aktie gehandelt werden darf. Im Devisenhandel sind zumeist erlaubte Handelsmengen vorgegeben.

Ein Börsenauftrag, auch Order genannt, kann verschiedene Auftragstypen aufweisen. Market- und Limitorder sind die beiden Basisauftragstypen und die einzigen, die im Orderbuch eingestellt werden (vgl. Cooney und Sias 2004, S. 1711 und Aldridge 2010, S. 273). Eine Marketorder wird sofort ausgeführt. Sie eignet sich dann, wenn ein Handel möglichst schnell durchgeführt werden soll. Der Nachteil der Marketorder liegt darin, dass keine Preisgarantie existiert. Jeder Preis wird akzeptiert. Im Gegensatz dazu wird eine Limitorder nur dann ausgeführt, wenn der Ausführungspreis gleich oder besser als ein Limitpreis q^{lmt} ist. Dies geht jedoch mit einem Nicht-Ausführungsrisiko einher, da die Möglichkeit besteht, dass der Preis sich so entwickelt, dass der Limitpreis nicht erreicht wird. Die weiteren Ordertypen entsprechen Market- und Limitordern, die jedoch erst ins Orderbuch eingestellt werden, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt sind. Ein Börsenauftrag gilt als aktiv, wenn er bereits ins Orderbuch eingestellt wurde, aber noch nicht (vollständig) ausgeführt wurde und weiterhin zur Ausführung zur Verfügung steht.

2.1.1.2 Aufbau

In einem Orderbuch werden die Kauf- und Verkaufsaufträge mit dem Auftragstypen Limitorder gegenüber gestellt. Marketorder werden nicht im Orderbuch angezeigt, da diese wenn möglich sofort ausgeführt werden. Die Verkaufsaufträge befinden sich auf der Ask-Seite und die Kaufaufträge werden auf der Bid-Seite gelistet. Auf beiden

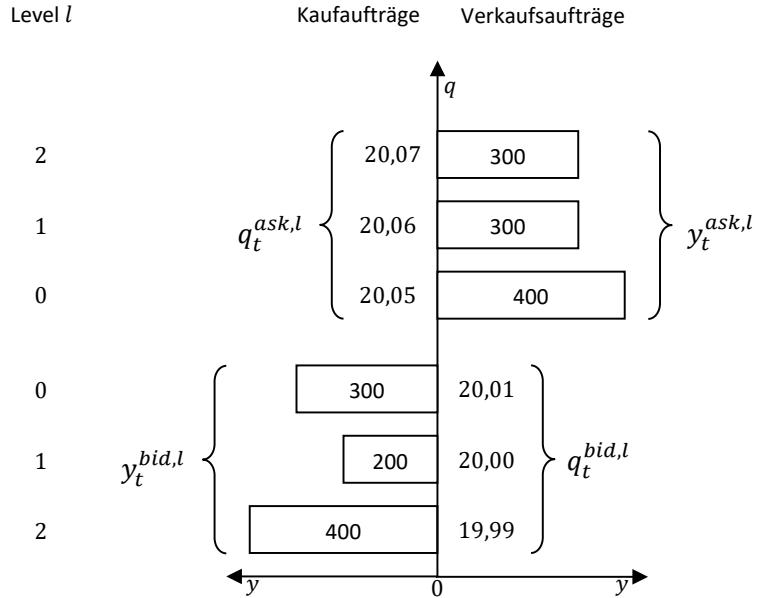


Abbildung 2.1: Darstellung eines Orderbuches in Anlehnung an Kersch (2014)

Seiten werden jeweils die Aufträge mit identischem Limitpreis q^{lmt} aggregiert. Im Orderbuch wird die Auftragsmenge der aggregierten Börsenaufträge sowie deren entsprechender Limitpreis q^{lmt} als Position zusammengefasst. Die im Orderbuch gelisteten Limitpreise werden, je nach Orderbuchseite, als Bidpreise bzw. Askpreise bezeichnet. Die Positionen werden nach dem Preis sortiert; für Verkaufsaufträge ansteigend und für Kaufaufträge absteigend. Den Positionen mit dem höchsten Bidpreis $q_t^{bid,0}$ bzw. dem niedrigsten Askpreis $q_t^{ask,0}$ zum Zeitpunkt t wird der Level 0 zugewiesen. Diese Preise werden auch als Best-Bid bzw. Best-Ask Preis bezeichnet. Der nächstniedrigeren bzw. nächsthöheren Position wird der Level 1 zugewiesen. Dies setzt sich jeweils bis zur letzten Position fort. Der Preis auf einem bestimmten Level l wird mit $q_t^{bid,l}$ bzw. $q_t^{ask,l}$ dargestellt. Die zugehörige Auftragsmenge ist $y_t^{bid,l}$ bzw. $y_t^{ask,l}$. Abbildung 2.1 stellt ein Orderbuch dar.

2.1.1.3 Preisbestimmung

Die Preisbestimmung in einem Orderbuch kann abhängig vom gewählten Handelsplatz variieren. Im Folgenden wird eine vereinfachte Form der Preisbestimmung am Handelsplatz Xetra dargestellt (vgl. O. V. 2015). Bei dem Handelsmodell handelt es sich um auftragsgetriebenen, fortschreitenden Handel (vgl. Zantow und Dinauer

2011, S. 88). Erfolgt zum Zeitpunkt t ein Matching, wird der Ausführungspreis nach folgender Methode bestimmt:

Zunächst wird der Börsenauftrag mit der Position des bestmöglichen Preises, bei einem Verkaufsauftrag $q_t^{bid,0}$ bzw. bei einem Kaufauftrag $q_t^{ask,0}$, verrechnet. Ist der Auftrag nicht vollständig erfüllt, gilt also $y > y_t^{bid,0}$ bzw. $y > y_t^{ask,0}$, so ist nur eine Teilausführung geschehen. Nun werden so lange weitere Teilausführungen zum jeweils nächst niedrigeren Bidpreis $q_t^{bid,l}$ bzw. zum nächst höheren Askpreis $q_t^{ask,l}$ ausgeführt, bis der eingetroffene Auftrag vollständig erfüllt ist oder der Preis $q_t^{bid,l}$ bzw. $q_t^{ask,l}$ zu einem Level l nicht mit den Konditionen des Auftrags vereinbar ist. In diesem Fall wird das Orderbuch um den nicht-ausgeführten Teil ergänzt. Sei a die Anzahl an Teilausführungen und y_i die Anzahl an Anteilen, die mit Teilausführung $i = 0, \dots, a - 1$ gehandelt werden. Sei weiterhin q_i der Ausführungspreis der Teilausführung i . Wird der Auftrag zum Zeitpunkt t vollständig ausgeführt, berechnet sich der durchschnittliche Ausführungspreis \bar{q} eines Auftrages nach:

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=0}^{a-1} q_i \cdot y_i}{\sum_{i=0}^{a-1} y_i} \quad (2.1)$$

mit

$$q_i = \begin{cases} q_t^{bid,i} & , \text{ wenn Verkauf} \\ q_t^{ask,i} & , \text{ wenn Kauf} \end{cases}. \quad (2.2)$$

Aus dem durchschnittlichen Ausführungspreis lässt sich das Volumen Vol eines Börsenauftrags berechnen:

$$Vol = \bar{q} \cdot y. \quad (2.3)$$

2.1.2 Transaktionskosten

Transaktionskosten können in explizite und implizite Transaktionskosten unterteilt werden (vgl. Gomber und Schweickert 2002, S. 486). Explizite Transaktionskosten fallen zusätzlich zum eigentlichen Handel mit anderen Marktteilnehmern an und wirken sich somit negativ auf das bereits erzielte Handelsergebnis aus. Implizite Transaktionskosten entstehen hingegen bereits während des Handels mit anderen Marktteilnehmern. Sie sind somit im erzielten Handelsergebnis eingepreist. Daher ist es schwierig, diese nachzuvollziehen (vgl. Gomber und Schweickert 2002, S. 486-487).

2.1.2.1 Explizite Transaktionskosten

Zu den expliziten Transaktionskosten gehören Gebühren, Provisionen und Steuern (vgl. Gomber und Schweickert 2002, S. 486). Die folgende Darstellung beschränkt sich auf im Börsenhandel anfallende Gebühren. An den Börsen werden vorwiegend zwei Transaktionskostenmodelle verwendet (vgl. Kersch 2014, S. 19). So werden relative Transaktionskosten bezogen auf das gehandelte Volumen mit einem Transaktionskostensatz TKS berechnet oder pro Transaktion wird ein fixer Betrag an Transaktionskosten verlangt. Für die absolut anfallenden relativen Transaktionskosten gilt:

$$TK^{rel,Abs} = Vol \cdot TKS. \quad (2.4)$$

Werden diese durch den Wert des Vermögens W geteilt, ergeben sich die prozentualen Transaktionskosten:

$$TK^{rel,Proz} = \frac{TK^{rel,Abs}}{W}. \quad (2.5)$$

Bei fixen Transaktionskosten wird pro Börsenauftrag ein fixer Betrag TK^{fix} in Rechnung gestellt (vgl. Kersch 2014, S. 19). In der Praxis wird ebenfalls eine Kombination aus den zuvor beschriebenen Gebührenmodellen verwendet¹. Hierbei wird für Börsenaufträge, die ein bestimmtes Volumen nicht überschreiten, ein Fixbetrag als Gebühr verlangt. Wird das Volumen überschritten, werden stattdessen relative Transaktionskosten berechnet.

2.1.2.2 Implizite Transaktionskosten im Handelsprozess

Implizite Transaktionskosten stellen nach Gomber und Schweickert (2002, S. 486) die Differenz zwischen dem Ausführungspreis und dem theoretischen Marktwert dar. Sie umfassen die Liquiditätsprämie, den Market Impact, die Wartekosten und die Opportunitätskosten (vgl. Wagner und Edwards 1993, S. 67 und Gomber und Schweickert 2002, S. 486).

Die Liquiditätsprämie LP entspricht den Kosten, die anfallen, um einen Börsenauftrag sofort auszuführen (vgl. Kersch 2014, S. 22). Sie ergibt sich aus der Differenz des theoretischen Marktwertes q_t^{MW} und dem Best-Ask $q_t^{ask,0}$, bzw. Best-Bid Preis $q_t^{bid,0}$. In der Literatur wird oftmals $q_t^{MW} = \frac{q_t^{ask,0} + q_t^{bid,0}}{2}$ für den theoretischen Marktwert

¹z. B. bei den Finanzdienstleister *Interactive Brokers* oder *Sino AG*.

angenommen (vgl. z. B. Hasbrouck 1990, S. 230, Handa und Schwartz 1996, S. 322, Bessembinder und Kaufman 1998, S. 66 und Gomber und Schweickert 2002, S. 468). Für die Liquiditätsprämie gilt:

$$LP = \begin{cases} y \cdot (q_t^{ask,0} - q_t^{MW}) & , \text{ wenn Kauforder} \\ y \cdot (q_t^{MW} - q_t^{bid,0}) & , \text{ wenn Verkaufsorder} \end{cases} . \quad (2.6)$$

Market Impact Kosten MI , treten dann auf, wenn der Best-Bid $q_t^{bid,0}$ bzw. Best-Ask Preis $q_t^{ask,0}$ zum Zeitpunkt der Orderausführung t , vom durchschnittlichen Ausführungspreis (2.1) abweicht. Diese Kosten entstehen somit nur, wenn die Anteile y , die mit einem Börsenauftrag gehandelt werden sollen, die zum Best-Bid bzw. Best-Ask Preis angebotene Menge übersteigt, d. h. $y > y_t^{bid,0}$ bzw. $y > y_t^{ask,0}$. Daraus resultieren die Market Impact Kosten (vgl. Aldridge 2010, S. 291):

$$MI = \begin{cases} y \cdot (q_t^{ask,0} - \bar{q}) & , \text{ wenn Kauforder} \\ y \cdot (\bar{q} - q_t^{bid,0}) & , \text{ wenn Verkaufsorder} \end{cases} . \quad (2.7)$$

Da sich durch die Ausführung von Börsenaufträgen die Positionen im Orderbuch verändern, werden die nachfolgenden Handelsgeschäfte durch den Market Impact beeinflusst. Dabei kann der Market Impact in eine temporäre und eine permanente Komponente unterteilt werden (vgl. Almgren und Chriss 2001, S. 10 und Kissel 2006, S. 11). Ist ein Market Impact vollständig temporär, stellen sich mit fortschreitender Zeit die Preise zum Zeitpunkt vor der Orderausführung wieder ein. Hingegen sorgt die permanente Komponente für eine generelle Veränderung des Best-Bid bzw. Best-Ask Preises und des theoretischen Marktwertes (vgl. Almgren und Chriss 2001, S. 8 und Kissell und Malamut 2005, S. 5). So können durch eine abweichende Preisentwicklung aufgrund des Market Impacts weitere Kosten resultieren.

Wartekosten entstehen dadurch, dass sich in der Zeitspanne zwischen dem Zeitpunkt t , zu dem eine Handelsentscheidung getroffen wird, und dem Zeitpunkt $t' > t$, zu welchem der dazugehörige Börsenauftrag im Orderbuch eingestellt wird, die Positionen im Orderbuch ändern können (vgl. Aldridge 2010, S. 288-289). Für die Wartekosten WK gilt (vgl. Kersch 2014, S. 21):

$$WK = \begin{cases} y \cdot (q_{t'}^{ask,0} - q_t^{ask,0}) & , \text{ wenn Kauforder} \\ y \cdot (q_t^{bid,0} - q_{t'}^{bid,0}) & , \text{ wenn Verkaufsorder} \end{cases} . \quad (2.8)$$

Opportunitätskosten ergeben sich aus nicht (vollständig) ausgeführten Börsenaufträgen. Eventuelle Gewinne können nicht realisiert werden. Eine Methode zur

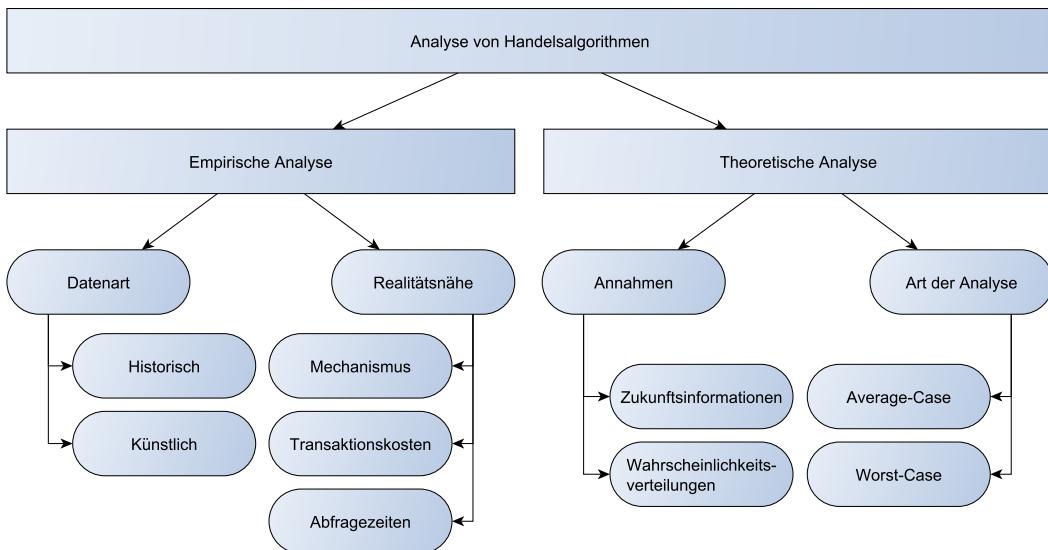


Abbildung 2.2: Vereinfachte Übersicht über empirische und theoretische Analysearten von Handelsalgorithmen

Bestimmung der Opportunitätskosten findet sich bei Kissel (2006, S. 9).

2.2 Analysemethoden für Handelsalgorithmen

Algorithmen werden analysiert, um Aussagen über ihr Verhalten zu erhalten. Es können sowohl empirische als auch theoretische Analysen erfolgen. Abbildung 2.2 stellt die beiden Analysen dar und zeigt, durch welche Merkmale sich diese beschreiben lassen. Die Merkmale werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

Die Ziele der Analyse von Algorithmen ist (1) die Feststellung, ob ein Algorithmus entsprechend persönlicher Präferenzen annehmbare Eigenschaften aufweist, und (2) der Vergleich von Algorithmen. Die Ergebnisse aus der Analyse sind ausgewählte Kennzahlen, auch Performanzmaße genannt.

Bevor Methoden zur Analyse und zum Vergleich von Algorithmen vorgestellt werden, wird zunächst erläutert, welche Art von Problemen diese lösen. Das Online-Conversion Problem stellt ein Optimierungsproblem dar. Diese werden im folgenden Abschnitt definiert.

2.2.1 Vorüberlegungen

Bei Optimierungsproblemen wird eine konkrete Ausprägung von Entscheidungsvariablen \mathbf{x} gesucht, die eine stetige Zielfunktion $Z(\mathbf{x})$ minimiert oder maximiert. Eine konkrete Ausprägung der Entscheidungsvariablen wird auch als Lösung bezeichnet. Die Lösung \mathbf{x} muss im Lösungsraum Ψ sein, der durch eine Menge von Nebenbedingungen ξ definiert wird, d. h. $\mathbf{x} \in \Psi$. Die optimale Lösung \mathbf{x}^* entspricht der Lösung, welche die Zielfunktion entweder minimiert oder maximiert. Die formale Beschreibung eines Optimierungsproblems ist

$$\begin{aligned} \min \quad & Z(\mathbf{x}) \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{x} \in \Psi \end{aligned}$$

für ein Minimierungsproblem und

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\mathbf{x}) \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{x} \in \Psi \end{aligned}$$

für ein Maximierungsproblem (vgl. Horst und Tuy 1996, S. 4)². Ein mathematisches Programm (MP), das zur mathematischen Darstellung eines Optimierungsproblems dient, hat somit die Form eines Tupels $P = \langle \mathbf{x}, \xi, Z(\mathbf{x}) \rangle$. Einige Autoren unterscheiden zwischen allgemeinen Nebenbedingungen und dem Definitionsbereich der Entscheidungsvariablen (vgl. z. B. Tsang 1993, S. 1, Rader 2010, S. 6 und Dochow 2016, S. 16). Da beide jedoch zu erfüllende Bedingungen an eine Lösung darstellen und somit den Lösungsraum Ψ bestimmen, wird hier dieser Unterscheidung nicht gefolgt. Die Zielfunktion und die Nebenbedingungen hängen von einer Menge problemspezifischer Parameter Γ ab (vgl. Fourer et al. 1990, S. 525).

Abhängig davon, ob die Parameter Γ zu Beginn vollständig bekannt sind, kann zwischen Offline- und Online-Problemen unterschieden werden (vgl. Karp 1992, Borodin und El-Yaniv 1998 und Albers 2003). Offline-Probleme sind Optimierungsprobleme, bei denen zum Beginn der Entscheidungsfindung die Parameter Γ vollständig zur Verfügung stehen.

Die zweite Klasse von Optimierungsproblemen sind Online-Probleme. Bei diesen sind Entscheidungen zu treffen, ohne dass die Parameter Γ vollständig bekannt sind. In solchen Fällen wird eine Teilmenge der Parameter $\gamma \subseteq \Gamma$ in T Teile zerteilt und sukzessive zur Verfügung gestellt. Nachdem ein Teil zum Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$

²u. d. N. ist die Abkürzung für: unter den Nebenbedingungen.

erhalten wurde, ist eine Entscheidung auf Basis unvollständiger Information zu treffen. Bei denen in dieser Arbeit untersuchten Handelsproblemen wird zu jedem Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ ein Preis angeboten. Dann wird eine Entscheidung getroffen wie gehandelt wird, ohne dass die künftigen Preise bekannt sind. Handelsprobleme stellen daher Online-Probleme dar.

Algorithmen, die zur Lösung von Online- bzw. Offline-Probleme dienen, werden als Online- bzw. Offline-Algorithmen bezeichnet.

2.2.2 Arten der theoretischen Analyse

Mit der theoretischen Analyse sollen Eigenschaften von Algorithmen entdeckt und bewiesen werden. Dafür werden bei Handelsproblemen zumeist Annahmen über die Preisentwicklung der Anlagen benötigt. Dies können Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder Zukunftsinformationen sein. Bei Zukunftsinformationen werden bspw. Extremwerte, innerhalb denen sich der Preis bewegen kann, angenommen.

Zudem kann die theoretische Analyse nach der Art unterschieden werden. So kann eine Worst-Case Analyse (vgl. Sleator und Tarjan 1985) durchgeführt werden, in der der schlimmst mögliche Fall analysiert wird. Dies dient der Einschätzung des Risikos. Eine andere Art der Analyse ist die Average-Case Analyse (vgl. Fujiwara et al. 2011). In dieser Arbeit wird im Rahmen der theoretischen Analyse nur eine Worst-Case Analyse durchgeführt. Daher wird auf eine Darstellung von theoretischer Average-Case Analyse verzichtet. Eine Ausnahme bildet der Bayes'sche Ansatz, der zwar eine Average-Case Analyse darstellt, sich jedoch mit Ansätzen der Worst-Case Analyse kombinieren lässt.

Im Folgenden werden ausgewählte Methoden der Worst-Case Analyse vorgestellt. Die dargestellten Formeln gelten, wenn nicht anders angegeben, für Maximierungsprobleme. Weitere Methoden finden sich bei Ben-David und Borodin (1994), Kenyon (1996), Boyar und Favrholdt (2007) und Wang et al. (2016).

2.2.2.1 Bayes'sche Analyse

Bei der Bayes'schen Analyse wird eine Annahme über die Wahrscheinlichkeitsverteilung getroffen. Zudem wird angenommen, dass diese statisch ist. Auf Basis dieser Annahme kann die durchschnittliche Performanz berechnet werden. Einen Überblick über die Methoden der Bayes'schen Analyse liefern Lippman und McCall (1981). Obwohl die Annahmen bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung als kritisch an-

zusehen sind, war dies über Dekaden der dominante Ansatz für die Analyse von Conversion Algorithmen (vgl. El-Yaniv 1998, S. 28). Chou et al. (1995, S. 467) merken an, dass eine solche Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn sie existiert, schwer zu identifizieren sei.

2.2.2.2 Kompetitive Analyse

Bei der kompetitiven Analyse wird die Anwendung eines Online-Algorithmus als ein Request-Answer-Game aus der Spieltheorie interpretiert (vgl. Ben-David et al. 1994, S. 2). Grundlage der kompetitiven Analyse ist die Annahme, dass ein allwissender Gegenspieler (OPT) sowohl die optimale Offline-Lösung erzielt als auch die Inputsequenz wählen kann. Bei Auswahl dieser kennt OPT den Algorithmus, den der Online-Spieler (ON) verwendet. Ziel von OPT ist es, eine Inputsequenz I^{wc} zu wählen, welche ihn verhältnismäßig am besten zu ON stellt (vgl. Schmidt 2017, S. 1110). Solche Inputsequenzen werden als Worst-Case-Sequenzen (WC-Sequenzen) bezeichnet. Verfügt ON über Zukunftsinformationen, ist OPT in seinen Möglichkeiten, die Inputsequenz zu gestalten, eingeschränkt, da deren Eigenschaft nicht den Informationen von ON widersprechen darf.

2.2.2.2.1 Kompetitive Rate

Das Ergebnis der kompetitiven Analyse ist die kompetitive Rate r . Diese entspricht einer Garantie für die Lösungsgüte eines Online-Algorithmus. Seien $OPT(I)$ und $ON(I)$ der Wert eines Performanzmaßes, den OPT bzw. ON auf Sequenz I erzielt. Sei weiterhin Ω die Menge aller möglichen Inputsequenzen. Ein Online-Algorithmus gilt als r -kompetitiv, wenn für jede Inputsequenz $I \in \Omega$ gilt (vgl. Borodin und El-Yaniv 1998, S. 3):

$$ON(I) \geq \frac{OPT(I)}{r} \quad (2.9)$$

für Maximierungsprobleme und

$$ON(I) \leq OPT(I) \cdot r \quad (2.10)$$

für Minimierungsprobleme. Für die kompetitive Rate gilt $r \geq 1$, wobei kleinere r besser sind. Sie kann als Risikomaß interpretiert werden (vgl. al-Binali 1999, S. 99). Die kompetitive Rate gilt für alle möglichen Inputsequenzen Ω und damit auch für alle möglichen Verteilungen (vgl. Fiat und Woeginger 1998, S. 4). Der Vorteil der

kompetitiven Analyse ist daher, dass keine Annahme über eine Verteilung getroffen werden muss, wie es beim Bayes'schen Ansatz notwendig ist.

Algorithmen, für die eine Garantie hinsichtlich der Lösungsgüte gegeben werden kann, werden als kompetitive Algorithmen bezeichnet. Hingegen werden Algorithmen, für die keine Lösungsgüte angegeben werden kann, als Heuristiken bezeichnet. Ein Online-Algorithmus wird als optimal bezeichnet, wenn gezeigt werden kann, dass er die geringst mögliche kompetitive Rate aufweist.

2.2.2.2 Online-Algorithmen und Optimalität

Eine Methode, die in der Literatur oftmals verwendet wird, um den optimalen Online-Algorithmus zu finden bzw. dessen Optimalität zu beweisen, ist das Error Balancing (vgl. z. B. El-Yaniv 1998, Lorenz et al. 2009 und Zhang et al. 2011). Error Balancing ist dann möglich, wenn eine Entscheidung zu zwei negativ korrelierten Fehlern E_1 und E_2 führen kann. Sei Ω^i die Menge an Inputsequenzen, die zum Fehler E_i mit $i = 1, 2$ führt. Dann gilt für die maximale Ausprägung des Fehlers $E_i^{max} = \max_{I \in \Omega^i} \left\{ \frac{OPT(I)}{ON(I)} \right\}, i = 1, 2$. Die kompetitive Rate entspricht dann der größeren maximalen Ausprägung der beiden Fehler $r = \max\{E_1^{max}, E_2^{max}\}$.

Da die Fehler negativ korreliert sind, kann das Maximum der jeweiligen maximalen Ausprägungen beider Fehler minimiert werden, indem die Entscheidung so getroffen wird, dass die maximalen Ausprägungen der beiden Fehler gleich groß sind, d. h. $E_1^{max} = E_2^{max}$. Dies folgt daraus, dass jede Abweichung von der Entscheidung mit ausbalancierten Fehlern dazu führt, dass einer der beiden Fehler und somit die kompetitive Rate wächst. Daher sind Entscheidungen mit ausbalancierten Fehlern optimal.

Lorenz et al. (2009), Zhang et al. (2011) und Schmidt (2017) zeigen, dass auch das Ausbalancieren von mehr als zwei Fehlern zu optimalen Online-Algorithmen führen kann.

2.2.2.3 Hybride Analyse

Raghavan (1992) gibt eine Analysemöglichkeit an, die nach Chou et al. (1995, S. 467) als Kombination aus Bayes'scher und kompetitiver Analyse verstanden werden kann. Die Inputsequenz wird von einem allwissenden Gegenspieler festgelegt. Jedoch muss dieser die Inputsequenz so wählen, dass diese gegebenen statistischen Eigenschaften genügt.

Koutsoupias und Papadimitriou (2000, S. 301) treffen die Annahme, dass zumindest eine Klasse an Verteilungen bestimmt werden kann, unter denen sich die eigentliche Verteilung befindet. Es wird also nur eine Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ der Inputsequenzen berücksichtigt, deren statistische Eigenschaften mit mindestens einer von mehreren ausgewählten Verteilungen konform sind. So wird eine Garantie für die Lösungsgüte angegeben, die jedoch auf bestimmte Inputsequenzen beschränkt ist. Diese wird als Performanzrate bezeichnet:

$$PR(\Omega') = \max_{I \in \Omega'} \frac{OPT(I)}{ON(I)}. \quad (2.11)$$

Die Performanzrate stellt eine Untergrenze für die kompetitive Rate dar.

2.2.2.4 Komparative Analyse

In der komparativen Analyse wird der verwendete Online-Algorithmus ON mit einem Vergleichsalgorithmus B oder einer Menge an Vergleichsalgorithmen \mathfrak{B} verglichen (vgl. Koutsoupias und Papadimitriou 2000, S. 302). Kennzahl der komparativen Analyse ist die komparative Rate:

$$KR(\mathfrak{B}) = \max_{B \in \mathfrak{B}} \max_{I \in \Omega} \frac{B(I)}{ON(I)}. \quad (2.12)$$

Diese gibt das größtmögliche Verhältnis an, das zwischen Algorithmen aus der Menge \mathfrak{B} und ON entstehen kann. Enthält \mathfrak{B} den optimalen Offline-Algorithmus, entspricht $KR(\mathfrak{B})$ der kompetitiven Rate r von ON . Daraus folgt, dass die kompetitive Analyse ein Spezialfall der komparativen Analyse ist (vgl. Koutsoupias und Papadimitriou 2000, S. 302). Dochow (2016, S. 72) kombiniert die Performanzrate (2.11) und die komparative Rate (2.12) zur komparativen Performanzrate $KPR(\mathfrak{B}, \Omega')$. Mit dieser können ausgewählte Algorithmen auf ausgewählten Inputsequenzen miteinander verglichen werden:

$$KPR(\mathfrak{B}, \Omega') = \max_{B \in \mathfrak{B}} \max_{I \in \Omega'} \frac{B(I)}{ON(I)}. \quad (2.13)$$

2.2.3 Arten der empirischen Analyse

Bei der empirischen Analyse wird die Anwendung der Algorithmen auf eine Vielzahl von historischen oder künstlichen Kursverläufen simuliert. Je größer die Anzahl N der verwendeten Kursverläufen ist und umso mehr Ergebnisse vorliegen, umso besser

lässt sich deren zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der relativen Häufigkeit abschätzen (vgl. Bortz 2005, S. 52).

Die empirische Analyse lässt sich in zwei Phasen unterteilen. Zunächst ist eine Modellierung notwendig. Diese gibt vor, auf Basis welcher Daten Simulationen durchgeführt werden, welche Performanzmaße verwendet werden und unter welchen Rahmenbedingungen die Simulationen erfolgen. Aus der Modellierung folgt somit, was simuliert wird und auf welche Weise dies geschieht. Das erstellte Modell wird auch als Testdesign bezeichnet. In der zweiten Phase können basierend auf den Ergebnissen der Simulationen Hypothesen aufgestellt werden. Diese können mit Hypothesentests überprüft werden. Es ist zu beachten, dass Ergebnisse von Hypothesentests einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit α unterliegen.

2.2.3.1 Modellierung

Bei der Modellierung wird der Börsenhandel nachgebildet, um festzustellen, wie Algorithmen sich verhalten, wenn diese an der Börse eingesetzt werden. Zumeist ist bei dem erstellten Modell eine Abstraktion notwendig, da eine genaue Nachbildung des Systems Börsenhandel zu aufwändig wäre bzw. aufgrund von nicht einsehbaren Daten, wie bspw. inaktive Börsenaufträge im Orderbuch, nicht möglich ist. Die Modellierung des Börsenhandels zeichnet sich durch die Attribute Realitätsnähe und Art der verwendeten Daten aus (vgl. Abbildung 2.2).

2.2.3.1.1 Realitätsnähe

Aus der Literatur lassen sich drei Attribute feststellen, welche die Realitätsnähe bestimmen: Mechanismus, Transaktionskosten und Abfragezeiten. Unter dem Attribut Mechanismus wird verstanden, wie die Ausführungspreise bestimmt werden. So nutzen einige Autoren vereinfachende Annahmen zur Preisfeststellung (vgl. z. B. Borodin et al. 2004, Agarwal et al. 2006 und Li et al. 2012). Andere bilden den Börsenmechanismus, das Orderbuch, zur Preisfeststellung ab (vgl. z. B. Newmyvaka et al. 2005 und Kersch 2014).

Das zweite Attribut wird durch die Transaktionskosten repräsentiert. Die Analyse kann sowohl explizite als auch implizite Transaktionskosten berücksichtigen. Während einige Studien vollständig auf die Berücksichtigung von Transaktionskosten verzichten (vgl. z. B. Helmbold et al. 1998, Brock et al. 1992 und Mills 1997), treffen andere vereinfachende Annahmen über deren Gestaltung (vgl. z. B. Ratner und Leal 1999, Bokhari et al. 2005 und Schulmeister 2009). Zwischen den Attributen Mechanismus

und Transaktionskosten bestehen Abhängigkeiten. So geht mit der Verwendung von Orderbuchdaten die Berücksichtigung impliziter Transaktionskosten einher.

Das letzte Attribut sind die Abfragezeiten. Hierbei werden zwei Ausprägungen unterschieden. Bei der ersten Ausprägung werden nur Kurse zu bestimmten Zeitpunkten berücksichtigt. In dem Fall wird die Kursentwicklung zwischen diesen Zeitpunkten ignoriert. Bei der anderen Ausprägung wird jede Kursänderung berücksichtigt. Dies ist notwendig, um den Handel mit anderen Ordertypen als der Marketorder zu simulieren (vgl. Kersch 2014, S. 156).

Mit steigender Realitätsnähe steigt ebenfalls die Qualität der Analyse. Der steigenden Qualität steht der steigende Aufwand der Datenbeschaffung, der Datenverwaltung sowie der Ausführung der Analyse gegenüber. Dies beansprucht sowohl Zeit als auch große Mengen an Speicherplatz. Daher wird oftmals die Qualität der Daten eingeschränkt. So können zum Sparen von Speicherplatz unvollständige Daten in Kauf genommen werden, wie bspw. eine unvollständige Orderbuchtiefe (vgl. Kersch 2014). Dies kann zu verfälschten Ergebnissen führen. Dennoch kann eine Analysemethode mit geringer Realitätsnähe nützlich sein. Die mit geringer Realitätsnähe erzielten Testergebnisse sind als Obergrenzen zu verstehen und liefern einen ersten Einblick in die Performanz der Algorithmen (vgl. Dochow 2016, S. 136).

2.2.3.1.2 Datenarten

Die empirische Analyse erfolgt auf Basis historischer oder künstlicher Daten. Die Verwendung von historischen Daten wird als Backtesting bezeichnet. Dabei wird das Verhalten des Handelsalgorithmus auf historischen Daten simuliert (vgl. Ni und Zhang 2005, S. 126). Diese werden in mehrere Preissequenzen unterteilt, damit die Algorithmen auf mehreren Instanzen getestet werden können.

Bei der Verwendung von künstlichen Daten werden Preis-Vorhersage-Modelle verwendet (vgl. z. B. Brock et al. 1992, Campbell et al. 1993, Kivinen und Warmuth 1997 und Wang et al. 2014). Bekannte Modelle sind bspw. das Cox-Ross-Rubinstein Modell (vgl. Cox et al. 1979) und das Black-Scholes-Modell (vgl. Black und Scholes 1973). Bei diesen Modellen werden aus historischen Daten statistische Eigenschaften des Preisverlauf ermittelt und in Abhängigkeit von Zufallsvariablen können unterschiedliche Preisverläufe modelliert werden. Diese Modelle fußen auf der Annahme, dass der zukünftige Preisverlauf denselben statistischen Eigenschaften folgt. Modelle zur Preisvorhersage auf Basis von Zeitreihenanalyse sind u. a. ARMA (vgl. Neusser 2011), ARCH (vgl. Engle 1982) und GARCH (vgl. Bollerslev 1986). Einige Preisvorhersagen

basieren auf dem Ansatz des Mean-Reversion. Hier wird angenommen, dass, wenn der Preis sich entgegen der statistischen Eigenschaften entwickelt, sich beispielsweise vom bisherigen Trend entfernt, diese Abweichung kurzfristig wieder korrigiert wird (vgl. Vveinhardt et al. 2016, S. 494). Empirische Studien von u. a. De Bondt und Thaler (1985), Balvers et al. (2000) sowie Wang et al. (2015) stützen die These, dass Preisverläufe der Mean-Reversion unterliegen. Zudem existieren Ansätze, die mit Hilfe künstlicher Intelligenz Preisentwicklungen prognostizieren (vgl. z. B. Hadavandi et al. 2010, Mostafa 2010 und Kazem et al. 2013). Jedoch ist nicht abschließend geklärt, ob Preisvorhersagen überhaupt möglich sind. So besagt die Random-Walk Theorie, dass Preisentwicklungen völlig zufällig geschehen. Somit ließen sich diese nicht prognostizieren. Jedoch ist diese Theorie sehr umstritten (vgl. z. B. Poterba und Summers 1988, Lo und MacKinlay 1988, Al-Jafari und Abdulkadhim Altaee 2011, Nwidobie 2014 und Said und Harper 2015). Sie widerspricht den Ergebnissen vieler empirischer Studien, wie bspw. den zuvor aufgelisteten, über Mean-Reversion. Eine ausführlichere Auseinandersetzung mit der Literatur zur Random-Walk Theorie findet sich bei Dorfleitner und Klein (2002).

Weitere Methoden, künstliche Daten zu erzeugen, sind die sogenannten Sample-Techniken. Zu diesen gehören u. a. Bootstrapping und Jackknife (vgl. Efron 1979). Bei diesen Techniken werden keine statistischen Eigenschaften aus historischen Daten berechnet, sondern aus den historischen Kursverläufen werden durch Weglassen und Neuarrangieren von Preisen künstliche Kursverläufe erzeugt.

2.2.3.2 Hypothesentests

Um festzustellen, ob die empirisch ermittelten Ergebnisse darauf schließen lassen, dass ein Algorithmus A hinsichtlich eines gewählten Performanzmaßes durchschnittlich bessere Ergebnisse erzielt als eine gewählte Benchmark B , können Hypothesentests verwendet werden. Dazu werden entsprechende Hypothesen formuliert, die anschließend mit Hypothesentests überprüft werden können. Diese schließen mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α , auch Signifikanzniveau genannt, darauf, ob eine Hypothese anzunehmen oder abzulehnen ist. Für die Anwendung von Hypothesentests werden zwei gegensätzliche Hypothesen benötigt. Die Hypothese H_1 entspricht der aufgestellten Hypothese, die überprüft werden soll. Die Nullhypothese H_0 stellt das Gegenteil dieser dar.

Je nach der gewählten Hypothese H_1 ist entweder ein links-, rechts- oder beidseitiger Hypothesentest zu verwenden (Bortz 2005, S. 116). Mit links- bzw. rechtsseitigen

Hypothesentests lässt sich überprüfen, ob ein Algorithmus durchschnittlich schlechtere bzw. bessere Ergebnisse erzielt. Mit beidseitigen Hypothesentests lässt sich hingegen überprüfen, ob die durchschnittlichen Ergebnisse gleich sind. Da überprüft werden soll, ob A einen höheren Erwartungswert bzw. Median als B aufweist, werden im Rahmen der Arbeit rechtsseitige Hypothesentests dargestellt und verwendet.

Mit Hilfe von Hypothesentests kann ermittelt werden, ob die Nullhypothese verworfen werden sollte. Dafür wird die entsprechende Teststatistik berechnet. Das Ergebnis dieser wird mit einem kritischen Wert (einseitiger Hypothesentest) oder einer kritischen Region (beidseitiger Hypothesentest) verglichen. Bei rechtsseitigen Hypothesentests wird die Nullhypothese verworfen, wenn die berechnete Teststatistik den kritischen Wert übersteigt.

Je nach Situation eignen sich unterschiedliche Hypothesentests. Hypothesentests verfügen über Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen, wenn sie angewendet werden sollen. Ob die entsprechenden Voraussetzungen zutreffen, muss gegebenenfalls wiederum durch Hypothesentests geprüft werden.

Die Literatur zur empirischen Analyse von Handelsalgorithmen ist bezüglich der Auswahl eines Hypothesentests zur Überprüfung der Hypothesen zwiegespalten. So herrscht weder Konsens darüber, ob Hypothesentests für abhängige oder unabhängige Stichproben verwendet werden sollen, noch besteht Einigkeit darüber, ob eine Normalverteilung angenommen werden kann oder nicht. So nutzen viele Autoren einen t-test, der für unabhängige, normalverteilte Stichproben verwendet wird (vgl. z. B. Brock et al. 1992, Hudson et al. 1996, Mills 1997 und Li et al. 2012). Von anderen Autoren (vgl. z. B. Chua et al. 2006, Narayan et al. 2014 und Hejase et al. 2017) wird hingegen ein gepaarter t-test für abhängige Stichproben, auch Differenzentest genannt, verwendet. Für diesen gilt, dass die Differenzen der Messreihen normalverteilt sein müssen. Bortz (2005, S. 145) weist darauf hin, dass für große Stichprobenumfänge der entsprechende Test auch dann anwendbar ist, wenn die Differenzen der Messwerte nicht normalverteilt sind, da dieser Test eine hohe Robustheit aufweist. Bei kleinen Stichproben, bei denen die Messwerte zudem negativ miteinander korrelieren, verliert der Test jedoch an Aussagekraft. In diesem Fall kann ersatzweise der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test verwendet werden. Bei diesem wird nicht der Erwartungswert, sondern der Median verglichen. Dieser Test wird bspw. von Berutich et al. (2016) und Dochow (2016) verwendet. Obizhaeva und Wang (2013) und Kersch (2014) nutzen sowohl den Differenzentest als auch den Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test. Mit dem Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test kann somit die Robustheit der Ergebnisse des

Differenzentest überprüft werden (vgl. Akbar und Baig 2010, S. 109).

Im Rahmen dieser Arbeit werden Renditekennzahlen von unterschiedlichen Algorithmen, die auf denselben Preissequenzen entstehen, miteinander verglichen. Dies erfüllt die Kriterien für abhängige Stichproben nach Bortz (2005, S. 143). Daher werden Hypothesentest für abhängige Stichproben für geeigneter als Hypothesentests für unabhängige Stichproben angesehen (vgl. Kersch 2014, S. 175).

Im Folgenden werden der Jarque-Bera Test zum Test auf Normalverteilung, der Differenzentest zum Test des Erwartungswertes und der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test zum Test des Medians vorgestellt. Zunächst werden jedoch die statistischen Kennzahlen, die für die Anwendung der Hypothesentests benötigt werden, dargestellt.

2.2.3.2.1 Statistische Kennzahlen

Das arithmetische Mittel \bar{x} ist ein Lagemaß und entspricht dem Durchschnitt von N beobachteten Werten x_j mit $j = 1, \dots, N$. Bei einer ausreichend großen Anzahl an Beobachtungen kann entsprechend dem Gesetz der großen Zahlen dieses als Schätzer für den Erwartungswert μ verwendet werden (vgl. Teschl und Teschl 2006, S. 256). Für das arithmetische Mittel gilt:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{N}. \quad (2.14)$$

Der Median ME ist ebenfalls ein Lagemaß. Dieses ist jedoch im Gegensatz zum arithmetischen Mittel gegenüber einzelnen Ausreißern unempfindlich (vgl. Schlittgen 2008, S. 40-41). Zur Berechnung des Medians werden die N beobachteten Werte so sortiert, dass gilt $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$. Für den Median gilt:

$$ME = \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}}, & \text{wenn } N \text{ ungerade} \\ \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N+2}{2}}}{2}, & \text{wenn } N \text{ gerade} \end{cases}. \quad (2.15)$$

Die Standardabweichung σ stellt ein Streuungsmaß dar. Je höher dieses ist, umso stärker schwanken die beobachteten Werte um den Erwartungswert (vgl. Bourier 2013, S. 101). Sie berechnet sich nach

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2}. \quad (2.16)$$

Wird die Standardabweichung auf Basis einer Stichprobe abgeschätzt, ist in Formel (2.16) der Term $\frac{1}{N}$ durch $\frac{1}{N-1}$ zu ersetzen (vgl. Bourier 2013, S. 224).

Die Schiefe ν stellt die Abweichung von der Symmetrie einer Verteilung dar (vgl. Lehn und Wegmann 2006, S. 62). Bei einer symmetrischen Verteilung sind die Werte gleichmäßig um den Erwartungswert verteilt. Bei unsymmetrischen Verteilungen kann zwischen rechtsschiefen und linksschiefen Verteilungen unterschieden werden. Für die Schiefe gilt:

$$\nu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{x_j - \bar{x}}{\sigma} \right)^3. \quad (2.17)$$

Die Kurtosis κ oder auch Wölbung gibt an, wie steil die Verteilungsfunktion verläuft. Mit steigender Wölbung verläuft die Verteilungsfunktion steiler. Das bedeutet, dass bei einer hohen Wölbung der zentrale Bereich der Verteilungsfunktion stark besetzt ist (vgl. Mittag 2017, S. 202). Für die Kurtosis gilt:

$$\kappa = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{x_j - \bar{x}}{\sigma} \right)^4. \quad (2.18)$$

2.2.3.2.2 Jarque-Bera Test

Der Jarque-Bera Test von Jarque und Bera (1980) dient dazu, zu überprüfen, ob die zu prüfende Wertereihe normalverteilt ist. Die Hypothesen sind wie folgt formuliert:

$$\begin{aligned} H_0 : & \text{ Normalverteilt} \\ H_1 : & \text{ Nicht Normalverteilt} \end{aligned}$$

Der Test überprüft anhand der Schiefe und der Kurtosis, ob eine Normalverteilung vorliegt. Dazu wird die Teststatistik berechnet:

$$TS_J = \frac{N}{6} \cdot \left(\nu^2 + \frac{(\kappa - 3)^2}{4} \right). \quad (2.19)$$

Deren Ergebnis muss nun mit dem kritischen Wert $krit_J$ verglichen werden. Dieser ist der Chi-Quadrat-Verteilung für das entsprechende α sowie 2 Freiheitsgrade zu entnehmen (vgl. Rachev et al. 2010, S. 572). Gilt $TS_J > krit_J$, wird die Annahme der Normalverteilung verworfen.

2.2.3.2.3 Differenzentest

Der Differenzentest ist ein Hypothesentest für abhängige Stichproben, mit dem Stichprobenmittelwerte verglichen werden können (vgl. Bortz 2005, S. 143-144).

Eine Voraussetzung für die Anwendung ist die Normalverteilung der Differenzen der Stichprobenpaare. Seien x_j^A bzw. x_j^B die beobachteten Werte eines Algorithmus A bzw. einer Benchmark B mit $j = 1, \dots, N$ und seien $E[x^A]$ bzw. $E[x^B]$ die Erwartungswerte der jeweiligen Wertereihen. Zunächst werden die Hypothesen formuliert:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & E[x^A] \leq E[x^B] \\ H_1 : \quad & E[x^A] > E[x^B] \end{aligned} .$$

Nachdem das Signifikanzniveau α bestimmt ist, wird die jeweilige Differenz der abhängigen Werte aus beiden Wertreihen ermittelt:

$$x_j^{A,B} = x_j^A - x_j^B. \quad (2.20)$$

Von diesen wird der Mittelwert $\bar{x}^{A,B}$ gebildet:

$$\bar{x}^{A,B} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j^{A,B}}{N}. \quad (2.21)$$

Im Anschluss wird die Standardabweichung der Differenzen gebildet:

$$\sigma_{Dif} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{j=1}^N (x_j^{A,B} - \bar{x}^{A,B})^2}. \quad (2.22)$$

Mit den Formeln (2.21) und (2.22) lässt sich die Teststatistik berechnen:

$$TS_D = \frac{\bar{x}^{A,B}}{\sigma_{Dif}} \cdot \sqrt{N}. \quad (2.23)$$

Der kritische Wert $krit_D$ ist aus der Student-t Verteilung für den Freiheitsgrad $Df = N - 1$ und α zu entnehmen. Gilt $TS_D > krit_D$, so ist die Nullhypothese abzulehnen.

2.2.3.2.4 Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

Der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test (vgl. Büning und Trenkler 1994, S. 171-174) ist ein verteilungsfreier Hypothesentest für abhängige Stichproben. Im Gegensatz zum Differenzentest, welcher testet, ob der Erwartungswert eines Algorithmus größer ist als der Erwartungswert eines anderen Algorithmus, trifft der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test eine Aussage über den Median. Sei $ME[]$ der Median einer Wertereihe, dann sind die aufgestellten Hypothesen:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & ME[x^A] \leq ME[x^B] \\ H_1 : \quad & ME[x^A] > ME[x^B] \end{aligned}.$$

Abhängig von N können zwei unterschiedliche Vorgehensweisen zur Bestimmung der Signifikanz unterschieden werden. Im Folgenden wird nur die Vorgehensweise für $N > 50$ vorgestellt, da nur diese in der Arbeit benötigt wird.

Um die Teststatistik zu ermitteln, wird die Distanz der abhängigen Werte ermittelt:

$$D_j = |x_j^A - x_j^B|. \quad (2.24)$$

Gilt $D_j = 0$, wird das entsprechende Wertepaar aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Die verbleibenden N' Werte werden so umsortiert, dass gilt, $D_1 \leq D_2, \dots, \leq D_{N'}$. Jedem Wert wird ein Rang zugewiesen. Der geringste Wert erhält den Rang 1, der höchste den Rang N' . Sind Abstände identisch, wird die mittlere Rangzahl zugewiesen. Die Funktion *Rang()* gibt an, welchen Rang die Distanz eines Wertepaares aufweist. Nachdem die Ränge verteilt sind, wird die Rangsumme der positiven Elemente W^+ bestimmt:

$$W^+ = \sum_{j=1}^{N'} Rang(D_j) \cdot \mathbf{1}^j \quad (2.25)$$

mit

$$\mathbf{1}^j = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } x_j^A > x_j^B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.26)$$

Die Teststatistik wird wie folgt berechnet:

$$TS_W = \frac{W^+ - \frac{N' \cdot (N'+1)}{4}}{\sqrt{\frac{N' \cdot (N'+1) \cdot (2 \cdot N'+1)}{24}}}. \quad (2.27)$$

Der kritische Wert $krit_W$, mit dem die Teststatistik verglichen wird, ergibt sich aus der Standardnormalverteilung für das entsprechende α . Gilt $TS_W > krit_W$, so ist die Nullhypothese abzulehnen.

2.3 Zusammenfassung

Dieses Kapitel stellte die Grundlagen dar, die in den nächsten Kapiteln zur Beantwortung der Forschungsfragen benötigt werden. Dazu wurde zunächst das Börsensystem

vorgestellt, aus welchem sich die untersuchten Fragestellungen ergeben. Des Weiteren wurden in diesem Kapitel Optimierungsprobleme vorgestellt. Dabei wurde zwischen Online- und Offline-Problemen unterschieden und gezeigt, dass Handelsprobleme Online-Probleme sind. Zum Abschluss des Kapitels wurde darauf eingegangen, wie Algorithmen zur Lösung der dargestellten Probleme theoretisch und empirisch evaluiert werden können. Im nächsten Kapitel wird ein Überblick über das Online-Conversion Problem und die Algorithmen zu dessen Lösung geboten.

3 Ausprägungen des Online-Conversion Problems und Algorithmen

In diesem Kapitel werden das Online-Conversion Problem (CP) und seine unterschiedlichen Ausprägungen beschrieben. Dazu wird zunächst das grundlegende Online-Conversion Problem vorgestellt. Danach erfolgt die Klassifizierung der Ausprägungen. Anschließend werden die Ausprägungen modelliert und voneinander abgegrenzt. Zum Abschluss des Kapitels werden ausgewählte kompetitive Algorithmen aus der Literatur zur Lösung der beschriebenen Ausprägungen des CP vorgestellt.

3.1 Das Online-Conversion Problem

Im Online-Conversion Problem konvertiert ein Spieler sein Startvermögen W_0 von einer Anlage z. B. Dollar (D) in eine andere Anlage z. B. Yen (Y). Wird dem Spieler zum Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ ein neuer Preis q_t angeboten, muss er entscheiden, ob und wie viele Dollar er in Yen konvertiert. Der Preis q_t ist der Wechselkurs Yen zu Dollar. Das heißt, der Spieler erhält, wenn er zu diesem Preis einen Dollar konvertiert, q_t Yen. Ziel des Spielers ist es, sein Endvermögen W_T in Yen zu maximieren. Leerverkäufe sind nicht gestattet, d. h. dem Spieler ist es nicht erlaubt, mehr Dollar zu konvertieren, als er besitzt. Zudem muss zum Zeitpunkt T das gesamte Vermögen konvertiert worden sein.

3.1.1 Klassifizierung

Basierend auf der Klassifizierung von Mohr et al. (2014, S. 91) werden die verschiedenen Ausprägungen des CP anhand von vier Charakteristika unterteilt.

Richtung: Während im uni-direktionalen CP der Handel ausschließlich von Dollar

in Yen möglich ist, kann im bi-direktonalen CP zusätzlich von Yen in Dollar getauscht werden. Beim uni-direktonalen CP muss zu T das gesamte Vermögen in Yen investiert sein. Bei bi-direktonalen CP wird durch den Anlagenindikator $AI \in \{0, 1\}$ angegeben, in welcher Anlage das Vermögen zu T investiert sein muss. Gilt $AI = 1$, dann muss das Vermögen zu T vollständig in Yen investiert sein. Dies wird auch als *DY*-Conversion bezeichnet, da das Vermögen zu Beginn in Dollar vorliegt und zum Schluss vollständig in Yen investiert sein muss. $AI = 0$ bedeutet, dass das Vermögen zu T vollständig in Dollar investiert sein muss. Dies wird analog als *DD*-Conversion bezeichnet.

Stückelung: Beim nicht-präemptiven CP kann bei jedem Handel nur das gesamte Vermögen konvertiert werden. Das Vermögen ist somit zu jedem Zeitpunkt t vollständig in einer Anlage investiert. Im Gegensatz dazu kann im präemptiven CP eine beliebige Teilmenge des Vermögens getauscht werden. Im u' -präemptiven CP wird das Startvermögen auf $u = u' + 1$ Einheiten gleichmäßig verteilt. Zu jedem Zeitpunkt dürfen nur ganze Einheiten getauscht werden.

Gegebene Zukunftsinformationen: Bei der Lösung eines CP werden in der Literatur oftmals Kenntnisse über die Gestaltung der künftigen Preise vorausgesetzt (vgl. z. B. El-Yaniv et al. 1992, Damaschke et al. 2009 und Zhang et al. 2011). Dies können bspw. Preisgrenzen M und m sein. Diese geben ein Intervall an, welches von keinem Preis q_t über- bzw. unterschritten wird. Es gilt $m \leq q_t \leq M$, $t = 1, \dots, T$. Die gegebenen Zukunftsinformationen sind nur für den Online-Algorithmus relevant, da der optimale Offline-Algorithmus per Definition über alle Zukunftsinformationen verfügt.

Zusätzliche Handelsrestriktionen: Zusätzliche Handelsrestriktionen beschränken die möglichen Handelsaktivitäten über die Richtung und Stückelung hinaus (vgl. z. B. Lorenz et al. 2009, Zhang et al. 2012a und Fung 2017). So ist es bspw. nur möglich, eine gewisse Anzahl an Transaktionen durchzuführen, oder bis zu bestimmten Zeitpunkten muss bzw. darf nur ein gewisser Teil des Vermögens konvertiert worden sein. In einem Spezialfall des u' -präemptiven CP darf zu jedem Zeitpunkt maximal eine Einheit getauscht werden.

3.1.2 Modelle

In diesem Kapitel werden die unterschiedlichen Ausprägungen des CP modelliert. Die Darstellung der Ausprägungen erfolgt in Form von mathematischen Programmen. Zuvor werden unterschiedliche Arten von Handelssignalen vorgestellt. Diese stellen

die Lösungen der mathematischen Programme dar und geben an, wie gehandelt wird.

3.1.2.1 Handelssignale

Aus Handelsalgorithmen ergeben sich Anweisungen, welche Kauf- bzw. Verkaufsaktionen durchzuführen sind. Diese Anweisungen werden als Handelssignale bezeichnet. Sie sind äquivalent zu den Lösungen von Handelsproblemen. Auf der Grundlage der erzeugten Handelssignale werden Börsenaufträge erstellt (vgl. Kersch und Schmidt 2011, S. 157). Hier werden vier Arten von Handelssignalen definiert:

1. Richtungssignal,
2. Vermögenssignal,
3. Modifiziertes Richtungssignal und
4. Mengensignal.

Das Richtungssignal kann verwendet werden, wenn bei jeder Konvertierung das gesamte Vermögen konvertiert wird (vgl. Chang et al. 2011, S. 4000). Das Richtungssignal eignet sich daher ausschließlich für das nicht-präemptive CP. In Anlehnung an LeBaron (1999, S. 130) wird das Richtungssignal s_t^R wie folgt definiert:

$$s_t^R = \begin{cases} -1 & \text{wenn Konvertierung in Yen} \\ 1 & \text{wenn Konvertierung in Dollar .} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1)$$

Das Richtungssignal s_t^R bezieht sich auf das aktuelle Vermögen W_t . Somit bedeutet $s_t^R = 1$ bzw. $s_t^R = -1$, dass das momentan in Dollar bzw. Yen investierte Vermögen vollständig konvertiert wird. Dies umfasst somit die bisher erzielte Rendite. Gleiche s_t^R können daher im Zeitablauf unterschiedliche absolute Beträge repräsentieren. Für das uni-direktionale und nicht-präemptive CP reduziert sich das Richtungssignal zu $s_t^{R,uni} \in \{-1, 0\}$.

Das Richtungssignal ist jedoch beim präemptiven Handel nicht verwendbar. El-Yaniv et al. (2001) verwenden für uni-direktionale und präemptive Conversion Algorithmen das Vermögenssignal, welches wie folgt definiert ist:

$$s_t^V \in [-1, 0]. \quad (3.2)$$

Das Vermögenssignal s_t^V bezieht sich auf das Startvermögen W_0 . Es gibt an, wie viel Prozent des Startvermögens W_0 von Dollar in Yen konvertiert werden. Daher stellen gleiche s_t^V gleiche absolute Beträge dar. Bereits erzielte Rendite verändert somit nicht den Wert der Bezugsgröße. Wenn das gesamte Vermögen von Dollar in Yen investiert wurde, gilt $\sum_{t=1}^T s_t^V = -1$. Da das Vermögenssignal ausschließlich im unidirektionalen Conversion Problem verwendet wird, umfasst dessen Definitionsbereich keine positiven Werte.

Für die Modellierung des bi-direktionalen und präemptiven CP sind weder das Richtungs- noch das Vermögensignal hinreichend, um dessen Handelsanweisungen darzustellen. Dies kann gelöst werden, indem das Richtungs- (3.1) und das Vermögenssignal (3.2) zu einem Signal kombiniert werden. Das so entstehende modifizierte Richtungssignal s_t^M gibt somit neben der Richtung ebenfalls an, wie viel Prozent des Vermögens konvertiert werden sollen. Da Anteils- und Richtungssignal unterschiedliche Bezugsgrößen haben, kann das modifizierte Richtungssignal in zwei Varianten definiert werden. So kann einerseits der aktuelle Wert des Vermögens W_t oder das Startvermögen W_0 als Bezugsgröße dienen. In dieser Arbeit wird W_0 als Bezugsgröße verwendet. Für den Definitionsbereich des modifizierten Richtungssignals gilt:

$$s_t^M \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

s_t^M repräsentiert den Wert, der angibt, wie viel Prozent des Startvermögens W_0 zum Zeitpunkt t konvertiert wird. Ein negativer Wert bedeutet, dass von Dollar in Yen konvertiert wird. Ein positiver Wert bedeutet analog dazu, die Konvertierung von Yen in Dollar.

Sei s_t^{M,W_t} der Wert, der angibt wie viel Prozent des aktuellen Vermögens W_t zum Zeitpunkt t konvertiert wird. Dieses kann mit Formel (3.4) in ein modifiziertes Richtungssignal umgewandelt werden:

$$s_t^M = s_t^{M,W_t} \cdot \frac{W_t}{W_0}. \quad (3.4)$$

Das Vermögenssignal und das modifizierte Richtungssignal haben die gleiche Bezugsgröße. Das Richtungssignal kann mit Formel (3.4) zudem in ein modifiziertes Richtungssignal transformiert werden. In dem Fall umfasst der Definitionsbereich des modifizierten Richtungssignals den Definitionsbereich der anderen beiden Signalarten. Somit können diese beiden Signalarten als Spezialfälle des modifizierten Richtungssignals angesehen werden.

Ein weiteres Handelssignal ist das Mengensignal $b_{i,t}$ (vgl. z. B. Cover 1991, Danoura und Sakurai 1998 und Hazan und Kale 2015). Sei A die Anzahl an Anlagen, die im entsprechenden Handelsproblem betrachtet werden. Das Mengensignal gibt an, wie viel Prozent des Vermögens jeweils in Anlage $i = 1, \dots, A$ investiert werden sollen. Für das Mengensignal gilt (vgl. Cover 1991, S. 2):

$$b_{i,t} \in [0, 1], i = 1, \dots, A \quad (3.5)$$

und

$$\sum_{i=1}^A b_{i,t} = 1 \quad (3.6)$$

mit $t = 1, \dots, T$.

Da das Conversion Problem nur zwei Anlagen umfasst und somit gilt $b_{2,t} = 1 - b_{1,t}$, kann auf den Index i verzichtet werden. Sei b_t der Prozentsatz des Vermögens, der zum Zeitpunkt t in Yen investiert ist, dann ist $1 - b_t$ in Dollar investiert. Sei weiterhin $b_{\text{ist},t}$ der Prozentsatz des Vermögens, welcher in Yen investiert ist, wenn zum Zeitpunkt t nicht gehandelt wird. Dieser ergibt sich aus dem zuvor gewählten b_{t-1} und der Preisänderung des Yen:

$$b_{\text{ist},t} = \frac{b_{t-1} \cdot \frac{q_{t-1}}{q_t}}{b_{t-1} \cdot \frac{q_{t-1}}{q_t} + 1 - b_{t-1}} \quad (3.7)$$

für $t = 2, \dots, T$.

Anmerkung: Für alle Ausführungen in dieser Arbeit wird $q_t > 0, t = 1, \dots, T$ angenommen.

Im Fall mit zwei Anlagen kann das Mengensignal in ein modifiziertes Richtungssignal umgerechnet werden (vgl. El-Yaniv et al. 1992 und El-Yaniv et al. 2001). Soll der in Yen investierte Anteil gemäß dem Mengensignal zu b_t geändert werden, dann gilt

$$s_t^M = (b_{\text{ist},t} - b_t) \cdot \frac{W_t}{W_0}. \quad (3.8)$$

3.1.2.2 Mathematische Programme

Im Folgenden werden die verschiedenen Ausprägungen des Conversion Problem anhand des jeweiligen mathematischen Programmes (MP) dargestellt. Die optimale Lösung des MP entspricht der optimalen Offline-Lösung und somit der Lösung, die

auch der in der kompetitiven Analyse definierte, optimale Offline-Spieler erreicht. Da ein MP ein Offline-Problem repräsentiert, hat die Charakteristik **Gegebene Zukunftsinformationen** keinen Einfluss auf die mathematische Darstellung.

Die dargestellten mathematischen Programme verwenden, entsprechend der gängigen Conversion Literatur (vgl. z. B. El-Yaniv et al. 1992, Lorenz et al. 2009 und Zhang et al. 2011), als Zielfunktion die Maximierung des Endvermögens. Jedoch sind in Markowitz (1952), Treynor (1965) und Sharpe (1966) auch andere Zielfunktionen für Handelsprobleme definiert. So können zusätzlich zur Maximierung des Endvermögens die Minimierung des Risikos sowie die Maximierung des Quotienten aus erwarteter Rendite und Risiko als Zielfunktion verwendet werden.

Die Zielfunktion für das Online-Conversion Problem mit der Zielsetzung, das Endvermögen zu maximieren, wird im Folgenden hergeleitet. Seien D_t und Y_t das Vermögen, das zum Zeitpunkt $t = 0, \dots, T$ in Dollar bzw. Yen investiert ist, jeweils angegeben in der entsprechenden Währung, mit $W_0 = D_0 > 0$ und $Y_0 = 0$. Und seien d_t und y_t mit $t = 1, \dots, T$ die Werte, um die sich das Vermögen in Dollar bzw. Yen zum Zeitpunkt t ändert. Dann ergibt sich in Anlehnung an Dochow (2016, S. 20) die Zielfunktion:

$$\begin{aligned} W_T^D &= D_0 + \sum_{t=1}^T (d_t) + \frac{1}{q_T} \left(Y_0 + \sum_{t=1}^T (y_t) \right) \\ \Leftrightarrow W_T^D &= W_0 + \sum_{t=1}^T (d_t) + \frac{1}{q_T} \cdot \sum_{t=1}^T (y_t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei W_T^D den Wert des Vermögens zum Zeitpunkt T , in Dollar angibt.

Wird gehandelt, wird entweder Vermögen von Dollar in Yen oder von Yen in Dollar konvertiert. Somit lässt sich ein Zusammenhang zwischen d_t und y_t feststellen. Es gilt (vgl. Dochow 2016, S. 21):

$$y_t = -d_t \cdot q_t. \quad (3.10)$$

Wird das Startvermögen $W_0 = D_0$ auf 1 normiert, entspricht d_t dem modifizierten Richtungssignal s_t^M (vgl. Formel (3.3)). Es gilt:

$$d_t = s_t. \quad (3.11)$$

Wird die Formel (3.10) in Formel (3.11) eingesetzt, folgt:

$$y_t = -s_t \cdot q_t. \quad (3.12)$$

Werden die Formeln (3.11) und (3.12) in Formel (3.9) eingesetzt, ergibt sich für das Conversion Problem die Zielfunktion:

$$\begin{aligned} W_T^D &= 1 + \sum_{t=1}^T (s_t) + \frac{1}{q_T} \cdot \sum_{t=1}^T (-s_t \cdot q_t) \\ \Leftrightarrow W_T^D &= 1 + \sum_{t=1}^T \left(s_t - s_t \cdot \frac{q_t}{q_T} \right) \\ \Leftrightarrow W_T^D &= 1 + \sum_{t=1}^T \left(s_t \cdot \left(1 - \frac{q_t}{q_T} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sei W_T^Y der Wert des Endvermögens in Yen. Dieses ergibt sich aus Formel (3.13), wenn diese mit q_T multipliziert wird:

$$W_T^Y = q_T + \sum_{t=1}^T (s_t \cdot (q_T - q_t)). \quad (3.14)$$

Die erste Gleichung in Formel (3.13) lässt sich in zwei Terme unterteilen, die den Wert des in Dollar $W_{T,D}^D$ bzw. Yen $W_{T,D}^Y$ investierten Vermögens in Dollar angeben. Es gilt:

$$W_{T,D}^D = 1 + \sum_{t=1}^T (s_t) \quad (3.15)$$

und

$$W_{T,D}^Y = \frac{1}{q_T} \cdot \sum_{t=1}^T (-s_t \cdot q_t). \quad (3.16)$$

Soll der Wert des in Yen investierten Vermögens in Yen angegeben werden, ist folgende Formel zu verwenden:

$$W_{T,Y}^Y = \sum_{t=1}^T (-s_t \cdot q_t). \quad (3.17)$$

Da das Startkapital auf $W_0 = 1$ normiert ist, kann aus Formel (3.15) bzw. Formel (3.17) das Vermögen, das zum Zeitpunkt t in Dollar D_t bzw. Yen Y_t investiert ist, abgeleitet werden. Es gilt (vgl. El-Yaniv et al. 2001, S. 111)):

$$D_t = 1 + \sum_{\tau=1}^t (s_\tau), t = 1, \dots, T \quad (3.18)$$

sowie

$$Y_t = \sum_{\tau=1}^t (-s_\tau \cdot q_\tau), t = 1, \dots, T. \quad (3.19)$$

Für die im Folgenden dargestellten Ausprägungen des Conversion Problems wird das modifizierte Richtungssignal zur mathematischen Darstellung verwendet. Im unidirektionalen Conversion Problem entspricht dies entweder dem Richtungssignal oder dem Vermögenssignal, da diese Spezialfälle des modifizierten Richtungssignals sind. Zudem gilt für die mathematischen Programme $W_0 = W_0^D = 1$. Einige mathematische Programme verwenden eine Zielfunktion, die den Wert des Vermögens in Yen angibt. Daher wird $q_0 = 1$ angenommen, da somit auch für den Wert des Vermögens, angegeben in Yen, $W_0^Y = 1$ gilt. Dies hat keine Auswirkungen auf die Ergebnisse der mathematischen Programme.

Es ist zudem zu beachten, dass in den mathematischen Programmen jeweils, der Fall einer diskreten Preisentwicklung abgebildet ist. Für einige der dargestellten Probleme lassen sich zudem Varianten mit stetiger Preisentwicklung formulieren. In diesem Fall ist statt einer diskreten Preissequenz \mathbf{q} eine stetige Preissequenz $\dot{\mathbf{q}}$ als Inputparameter gegeben.

Im Folgenden wird zusätzlich zu den mathematischen Programmen auch jeweils ein Beispiel zur Verdeutlichung dieser präsentiert. Für jedes Beispiel ist $T = 5$ und die Preissequenz $\mathbf{q} = 1, 3, 2, 4, 2$ gegeben. Zudem wird für jedes Beispiel ein eigener Lösungsvektor $\mathbf{s} = s_1, \dots, s_5$ verwendet, da aufgrund der unterschiedlichen Nebenbedingungen keine Lösung existiert, die für alle Probleme zulässig ist. Neben den Werten von s_t, q_t, D_t, Y_t und W_t werden im Beispiel die Werte s_t^{max} und s_t^{min} angegeben. Diese repräsentieren die Ober- und die Untergrenze des Intervalls, in dem s_t liegen kann. Da zu T das Vermögen in eine bestimmte Anlage investiert werden muss, gilt für alle Ausprägungen des CP $s_T = s_T^{max} = s_T^{min}$.

3.1.2.2.1 Uni-direktionale, nicht-präemptive Conversion

Im uni-direktionalen und nicht-präemptiven Conversion Problem (*NP-UC*) wird nach einem Preis gesucht, zu dem das gesamte Vermögen von Dollar in Yen konvertiert wird. Es ist im mathematischen Programm 1 dargestellt.

Mathematisches Programm 1: *NP-UC*

Gegeben: \mathbf{q}, T

Gesucht: $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_T\}$

$$\max_{s_t} \quad W_T^Y = q_T + \sum_{t=1}^T (s_t \cdot (q_T - q_t))$$

$$\text{u. d. N. (I)} \quad \sum_{t=1}^T s_t = -1$$

$$\text{(II)} \quad s_t \in \{-1, 0\} \quad , t = 1, \dots, T$$

Gegeben ist eine Preissequenz $\mathbf{q} = q_1, \dots, q_T$ mit T Zeitpunkten, welche dem Online-Spieler (ON) unbekannt ist. Da bei uni-direktonaler Conversion das Vermögen zu T in Yen investiert sein muss, wird die Zielfunktion (3.14) verwendet. Ihr Wert entspricht dem akzeptierten Preis. Das $NP\text{-}UC$ verfügt über zwei Nebenbedingungen (NB). NB (I) stellt sicher, dass zu T das Vermögen in Yen investiert ist. NB (II) erfüllt mehrere Funktionen. Sie beschränkt die Handelsaktivitäten auf (1) nicht-präemptiven und (2) uni-direktonalen Handel. Die Kombination von NB (I) und NB (II) schließt zudem Leerverkäufe aus.

In Tabelle 3.1 sind die Werte für das Beispiel dargestellt. Der verwendete Lösungsvektor ist $\mathbf{s} = 0; 0; -1; 0; 0$.

t	0	1	2	3	4	5
q_t	1	1	3	2	4	2
s_t^{max}		0	0	0	0	0
s_t^{min}		-1	-1	-1	0	0
s_t		0	0	-1	0	0
D_t	1	1	1	0	0	0
Y_t	0	0	0	2	2	2
W_t^Y	1	1	3	2	2	2

Tabelle 3.1: Beispiel $NP\text{-}UC$

Bis zum Zeitpunkt der Konvertierung (im Beispiel $t = 3$) besteht die Wahl, zu konvertieren oder nicht zu konvertieren. Nachdem konvertiert wurde, besteht für $t = 4$ und $t = 5$ keine Wahlmöglichkeit mehr, da gilt $s_t^{max} = s_t^{min} = 0$.

3.1.2.2.2 Uni-direktionale, präemptive Conversion

Im uni-direktonalen und präemptiven CP ($P\text{-}UC$) kann das Vermögen zur Konvertierung in Yen beliebig aufgestückelt werden. Es kann weiterhin nur von Dollar in Yen konvertiert werden. Das entsprechende mathematische Programm unterscheidet sich vom mathematischen Programm 1 nur in NB (II) (vgl. mathematisches Programm 2). Der Lösungsraum für das Optimierungsproblem wird durch die veränderte Nebenbedingung erweitert. Der Wert der Zielfunktion ergibt sich im Vergleich zum $NP\text{-}UC$ nicht mehr aus einem einzelnen Preis, sondern aus dem entsprechend der s_t gewichteten Durchschnitt der Preise der Preissequenz.

In Tabelle 3.2 ist das Beispiel für $P\text{-}UC$ dargestellt. Als Lösung wird die Sequenz $\mathbf{s} = -0,2; 0; -0,3; -0,3; -0,2$ verwendet. s_t^{min} steigt jeweils um $-s_{t-1}$ an. Der monotone Anstieg folgt daraus, dass es nicht möglich ist, von Yen in Dollar zurück zu konvertieren. Zudem gilt $s_t^{max} = 0, t = 1, \dots, T - 1$. Dies folgt daraus, dass das Vermögen erst zum letzten Zeitpunkt T vollständig konvertiert worden sein muss.

Mathematisches Programm 2: $P\text{-}UC$						
Gegeben:	\mathbf{q}, T					
Gesucht:	$\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_T\}$					
\max_{s_t}	$W_T^Y = q_T + \sum_{t=1}^T (s_t \cdot (q_T - q_t))$					
u. d. N.	(I) $\sum_{t=1}^T s_t = -1$					
	(II) $s_t \in [-1, 0], t = 1, \dots, T$					

t	0	1	2	3	4	5
q_t	1	1	3	2	4	2
s_t^{max}		0	0	0	0	-0,2
s_t^{min}		-1	-0,8	-0,8	-0,5	-0,2
s_t		-0,2	0	-0,3	-0,3	-0,2
D_t	1	0,8	0,8	0,5	0,2	0
Y_t	0	0,2	0,2	0,8	2	2,4
W_t^Y	1	1	2,6	1,8	2,8	2,4

Tabelle 3.2: Beispiel $P\text{-}UC$

3.1.2.2.3 Uni-direktionale, u' -präemptive Conversion

Im uni-direktonalen und u' -präemptiven Conversion Problem ($u'P\text{-}UC$) dürfen im Gegensatz zum $P\text{-}UC$ nur vollständige Einheiten getauscht werden. Daher wird für die Definition des Lösungsraums der Inputparameter u benötigt. Das Startvermögen $W_0 = 1$ wird auf $u = u' + 1$ Einheiten gleichmäßig verteilt, somit ergibt sich für den Definitionsbereich von s_t :

$$s_t \in \left\{ -1, -\frac{u-1}{u}, -\frac{u-2}{u}, \dots, -\frac{1}{u}, 0 \right\}, t = 1, \dots, T \quad (3.20)$$

wobei $\frac{1}{u}$ einer vollständigen Einheit entspricht. Das $u'P\text{-}UC$ ist im mathematischen

Programm 3 dargestellt. Das mathematische Programm 3 unterscheidet sich vom mathematischen Programm 2 durch die geänderte NB (II) und den zusätzlichen Parameter u . Für $u' = 0$ entspricht $u'P\text{-}UC$ dem $NP\text{-}UC$ und für $u' \rightarrow \infty$ dem $P\text{-}UC$.

Mathematisches Programm 3: $u'P\text{-}UC$

Gegeben: \mathbf{q}, T, u

Gesucht: $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_T\}$

$$\max_{s_t} \quad W_T^Y = q_T + \sum_{t=1}^T (s_t \cdot (q_T - q_t))$$

$$\text{u. d. N. (I)} \quad \sum_{t=1}^T s_t = -1$$

$$\text{(II)} \quad s_t \in \{-1, -\frac{u-1}{u}, -\frac{u-2}{u}, \dots, -\frac{1}{u}, 0\}, t = 1, \dots, T$$

Für das Beispiel wird $u = 2$ angenommen. Somit gilt: $s_t \in \{-1; -0,5; 0\}$. Die für das Beispiel verwendete Lösung ist $\mathbf{s} = 0; -0,5 ; 0; -0,5; 0$ (vgl. Tabelle 3.3).

t	0	1	2	3	4	5
q_t	1	1	3	2	4	2
s_t^{max}		0	0	0	0	0
s_t^{min}		-1	-1	-0,5	-0,5	0
s_t		0	-0,5	0	-0,5	0
D_t	1	1	0,5	0,5	0	0
Y_t	0	0	1,5	1,5	3,5	3,5
W_t^Y	1	1	3	2,5	3,5	3,5

Tabelle 3.3: Beispiel $u'P\text{-}UC$

Die drei bisher vorgestellten MP haben trotz ihrer Unterschiede die gleiche optimale Lösung, wenn die Parameter \mathbf{q} und T identisch sind. Das liegt daran, dass die optimale Lösung unabhängig davon, welche Stückelung erlaubt ist, nicht stückelt, da -1 und 0 jeweils im Definitionsbereich für s_t liegen.

3.1.2.2.4 Uni-direktionale, u' -präemptive Conversion mit limitierter Handelsmenge

Das uni-direktionale und u' -präemptive Conversion Problem mit limitierter Handelsmenge ($u'P\text{-}UC-1$) basiert auf dem $u'P\text{-}UC$. Als zusätzliche Restriktion darf

zu jedem Zeitpunkt nur eine Einheit gehandelt werden. Somit reduziert sich der Definitionsbereich von s_t zu:

$$s_t \in \left\{ -\frac{1}{u}, 0 \right\} , \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.21)$$

Für das mathematische Programm des $u'P\text{-UC-1}$ (vgl. mathematisches Programm 4) wird im mathematischen Programm 3 NB (II) durch Formel (3.21) ersetzt.

Mathematisches Programm 4: $u'P\text{-UC-1}$

Gegeben:	\mathbf{q}, T, u
Gesucht:	$\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_T\}$
max	$W_T^Y = q_T + \sum_{t=1}^T (s_t \cdot (q_T - q_t))$
u. d. N.	(I) $\sum_{t=1}^T s_t = -1$
	(II) $s_t \in \left\{ -\frac{1}{u}, 0 \right\} , \quad t = 1, \dots, T$

Die Kombination der Nebenbedingungen (I) und (II) des mathematischen Programms 4 führt dazu, dass dieses CP nur zulässige Lösungen besitzt, wenn gilt $T \geq u$. Zudem gilt, dass $u'P\text{-UC-1}$, für $u' = 0$ dem $NP\text{-UC}$ entspricht.

Für das Beispiel (vgl. Tabelle 3.4) wird der gleiche Parameter $u = 2$ sowie die gleiche Lösung, wie im Beispiel des $u'P\text{-UC}$ verwendet (vgl. Tabelle 3.3). Somit gilt erneut $\mathbf{s} = 0; -0,5; 0; -0,5; 0$. Der Unterschied zum Beispiel zuvor ergibt sich aus den s_t^{min} , die mindestens einen Wert von -0,5 aufweisen. Dies zeigt an, dass nicht beide Einheiten zum gleichen Zeitpunkt getauscht werden dürfen.

t	0	1	2	3	4	5
q_t	1	1	3	2	4	2
s_t^{max}		0	0	0	0	0
s_t^{min}		-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	0
s_t		0	-0,5	0	-0,5	0
D_t	1	1	0,5	0,5	0	0
Y_t	0	0	1,5	1,5	3,5	3,5
W_t^Y	1	1	3	2,5	3,5	3,5

Tabelle 3.4: Beispiel $u'P\text{-UC-1}$

Für das $u'P\text{-}UC\text{-}1$ mit $u' \geq 1$ weicht die optimale Lösung von den optimalen Lösungen der bisher vorgestellten Ausprägungen des CP ab, da der Definitionsbereich für s_t keine -1 beinhaltet.

3.1.2.2.5 Uni-direktionale, u' -präemptive Conversion mit Lagerkapazität

Eine Variante des uni-direktionalen und u' -präemptiven Conversion Problems ($u'P\text{-}UC\text{-}L$), in der sich zu jedem Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ das vorhandene Vermögen um eine Einheit, die konvertiert werden muss, vermehrt, wird von Zhang et al. (2012a) untersucht. Begonnen wird zum Zeitpunkt $t = 1$ mit einer vorhandenen Einheit. Zudem ist die Anzahl der nicht-konvertierten Einheiten durch eine maximale Lagerkapazität L nach oben beschränkt. Wie für alle anderen uni-direktionalen Ausprägungen des CP wird für die Darstellung die Zielfunktion (3.14) verwendet. Das $u'P\text{-}UC\text{-}L$ ist im mathematischen Programm 5 dargestellt.

Mathematisches Programm 5: $u'P\text{-}UC\text{-}L$

Gegeben:	\mathbf{q}, T, L
Gesucht:	$\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_T\}$
\max_{s_t}	$W_T^Y = q_T + \sum_{t=1}^T (s_t \cdot (q_T - q_t))$
u. d. N.	(I) $\sum_{\tau=1}^t -s_\tau \leq \frac{t}{T}$, $t = 1, \dots, T-1$
	(II) $\sum_{\tau=1}^t -s_\tau \geq \frac{t-L}{T}$, $t = 1, \dots, T-1$
	(III) $\sum_{t=1}^T s_t = -1$
	(IV) $s_t \in \{-1, -\frac{T-1}{T}, -\frac{T-2}{T}, \dots, -\frac{1}{T}, 0\}$, $t = 1, \dots, T$

Da in diesem Conversion Problem T Einheiten konvertiert werden müssen und somit $u = T$ gilt, kann auf u als Eingabeparameter verzichtet werden. Somit entspricht nun der Term $\frac{1}{T}$ einer Einheit. Zusätzlich wird nun die Lagerkapazität L als Parameter benötigt. NB (I) stellt sicher, dass nicht mehr Einheiten gehandelt werden, als zu einem Zeitpunkt t vorhanden sind. NB (II) sorgt hingegen dafür, dass die Lagerkapazität L nicht überschritten wird. NB (III) gibt vor, dass zu T alles in Yen konvertiert sein muss. NB (IV) stellt sicher, dass nur ganze Einheiten getauscht werden.

Für das Beispiel gilt $L = 2$. Als Lösung wird $\mathbf{s} = 0; 0; -0,2; -0,6; -0,2$ verwendet (vgl. Tabelle 3.5). Zudem gilt $u = T = 5$.

Anmerkung: Im Beispiel wird davon ausgegangen, dass die Einheiten, um die das Vermögen im Zeitablauf vermehrt wird, bereits zu Beginn Teil des Vermögens sind. Diese dürfen jedoch weder gehandelt noch beim Abgleich mit der Lagerkapazität berücksichtigt werden. Diese Betrachtung führt zu anderen Werten für D_t und W_t^Y mit $t < T$, als wenn die Einheiten erst sukzessive dem Vermögen hinzugefügt werden. Die Werte D_T und W_T^Y und somit die Ergebnisse des Beispiels sind in beiden Betrachtungsweisen identisch. Diese Betrachtung bietet den Vorteil, dass für D_t und W_t^Y mit $t < T$ keine angepasste Berechnungsformel angegeben werden muss und zudem die Voraussetzung $W_0 = 1$ nicht verletzt wird.

t	0	1	2	3	4	5
q_t	1	1	3	2	4	2
s_t^{max}		0	0	-0,2	-0,2	-0,2
s_t^{min}		-0,2	-0,4	-0,6	-0,6	-0,2
s_t		0	0	-0,2	-0,6	-0,2
D_t	1	1	1	0,8	0,2	0
Y_t	0	0	0	0,4	2,8	3,2
W_t^Y	1	1	3	2	3,6	3,2

Tabelle 3.5: Beispiel $u'P\text{-}UC\text{-}L$

Das $u'P\text{-}UC\text{-}L$ ist die einzige uni-direktionale Ausprägung des CP, in der s_t^{min} mit steigendem t sinken kann. Dies liegt daran, dass nicht von Beginn an alle Einheiten konvertiert werden können. s_t^{max} ist zudem bereits vor dem Zeitpunkt T kleiner als 0. Dies ergibt sich daraus, dass wegen der Beschränkung der Lagerkapazität bereits vor T gehandelt werden muss.

Das $u'P\text{-}UC\text{-}L$ grenzt sich aufgrund der Lagerkapazität von den anderen Ausprägungen des CP ab und scheint wegen dieser für den Börsenhandel eine geringe Bedeutung zu haben.

3.1.2.2.6 Bi-direktionale, nicht-präemptive Conversion

Im bi-direktionalen und nicht-präemptiven Conversion Problem ($NP\text{-}BC$) kann in beide Richtungen konvertiert werden. Dabei wird stets das gesamte Vermögen konvertiert. Vom Anlagenindikator AI hängt ab, ob das Vermögen zu T , in Dollar oder Yen konvertiert werden muss. Da beides möglich ist und $W_T^Y = W_T^D \cdot q_T$ gilt, wird für die Zielfunktion die Formel (3.13) mit dem Term $\max\{q_T \cdot AI, 1 - AI\}$ multipliziert.

Somit wird Formel (3.13) im Fall von $AI = 1$ mit q_T und im Falle von $AI = 0$ mit 1 multipliziert. Daher wird entweder Formel (3.13) oder (3.14) als Zielfunktion verwendet. Das $NP-BC$ wird im mathematischen Programm 6 dargestellt.

Mathematisches Programm 6: $NP-BC$

Gegeben: \mathbf{q}, T, AI

Gesucht: $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_T\}$

$$\max_{s_t} \quad W_T = 1 + \sum_{t=1}^T \left(s_t \cdot \left(1 - \frac{q_t}{q_T} \right) \right) \cdot \max\{q_T \cdot AI, 1 - AI\}$$

$$\text{u. d. N. (I)} \quad \left(1 + \sum_{\tau=1}^t (s_\tau) \right) \cdot \left(\frac{1}{q_t} \cdot \sum_{\tau=1}^t (-s_\tau \cdot q_\tau) \right) = 0, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$\text{(II)} \quad \left(1 + \sum_{t=1}^T (s_t) \right) \cdot AI +$$

$$\left(\frac{1}{q_T} \cdot \sum_{t=1}^T (-s_t \cdot q_t) \right) \cdot (1 - AI) = 0$$

$$\text{(III)} \quad s_t \in \mathbb{R} \quad , \quad t = 1, \dots, T$$

Da nun auch neben dem Tausch von Dollar in Yen der Tausch von Yen in Dollar möglich ist, umfasst der Definitionsbereich von s_t nun auch positive Werte (vgl. NB (III)). Durch die im Zeitablauf erwirtschaftete Rendite ist zudem $|s_t| > 1$ möglich. Die Terme in NB (I) entsprechen dem in Dollar bzw. Yen investierten Vermögen (vgl. Formeln (3.15) und (3.16)). Da die Multiplikation dieser Terme 0 ergeben muss, folgt, dass das Vermögen zu jedem Zeitpunkt vollständig in einer Anlage investiert ist. Somit kann nur nicht-präemptiv gehandelt werden. NB (I) stellt zudem sicher, dass nicht mehr Vermögen von Dollar (Yen) in Yen (Dollar) konvertiert wird, als Vermögen in Dollar (Yen) vorhanden ist. NB (II) gibt an, dass das Vermögen zum letzten Zeitpunkt je nach Anlagenindikator vollständig in Dollar bzw. Yen investiert sein muss. Dies wird dadurch erreicht, dass das Vermögen in der anderen Anlage 0 zu sein hat. Für $AI = 1$ wird NB (II) zu der in allen uni-direkionalen Ausprägungen vorkommenden Nebenbedingung $\sum_{t=1}^T s_t = -1$.

Tabelle 3.6 stellt das Beispiel zur Lösung $\mathbf{s} = 0; -1; 1, 5; -1, 5; 3$ mit $AI = 0$ dar. Je nachdem, in welche Anlage momentan das Vermögen investiert ist, gilt mit Ausnahme des letzten Zeitpunktes T , entweder s_t^{max} oder $s_t^{min} = 0$.

t	0	1	2	3	4	5
q_t	1	1	3	2	4	2
s_t^{max}		0	0	1,5	0	3
s_t^{min}		-1	-1	0	-1,5	3
s_t		0	-1	1,5	-1,5	3
D_t	1	1	0	1,5	0	3
Y_t	0	0	3	0	6	0
W_t^D	1	1	1	1,5	1,5	3

Tabelle 3.6: Beispiel *NP-BC*

3.1.2.2.7 Bi-direktionale, nicht-präemptive Conversion mit limitierter Anzahl an Transaktionen

Fung (2017) untersucht die Ausprägung des bi-direktionalen und nicht-präemptiven Conversion Problems mit einer limitierten Anzahl an Transaktionen h (*NP-BC-h*). Das entsprechende mathematische Programm 7 basiert auf dem mathematischen Programm 6 und unterscheidet sich von diesem durch zwei neue Nebenbedingung und einen neuen Inputparameter. Zudem wird h_t als Hilfsvariable benötigt. Diese gibt an, ob zum Zeitpunkt t gehandelt wird oder nicht.

Mathematisches Programm 7: *NP-BC-h*

Gegeben: \mathbf{q}, T, AI

Gesucht: $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_T\}$

$$\max_{s_t} \quad W_T = 1 + \sum_{t=1}^T \left(s_t \cdot \left(1 - \frac{q_t}{q_T} \right) \right) \cdot \max\{q_T \cdot AI, 1 - AI\}$$

$$\text{u. d. N.} \quad (\text{I}) \quad \left(1 + \sum_{\tau=1}^t (s_\tau) \right) \cdot \left(\frac{1}{q_t} \cdot \sum_{\tau=1}^t (-s_\tau \cdot q_\tau) \right) = 0, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$(\text{II}) \quad \left(1 + \sum_{t=1}^T (s_t) \right) \cdot AI +$$

$$\left(\frac{1}{q_T} \cdot \sum_{t=1}^T (-s_t \cdot q_t) \right) \cdot (1 - AI) = 0$$

$$(\text{III}) \quad s_t \in \mathbb{R} \quad , \quad t = 1, \dots, T$$

$$(\text{IV}) \quad h_t = \begin{cases} 1, & \text{wenn } s_t \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad t = 1, \dots, T$$

$$(\text{V}) \quad \sum_{t=1}^T h_t \leq h$$

Im Vergleich zum mathematischen Programm 6 kommt der neue Inputparameter h dazu. Dieser dient zur Beschränkung der Anzahl der Transaktionen. Die Nebenbedingungen werden um die neuen Nebenbedingungen (IV) und (V) ergänzt. In NB (IV) wird die Hilfsvariable h_t berechnet. NB (V) beschränkt die Anzahl an Transaktionen auf maximal h . Für $h = 1$ reduziert sich das dargestellte Problem zum *NP-UC*. Für $h = T$ entspricht es hingegen dem *NP-BC*.

Im Beispiel sind $h = 2$ Transaktionen erlaubt. Die in Tabelle 3.7 dargestellte Lösung ist $\mathbf{s} = 0; -1; 1,5; 0; 0$.

t	0	1	2	3	4	5
q_t	1	1	3	2	4	2
s_t^{max}		0	0	1,5	0	0
s_t^{min}		-1	-1	0	0	0
s_t		0	-1	1,5	0	0
D_t	1	1	0	1,5	1,5	1,5
Y_t	0	0	3	0	0	0
W_t^D	1	1	1	1,5	1,5	1,5

Tabelle 3.7: Beispiel *NP-BC-h*

Da bereits zu $t = 2$ und $t = 3$ gehandelt wird, gilt $s_t^{max} = s_t^{min} = s_t = 0$ für $t \geq 4$. Durch den Preisanstieg zu $t = 3$ steigt der maximale Wert, den s_t annehmen kann, auf 1,5.

3.1.2.2.8 Bi-direktionale, präemptive Conversion

Beim bi-direktionalen und präemptiven Conversion Problem (*P-BC*) kann sowohl in beide Richtungen als auch gestückelt konvertiert werden. Das entsprechende mathematische Programm 8 basiert auf dem mathematischen Programm 6.

NB (I) aus dem mathematischen Programm 6 wird in zwei Nebenbedingungen aufgeteilt. Die neue NB (I) verhindert Leerverkäufe in Dollar. Analog dazu verhindert NB (II) Leerverkäufe in Yen. Da nun präemptiv gehandelt werden kann, existiert keine Nebenbedingung, die präemptiven Handel verhindert. Die Nebenbedingungen (III) und (IV) sind identisch zu den Nebenbedingungen (II) und (III) aus dem mathematischen Programm 6.

Gegeben:	\mathbf{q}, T, AI
Gesucht:	$\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_T\}$
\max_{s_t}	$W_T = 1 + \sum_{t=1}^T \left(s_t \cdot \left(1 - \frac{q_t}{q_T} \right) \right) \cdot \max\{q_T \cdot AI, 1 - AI\}$
u. d. N.	(I) $1 + \sum_{\tau=1}^t (s_\tau) \geq 0 \quad , t = 1, \dots, T$
	(II) $\frac{1}{q_t} \cdot \sum_{\tau=1}^t (-s_\tau \cdot q_\tau) \geq 0 \quad , t = 1, \dots, T$
	(III) $\left(1 + \sum_{t=1}^T (s_t) \right) \cdot AI +$ $\left(\frac{1}{q_T} \cdot \sum_{t=1}^T (-s_t \cdot q_t) \right) \cdot (1 - AI) = 0$
	(IV) $s_t \in \mathbb{R} \quad , t = 1, \dots, T$

Die Verwendung von modifizierten Richtungssignalen hat einen entscheidenden Nachteil im Vergleich zur Verwendung von Mengensignalen. Sie hängen von den vorhergehenden Handelssignalen ab. So können sich die zulässigen Werte für s_t mit jedem Zeitpunkt ändern. Die zulässigen b_t sind zu jedem Zeitpunkt identisch, egal welche Mengensignale in der Vergangenheit generiert wurden. Diese Eigenschaft macht es einfacher, Probleme und ggf. Algorithmen formal zu beschreiben. So verwendet der im nächsten Kapitel vorgestellte, neu entwickelte Algorithmus zur Lösung des *P-BC* Mengensignale. Daher wird zusätzlich das mathematische Programm des *P-BC* mit Mengensignalen b_t angegeben. Zuvor wird jedoch die entsprechende Zielfunktion hergeleitet. Zur Erinnerung: b_t bzw. $1 - b_t$ geben an wie viel Prozent des Vermögens zum Zeitpunkt t in Yen bzw. Dollar investiert sind.

Die Formeln (3.15) und (3.16) geben den Wert des Vermögens, welches in Yen bzw. Dollar investiert ist, in Dollar an. Die Summe der beiden gibt den Gesamtwert des Vermögens an (vgl. Formel (3.13)). Teilt man nun das jeweilige Vermögen in einer Anlage durch den Gesamtwert des Vermögens, resultiert daraus, wie viel Prozent des Vermögens in dieser Anlage investiert sind. Es gilt also:

$$b_t = \frac{\frac{1}{q_t} \cdot \sum_{\tau=1}^t (-s_\tau \cdot q_\tau)}{1 + \sum_{\tau=1}^t \left(s_\tau \cdot \left(1 - \frac{q_\tau}{q_T} \right) \right)} \quad (3.22)$$

und

$$1 - b_t = \frac{1 + \sum_{\tau=1}^t (s_\tau)}{1 + \sum_{\tau=1}^t \left(s_\tau \cdot \left(1 - \frac{q_\tau}{q_t}\right) \right)}. \quad (3.23)$$

Der Wert des Vermögens, angegeben in Dollar, ändert sich vom Zeitpunkt t zu $t + 1$ um den Faktor (vgl. Dochow 2016, S. 39):

$$\frac{W_{t+1}^D}{W_t^D} = 1 - b_t + b_t \cdot \frac{q_t}{q_{t+1}}. \quad (3.24)$$

Es ist zu beachten, dass der Anteil $1 - b_t$, der in Dollar investiert ist, seinen Wert nicht ändert. Um die Vermögensänderungen über mehrere Perioden zu bestimmen, können die Vermögensänderungen für jeweils eine Periode miteinander multipliziert werden. Daher folgt:

$$\begin{aligned} W_T^D &= \prod_{t=1}^{T-1} \left(1 - b_t + b_t \cdot \frac{q_t}{q_{t+1}} \right) \\ \Leftrightarrow W_T^D &= \prod_{t=1}^{T-1} \left(1 + b_t \cdot \left(\frac{q_t}{q_{t+1}} - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Formel (3.25) führt zu denselben Ergebnissen wie Formel (3.13) (vgl. Dochow 2016, S. 38f). Es gilt weiterhin, dass sich der Wert des Vermögens, angegeben in Yen, aus der Multiplikation von W_T^D mit q_T ergibt. Aus den Formeln (3.5) und (3.25) folgt das mathematische Programm 9 für das P -BC mit Mengensignalen.

Mathematisches Programm 9: P -BC (mit Mengensignalen)

Gegeben: \mathbf{q}, T, AI

Gesucht: $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_T\}$

$$\max_{b_t} \quad W_T = \prod_{t=1}^{T-1} \left(1 + b_t \cdot \left(\frac{q_t}{q_{t+1}} - 1 \right) \right) \cdot \max\{q_T \cdot AI, 1 - AI\}$$

u. d. N. (I) $b_t \in [0, 1], t = 1, \dots, T - 1$

(II) $b_T = AI$

NB (I) stellt sicher, dass keine Leerverkäufe getätigt werden, und definiert, dass präemptive Lösungen Teil des Lösungsraumes sind. NB (II) gibt an, in welche Anlage das Vermögen in T investiert werden muss. Je nachdem, in welche Anlage das Vermögen zu T investiert ist, gibt die Zielfunktion den Wert des Vermögens in Dollar oder Yen an.

Aus der Zielfunktion des mathematischen Programms 9 ist zu erkennen, dass b_T keinen Einfluss auf die erwirtschaftete Rendite hat. Somit wird unabhängig von dem

Wert von AI die gleiche Rendite erwirtschaftet, wenn für $t = 1, \dots, T-1$ die gleichen Handelssignale verwendet werden (vgl. El-Yaniv et al. 1992, S. 332 und Schmidt 2017, S. 1110). Somit ist auch die kompetitive Rate für das $P\text{-}BC$ unabhängig vom Parameter AI . Daher wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit der Fall $AI = 1$ nicht weiter berücksichtigt.

In der optimalen Lösung des $P\text{-}BC$ wird nicht gestückelt gehandelt. Daraus folgt, dass die optimale Lösung des $P\text{-}BC$ mit der optimalen Lösung des $NP\text{-}BC$ identisch ist.

Durch Einsetzen der Formeln (3.25) und (3.7) in Formel (3.8) kann s_t in Abhängigkeit von b_t berechnet werden. Es gilt:

$$s_t = \left(\frac{b_{t-1} \cdot \frac{q_{t-1}}{q_t}}{b_{t-1} \cdot \frac{q_{t-1}}{q_t} + 1 - b_{t-1}} - b_t \right) \cdot \prod_{\tau=1}^{t-1} \left(1 + b_\tau \cdot \left(\frac{q_\tau}{q_{\tau+1}} - 1 \right) \right) \quad (3.26)$$

für $t = 1, \dots, T$ mit $b_0 = 0$, $q_0 = 1$ und $W_0 = 1$.

Der für das Beispiel verwendete Lösungsvektor ist $\mathbf{b} = 0; 0,6; 0,3; 0,8; 0$ (vgl. Tabelle 3.8). Es gilt $AI = 0$ und somit wird eine DD -Conversion betrachtet. Daraus folgt, dass sich die s_t nicht zu -1 aufsummieren müssen. Die s_t ergeben sich aus Formel (3.26). Um s_t^{max} und s_t^{min} zu bestimmen, wird $b_t = 0$, bzw. $b_t = 1$ in Formel (3.26) eingesetzt. Das Beispiel ist das einzige, in dem zu jedem Zeitpunkt ein Teil des Vermögens in Dollar investiert ist.

t	0	1	2	3	4	5
q_t	1	1	3	2	4	2
s_t^{max}		0	0	0,9	0,195	1,768
s_t^{min}		-1	-1	-0,4	-0,91	1,768
s_t		0	-0,6	0,51	-0,689	1,768
b_t		0	0,6	0,3	0,8	0
D_t	1	1	0,4	0,91	0,221	1,989
Y_t	0	0	1,8	0,78	3,536	0
W_t^D	1	1	1	1,3	1,105	1,989

Tabelle 3.8: Beispiel $P\text{-}BC$

In Tabelle 3.9 werden die dargestellten Conversion Probleme zusammengefasst.

Ausprägung	Richtung	Stückelung	Zusätzliche Handelsrestriktionen	Quelle
$NP-UC$	uni-direktional	nicht-präemptiv	keine	El-Yaniv (1998)
$P-UC$	uni-direktional	präemptiv	keine	El-Yaniv et al. (1992)
$u'P-UC$	uni-direktional	u' -präemptiv	keine	Zhang et al. (2011)
$u'P-UC-1$	uni-direktional	u' -präemptiv	Nur eine Einheit pro Zeitpunkt handelbar	Lorenz et al. (2009)
$u'P-UC-L$	uni-direktional	u' -präemptiv	Bis Zeitpunkt t sind nur t Einheiten handelbar Anzahl an nicht-konvertierten Einheiten ist begrenzt	Zhang et al. (2012a)
$NP-BC$	bi-direktional	nicht-präemptiv	keine	Mohr und Schmidt (2008a)
$NP-BC-h$	bi-direktional	nicht-präemptiv	Anzahl der Transaktionen beschränkt	Fung (2017)
$P-BC$	bi-direktional	präemptiv	keine	El-Yaniv et al. (1992)

Tabelle 3.9: Liste der Ausprägungen des Conversion Problems

3.2 Ausgewählte Conversion Algorithmen

Dieser Abschnitt bietet eine Übersicht über die bisherigen Arbeiten im Bereich kompetitiver Conversion Algorithmen. Im Fokus dieses Überblicks stehen Algorithmen, die die gleichen gegebenen Zukunftsinformationen verwenden wie der in dieser Arbeit vorgestellte Algorithmus. Dabei handelt es sich um die Annahmen eines maximal mögliches Preises M und eines minimal möglichen Preises m . Es gilt $m \leq q_t \leq M, t = 1, \dots, T$. Zudem werden nur deterministische Algorithmen vorgestellt. Randomisierte Algorithmen, deren Verhalten von Zufallszahlen abhängt (vgl. Motwani und Raghavan 1995), werden nicht vorgestellt. Eine detailliertere Übersicht über Conversion Algorithmen findet sich bei Mohr et al. (2014).

Die Conversion Algorithmen sind zumeist für eine spezifische Ausprägung des CP entwickelt. Dennoch lassen sie sich auch auf andere Ausprägungen anwenden. So gilt, dass uni-direktionale und nicht-präemptive Algorithmen zur Lösung von $P\text{-}UC$ und $u'P\text{-}UC$ verwendet werden können. Gilt $AI = 1$, können diese Algorithmen zudem auf das $NP\text{-}BC$ und das $P\text{-}BC$ angewandt werden. Jedoch ist zu beachten, dass, wenn ein uni-direktionaler Algorithmus auf das bi-direktionale CP angewendet wird, die kompetitive Rate des Algorithmus steigt. Die Ursache dafür liegt darin, dass OPT im bi-direktionalen CP eine höhere Rendite erzielt als im uni-direktionalen CP. Wird ein nicht-präemptiver Algorithmus auf ein präemptives Handelsproblem angewandt, steigt die kompetitive Rate von diesem nicht. Jedoch können präemptive Algorithmen, die den erweiterten Lösungsraum ausnutzen, eine geringere kompetitive Rate erreichen.

Die kompetitive Rate, die auf einer Ausprägung erreicht werden kann, hängt zudem von den gegebenen Zukunftsinformationen ab. So müssen Online-Algorithmen, die für eine bestimmte Ausprägung mit bestimmten Zukunftsinformationen optimal sind, für Ausprägungen, in denen zusätzliche Zukunftsinformationen gegeben sind, nicht optimal sein.

3.2.1 Uni-direktionale Algorithmen

In diesem Abschnitt werden die uni-direktionalen Algorithmen vorgestellt, diese können in nicht-präemptive, u' -präemptive und präemptive Algorithmen unterteilt werden. Die kompetitive Rate für diese Algorithmen wird zumeist in Abhängigkeit von einer Anzahl an Zeitpunkten T berechnet. Für nicht-präemptive Algorithmen ist es zudem möglich, dass deren kompetitive Rate von der Zeit unabhängig ist. Dies

ergibt sich daraus, dass OPT und ON jeweils einen Preis akzeptieren. Weist eine Sequenz mehr als die beiden Preise auf, wird zu denen nicht gehandelt. Somit haben diese keinen Einfluss auf die kompetitive Rate. In der Conversion Literatur wird bei der Bestimmung der kompetitiven Rate sowohl der Fall einer diskreten als auch einer stetigen Preisentwicklung untersucht (vgl. z.B. El-Yaniv et al. 1992). Dabei ist zu beachten, dass sich die kompetitiven Raten der beiden Fälle unterscheiden können.

3.2.1.1 Nicht-präemptive Algorithmen

El-Yaniv (1998) präsentiert den Online-Algorithmus *RPP*, der das uni-direktionale und nicht-präemptive CP (vgl. mathematisches Programm 1) löst. Er trifft die Annahme, dass der größtmögliche Preis M und der kleinstmögliche Preis m dem Online-Spieler im Voraus bekannt sind. Für diese Zukunftsinformationen ist *RPP* optimal. *RPP* verwendet einen Reservationspreis q^* . Der Algorithmus akzeptiert den ersten Preis $q_t \geq q^*$ für die Konvertierung in Yen. Daraus können zwei mögliche Fehler resultieren. Beim Zu-früh-Fehler akzeptiert der Algorithmus einen Preis q_t , obwohl zu einem späteren Zeitpunkt $t' > t$ ein besserer Preis $q_{t'} > q_t$ angeboten wird. Beim Zu-spät-Fehler wird der höchste Preis abgelehnt und zu T muss ein schlechterer Preis akzeptiert werden. Die maximalen Ausprägungen dieser Fehler sind negativ korreliert. Der optimale Reservationspreis kann somit mit Error Balancing bestimmt werden. Der maximale Zu-früh-Fehler ist $\frac{M}{q^*}$. In dem Fall konvertiert ON zu q^* und OPT kann zu einem späteren Zeitpunkt zu M konvertieren. Beim maximalen Zu-spät-Fehler $\frac{q^* - \epsilon}{m}$ konvertiert OPT zu $q^* - \epsilon$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ und ON zu T zum Preis m . Die beiden Fehler werden gleich gesetzt und ϵ wird vernachlässigt. So ergibt sich: $q^* = (M \cdot m)^{\frac{1}{2}}$. Wird q^* in eine der beiden Fehler eingesetzt, ergibt sich die kompetitive Rate:

$$r(RPP) = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.27)$$

Xu et al. (2011) ergänzen das *NP-UC* um eine Preisfunktion $f_t(q_t)$. In diesem Fall wird bei der Konvertierung von einem Dollar nicht q_t Yen, sondern $f_t(q_t)$ Yen erhalten. Die Preisfunktion fällt monoton mit steigendem t und steigt streng monoton mit steigendem q_t . Sie kann bspw. Marktüberwachungskosten repräsentieren (vgl. Mohr et al. 2014, S. 92). Es ist zu beachten, dass Xu et al. (2011) nur den diskreten Fall betrachten. Xu et al. (2011) geben für das *NP-UC* mit Preisfunktion für gegebenes M, m und T an den optimalen Online-Algorithmus *AKD* an. Dieser nutzt ebenfalls

einen Reservationspreis, jedoch sinkt dieser mit steigendem t . Die Reservationspreise zu jedem Zeitpunkt können mit Error Balancing bestimmt werden. Die kompetitive Rate ist:

$$r(AKD) = \min \left\{ \left\{ \max \left\{ \frac{f_{t+1}(M)}{f_t(m)}, \left(\frac{f_2(M)}{f_t(m)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, t = 1, \dots, T-1 \right\}, \left(\frac{f_2(M)}{f_T(m)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.28)$$

Zudem bieten Xu et al. (2011) den Algorithmus *AUD* an, der das *NP-UC* mit Preisfunktion für gegebenes M und m optimal löst. Eine Alternative zur Modellierung mit einer Preisfunktion ist die Modellierung von mit steigendem t monoton fallenden Preisgrenzen M_t und m_t . Eine ähnlich Annahme treffen bspw. Damaschke et al. (2009).

Das *NP-UC* wird auch mit anderen Annahmen als den Preisgrenzen M und m untersucht. Zhang et al. (2012b) verwenden verbundene Preise als Annahme. Dabei gilt, dass die Preisgrenzen zum Zeitpunkt q_t vom vorherigen Preis q_{t-1} abhängen. Dem Online-Spieler sind die Faktoren Θ_1 und Θ_2 bekannt. Es gilt $q_t \in [q_{t-1} \cdot \Theta_1, q_{t-1} \cdot \Theta_2]$ mit $0 < \Theta_1 < 1 < \Theta_2$. Zhang et al. (2012b) untersuchen ausschließlich den diskreten Fall. Für diesen zeigen sie, dass der optimale Online-Algorithmus keinen Reservationspreis, sondern einen Reservationszeitpunkt t^* verwendet. So wird für jeden Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ untersucht, welchen Wert das höchst mögliche Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ aufweist, wenn zu diesem Zeitpunkt gehandelt werden würde. t^* ist der Zeitpunkt, zu dem ein Handeln zum geringsten höchstmöglichen Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ führt. Dieses Verhältnis entspricht der kompetitiven Rate. Auch hier gibt es einen Zu-früh- und einen Zu-spät-Fehler, welche negativ korreliert sind. Jedoch ist es im diskreten Fall nicht immer möglich, die beiden Fehler auszubalancieren. Daher wird das t als Handelszeitpunkt gewählt, zu dem das Verhältnis des größeren zum kleineren Fehler am geringsten ist.

Schroeder et al. (2015) erweitern den Ansatz von Zhang et al. (2012b) um eine Preisfunktion, die im Gegensatz zu der von Xu et al. (2011) mit steigendem t nicht monoton fallen muss. Weitere Algorithmen für die Annahme verbundener Preise finden sich bei Hu et al. (2005) sowie Mohr (2014).

3.2.1.2 Präemptive Algorithmen

Der optimale Online-Algorithmus uTH für $P\text{-UC}$ (vgl. mathematisches Programm 2) mit gegebenen M, m und T wird von El-Yaniv et al. (1992) vorgestellt. uTH besteht aus drei Regeln:

1. Am Ende des Spiels (zu T) wird das bisher nicht konvertierte Vermögen konvertiert.
2. Es wird nur konvertiert, wenn der aktuelle Preis dem bisher höchsten Preis entspricht. Eine Ausnahme bildet der letzte Preis des Spiels.
3. Immer wenn ein neuer Preis das Maximum darstellt, wird so viel konvertiert, dass eine kompetitive Rate von $r(uTH)$ erreicht wird, wenn ein Gegenspieler den Preis auf m fallen lässt und ihn bis zum Ende des Spiels dort belässt.

Aus Regel 3 folgt, dass die Handelssignale u. a. von der kompetitiven Rate abhängig sind. El-Yaniv et al. (1992) sowie El-Yaniv et al. (2001) geben eine kompetitive Rate sowohl für den stetigen Fall als auch für den diskreten Fall an. Die kompetitive Rate für den diskreten Fall ist

$$r(uTH)_T = T \cdot \left(1 - \left(\frac{m \cdot (r(uTH)_T - 1)}{M - m} \right)^{\frac{1}{T}} \right) \quad (3.29)$$

und für den stetigen Fall berechnet sie sich mit

$$r(uTH)_{\infty} = \ln \left(\frac{\frac{M}{m} - 1}{r(uTH)_{\infty} - 1} \right). \quad (3.30)$$

Die Formeln können jeweils nicht nach $r(uTH)_T$ bzw. $r(uTH)_{\infty}$ aufgelöst werden. Dennoch kann der Wert mit einem Näherungsverfahren, bspw. Binäre Suche, bestimmt werden.

Es ist zu beachten, dass uTH im stetigen Fall ein Mengensignal und im diskreten Fall ein Vermögenssignal generiert. In Formel (3.31) ist die Berechnungsformel für das Vermögenssignal im diskreten Fall präsentiert. Es ist zu beachten, dass diese nur anwendbar ist, wenn eine Teilsequenz mit bestimmten Eigenschaften betrachtet wird. Sei $\mathbf{q} = q_1, \dots, q_T$ eine Preissequenz. Für die betrachtete Teilsequenz $\hat{\mathbf{q}}$ muss gelten, dass sie nur die Preise von \mathbf{q} beinhaltet, für die gilt, $q_t \geq r(uTH)_T \cdot m$, und $q_t > \max_{\tau=1, \dots, t-1} \{q_{\tau}\}$ mit $t = 1, \dots, T - 1$ sowie den Preis q_T . Somit gilt

$r(uTH)_T \cdot m < q_1 < q_2 < \dots < q_{T'-1}$ mit T' = Anzahl an Elementen in Teilsequenz \mathbf{q} . Für die Handelssignale mit $t = 1, \dots, T'$ gilt (vgl. El-Yaniv et al. 2001, S. 112):

$$s_t = \begin{cases} -\frac{1}{r(uTH)_T} \cdot \frac{q_t - r(uTH)_T \cdot m}{q_t - m}, & \text{wenn } t = 1 \\ -\frac{1}{r(uTH)_T} \cdot \frac{q_t - q_{t-1}}{q_t - m}, & \text{wenn } 2 \leq t \leq T' - 1 \\ -1 - \sum_{t=1}^{T-1} s_t, & \text{wenn } t = T' \end{cases} \quad (3.31)$$

wobei s_t einem Vermögenssignal entspricht (vgl. Kapitel 3.1.2.1).

In den Formeln (3.32) und (3.33) wird die Berechnungsformel für das Mengensignal im stetigen Fall dargestellt. Aus Gründen der Leserlichkeit wird $r = r(uTH)_\infty$ verwendet. Es gilt (vgl. Dannoura und Sakurai 1998, S. 29):

$$1 - b_t = \begin{cases} \text{wenn } q_1 \in [m, r \cdot m] \\ \begin{cases} 1, & \text{wenn } q_t \in [q_1, r \cdot m] \\ 1 - \frac{1}{r} \cdot \ln \left(\frac{q_t - m}{r \cdot m - m} \right), & \text{wenn } q_t \in (r \cdot m, M] \end{cases} \\ \text{wenn } q_1 \in (r \cdot m, M] \\ \frac{q_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{R} \right)}{q_1 - m} - \frac{1}{R} \cdot \ln \left(\frac{q_t - m}{q_1 - m} \right) \end{cases} \quad (3.32)$$

mit

$$R = \begin{cases} r, & \text{wenn } q_1 \in [m, r \cdot m] \\ 1 + \frac{q_1 - m}{q_1} \cdot \ln \left(\frac{M - m}{q_1 - m} \right), & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.33)$$

Dannoura und Sakurai (1998) entwickelten, basierend auf uTH , den Algorithmus uTH' . uTH' unterscheidet sich von uTH durch eine Veränderung der dritten Regel:

3. Immer wenn ein neuer Preis das Maximum darstellt, wird so viel konvertiert, dass eine kompetitive Rate von $r(uTH')^{\frac{1}{2}}$ erreicht wird, wenn der Preis danach auf $r(uTH')^{\frac{1}{2}} \cdot m$ fällt und sich bis zum Ende des Spiels nicht mehr ändert.

Dannoura und Sakurai (1998) bestimmen die kompetitive Rate für uTH' ausschließlich für den stetigen Fall:

$$r(uTH') = \ln \left(\frac{\frac{M}{r(uTH') \cdot m} - 1}{r(uTH') - 1} \right)^2. \quad (3.34)$$

Es ist anzumerken, dass die kompetitive Rate von uTH' größer ist als die kompetitive Rate von uTH .

uTH' generiert ebenfalls Mengensignale. In den Formeln (3.35) und (3.36) wird aus Gründen der Leserlichkeit $\tilde{r} = r(uTH')^{\frac{1}{2}}$ verwendet. Es gilt:

$$1 - b_t = \begin{cases} \text{wenn } q_1 \in [m, \tilde{r}^2 \cdot m] \\ \begin{cases} 1, & \text{wenn } q_t \in [q_1, \tilde{r}^2 \cdot m] \\ 1 - \frac{1}{\tilde{r}} \cdot \ln \left(\frac{q_t - \tilde{r} \cdot m}{\tilde{r}^2 \cdot m - \tilde{r} \cdot m} \right), & \text{wenn } q_t \in (\tilde{r}^2 \cdot m, M] \end{cases} \\ \text{wenn } q_1 \in (\tilde{r}^2 \cdot m, M] \\ \frac{q_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\tilde{R}} \right)}{q_1 - \tilde{r} \cdot m} - \frac{1}{\tilde{R}} \cdot \ln \left(\frac{q_t - \tilde{r} \cdot m}{q_1 - \tilde{r} \cdot m} \right) \end{cases} \quad (3.35)$$

mit

$$\tilde{R} = \begin{cases} \tilde{r}, & \text{wenn } q_1 \in [m, \tilde{r}^2 \cdot m] \\ 1 + \frac{q_1 - \tilde{r} \cdot m}{q_1} \cdot \ln \left(\frac{M - \tilde{r} \cdot m}{q_1 - \tilde{r} \cdot m} \right), & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.36)$$

Algorithmen, wie uTH und uTH' , die unter der Annahme entwickelt werden, dass der Preis auf einen bestimmten Wert fällt und bis zum Ende des Spiels dort bleibt, werden Threat-Based-Algorithmen genannt. Weitere Threat-Based-Algorithmen für unterschiedliche Zukunftsinformationen sind bei al-Binali (1999), El-Yaniv et al. (2001) und Damaschke et al. (2009) zu finden.

Uni-direktionale und präemptive Algorithmen mit der Annahme verbundener Preise wurden von Chen et al. (2001), Hu et al. (2005), Zhang et al. (2012b) und Schroeder et al. (2015) entwickelt. Dabei wurden von Zhang et al. (2012b) und Schroeder et al. (2015) jeweils die gleichen Annahmen wie schon bei deren nicht-präemptiven Algorithmen getroffen.

3.2.1.3 u' -präemptive Algorithmen

Lorenz et al. (2009) präsentieren für das von ihnen eingeführte $u'P\text{-UC-1}$ (vgl. mathematisches Programm 4) den optimalen Online-Algorithmus $RPPM$ für gegebene

M , m und T . Es werden $u = u' + 1$ Reservationspreise q_{res}^i mit $i = 1, \dots, u$ bestimmt. Zur Erinnerung: Im von Lorenz et al. (2009) untersuchten CP darf nur eine Einheit auf einmal konvertiert werden. Die erste Einheit wird zum ersten Preis q_t konvertiert, für den gilt $q_t \geq q_{res}^1$. Die zweite Einheit wird zum ersten Preis $q_{t'}$ mit $q_{t'} > q_{res}^2$ und $t' > t$ konvertiert. Der Aufbau ist für die restlichen Einheiten analog. Entspricht zu einem Zeitpunkt t'' die Anzahl der nicht konvertierten Einheiten der Anzahl der verbleibenden Zeitpunkte, wird ab dann, ungeachtet der Reservationspreise, zu jedem Zeitpunkt $\tau = t'', \dots, T$ eine Einheit konvertiert.

Zhang et al. (2011) zeigen den optimalen Online-Algorithmus *DET* für das $u'P\text{-UC}$ mit bekannten M , m und T (vgl. mathematisches Programm 3). *DET* verhält sich ähnlich zu *RPPM*. Die Berechnungsformel der u Reservationspreise unterscheidet sich jedoch von *RPPM*. Zudem werden mehrere Einheiten gehandelt, wenn ein Preis q_t mehrere Reservationspreise erstmalig übersteigt bzw. erreicht. Da zum letzten Zeitpunkt T mehrere Einheiten getauscht werden können, handelt *DET* erst zu diesem Zeitpunkt, ohne dass ein Reservationspreis erstmalig erreicht bzw. überschritten wird.

3.2.2 Bi-direktionale Algorithmen

Im Folgenden werden die bi-direkionalen Algorithmen vorgestellt. Die kompetitive Rate für diese Algorithmen wird zumeist nicht in Abhängigkeit von Zeitpunkten, sondern in Abhängigkeit von sogenannten Runs berechnet. Ein Run ist eine Sequenz von monoton fallenden oder steigenden Preisen. Während eines steigenden Y-Runs steigt die Anzahl an Yen, die man für einen Dollar bekommt. Hingegen sinkt in einem absteigendem D-Run die Anzahl an Yen, die man für einen Dollar bekommt.

3.2.2.1 Nicht-präemptive Algorithmen

Mohr und Schmidt (2008a) präsentieren den Online-Algorithmus *BRPP*, welcher auf dem *RPP* von El-Yaniv (1998) basiert. *BRPP* dient zur Lösung des *NP-BC* (vgl. mathematisches Programm 6). Der Reservationspreis q^* ist identisch zu dem des *RPP*. Die Algorithmen unterscheiden sich darin, dass *BRPP*, nachdem gehandelt wurde, zu einem Preis über (unter) q^* wieder zurück handelt. Mohr (2011) untersucht im Rahmen der kompetitiven Analyse, ausschließlich den Fall, dass OPT und ON beide p Mal von Dollar in Yen und p Mal von Yen in Dollar konvertieren müssen. Für die kompetitive Rate von *BRPP* in Abhängigkeit von p ergibt sich (vgl. Mohr

2011, S. 85):

$$r(BRPP)_p = \left(\frac{M}{m}\right)^p. \quad (3.37)$$

Schmidt (2017) stellt den Algorithmus $MRPR(k)$ vor. Dieser unterteilt die Preissequenz in Runs. Zusätzlich zu den Preisgrenzen M und m benötigt $MRPR(k)$ die Anzahl der Runs k . Der entsprechende Algorithmus $MRPR(k)$ besteht aus drei Regeln:

1. Nummeriere die Runs rückwärts durch, so dass der letzte Run den Wert 1 und der erste Run den Wert k zugewiesen bekommt.
2. In einem Y-Run $k + 1$ konvertiere Dollar in Yen, wenn $D_t > 0$ und $q_t(k+1) \geq q_Y(k+1) = m \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^{\left(\frac{i}{2^k}\right)}$ mit i als ganzzahlige Zahl, für die der Term $\frac{i}{2^k}$ am nächsten zu $\frac{2}{3}$ ist.
3. In einem D-Run $k + 1$ konvertiere Yen in Dollar, wenn $Y_t > 0$ und $q_t(k+1) \leq q_D(k+1) = m \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^{\left(\frac{i}{2^k}\right)}$ mit i als ganzzahlige Zahl, für die der Term $\frac{i}{2^k}$ am nächsten zu $\frac{1}{3}$ ist.

Schmidt (2017) gibt die kompetitive Rate $r(MRPR(k))_k$ in Abhängigkeit von k an. Es gilt, dass diese für $k > 1$ nah an

$$\left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \quad (3.38)$$

ist. $MRPR(k)$ löst das P -BC mit entsprechenden Zukunftsinformationen optimal. Die Reservationspreise $q_D(k)$ und $q_Y(k)$ sind nicht konstant, sondern werden für jeden Run separat bestimmt.

Schmidt (2017) bietet zudem eine Variante des $MRPR(k)$ an, in dem die Anzahl der Runs k nicht benötigt wird. $MRPR'$ verwendet die beiden konstanten Reservationspreise $q_D = M^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}$ und $q_Y = M^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{1}{3}}$ und besteht aus zwei Regeln:

1. Ist das Vermögen in Dollar investiert, konvertiere von Dollar zu Yen, wenn während eines Y-Run gilt $q_t \geq q_Y$.
2. Ist das Vermögen in Yen investiert, konvertiere von Yen zu Dollar, wenn während eines D-Run gilt $q_t \leq q_D$.

Da $MRPR'$ im Gegensatz zu $MRPR(k)$ über weniger Zukunftsinformationen verfügt und letzterer für seine Informationen optimal ist, gilt für die kompetitive Rate der beiden Algorithmen $r(MRPR')_k \geq r(MRPR(k))_k$.

Weitere nicht-präemptive Algorithmen für verbundene Preise werden von Schroeder et al. (2016) angeboten.

3.2.2.2 Präemptive Algorithmen

In der Literatur existieren zwei Algorithmen, die sowohl kompetitiv sind als auch bi-direktional und präemptiv handeln.

El-Yaniv et al. (1992) entwickelten auf Basis des uni-direktionalen Algorithmus uTH den Algorithmus bTH für das $P\text{-}BC$. Bei diesem wird für jeden Run uTH separat ausgeführt. Dies ist gleichbedeutend mit der Unterteilung einer Sequenz in $i = 1, \dots, k$ separate Conversion Probleme. Da im Voraus nicht bekannt ist, wann ein Run beginnt bzw. endet, entsprechen die Zeitpunkte, die in den einzelnen Conversion Problemen betrachtet werden, nicht exakt den Runs. Sei k die Anzahl an Runs und T_i^{Ex} mit $i = 1, \dots, k + 1$ die Zeitpunkte, zu denen die Preissequenz \mathbf{q} lokale Minima bzw. lokale Maxima aufweist. Die lokalen Extremwerte stellen den Anfang bzw. das Ende zweier aufeinander folgender Runs da.

Da bTH keine Information darüber hat, zu welchen Zeitpunkten die lokalen Extremwerte vorliegen, merkt der Algorithmus im diskreten Fall jeweils einen Zeitpunkt zu spät, dass bereits ein neuer Run begonnen hat. Somit gilt für das i -te Conversion Problem mit $i = 2, \dots, k - 1$, dass dieses die Zeitpunkte $t = T_i^{Ex} + 1, \dots, T_{i+1}^{Ex} + 1$ umfasst. Das erste ($i = 1$) und das letzte ($i = k$) CP stellen eine Ausnahme dar, da hier bekannt ist, dass es sich um den ersten bzw. letzten Preis eines Runs handelt. Zum Abschluss jedes i -ten Conversion Problems mit $i = 1, \dots, k - 1$ wird zum Zeitpunkt $T_{i+1}^{Ex} + 1$ das in diesem Conversion Problem noch nicht konvertierte Vermögen konvertiert. Dieser Zeitpunkt bildet zudem den ersten Zeitpunkt des nachfolgenden Conversion Problems. Zu diesem kann ein Handelssignal generiert werden, um in die entgegengesetzte Richtung zu konvertieren. Daher können für den jeweils ersten Zeitpunkt des i -ten Conversion Problems mit $i = 2, \dots, k$, jeweils zwei Handelssignale generiert werden. Diese können zu einem Handelssignal kombiniert werden.

El-Yaniv et al. (1992) geben die kompetitive Rate in Abhängigkeit von k an. Es gilt:

$$r(bTH)_k = (r(uTH)_{\infty})^k = \ln \left(\frac{\frac{M}{m} - 1}{r(uTH)_{\infty} - 1} \right)^k. \quad (3.39)$$

Es ist anzumerken, dass obwohl uTH für das P -UC optimal ist, bTH für das P -BC nicht optimal ist.

Dannoura und Sakurai (1998) führen mit bTH' ebenfalls eine bi-direktionale Variante ihres Algorithmus uTH' ein. Ebenso wie bei El-Yaniv et al. (1992) wird uTH' für jeden Run separat angewendet. Obwohl uTH' eine schlechtere kompetitive Rate als uTH erreicht, gilt, dass bTH' eine bessere kompetitive Rate als bTH erreicht. Für die kompetitive Rate $r(bTH')_k$ in Abhängigkeit von k gilt (vgl. Dannoura und Sakurai 1998, S. 32f):

$$r(bTH')_k = r(uTH')^{\frac{k}{2}} = \ln \left(\frac{\frac{M}{r(uTH') \cdot m} - 1}{r(uTH') - 1} \right)^{\frac{k}{2}}. \quad (3.40)$$

Die kompetitiven Raten $r(bTH')$ und $r(bTH)$ können entsprechend $r(uTH)$ mit numerischen Verfahren bestimmt werden.

El-Yaniv et al. (1992, S. 332) geben, auf Basis des bTH , für das P -BC eine Untergrenze für die kompetitive Rate in Abhängigkeit von k an. Kein Online-Algorithmus kann eine niedrigere kompetitive Rate erreichen.

Die Untergrenze für den diskreten Fall UG_D nach El-Yaniv et al. (1992) ist:

$$UG_D = (r(uTH)_T)^{\frac{k}{2}}. \quad (3.41)$$

Für die Untergrenze für den stetigen Fall UG_S gilt:

$$UG_S = (r(uTH)_{\infty})^{\frac{k}{2}}. \quad (3.42)$$

Dannoura und Sakurai (1998, S. 30) bestimmen eine verbesserte (höhere) Untergrenze für das P -BC für den stetigen Fall.

3.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Ausprägungen des Conversion Problems klassifiziert. Zudem wurden unterschiedliche Arten von Handelssignalen dargestellt. Auf Basis der dargestellten Handelssignale wurden die mathematischen Programme der verschiedenen Ausprägungen des Conversion Problems dargestellt und voneinander abgegrenzt.

Anschließend wurde ein Überblick über die Arbeiten im Bereich kompetitiver Conversion Algorithmen gegeben. Der Überblick fokussierte sich auf Algorithmen, die die Preisgrenzen M und m als Zukunftsinformationen nutzen. Diese werden auch von dem neuen Algorithmus verwendet, der im nächsten Kapitel vorgestellt und theoretisch analysiert wird.

4 Ein neuer Algorithmus für das bi-direktionale und präemptive Conversion Problem

In diesem Kapitel wird ein neuer Online-Algorithmus für das bi-direktionale und präemptive Conversion Problem vorgestellt. Die kompetitive Analyse wird in Abhängigkeit von Runs und Zeitpunkten durchgeführt. Anschließend erfolgt für beide kompetitive Raten ein Vergleich mit ausgewählten Algorithmen. Der Vergleich erfolgt zumeist anhand einer experimentellen Analyse. Des Weiteren wird eine neue Untergrenze für die kompetitive Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten angegeben.

4.1 Das bi-direktionale und präemptive Conversion Problem

Zunächst wird das im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Problem ausführlich beschrieben. Dabei handelt es sich um das bi-direktionale und präemptive Conversion Problem (*DD-P-BC*). Das entsprechende mathematische Programm ist in Kapitel 3.1.2.2.8 dargestellt. Das *DD-P-BC* lässt sie wie folgt beschreiben:

Gegeben: Ein Startvermögen $W_0 = 1$ in Dollar und eine Preissequenz mit T Preisen $\mathbf{q} = q_1, q_2, \dots, q_T$ wobei q_t dem Wechselkurs Yen zu Dollar entspricht. Zu diesem kann bspw. 1 Dollar in q_t Yen oder 1 Yen in $\frac{1}{q_t}$ Dollar konvertiert werden. Das Vermögen muss zu jedem Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ vollständig zwischen Dollar und Yen aufgeteilt werden. Die in Dollar und Yen investierten Anteile dürfen maximal 100 % und minimal 0 % des Vermögens entsprechen. Zum Zeitpunkt T muss die Aufteilung 100 % in Dollar und 0 % in Yen sein.

Gesucht: Die Vermögensaufteilungen zwischen Dollar und Yen zu jedem Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$, welche das Endvermögen W_T in Dollar zum Zeitpunkt T maximieren.

b_t ist der zum Zeitpunkt t in Yen investierte Anteil des Vermögens W_t . Der in Dollar investierte Anteil ist $1 - b_t$. Für das Endvermögen gilt $W_T = \prod_{t=1}^{T-1} \left(1 + b_t \left(\frac{q_t}{q_{t+1}} - 1\right)\right)$.

Zur Erinnerung: Wird statt des *DD-P-BC* das *DY-P-BC*, in welchem zum Zeitpunkt T 100 % des Vermögens in Yen investiert sein müssen, betrachtet, ergeben sich die gleichen kompetitiven Raten. Daher wird auf eine Betrachtung des *DY-P-BC* verzichtet (vgl. Kapitel 3.1.2.2.8).

4.2 Der Algorithmus 2-Reservationspreis Politik

In diesem Abschnitt wird der Algorithmus 2-Reservationspreis Politik (*2RPP*) vorgestellt. Dieser benötigt die Preisgrenzen M und m als Zukunftsinformationen. Es gilt $m \leq q_t \leq M, t = 1, \dots, T$. Um Trivialitäten zu vermeiden, wird angenommen, dass für die Preisgrenzen gilt $0 < m < M$. *2RPP* unterteilt das Intervall der möglichen Preise $[m, M]$ mit den zwei Reservationspreisen $q_{res}^1 = M^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}$ und $q_{res}^2 = M^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{1}{3}}$ in die drei Preiskorridore $[m, q_{res}^1]$, $(q_{res}^1, q_{res}^2]$ und $(q_{res}^2, M]$. Die Reservationspreise sind so gewählt, dass gilt:

$$\frac{q_{res}^1}{m} = \frac{q_{res}^2}{q_{res}^1} = \frac{M}{q_{res}^2} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.1)$$

Zu jedem Zeitpunkt $t = 1, \dots, T-1$ gilt, dass *2RPP* handelt, wenn der Preis q_t in einem anderen Preiskorridor liegt als q_{t-1} . Handelt *2RPP*, gilt, dass entweder (1) zu einem Preis $q_t \in [m, q_{res}^1]$ das gesamte Vermögen in Dollar investiert wird ($b_t = 0$), (2) zu einem Preis $q_t \in (q_{res}^1, q_{res}^2]$ jeweils die Hälfte des Vermögens in Yen und Dollar investiert wird ($b_t = 0,5$) oder (3) zu einem Preis $q_t \in (q_{res}^2, M]$ das gesamte Vermögen in Yen investiert wird ($b_t = 1$). Liegt der Preis q_t im selben Preiskorridor wie q_{t-1} handelt *2RPP* nicht. Wird nicht gehandelt, ergibt sich das Vermögen W_t durch Preisänderungen des Yen aus W_{t-1} . Dies gilt ebenso für den in Yen investierten Anteil b_t des Vermögens (vgl. Formel (3.7)). Zu T ist das gesamte Vermögen in Dollar investiert.

v_t gibt an, in welchem Preiskorridor sich Preis q_t befindet. $v_t = 0$ bedeutet $q_t \in [m, q_{res}^1]$, $v_t = 1$ bedeutet $q_t \in (q_{res}^1, q_{res}^2]$ und $v_t = 2$ bedeutet $q_t \in (q_{res}^2, M]$. Die formale Beschreibung des Algorithmus ist im Folgenden dargestellt.

Algorithmus 2RPP:

Gegeben: M, m, T

Schritt 1: Bestimme Reservationspreise $q_{res}^i, i = 1, 2$ mit

$$q_{res}^i = M^{\frac{i}{3}} \cdot m^{\frac{3-i}{3}}. \quad (4.2)$$

Schritt 2: Wiederhole für $t = 1, \dots, T - 1$:

Schritt 2.1: Bestimme v_t mit

$$v_t = \begin{cases} 0, & \text{wenn } m \leq q_t \leq q_{res}^1 \\ 1, & \text{wenn } q_{res}^1 < q_t \leq q_{res}^2 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.3)$$

Schritt 2.2: Bestimme b_t mit

$$b_t = \begin{cases} \frac{b_{t-1} \cdot \frac{q_{t-1}}{q_t}}{b_{t-1} \cdot \frac{q_{t-1}}{q_t} + 1 - b_{t-1}}, & \text{wenn } v_t = v_{t-1} \\ \frac{v_t}{2}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.4)$$

mit $q_0 = m, b_0 = 0$ und $v_0 = 0$.

Schritt 3: Bestimme $b_T = 0$.

Anmerkung: Die Reservationspreise sowie der in Yen investierte Anteil sind so gewählt, dass die Fehler mehrerer Sequenzen entsprechend dem Error Balancing (vgl. Kapitel 2.2.2.2) ausbalanciert sind. Näheres dazu ergibt sich aus der Beweisführung zu den nachfolgenden Lemmata 4 und 8.

Die Vorgehensweise des Algorithmus soll anhand eines Beispiels erklärt werden. Gegeben sei ein Startvermögen $W_0 = 1$ in Dollar, die Preissequenz $\mathbf{q} = 1,5; 2,5; 3; 1,5$, die Preisgrenzen $M = 8$ und $m = 1$ sowie die Anzahl an Zeitpunkten $T = 4$. Zunächst berechnet der Algorithmus die beiden Reservationspreise $q_{res}^1 = 2$ und $q_{res}^2 = 4$. Durch diese entstehen die Preiskorridore $[1, 2], [2, 4]$ und $(4, 8]$ (vgl. Abbildung 4.1). Der erste Preis $q_1 = 1,5$ liegt im niedrigsten Preiskorridor ($v_1 = 0$). Daher bleibt das Vermögen vollständig in Dollar investiert d. h. $b_1 = 0$ (vgl. Formel (4.4)). Der nächste Preis $q_2 = 2,5$ liegt in einem anderen Preiskorridor ($v_2 = 1$). Daher wird der in Yen investierte Vermögensanteil gemäß dem Sonst-Fall von Formel (4.4) berechnet. Es ergibt sich $b_2 = 0,5$. Da $q_3 = 3$ im selben Preiskorridor ist wie der vorherige Preis q_2 ($v_3 = 1$), wird nicht konvertiert. Durch die Preisänderung des Yen ergibt sich jedoch

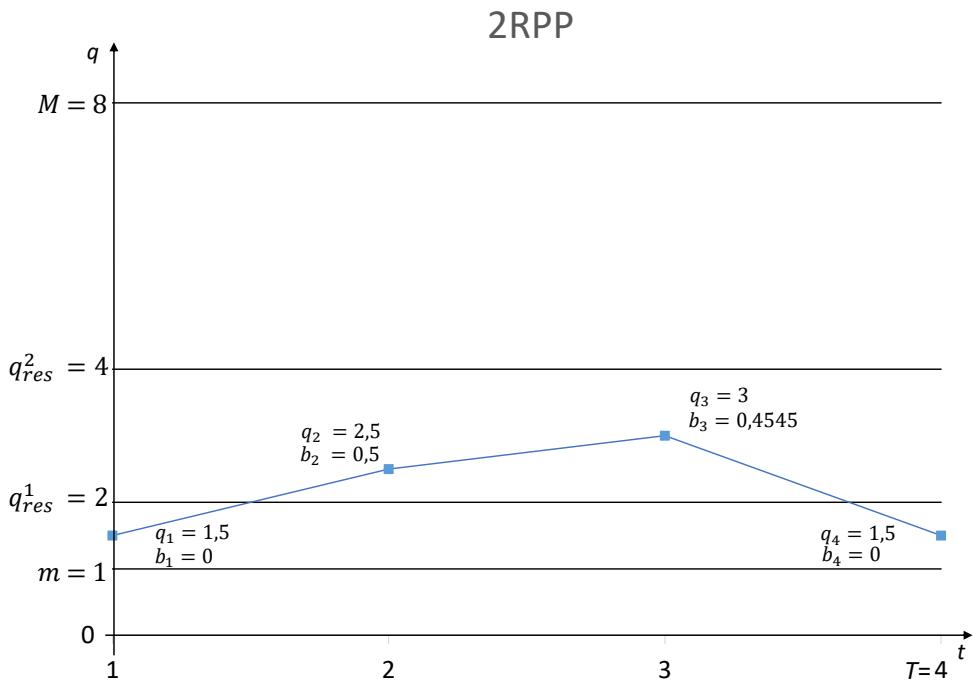


Abbildung 4.1: Beispiel für 2RPP

ein veränderter Vermögensanteil in Yen. Gemäß Formel (4.4) ergibt sich $b_3 = 0,4545$. Zum letzten Zeitpunkt muss, unabhängig vom Preis $q_4 = 1,5$, das gesamte Vermögen in Dollar investiert werden, d. h. $b_4 = 0$. Tabelle 4.1 zeigt die entsprechenden Werte für das Beispiel. D_t und Y_t entsprechen den in Dollar bzw. Yen gehaltenen Anteilen (vgl. Formeln (3.18) und (3.19)).

T	0	1	2	3	4
q_t	$m = 1$	1,5	2,5	3	1,5
v_t	0	0	1	1	0
b_t	0	0	0,5	0,4545	0
D_t	1	1	0,5	0,5	1,3333
Y_t	0	0	1,25	1,25	0
W_t^D	1	1	1	0,9167	1,3333

Tabelle 4.1: 2RPP für $M = 8$, $m = 1$ und $\mathbf{q} = 1,5; 2,5; 3; 1,5$

4.3 Theoretische Analyse des vorgestellten Algorithmus

In diesem Abschnitt wird die kompetitive Analyse für *2RPP* durchgeführt. Dies geschieht sowohl in Abhängigkeit von der Anzahl an Runs k als auch der Anzahl an Zeitpunkten T . Die beiden kompetitiven Raten werden miteinander verglichen, um festzustellen, ob funktionale Abhängigkeiten zwischen diesen beiden bestehen. Anschließend wird die Kompetitivität von *2RPP* mit der von ausgewählten Algorithmen verglichen. Zum Abschluss erfolgt für *2RPP* eine Prüfung auf Optimalität.

4.3.1 Kompetitive Analyse

Die kompetitive Analyse dient dazu, eine Garantie für die Lösungsgüte für *2RPP* zu ermitteln. Die kompetitive Rate r gibt an, wie groß das Verhältnis zwischen der optimalen Offline-Lösung (OPT) und einem Online-Algorithmus (ON) maximal sein kann. Sequenzen, auf denen das maximal mögliche Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht wird, werden als Worst-Case-Sequenzen (WC-Sequenzen) bezeichnet.

Zunächst wird beschrieben, wie die Handelssignale von OPT bestimmt werden. OPT konvertiert, beginnend mit dem ersten lokalen Maximum und endend mit dem letzten lokalen Minimum, zu jedem lokalen Maximum von Dollar in Yen und zu jedem lokalem Minimum von Yen in Dollar. Somit ist OPT während eines aufsteigenden Y-Runs bis zum letzten Preis des Runs in Dollar und während eines absteigenden D-Run bis zum letzten Preis des Runs in Yen investiert. Betrachtet wird eine Sequenz mit X lokalen Minima sowie Maxima, beginnend mit einem lokalen Maximum. Seien q_i^{min} und q_i^{max} mit $i = 1, \dots, X$ die Preise der lokalen Minima und Maxima. Dann berechnet sich das Endvermögen von OPT mit

$$W_T^{OPT} = \prod_{i=1}^X \frac{q_i^{max}}{q_i^{min}}. \quad (4.5)$$

Um die kompetitive Rate des *2RPP* zu bestimmen, muss zunächst eine WC-Sequenz bestimmt werden. Das Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ auf dieser entspricht dann der kompetitiven Rate. Es ist zu beachten, dass sich die WC-Sequenzen je nach gegebenem Parameter unterscheiden können. Daher erfolgt sowohl eine kompetitive Analyse in Abhängigkeit von der Anzahl an Runs k als auch in Abhängigkeit von der Anzahl an Zeitpunkten T . Die kompetitive Rate in Abhängigkeit der Anzahl an Runs wird für das *DD-BC* mit stetiger und diskreter Preisentwicklung bestimmt. Die kompetitive Rate in

Abhängigkeit von Zeitpunkten gilt für das *DD-P-BC* mit diskreter Preisentwicklung. Hierbei entspricht die Anzahl an Zeitpunkten der Anzahl an Preisen zu denen konvertiert werden kann.

Um nicht auf allen Sequenzen das Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ bestimmen zu müssen, werden im Folgenden zunächst Eigenschaften definiert, die WC-Sequenzen erfüllen müssen bzw. die von mindestens einer WC-Sequenz erfüllt werden. Dadurch wird die Anzahl an Sequenzen, die zum Auffinden einer WC-Sequenz überprüft werden müssen, verringert. Die Eigenschaften von WC-Sequenzen für diskrete und stetige Preisentwicklungen können voneinander abweichen. Für beide Fälle gilt, dass WC-Sequenz entweder mit dem Preis m oder M enden. Für den diskreten Fall gilt zudem, dass mindestens eine WC-Sequenz nur die Preise aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ enthält. Für den stetigen Fall gilt analog dazu, dass in mindestens einer WC-Sequenz die Runs nur mit Preisen aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ beginnen und enden. Diese Eigenschaften werden in den Lemmata 1, 2 und 3 dargestellt. Die Beweise zu den Lemmata befinden sich im Anhang (vgl. Kapitel A.2).

Lemma 1. *Der letzte Preis q_T einer WC-Sequenz entspricht M oder m .*

Lemma 2. *Bei diskreter Preisentwicklung beinhaltet mindestens eine WC-Sequenz nur Preise aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$.*

Lemma 3. *Bei stetiger Preisentwicklung beinhaltet mindestens eine WC-Sequenz nur Runs die mit Preisen aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ beginnen und enden.*

Anmerkung: Ob in einer WC-Sequenz ein Preis $q_{res}^i + \epsilon$ oder q_{res}^i beträgt, hängt davon ab, ob der nächste Preis in der Sequenz höher oder niedriger ist. Fällt der Preis, steht ON schlechter da, wenn der Preis zuvor q_{res}^i ist. Wäre der Preis zuvor $q_{res}^i + \epsilon$, würde ON eine Vermögensaufteilung wählen, in der er mehr Yen hätte, und somit würde er stärker von einem fallenden Preis profitieren. Bei einem steigenden Preis verhält es sich umgekehrt.

Zusätzlich zu diesen Eigenschaften wird gezeigt, dass es zu jeder Sequenz, die mit einem absteigenden D-Run startet, eine Sequenz gibt, die mit einem ansteigenden Y-Run startet, auf der dasselbe Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erzielt wird. Dabei gilt, dass sich, wenn sich der Preis auf der einen Sequenz um den Faktor F ändert, der Preis auf der anderen Sequenz um den Kehrwert von F , d. h. $\frac{1}{F}$ ändert. Die Sequenz, bei der

sich der Preis um $\frac{1}{F}$ ändert, wird hier als Kehrsequenz bezeichnet. Sie ist wie folgt definiert:

Definition 1. Ein Preissequenz der Form $\mathbf{q}'(\mathbf{q}) = \frac{M \cdot m}{q_1} + \epsilon \cdot \mathbf{1}_1, \frac{M \cdot m}{q_2} + \epsilon \cdot \mathbf{1}_2, \dots, \frac{M \cdot m}{q_T} + \epsilon \cdot \mathbf{1}_T$ mit

$$\mathbf{1}_t = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } q_t \in \{q_{res}^1, q_{res}^2\} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}, t = 1, \dots, T \quad (4.6)$$

und $\epsilon \rightarrow 0^+$ wird als Kehrsequenz der Sequenz \mathbf{q} bezeichnet.

Ferner wird ein Preis der Form $q'_t = \frac{M \cdot m}{q_t}$ als Kehrpriis bezeichnet.

Lemma 4. Angenommen, ON verwendet den Algorithmus 2RPP. Dann entspricht das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q})}{ON(\mathbf{q})}$, das auf einer Preissequenz \mathbf{q} resultiert, dem Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}{ON(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}$, welches auf der Kehrsequenz $\mathbf{q}'(\mathbf{q})$ resultiert, wenn $\epsilon \rightarrow 0^+$ gilt.

Aus Lemma 4 folgt, dass das maximale Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$, das auf Sequenzen, die mit einem D-Run beginnen, erreicht werden kann, dem maximalen Verhältnis, welches auf Sequenzen, die mit Y-Run beginnen, erreicht werden kann, entspricht. Daher ist es zum Auffinden einer WC-Sequenz ausreichend, nur Sequenzen zu betrachten die mit einem D-Run beginnen. Der Beweis des Lemmas befindet sich im Anhang (vgl. Kapitel A.3).

4.3.1.1 Kompetitive Rate in Abhängigkeit von Runs

Zunächst wird die kompetitive Rate in Abhängigkeit von Runs angegeben. Es werden sowohl die Fälle einer stetigen als auch diskreten Preisentwicklung untersucht. Da die Reservationspreise von 2RPP statisch sind, handelt ON auf Y-Runs mit gleichen Preisen immer identisch. Dies gilt ebenso für D-Runs mit gleichen Preisen. Das bedeutet, dass sich das Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$, das maximal auf einem Y- bzw. D-Run erreichbar ist, im Zeitablauf nicht ändert.

Zudem folgt aus Lemma 4, dass das maximale Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$, das auf einem ansteigenden Y-Run erzielt werden kann, auch dem maximalen Verhältnis entspricht, das auf einem absteigenden D-Run erzielt werden kann. Somit wird im Worst-Case auf jedem Run das gleiche Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Daher wird zunächst die kompetitive Rate $r(2RPP)_{k=1}$ für eine Sequenz mit $k = 1$ Runs bestimmt. Diese wird in Lemma 5 angegeben.

Lemma 5. Die kompetitive Rate $r(2RPP)_{k=1}$ von 2RPP in Abhängigkeit von k ist bei stetiger Preisentwicklung $\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ für $k = 1$.

Beweis. (1) Feststellen der möglichen WC-Sequenzen:

Aufgrund von Lemma 4 müssen nur absteigende Runs betrachtet werden. Zudem ergibt sich aufgrund der Lemmata 1 und 3, dass zum Auffinden einer WC-Sequenz nur Sequenzen betrachtet werden müssen, die mit m enden und die nur mit Preisen aus der Menge $\{q_{res}^1, q_{res}^2, M\}$ beginnen. Sei $\dot{\mathbf{q}}_i = q_i^S, q_i^E$ eine Sequenz, bestehend aus einem Run, der mit dem Preis q_i^S startet und dem Preis q_i^E endet. Aus den Lemmata 1, 3 und 4 ergeben sich drei Runs, von denen mindestens einer eine WC-Sequenz für $k = 1$ darstellt. Diese sind: $\dot{\mathbf{q}}_1 = M, m$; $\dot{\mathbf{q}}_2 = q_{res}^2, m$ und $\dot{\mathbf{q}}_3 = q_{res}^1, m$.

(2) Für die Sequenzen $\dot{\mathbf{q}}_i$ mit $i = 1, \dots, 3$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\dot{\mathbf{q}}_i)}{ON(\dot{\mathbf{q}}_i)}$ berechnet:

$$\dot{\mathbf{q}}_1 : OPT(\dot{\mathbf{q}}_1) = \frac{M}{m}, ON(\dot{\mathbf{q}}_1) = \frac{M}{q_{res}^2} \cdot \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\frac{OPT(\dot{\mathbf{q}}_1)}{ON(\dot{\mathbf{q}}_1)} = \frac{\frac{M}{m}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)};$$

$$\dot{\mathbf{q}}_2 : OPT(\dot{\mathbf{q}}_2) = \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}, ON(\dot{\mathbf{q}}_2) = \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{OPT(\dot{\mathbf{q}}_2)}{ON(\dot{\mathbf{q}}_2)} = \frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}};$$

$$\dot{\mathbf{q}}_3 : OPT(\dot{\mathbf{q}}_3) = \frac{q_{res}^1}{m} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}}, ON(\dot{\mathbf{q}}_3) = 1, \frac{OPT(\dot{\mathbf{q}}_3)}{ON(\dot{\mathbf{q}}_3)} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

(3) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate gilt $r(2RPP)_{k=1} = \max \left\{ \frac{OPT(\dot{\mathbf{q}}_i)}{ON(\dot{\mathbf{q}}_i)} \right\}, i = 1, \dots, 3$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT(\dot{\mathbf{q}}_i)}{ON(\dot{\mathbf{q}}_i)}$ wird für $i = 1$ und $i = 2$ erreicht:

$$r(2RPP)_{k=1} = \frac{OPT(\dot{\mathbf{q}}_1)}{ON(\dot{\mathbf{q}}_1)} = \frac{\frac{M}{m}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = \frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}.$$

□

Aus der kompetitiven Rate für $k = 1$ kann die kompetitive Rate für beliebige k bestimmt werden.

Theorem 1. *Die kompetitive Rate $r(2RPP)_k$ von 2RPP in Abhängigkeit von k ist bei stetiger Preisentwicklung $\left(\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)^k$ für $k \geq 1$.*

Beweis. Die kompetitive Rate von $\left(\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)^k$ wird dann erreicht, wenn ein D-Run, auf dem das höchstmögliche Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht wird, und ein Y-Run, auf dem das gleiche Verhältnis erreicht wird, abwechselnd aufeinander folgen können. Da gilt, dass der letzte Preis eines Runs der erste Preis des nächsten Runs ist, können Runs nur abwechselnd aufeinander folgen, wenn der D-Run mit dem Preis endet, mit dem der Y-Run beginnt und umgekehrt.

Aus Lemma 5 folgt, dass auf Sequenz $\dot{\mathbf{q}}_1 = M, m$, das größtmögliche Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ für einen absteigenden D-Run erreicht wird. Aus Lemma 4 folgt daher, dass auf der Kehrsequenz $\dot{\mathbf{q}}'(\dot{\mathbf{q}}_1) = m, M$ das größtmögliche Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ für einen aufsteigenden Y-Run erreicht wird. Dieses weist denselben Wert wie auf der Sequenz $\dot{\mathbf{q}}_1$ auf. Für die Kehrsequenz $\dot{\mathbf{q}}'(\dot{\mathbf{q}}_1)$ gilt, dass sie mit dem Preis endet, mit dem Sequenz $\dot{\mathbf{q}}_1$ beginnt und umgekehrt. Diese Runs können somit abwechselnd aufeinander folgen. Die Worst-Case-Sequenz für beliebige $k \geq 1$ setzt sich somit aus den sich abwechselnden Sequenzen $\dot{\mathbf{q}}_1$ und $\dot{\mathbf{q}}'(\dot{\mathbf{q}}_1)$ zusammen. Für die kompetitive Rate in Abhängigkeit von k gilt $r(2RPP)_k = \left(\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)^k$. \square

Im Fall einer diskreten Preisentwicklung, in der die WC-Sequenz aus k Runs besteht wird dieselbe kompetitive Rate erreicht.

Theorem 2. *Die kompetitive Rate $r(2RPP)_k$ von 2RPP in Abhängigkeit von k ist bei diskreter Preisentwicklung $\left(\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)^k$ für $k \geq 1$.*

Der Beweis für Theorem 2 befindet sich im Anhang (vgl. Kapitel A.1). Im Anhang (vgl. Kapitel A.5) ist zudem, in Anlehnung an die Beweisführung von Schmidt (2017), die kompetitive Rate für $k = 3$ bewiesen.

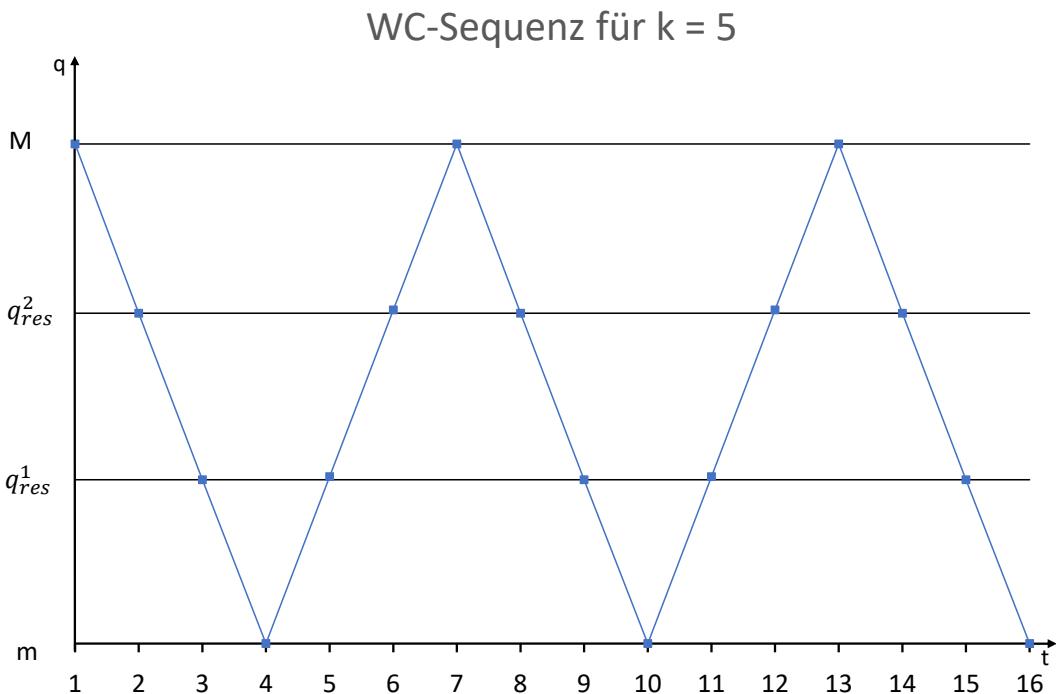


Abbildung 4.2: Worst-Case-Sequenz von 2RPP für $k = 5$

Abbildung 4.2 zeigt eine WC-Sequenz für $k = 5$. Im stetigen Fall fällt während jedes D-Runs der Preis von M auf m und steigt während jedes Y-Runs von m auf M . Die Preise, die im diskreten Fall eine WC-Sequenz bilden, sind durch die Markierungen gekennzeichnet.

4.3.1.2 Kompetitive Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten

Es ist zu beachten, dass bei der Bestimmung der kompetitive Rate in Abhängigkeit von T nur der Fall der diskreten Preisentwicklung betrachtet wird. Zunächst werden in den Lemmata 6 und 7 die kompetitive Raten für $T = 2$ bzw. $T = 3$ bestimmt.

Lemma 6. *Die kompetitive Rate $r(2RPP)_{T=2}$ von 2RPP in Abhängigkeit von T ist $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$ für $T = 2$.*

Beweis. (1) Feststellen der möglichen WC-Sequenzen:

Aufgrund der Lemmata 1 und 2 muss sich eine Worst-Case-Sequenz unter den Sequenzen befinden, für die gilt $q_1 \in \{m, q^1_{res}, q^1_{res} + \epsilon, q^2_{res}, q^2_{res} + \epsilon, M\}$ und $q_2 \in \{m, M\}$. Sequenzen mit $q_1 \in \{m, M\}$ oder $q_1 = q_2$ müssen zum Auffinden einer WC-Sequenz jedoch nicht berücksichtigt werden, da in diesem Fall das Verhältnis

$\frac{OPT}{ON}$ 1 beträgt. Zudem wird in einer Worst-Case-Sequenz ein Reservationspreis nur dann um $\epsilon \rightarrow 0^+$ erhöht, wenn der nächste Preis in der Sequenz höher ist. Somit verbleiben noch vier mögliche WC-Sequenzen. Diese sind $\mathbf{q}_1 = q_{res}^1, m$; $\mathbf{q}_2 = q_{res}^2, m$; $\mathbf{q}_3 = q_{res}^2 + \epsilon, M$ und $\mathbf{q}_4 = q_{res}^1 + \epsilon, M$.

Da \mathbf{q}_3 bzw. \mathbf{q}_4 die Kehrsequenzen von \mathbf{q}_1 bzw. \mathbf{q}_2 darstellen, ist es aufgrund von Lemma 4 ausreichend, nur die Sequenzen \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 zum Auffinden einer WC-Sequenz zu betrachten.

(2) Für die Sequenzen \mathbf{q}_i mit $i = 1, 2$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ berechnet:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = \frac{q_{res}^1}{m} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON(\mathbf{q}_1) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) &= \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}, ON(\mathbf{q}_2) = \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot m} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \\ \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} &= \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(3) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate gilt $r(2RPP)_{T=2} = \max \left\{ \frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)} \right\}, i = 1, 2$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ wird für $i = 1$ erreicht (vgl. Kapitel A.4):

$$r(2RPP)_{T=2} = \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.7)$$

□

Lemma 7. Die kompetitive Rate $r(2RPP)_{T=3}$ von 2RPP in Abhängigkeit von T ist

$$\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ für } T = 3.$$

Beweis. (1) Feststellen der möglichen WC-Sequenzen:

Aufgrund der Lemmata 1 und 2 muss sich eine Worst-Case-Sequenz unter den Sequenzen befinden, für die gilt $q_1, q_2 \in \{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$ und $q_3 \in \{m, M\}$. Sequenzen mit $q_1, q_2 \in \{m, M\}$ bzw. Sequenzen, für die gilt $q_t = q_{t+1}, t = 1, 2$ müssen zum Auffinden einer WC-Sequenz nicht berücksichtigt werden, da in diesem Fall das Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ Rate maximal $r(2RPP)_{T=2}$ betragen kann.

Zudem wird in einer Worst-Case-Sequenz ein Reservationspreis nur dann um $\epsilon \rightarrow 0^+$ erhöht, wenn der nächste Preis in der Sequenz höher ist. Somit verbleiben noch vier mögliche WC-Sequenzen. Diese sind $\mathbf{q}_1 = q_{res}^2, q_{res}^1, m$, $\mathbf{q}_2 = q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, M$, $\mathbf{q}_3 = q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2 + \epsilon, M$ und $\mathbf{q}_4 = q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, m$.

Da \mathbf{q}_3 bzw. \mathbf{q}_4 die Kehrsequenzen von \mathbf{q}_1 bzw. \mathbf{q}_2 darstellen, ist es aufgrund von Lemma 4 ausreichend, nur die Sequenzen \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 zum Auffinden einer WC-Sequenz zu betrachten.

(2) Für die Sequenzen \mathbf{q}_i mit $i = 1, 2$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ berechnet. Da gilt $\epsilon \rightarrow 0^+$, wird ϵ bei den Berechnungen nicht berücksichtigt. Es gilt:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}, ON(\mathbf{q}_1) = \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}};$$

$$\mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) = \frac{q_{res}^2}{q_{res}^1} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON(\mathbf{q}_2) = \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot M} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}.$$

(3) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate gilt $r(2RPP)_{T=3} = \max \left\{ \frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)} \right\}, i = 1, 2$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ wird sowohl für $i = 1$ als auch für $i = 2$ erreicht:

$$r(2RPP)_{T=3} = \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

□

In Lemma 8 wird gezeigt, dass sich die kompetitive Rate für $T > 3$ aus den kompetitiven Raten für $T = 2$ und $T = 3$ ergibt.

Lemma 8. Die kompetitive Rate von 2RPP in Abhängigkeit von T ist

$$r(2RPP)_T = \begin{cases} (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{T}{2}} & , \text{ für gerade } T \\ (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{T-3}{2}} \cdot r(2RPP)_{T=3} & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (4.9)$$

für $T \geq 2$.

Beweis. (1) Feststellen der zu untersuchenden Szenarien:

Aus Lemma 1 folgt, dass WC-Sequenzen mit M oder m enden. Sei \mathbf{q} eine WC-Sequenz mit einem Preis $q_t = m$ bzw. $q_t = M$ mit $t < T$. In diesem Fall setzt sich die WC-Sequenz für T aus der WC-Sequenz für $T' = t$ und $T'' = T - t$ zusammen. Dies folgt daraus, dass OPT und ON zum Preis q_t gleich investiert sind, und OPT anschließend das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erzielt, wenn er zum Zeitpunkt $t + 1$ eine WC-Sequenz für T'' beginnt. Daher werden zwei Arten von Sequenzen untersucht:
(1) Sequenzen, die sich nicht aus WC-Sequenzen für kleinere T zusammensetzen, und
(2) Sequenzen, die sich aus den WC-Sequenzen für kleinere T zusammensetzen.

(2.1) Nicht zusammengesetzte WC-Sequenzen:

Existiert eine Sequenz mit $T \geq 4$ Zeitpunkten, die zu einem höheren Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ führt als eine Sequenz, die sich aus WC-Sequenzen für kleinere T zusammensetzt, so enthält diese Sequenz keinen Preis M oder m vor T , d. h. $m < q_t < M, t = 1, \dots, T-1$. Dies ergibt sich daraus, dass ansonsten die Teilsequenz bis zum Preis M bzw. m eine WC-Sequenz für ein kleineres T darstellt. Zudem können Sequenzen, für die zu mindestens einem Zeitpunkt $t = 2, \dots, T$ gilt $q_t = q_{t-1}$, keine WC-Sequenzen darstellen. Auf solchen Sequenzen ist maximal die kompetitive Rate für $T' = T - 1$ als Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreichbar (vgl. Lemmata 6 und 7). Im Folgenden wird die Beweisführung in gerade und ungerade T unterteilt.

(2.1.1) Gerade T :

(2.1.1.1) Feststellen der möglichen WC-Sequenzen:

Es gibt vier Sequenzen, die sowohl die Kriterien aus (2.1) erfüllen als auch entsprechend der Lemmata 1 und 2 WC-Sequenzen sein können. Es werden nur die beiden Sequenzen betrachtet, die zu Beginn fallen, da die zu Beginn steigenden Sequenzen jeweils eine Kehrsequenz dieser beiden darstellen (vgl. Lemma 4). Dies sind $\mathbf{q}_1 = q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, \dots, q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2 + \epsilon, M$ und $\mathbf{q}_2 = q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, \dots, q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, m$.

(2.1.1.2) Für die Sequenzen \mathbf{q}_i mit $i = 1, 2$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ berechnet. Da gilt $\epsilon \rightarrow 0^+$, wird ϵ bei den Berechnungen nicht berücksichtigt. Es gilt:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = \left(\frac{q_{res}^2}{q_{res}^1 + \epsilon} \right)^{\frac{T-2}{2}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-2}{2}}, ON(\mathbf{q}_1) = \frac{q_{res}^2}{M} = \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \frac{\left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-2}{2}}}{\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}}};$$

$$\mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) = \left(\frac{q_{res}^2}{q_{res}^1} \right)^{\frac{T-2}{2}} \cdot \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-2}{2}} \cdot \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}, ON(\mathbf{q}_2) = \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot m} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = \frac{\left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-2}{2}} \cdot \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}.$$

(2.1.1.3) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate für gerade T gilt $r(2RPP)_T = \max \left\{ \frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)} \right\}, i = 1, 2$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ wird für $i = 1$ erreicht (vgl. Kapitel A.4):

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \frac{\left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-2}{2}}}{\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T}{2}} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{T}{6}}. \quad (4.10)$$

(2.1.1.4) Einordnung des Ergebnisses:

Da gilt $\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{T}{6}} = (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{T}{2}}$ folgt, dass es keine Sequenz gibt, auf der ein höheres Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht wird als auf einer Sequenz, auf der die WC-Sequenz für $T = 2$ Zeitpunkte $\frac{T}{2}$ -Mal wiederholt wird. Es gilt:

$$r(2RPP)_T = (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{T}{2}} \quad (4.11)$$

für gerade T .

(2.1.2) Ungerade T :

(2.1.2.1) Feststellen der möglichen WC-Sequenzen:

Es gibt vier Sequenzen, die sowohl die Kriterien aus (2.1) erfüllen als auch entsprechend der Lemmata 1 und 2 WC-Sequenzen sein können. Erneut werden nur die beiden Sequenzen betrachtet, die zu Beginn fallen (vgl. Lemma 4). Diese sind $\mathbf{q}_3 = q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, \dots, q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, M$ und $\mathbf{q}_4 = q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, \dots, q_{res}^2, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^1, m$.

(2.1.2.2) Für die Sequenzen \mathbf{q}_i mit $i = 3, 4$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ berechnet. Da gilt $\epsilon \rightarrow 0^+$, wird ϵ bei den Berechnungen nicht berücksichtigt. Es gilt:

$$\mathbf{q}_3 : OPT(\mathbf{q}_3) = \left(\frac{q_{res}^2}{q_{res}^1} \right)^{\frac{T-1}{2}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-1}{2}}, ON(\mathbf{q}_3) = \frac{q_{res}^2}{2 \cdot M} + \frac{1}{2} =$$

$$\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{OPT(\mathbf{q}_3)}{ON(\mathbf{q}_3)} = \frac{\left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-1}{2}}}{\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}};$$

$$\mathbf{q}_4 : OPT(\mathbf{q}_4) = \left(\frac{q_{res}^2}{q_{res}^1} \right)^{\frac{T-3}{2}} \cdot \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-3}{2}} \cdot \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}, ON(\mathbf{q}_4) =$$

$$\left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} = \frac{\left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-3}{2}} \cdot \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}.$$

(2.1.2.3) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate für ungerade T gilt $r(2RPP)_T = \max \left\{ \frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)} \right\}, i = 3, 4$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ wird sowohl für $i = 3$ als auch für $i = 4$ erreicht:

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} = \frac{\left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{T-3}{2}} \cdot \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{T-3}{6}} \cdot \frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}. \quad (4.12)$$

(2.1.2.4) Einordnung des Ergebnisses:

Da $\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{T-3}{6}} = (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{T-3}{2}}$ und $\frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = r(2RPP)_{T=3}$ gilt, folgt,

dass es keine Sequenz gibt, auf der ein höheres Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht wird als auf einer Sequenz, die sich aus den in Lemmata 6 und 7 festgestellten WC-Sequenzen für $T = 2$ und $T = 3$ zusammensetzt. Es gilt:

$$r(2RPP)_T = (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{T-3}{2}} \cdot r(2RPP)_{T=3} \quad (4.13)$$

für ungerade T .

(2.1.3) Zusammenführung der Ergebnisse:

Aus den Formeln (4.11) und (4.13) ergibt sich Formel (4.9). Das heißt, dass sowohl für gerade als auch für ungerade T auf keiner Sequenz ein höheres Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht wird als auf einer Sequenz, die sich aus WC-Sequenzen für $T = 2$ und $T = 3$ zusammensetzt.

(2.2) Zusammengesetzte WC-Sequenzen:

Aus (2.1.3) folgt, dass sich für $T \geq 4$ eine WC-Sequenz aus den WC-Sequenzen für $T = 2$ und $T = 3$ zusammensetzt. Wie sich die WC-Sequenzen für $T \geq 4$ zusammensetzen, ergibt sich aus der durchschnittlichen kompetitiven Rate $(r(2RPP)_T)^\varnothing = (r(2RPP)_T)^{\frac{1}{T}}$. Diese gibt an, um welchen Faktor das Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ auf einer WC-Sequenz mit T Zeitpunkten durchschnittlich pro Zeitpunkt anwächst. Angenommen, es gilt $(r(2RPP)_{T=3})^\varnothing \geq (r(2RPP)_{T=2})^\varnothing$, dann folgt daraus:

$$\begin{aligned}
(r(2RPP)_{T=3})^{\frac{1}{3}} &\geq (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} &\geq \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} &\geq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{6}} &\geq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow 0 &\geq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{6}} + 1 \\
\Leftrightarrow 0 &\geq \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{6}} - 1\right)^2.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Da gilt $\frac{M}{m} > 1$, ist Formel (4.14) falsch. Somit gilt $(r(2RPP)_{T=3})^\varnothing < (r(2RPP)_{T=2})^\varnothing$. Daraus folgt, dass für gerade T eine WC-Sequenz ausschließlich aus WC-Sequenzen für $T = 2$ besteht. Es gilt:

$$r(2RPP)_T = (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{T}{2}} \tag{4.15}$$

für gerade T .

Eine WC-Sequenz für ungerade T besteht aus der $\frac{T-3}{2}$ -maligen Aneinanderreihung einer WC-Sequenz für $T = 2$. Somit verbleiben $t = 3$ Zeitpunkte, die einer WC-Sequenz für $T = 3$ entsprechen. Es gilt:

$$r(2RPP)_T = (r(2RPP)_{T=2})^{\frac{T-3}{2}} \cdot r(2RPP)_{T=3} \tag{4.16}$$

für ungerade T . □

Theorem 3. Die kompetitive Rate von 2RPP in Abhängigkeit von T ist

$$r(2RPP)_T = \begin{cases} \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{T}{6}} & , \text{ für gerade } T \\ \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{T-3}{6}} \cdot \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (4.17)$$

für $T \geq 2$.

Beweis. Das Theorem folgt aus den Lemmata 6, 7 und 8. Werden die Formeln (4.7) und (4.8) in Formel (4.9) eingesetzt, ergibt sich daraus Formel (4.17). \square

Abbildung 4.3 zeigt jeweils eine WC-Sequenz für $T = 2, \dots, 5$.

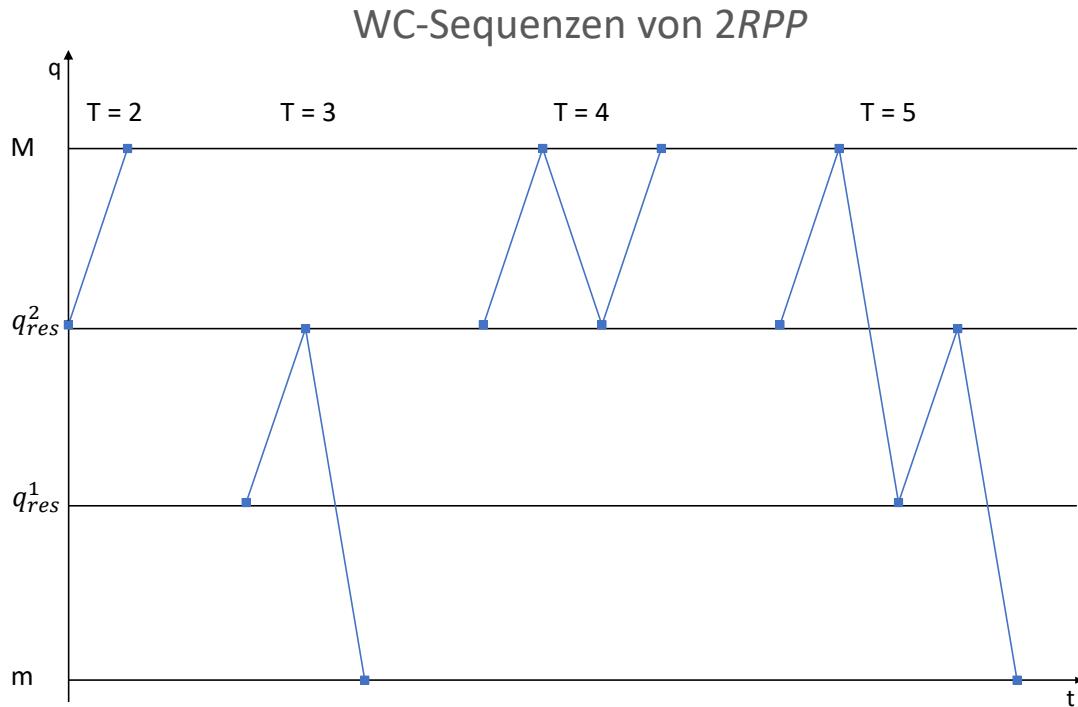


Abbildung 4.3: WC-Sequenzen von 2RPP mit ausgewählten T

4.3.1.3 Zusammenhang zwischen den kompetitiven Raten

Aus den Formeln für die kompetitiven Raten in Abhängigkeit von k bzw. T (vgl. Theoreme 1, 2 und 3) ist erkennbar, dass es nicht möglich ist, von einer kompetitiven

Rate auf die andere zu schließen. Der Grund dafür liegt darin, dass die Worst-Case-Sequenzen für gegebenes k nicht den Worst-Case-Sequenzen für gegebenes T entsprechen.

So enthält eine WC-Sequenz für gegebenes k bei diskreter Preisentwicklung jeweils die Runs, mit denen das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ pro Run erreicht wird. Eine WC-Sequenz für gegebenes T enthält hingegen die Runs, zu denen das durchschnittlich größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ pro Zeitpunkt erreicht wird. Je nach Algorithmus müssen diese Sequenzen nicht übereinstimmen. Im Falle von $2RPP$ beinhaltet die WC-Sequenz für gegebenes k Runs mit $t = 4$ Zeitpunkten und die WC-Sequenz für gegebenes T Runs mit $t = 2$ bzw. $t = 3$ Zeitpunkten.

Dennoch besteht ein Zusammenhang zwischen den kompetitiven Raten. So kann eine Sequenz nicht mehr als $k = T - 1$ Runs beinhalten. Damit bildet die kompetitive Rate in Abhängigkeit von k mit $k = T - 1$ eine Obergrenze für die kompetitive Rate in Abhängigkeit von T .

4.3.2 Vergleich der Kompetitivität mit ausgewählten Algorithmen

Die kompetitive Rate von $2RPP$ wird mit den kompetitiven Raten ausgewählter Algorithmen verglichen. Nicht für alle ausgewählten Algorithmen ist eine geschlossene Formel für die kompetitive Rate gegeben. Daher erfolgt der Vergleich zum Teil anhand einer numerischen Analyse. Hierbei werden die kompetitiven Raten der Algorithmen für spezifische Parameter berechnet und miteinander verglichen. Der Vergleich der Kompetitivität wird für die kompetitive Rate sowohl in Abhängigkeit von k als auch in Abhängigkeit von T durchgeführt.

4.3.2.1 Kompetitivität in Abhängigkeit von Runs

In diesem Abschnitt wird zunächst die kompetitive Rate von $2RPP$ in Abhängigkeit von k mit den kompetitiven Raten von bTH' (vgl. Kapitel 3.2.2.2) und $MRPR(k)$ (vgl. Kapitel 3.2.2.1) verglichen. Diese beiden Algorithmen erreichen die besten kompetitiven Raten für das P -BC. Tabelle 4.2 zeigt die jeweiligen kompetitiven Raten für gegebene Parameter. Während verschiedene Werte für M verwendet wurden, gilt für alle Untersuchungen $m = 1, 5$. Diese Untersuchung ist an Schmidt (2017, S. 1112) angelehnt, der dieselben Parameter verwendet.

	M	10	8	6	4	2
	k					
$2RPP$	3	14,8523	10,9758	7,3896	4,1843	1,5343
	2	6,0422	4,9388	3,7938	2,5967	1,3303
$MRPR(k)$	3	4,1489	3,5095	2,2824	2,0868	1,2408
	2	2,5820	2,3094	2,0000	1,6330	1,1547
bTH'	3	4,2382	3,6097	2,9242	2,1572	1,2587
	2	2,6189	2,3532	2,0449	1,6695	1,1658

Tabelle 4.2: Numerische Ergebnisse von $2RPP$, $MRPR(k)$ und bTH'

$2RPP$ erreicht für alle getesteten Parameter die höchste kompetitive Rate. Jedoch ist zu beachten, dass $2RPP$ so gestaltet wurde, dass die Transaktionskosten eingeschränkt werden. So konvertiert $2RPP$ pro Run maximal zwei Mal, wohingegen bTH' eine unbeschränkte Anzahl an Transaktionen pro Run ermöglicht. Daher ist es möglich, dass unter Berücksichtigung von (fixen) Transaktionskosten $2RPP$ eine bessere Performanz erzielt als bTH' . Jedoch erreicht $MRPR(k)$ ebenfalls geringere kompetitive Raten als $2RPP$ und hier ist die Anzahl an Transaktionen pro Run jeweils auf 1 beschränkt.

4.3.2.2 Kompetitivität in Abhängigkeit von Zeitpunkten

Um einen Vergleich der kompetitiven Raten in Abhängigkeit von T durchzuführen, müssen diese für die zum Vergleich ausgewählten Algorithmen erst bestimmt werden. Die kompetitive Rate von $MRPR(k)$ für unbekanntes k kann nicht bestimmt werden, da $MRPR(k)$ k als Inputparameter benötigt. Daher wird statt $MRPR(k)$, der Algorithmus $MRPR'$ zum Vergleich der Kompetitivität verwendet. Dieser entspricht einer Variante von $MRPR(k)$ für den Fall, dass k nicht gegeben ist (vgl. Kapitel 3.2.2.1). Darüber hinaus wird $BRPP$ ebenfalls als Vergleichsalgorithmus verwendet (vgl. Kapitel 3.2.2.1). Die kompetitiven Raten in Abhängigkeit von T von $MRPR'$, bTH' und $BRPP$ sind in den Theoremen 4, 5 und 6 angegeben.

4.3.2.2.1 Kompetitive Raten von Algorithmen aus der Literatur

Theorem 4. Die kompetitive Rate $r(MRPR')_T$ von $MRPR'$ in Abhängigkeit von T ist $\left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}$ für $T \geq 2$.

Beweis. Die Beweisführung wird für gerade T und ungerade T separat durchgeführt. Es ist zu beachten, dass ϵ bei den Berechnungen nicht berücksichtigt wird, da gilt $\epsilon \rightarrow 0^+$.

(1) Gerade T :

(1.1) Feststellen der zu untersuchenden Szenarien:

Zunächst werden die möglichen Szenarien unterschieden in: ON handelt nicht ($ON = 1$) und ON handelt. ON handelt wird nochmal unterschieden in: ON erzielt Verlust ($ON < 1$) und ON erzielt Gewinn ($ON > 1$).

(1.1.1) ON handelt nicht:

ON handelt dann nicht, wenn gilt $q_t < q_Y, t = 1, \dots, T - 1$. In diesem Fall wird auf der Sequenz $\mathbf{q}_1 = q_Y - \epsilon, m, q_Y - \epsilon, m, \dots, q_Y - \epsilon, m$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$, das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Für dieses gilt:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = \left(\frac{q_Y}{m} \right)^{\frac{T}{2}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{T}{2}}, ON(\mathbf{q}_1) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{T}{2}}.$$

(1.1.2) ON handelt:

Hier sind zwei Fälle von Relevanz: ON erzielt einen Verlust und ON erzielt einen Gewinn.

(1.1.2.1) ON erzielt Verlust:

ON handelt dann mit Verlust, wenn er einmal in Yen konvertiert und zum letzten Preis q_T zurück in Dollar konvertieren muss. In diesem Fall wird auf der Sequenz $\mathbf{q}_2 = q_Y - \epsilon, m, q_Y - \epsilon, m, \dots, q_Y - \epsilon, m, q_Y, M$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$, das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Für dieses gilt:

$$\mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) = \left(\frac{q_Y}{m} \right)^{\frac{T-2}{2}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{T-2}{2}}, ON(\mathbf{q}_2) = \frac{q_Y}{M} = \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = \frac{\left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{T-2}{2}}}{\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}}}.$$

(1.1.2.2) ON erzielt Gewinn:

Sei \mathbf{q}_3 eine Sequenz, für die gilt $ON(\mathbf{q}_3) > 1$. Auf Sequenz \mathbf{q}_1 , auf der ON nicht handelt, erzielt OPT einen Gewinn von $\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}$ für jedes Mal, wenn er zunächst in Yen und dann zurück in Dollar konvertiert. Wählt OPT hingegen Sequenz \mathbf{q}_3 , kann

der Gewinn von OPT pro Hin- und Rückkonvertierung im Vergleich zu \mathbf{q}_1 maximal um Faktor $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$ steigen. In dem Fall handelt jedoch auch ON und steigert seinen Gewinn um mindestens Faktor $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$ pro Hin- und Rückkonvertierung. Daraus folgt $\frac{OPT(\mathbf{q}_3)}{ON(\mathbf{q}_3)} \leq \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)}$.

(1.2) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate gilt $r(MRPR')_T = \max \left\{ \frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)} \right\}, i = 1, 2$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ wird für $i = 1$ erreicht:

$$r(MRPR')_T = \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{T}{2}} \quad (4.18)$$

für gerade T .

(2) Ungerade T :

(2.1) Feststellen der zu untersuchenden Szenarien:

Erneut handelt ON entweder nicht ($ON = 1$), mit Verlust ($ON < 1$) oder Gewinn ($ON > 1$).

(2.1.1) ON handelt nicht:

ON handelt dann nicht, wenn gilt $q_t < q_Y, t = 1, \dots, T - 1$. In diesem Fall wird auf der Sequenz $\mathbf{q}_4 = q_Y - \epsilon, m, q_Y - \epsilon, m, \dots, q_Y - \epsilon, m, q_Y - \epsilon$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$, das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Für dieses gilt:

$$\mathbf{q}_4 : OPT(\mathbf{q}_4) = \left(\frac{q_Y}{m} \right)^{\frac{T-1}{2}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{T-1}{2}}, ON(\mathbf{q}_4) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{T-1}{2}}.$$

Anmerkung: Es ist zu beachten, dass das gleiche Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ auf einer Sequenz mit $T - 1$ Zeitpunkten erreichbar ist. Der Grund dafür liegt darin, dass es für OPT nicht möglich ist, vom zusätzlichen Zeitpunkt im Vergleich zu $T - 1$ zu profitieren.

(2.1.2) ON handelt:

Hier sind zwei Fälle von Relevanz: ON erzielt einen Verlust und ON erzielt einen Gewinn.

(2.1.2.1) ON erzielt Verlust:

ON handelt dann mit Verlust, wenn er einmal in Yen konvertiert und zum letzten Preis q_T zurück in Dollar konvertieren muss. In diesem Fall wird auf der Sequenz

$\mathbf{q}_5 = q_Y - \epsilon, m, q_Y - \epsilon, m, \dots, q_Y - \epsilon, m, q_Y, q_D + \epsilon, M$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$, das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Für dieses gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_5 : OPT(\mathbf{q}_5) &= \left(\frac{q_Y}{m}\right)^{\frac{T-3}{2}} \cdot \frac{q_Y}{q_D} = \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{T-3}{2}} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON(\mathbf{q}_5) = \frac{q_Y}{M} = \\ &\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}, \frac{OPT(\mathbf{q}_5)}{ON(\mathbf{q}_5)} = \frac{\left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{T-3}{2}} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

(2.1.2.2) ON erzielt Gewinn:

Sei \mathbf{q}_6 eine Sequenz, für die gilt $ON(\mathbf{q}_6) > 1$. Auf Sequenz \mathbf{q}_4 , auf der ON nicht handelt, erzielt OPT einen Gewinn von $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}$ für jedes Mal, wenn er zunächst in Yen und dann zurück in Dollar konvertiert. Wählt OPT hingegen Sequenz \mathbf{q}_6 , kann der Gewinn von OPT pro Hin- und Rückkonvertierung im Vergleich zu \mathbf{q}_4 maximal um Faktor $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$ steigen. In dem Fall handelt jedoch auch ON und steigert seinen Gewinn um mindestens Faktor $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$ pro Hin- und Rückkonvertierung. Daraus folgt $\frac{OPT(\mathbf{q}_6)}{ON(\mathbf{q}_6)} \leq \frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)}$.

(2.2) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate gilt $r(MRPR')_T = \max \left\{ \frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)} \right\}, i = 4, 5$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ wird für $i = 4$ und $i = 5$ erreicht:

$$r(MRPR')_T = \frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} = \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{T-1}{2}} \quad (4.19)$$

für ungerade T .

(3) Zusammenführung der Ergebnisse:

Die Formeln (4.18) und (4.19) können zu Formel (4.20) zusammengefasst werden:

$$r(MRPR')_T = \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}. \quad (4.20)$$

□

Theorem 5. Für die kompetitive Rate von bTH' in Abhängigkeit von T gilt $r(bTH')_T \geq r(uTH')^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}$ für $T \geq 2$.

Beweis. (1) Festlegen der zu untersuchenden Szenarien:

Es wird nur der Fall betrachtet, dass ON nicht handelt. Das in diesem Fall maximale Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ stellt eine Untergrenze für die kompetitive Rate dar. Erneut wird die Untersuchung für gerade T und ungerade T separat durchgeführt.

(2) Gerade T :

ON handelt nicht, wenn gilt $q_t \leq r(uTH') \cdot m$. Unter dieser Prämisse wird auf einer Sequenz der Form $\mathbf{q}_1 = r(uTH') \cdot m, m, r(uTH') \cdot m, m, \dots, r(uTH') \cdot m, m$ das höchste Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Für die Sequenz \mathbf{q}_1 wird das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)}$ berechnet:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = \left(\frac{r(uTH') \cdot m}{m} \right)^{\frac{T}{2}}, ON(\mathbf{q}_1) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = r(uTH')^{\frac{T}{2}}.$$

Somit gilt:

$$r(bTH')_T \geq r(uTH')^{\frac{T}{2}} \quad (4.21)$$

für gerade T .

(3) Ungerade T :

Auf der Sequenz $\mathbf{q}_2 = r(uTH') \cdot m, m, r(uTH') \cdot m, m, \dots, r(uTH') \cdot m, m, r(uTH') \cdot m$ wird das höchste Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht, wenn ON nicht handelt. Für die Sequenz \mathbf{q}_2 wird das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)}$ berechnet:

$$\mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) = \left(\frac{r(uTH') \cdot m}{m} \right)^{\frac{T-1}{2}}, ON(\mathbf{q}_2) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = r(uTH')^{\frac{T-1}{2}}.$$

Somit gilt:

$$r(bTH')_T = r(uTH')^{\frac{T-1}{2}} \quad (4.22)$$

für ungerade T .

(4) Zusammenführung der Ergebnisse:

Die Formeln (4.21) und (4.22) können zu

$$r(bTH')_T \geq r(uTH')^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}. \quad (4.23)$$

zusammengefasst werden.

□

Theorem 6. Für die kompetitive Rate von BRPP in Abhängigkeit von T gilt:

$$r(BRPP)_T = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} \text{ für } T \geq 2.$$

Beweis. (1) Feststellen der zu untersuchenden Szenarien:

Auf einer WC-Sequenz für gegebenes T mit dem maximalen Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ wird auch der maximale durchschnittliche Wachstumsfaktor des Verhältnisses pro Zeitpunkt $(\frac{OPT}{ON})^{\frac{1}{T}}$ erreicht. Daher werden die fünf möglichen Szenarien untersucht, in denen ON und OPT jeweils maximal einmal in Yen und zurück konvertieren. Aus dem durchschnittlichen Wachstumsfaktor des Verhältnisses pro Zeitpunkt lässt sich ableiten, wie eine WC-Sequenz für ein gegebenes T gestaltet ist.

Die Szenarien sind: (1) OPT und ON konvertieren jeweils zu unterschiedlichen Preisen, (2) OPT und ON konvertieren zum selben Preis in Yen und konvertieren zu unterschiedlichen Preisen zurück in Dollar, (3) OPT und ON konvertieren zu unterschiedlichen Preisen in Yen und konvertieren zum selben Preis zurück in Dollar, (4) OPT konvertiert, ON konvertiert nicht und (5) ON konvertiert, OPT konvertiert nicht. Es ist zu beachten, dass (5) nur am Ende einer WC-Sequenz auftreten kann.

(2) Für die Szenarien wird jeweils $(\frac{OPT}{ON})^{\frac{1}{T}}$ berechnet:

Es ist zu beachten, dass ϵ bei den Berechnungen nicht berücksichtigt wird, da gilt $\epsilon \rightarrow 0^+$.

(2.1) OPT und ON konvertieren jeweils zu unterschiedlichen Preisen:

Konvertieren OPT und ON jeweils zu unterschiedlichen Preisen, wird auf Sequenz $\mathbf{q}_1 = q^*, M, q^* - \epsilon, m$ das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Es gilt:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = \frac{M}{m}, ON(\mathbf{q}_1) = \frac{q^*}{q^*} = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \frac{M}{m}.$$

Die Sequenz enthält $T = 4$ Zeitpunkte. Daher gilt:

$$\left(\frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} \right)^{\frac{1}{T}} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.24)$$

(2.2) OPT und ON konvertieren zum selben Preis in Yen und zu unterschiedlichen Preisen zurück in Dollar:

Konvertieren OPT und ON zum selben Preis in Yen und zu unterschiedlichen Preisen zurück in Dollar, wird auf Sequenz $\mathbf{q}_2 = M, q^* - \epsilon, m$ das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Es gilt:

$$\mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) = \frac{M}{m}, ON(\mathbf{q}_2) = \frac{M}{q^*} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Sequenz enthält $T = 3$ Zeitpunkte. Daher gilt:

$$\left(\frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} \right)^{\frac{1}{T}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (4.25)$$

(2.3) OPT und ON konvertieren zu unterschiedlichen Preisen in Yen und zum selben Preis zurück in Dollar:

Konvertieren OPT und ON zu unterschiedlichen Preisen in Yen und zum selben Preis zurück in Dollar, wird auf Sequenz $\mathbf{q}_3 = q^*, M, m$ das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Es gilt:

$$\mathbf{q}_3 : OPT(\mathbf{q}_3) = \frac{M}{m}, ON(\mathbf{q}_3) = \frac{q^*}{m} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{OPT(\mathbf{q}_3)}{ON(\mathbf{q}_3)} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Sequenz enthält $T = 3$ Zeitpunkte. Daher gilt:

$$\left(\frac{OPT(\mathbf{q}_3)}{ON(\mathbf{q}_3)} \right)^{\frac{1}{T}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (4.26)$$

(2.4) OPT konvertiert und ON konvertiert nicht:

Konvertiert OPT jedoch ON nicht, wird auf Sequenz $\mathbf{q}_4 = q^* - \epsilon, m$ das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Es gilt:

$$\mathbf{q}_4 : OPT(\mathbf{q}_4) = \frac{q^*}{m} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, ON(\mathbf{q}_4) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Sequenz enthält $T = 2$ Zeitpunkte. Daher gilt:

$$\left(\frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} \right)^{\frac{1}{T}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.27)$$

(2.5) OPT konvertiert nicht und ON konvertiert:

Konvertiert ON jedoch OPT nicht, wird auf Sequenz $\mathbf{q}_5 = q^*, M$ das größte Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht. Es gilt:

$$\mathbf{q}_5 : OPT(\mathbf{q}_5) = 1, ON(\mathbf{q}_5) = \frac{q^*}{M} = \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{OPT(\mathbf{q}_5)}{ON(\mathbf{q}_5)} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Sequenz enthält $T = 2$ Zeitpunkte. Daher gilt:

$$\left(\frac{OPT(\mathbf{q}_5)}{ON(\mathbf{q}_5)} \right)^{\frac{1}{T}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.28)$$

(3) Feststellen des Maximums:

Der maximale durchschnittliche Wachstumsfaktor des Verhältnisses $\frac{OPT}{ON}$ pro Zeitpunkt $\left(\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)} \right)^{\frac{1}{T}}$ wird für $i = 1, i = 4$ und $i = 5$ erreicht. Auf den Sequenzen \mathbf{q}_2 und \mathbf{q}_3 mit $T = 3$ Zeitpunkten lässt sich zudem kein höheres Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erzielen als auf den Sequenzen mit $T = 2$ Zeitpunkten. Dies folgt aus (2.2), (2.3) und (2.4). Daher müssen diese im Weiteren nicht mehr berücksichtigt werden.

(4) Feststellen der kompetitiven Rate:

Für Bestimmung der kompetitiven Rate für $T \geq 2$ sind zunächst die WC-Sequenzen zu bestimmen: Für die WC-Sequenz für ein gegebenes T wählt OPT zu Beginn eine (Teil-)Sequenz \mathbf{q}_i mit $i \in \{1, 4\}$. Ist T größer als die Länge der ausgewählten Teilsequenz, wird das höchste Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht, wenn erneut eine Teilsequenz \mathbf{q}_i mit $i \in \{1, 4\}$ folgt. Dies wiederholt sich solange bis die aneinander gereihten Teilsequenzen insgesamt $T - 1$ bzw. T Zeitpunkte umfassen. Im Fall $T - 1$ kann die Sequenz mit einem beliebigen Preis enden.

(4.1) Gerade T :

Aus (4) folgt, dass für gerade T die Sequenz $\mathbf{q}_6 = q^* - \epsilon, m, q^* - \epsilon, m, \dots, q^* - \epsilon, m$ eine WC-Sequenz darstellt. Auf dieser Sequenz konvertiert OPT zu jedem Zeitpunkt und ON nie. Es gilt:

$$\mathbf{q}_6 : OPT(\mathbf{q}_6) = \left(\frac{q^*}{m} \right)^{\frac{T}{2}} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{T}{2}}, ON(\mathbf{q}_6) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_6)}{ON(\mathbf{q}_6)} = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{T}{2}}.$$

Es gilt somit:

$$r(BRPP)_T = \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{T}{2}} \quad (4.29)$$

für gerade T .

(4.2) Ungerade T :

Aus (4) folgt, dass für ungerade T die Sequenz $\mathbf{q}_7 = q^* - \epsilon, m, q^* - \epsilon, m, \dots, q^* - \epsilon, m, m$ eine WC-Sequenz darstellt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_7 : OPT(\mathbf{q}_7) &= \left(\frac{q^*}{m}\right)^{\frac{T-1}{2}} = \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{T-1}{2}}, ON(\mathbf{q}_7) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_7)}{ON(\mathbf{q}_7)} \\ &= \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{T-1}{2}}.\end{aligned}$$

Es gilt somit:

$$r(BRPP)_T = \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{T-1}{2}} \quad (4.30)$$

für ungerade T .

(5) Zusammenführung der Ergebnisse:

Die Formeln (4.29) und (4.30) können zu

$$r(BRPP)_T = \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} \quad (4.31)$$

zusammengefasst werden. \square

4.3.2.2.2 Vergleich der Algorithmen

Der Algorithmus $BRPP$ (vgl. Kapitel 3.2.2.1) erreicht eine kompetitive Rate in Abhängigkeit von T von $r(BRPP)_T = \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}$. Diese ist somit geringer als die kompetitive Rate von MRP' . Dies ist interessant, da für die kompetitive Analyse nach k im stetigen Fall der Algorithmus von Schmidt (2017) optimal ist. Für gegebenes T ist somit $BRPP$ der nicht-präemptive Algorithmus mit dem $2RPP$ verglichen werden muss.

In Tabelle 4.3 werden die kompetitiven Raten für $2RPP$, $BRPP$ und bTH' für ausgewählte Parameter gegenübergestellt. Erneut gilt für alle Untersuchungen $m = 1, 5$.

Für alle getesteten Parameter ergibt sich, dass $2RPP$ die geringste kompetitive Rate erreicht. Die kompetitive Rate von $BRPP$ ist für kleine Verhältnisse von $\frac{M}{m}$ geringer als die von bTH' . Zwischen den kompetitiven Raten von $2RPP$ und $BRPP$ ist zudem ein analytischer Vergleich möglich.

	M	1000	100	10	2
	T				
2RPP	2	8,7358	4,0548	1,8821	1,1006
	11	91.301,0194	1.758,5041	30,8420	1,6926
	101	2,085E+47	4,0158E+30	7,0433E+13	126,66
BRPP	2	25,8199	8,1650	2,5820	1,1547
	11	1,1476E+07	36.288,7369	114,7551	2,0528
	101	3,9602E+70	3,9602E+45	3,9602E+20	1.328,8269
bTH'	2	16,0574	7,1126	2,6191	1,1659
	11	1.067.534,3896	18.203,1410	123,2318	2,1543
	101	1,9223E+60	3,9945E+42	8,0766E+20	2.152,7423

Tabelle 4.3: Numerische Ergebnisse von $2RPP$, $BRPP$ und bTH'

Theorem 7. Für die kompetitiven Raten von $BRPP$ und $2RPP$ in Abhängigkeit von T gilt $r(BRPP)_T > r(2RPP)_T$ für $T \geq 2$.

Beweis. Der Beweis wird per Widerspruch geführt. Gerade T und ungerade T werden separat betrachtet.

(1) Gerade T :

Angenommen, es gilt $r(BRPP)_T \leq r(2RPP)_T$, dann muss gelten (vgl. Formeln (4.31) bzw. (4.17)):

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{T}{4}} &\leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{T}{6}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{T}{12}} &\leq 1. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Da $\frac{M}{m} > 1$ gilt, ist Formel (4.32) falsch. Daraus folgt $r(2RPP)_T < r(BRPP)_T$.

(2) Ungerade T :

Es gilt erneut die Annahme $r(BRPP)_T \leq r(2RPP)_T$. Dann muss gelten (vgl. Formeln (4.31) bzw. (4.17)):

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{T-1}{4}} &\leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{T-3}{6}} \cdot \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &\leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{5-T}{12}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Da $\frac{M}{m} > 1$ ist, gilt $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 1$. Für $T \geq 5$ gilt zudem $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{5-T}{12}} \leq 1$. Daraus folgt, dass für $T \geq 5$ gilt $r(2RPP)_T < r(BRPP)_T$. Für $T = 3$ gilt jedoch

$\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{5-T}{12}} > 1$. Daher ist für diesen Fall gesondert zu überprüfen, ob $BRPP$ oder $2RPP$ die höhere kompetitive Rate erreicht. Angenommen, es gilt $r(BRPP)_T \leq r(2RPP)_T$ für $T = 3$, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &\leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{6}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{6}} + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{6}} - 1\right)^2 &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Da $\frac{M}{m} > 1$ gilt, ist Formel (4.34) falsch. Daraus folgt, dass $r(2RPP)_T < r(BRPP)_T$ auch für $T = 3$ gilt. Somit ist Formel (4.33) für $\frac{M}{m} > 1$ und $T \geq 3$ falsch. Es gilt für ungerade $T \geq 3$: $r(2RPP)_T < r(BRPP)_T$.

(3) Zusammenführung der Ergebnisse:

Sowohl für gerade als auch für ungerade $T \geq 2$ gilt $r(2RPP)_T < r(BRPP)_T$.

□

Da zudem gilt $r(BRPP)_T < r(MRPR')_T$, folgt daraus $r(2RPP)_T < r(MRPR')_T$.

4.3.3 Prüfung auf Optimalität

Mit einer Untergrenze wird ein Wert für die kompetitive Rate angegeben, der von keinem Online-Algorithmus unterboten werden kann. Kann gezeigt werden, dass die kompetitive Rate eines Algorithmus dieser Untergrenze entspricht, folgt daraus, dass dieser Algorithmus einen optimalen Online-Algorithmus darstellt. Im Folgenden wird überprüft, ob die kompetitive Rate von $2RPP$ gleich oder größer der Untergrenze des P -BC ist. Da in der Literatur Untergrenzen zum P -BC nur in Abhängigkeit von Runs angegeben werden, wird zunächst die Untergrenze in Abhängigkeit von Zeitpunkten bestimmt. Auf einen Vergleich mit der Untergrenze in Abhängigkeit von Runs wird verzichtet, da die numerische Analyse bereits ergab, dass $2RPP$ nicht optimal ist. Die Beweismethodik zur Bestimmung einer Untergrenze wird von Dannoura und Sakurai (1998, S. 30) vorgestellt. Es ist zunächst ein Algorithmus zu bestimmen, der auf einem Teil der möglichen Inputsequenzen optimal ist. Dies kann auch als optimale Performanzrate interpretiert werden (vgl. Kapitel 2.2.2.3). Da die Performanzrate eine Untergrenze für die kompetitive Rate darstellt, kann kein deterministischer Online-Algorithmus eine geringere kompetitive Rate erreichen.

Theorem 8. Kein deterministischer Online-Algorithmus kann für das P-BC mit gegebenem M, m und T eine geringere kompetitive Rate aufweisen als $\left(\frac{2}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + 1} \right)^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}$.

Beweis. (1) Festlegen der betrachtenden Sequenzen:

Im Folgenden erfolgt eine Beschränkung auf Sequenzen, für die gilt, dass jeder zweite Preis entweder m oder M ist.

(2) Feststellen der optimalen Investitionsstrategie:

Gilt $m < q_t < M$, so ist der nächste Preis entweder M oder m . Daher ist b_t so zu wählen, dass, wenn $q_{t+1} = M$ gilt, dasselbe Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erzielt wird, als wenn $q_{t+1} = m$ gilt.

Gegeben seien die beiden Sequenzen $\mathbf{q}_1 = q_t, M$ und $\mathbf{q}_2 = q_t, m$ mit $q_t \in [m, M]$. Für die Sequenzen \mathbf{q}_i mit $i = 1, 2$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ berechnet, wobei ON einen beliebigen Online-Algorithmus darstellt:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = 1, ON(\mathbf{q}_1) = \frac{q_t}{M} \cdot b_t + 1 - b_t, \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \frac{1}{\frac{q_t}{M} \cdot b_t + 1 - b_t};$$

$$\mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) = \frac{q_t}{m}, ON(\mathbf{q}_2) = \frac{q_t}{m} \cdot b_t + 1 - b_t, \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = \frac{\frac{q_t}{m}}{\frac{q_t}{m} \cdot b_t + 1 - b_t}.$$

Die beiden Sequenzen entsprechen dem Zu-wenig- bzw. Zu-viel-Fehler, da ON zum Preis q_t entweder zu wenig oder zu viel in Yen investiert. Das optimale b_t ergibt sich, wenn die beiden Fehler ausbalanciert werden (vgl. Kapitel 2.2.2.2.2):

$$\begin{aligned} \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} &= \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{q_t}{m}}{\frac{q_t}{m} \cdot b_t + 1 - b_t} &= \frac{1}{\frac{q_t}{M} \cdot b_t + 1 - b_t}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Wird Formel (4.35) nach b_t aufgelöst, ergibt sich somit:

$$b_t = \frac{1 - \frac{m}{q_t}}{2 - \frac{q_t}{M} - \frac{m}{q_t}}. \tag{4.36}$$

Formel (4.36) ergibt für $q_t = m$ bzw. $q_t = M$, $b_t = 0$ bzw. $b_t = 1$, was jeweils die optimale Entscheidung zu diesen Preisen darstellt.

(3) Ermitteln der Performanzrate:

(3.1) $T = 2$ Zeitpunkte:

Wird Formel (4.36) in die rechte Seite von Formel (4.35) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{OPT}{ON} &= \frac{1}{\left(\frac{q_t}{M} - 1\right) \cdot \left(\frac{1 - \frac{m}{q_t}}{2 - \frac{q_t}{M} - \frac{m}{q_t}}\right) + 1} \\
 \Leftrightarrow \frac{OPT}{ON} &= \frac{1}{\frac{1 - \frac{m}{M}}{2 - \frac{q_t}{M} - \frac{m}{q_t}}} \\
 \Leftrightarrow \frac{OPT}{ON} &= \frac{2 - \frac{q_t}{M} - \frac{m}{q_t}}{1 - \frac{m}{M}} \\
 \Leftrightarrow \frac{OPT}{ON} &= \frac{2 \cdot M - q_t - \frac{M \cdot m}{q_t}}{M - m}.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Um den Preis $q_t = q^{wc}$ zu bestimmen, der zum größten Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ führt, wird von Formel (4.37) die Ableitung $\frac{df}{dq_t}$ gebildet und gleich 0 gesetzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{M \cdot m}{(q^{wc})^2} - 1}{M - m} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{M \cdot m}{(q^{wc})^2} &= 1 \\
 \Leftrightarrow (q^{wc})^2 &= M \cdot m \\
 \Leftrightarrow q^{wc} &= (M \cdot m)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Anmerkung: Das negative Ergebnis aus $\sqrt{M \cdot m}$ kann ignoriert werden, da gelten muss $q^{wc} > 0$.

Der Preis in Formel (4.38) entspricht somit dem Preis der WC-Sequenz für eine ansteigende Sequenz mit $T = 2$ Zeitpunkten. Dieser wird zunächst in Formel (4.36) eingesetzt, um den Anteil b^{wc} zu ermitteln, der zum Preis q^{wc} investiert wird:

$$\begin{aligned}
 b^{wc} &= \frac{1 - \frac{(M \cdot m)^{\frac{1}{2}}}{M}}{2 - \frac{(M \cdot m)^{\frac{1}{2}}}{M} - \frac{m}{(M \cdot m)^{\frac{1}{2}}}} \\
 \Leftrightarrow b^{wc} &= \frac{1 - \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot \left(1 - \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \\
 \Leftrightarrow b^{wc} &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Um den größtmöglichen Zuwachs des Verhältnisses $\frac{OPT}{ON}$ zwischen zwei Zeitpunkten zu ermitteln, werden die Formeln (4.38) sowie (4.39) in die rechte Seite von Formel (4.35) eingesetzt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{OPT}{ON} &\leq \frac{1}{\frac{(M \cdot m)^{\frac{1}{2}}}{M} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{OPT}{ON} &\leq \frac{2}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

(3.2) $T \geq 2$

Da zu den Preisen M und m OPT und ON gleich investiert sind, lässt sich das Verhältnis gemäß Formel (4.40) auf einer Sequenz mit T Zeitpunkten nur $\left\lfloor \frac{T}{2} \right\rfloor$ -Mal erzielen. Daraus ergibt sich, dass auf den ausgewählten Sequenzen die optimale

$$\text{Performanzrate } PR = \left(\frac{2}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + 1} \right)^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor} \quad \text{entspricht.}$$

(4) Einordnen der Ergebnisse:

Da die dargestellte Investitionsstrategie optimal für die ausgewählten Sequenzen ist, folgt daraus, dass kein deterministischer Online-Algorithmus eine niedrigere kompetitive Rate für das $P\text{-BC}$ mit gegebenem M, m und T erreichen kann als $\left(\frac{2}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + 1} \right)^{\lfloor \frac{T}{2} \rfloor}$. \square

Die kompetitive Rate von $2RPP$ ist höher als die entsprechende Untergrenze, somit kann keine Optimalität nachgewiesen werden. Daher wird geprüft, ob Optimalität widerlegt werden kann. Dazu wird basierend auf der in Theorem 8 vorgestellten optimalen Investitionsstrategie (vgl. Formel (4.36)) der Error Balancing Algorithmus (*EBA*) abgeleitet:

Algorithmus *EBA*:

Gegeben: M, m, T

Schritt 1: Bestimme b_t für $t = 1, \dots, T - 1$ mit

$$b_t = \frac{1 - \frac{m}{q_t}}{2 - \frac{q_t}{M} - \frac{m}{q_t}}. \quad (4.41)$$

Schritt 2: Bestimme $b_T = 0$.

Aus dem *EBA* kann eine Obergrenze abgeleitet werden. Ein für das *P-BC* optimaler Algorithmus erreicht eine kompetitive Rate in Abhängigkeit von T , die kleiner oder gleich dieser Obergrenze ist.

Theorem 9. *Der optimale deterministische Online-Algorithmus erreicht für das *P-BC* eine kompetitive Rate kleiner oder gleich $\left(\frac{2}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}\right)^{T-1}$, wenn M, m und T gegeben sind.*

Beweis. Aus Theorem 8 folgt, dass das Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ zwischen zwei Zeitpunkten maximal um $\frac{2}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}$ anwachsen kann, wenn der Algorithmus *EBA* verwendet

wird. Die kompetitive Rate von *EBA* ist daher kleiner oder gleich $\left(\frac{2}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}\right)^{T-1}$.

Somit erreicht der optimale deterministische Online-Algorithmus die gleiche oder eine kleinere kompetitive Rate. \square

Aus der Obergrenze für die kompetitive Rate des optimalen Algorithmus ergibt sich, dass *2RPP* keinen optimalen Online-Algorithmus darstellt. So erreicht *2RPP* beispielsweise für die Werte $M = 10$, $m = 1$ und $T = 6$ eine kompetitive Rate von $r(2RPP) = \left(\frac{10}{1}\right)^{\frac{6}{6}} = 10$ (vgl. Formel (4.17)). Die entsprechende Obergrenze hat jedoch den Wert $\left(\frac{2}{\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}\right)^5 = 8,10$.

4.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Algorithmus *2RPP* für die Lösung des bi-direktionalen und präemptiven Conversion Problem (*P-BC*) vorgestellt. Die kompetitive Rate von *2RPP* wurde sowohl in Abhängigkeit von der Anzahl an Runs k als auch in Abhängigkeit von der Anzahl an Zeitpunkten T bestimmt. Im Anschluss wurden die kompetitiven Raten von *2RPP* experimentell mit den Algorithmen verglichen, die die besten kompetitiven Raten in Abhängigkeit von Runs erreichen. Es zeigte sich, dass die kompetitive Rate in Abhängigkeit von k des *2RPP* für die getesteten Parameter schlechter ist als die der anderen Algorithmen. Danach wurden die Algorithmen hinsichtlich ihrer kompetitiven Rate in Abhängigkeit von T verglichen. Anhand

einer weiteren experimentellen Analyse wurde gezeigt, dass *2RPP* für spezifische Parameter die niedrigste kompetitive Rate in Abhängigkeit von T erreicht. Zudem wurde analytisch gezeigt, dass *2RPP* eine bessere kompetitive Rate erreicht als die bekannten nicht-präemptiven Algorithmen, die wie *2RPP* ausschließlich M, m und T als Zukunftsinformationen verwenden. Es wurde zudem gezeigt, dass der Algorithmus *BRPP* im diskreten Fall eine geringere kompetitive Rate in Abhängigkeit von T erreicht als *MRPR'*. Um den Vergleich mit diesen Algorithmen zu ermöglichen, musste zunächst jeweils deren kompetitiven Rate in Abhängigkeit von T bestimmt werden. Im Anschluss wurde der Algorithmus *EBA* vorgestellt. Basierend auf der Performanzrate von *EBA* wird eine Untergrenze für die kompetitive Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten für das *P-BC* bestimmt. Zudem lässt sich aus *EBA* eine Obergrenze für die kompetitive Rate in Abhängigkeit von T ableiten. Ein optimaler Online-Algorithmus für das *P-BC* weist eine kompetitive Rate auf, die nicht größer als diese Obergrenze ist. Neben den Ergebnissen der theoretischen Analyse ist auch die empirische Analyse eines Algorithmus von Relevanz. Im nächsten Kapitel erfolgt daher ein Vergleich mit ausgewählten Algorithmen auf Basis einer empirischen Analyse.

5 Empirische Analyse des vorgestellten Algorithmus

In diesem Kapitel wird die empirische Performanz von *2RPP* mit der ausgewählter Algorithmen verglichen. Dazu werden die Algorithmen auf eine große Anzahl an historischen Aktienkursen angewendet. Als Performanzmaß wird eine Renditekennzahl verwendet. Zudem wird untersucht, wie sich die Ergebnisse verändern, wenn relative oder fixe Transaktionskosten berücksichtigt werden. Die kompetitiven Algorithmen benötigen die Kenntnis von Zukunftsinformationen. So wird die Performanz für diese Algorithmen sowohl für den Fall untersucht, dass die exakten Werte im Voraus bekannt sind, als auch für den Fall, dass die Werte auf Basis historischer Daten geschätzt werden. Die Untersuchung erfolgt zudem separat für mehrere Handelszeiträume.

5.1 Fragestellungen und Methodik

In diesem Kapitel werden die kompetitiven Algorithmen *2RPP*, *bTH'* sowie *MRPR'* miteinander verglichen. Zudem wird der Einfluss von Transaktionskosten auf diese Algorithmen untersucht. Dies ist deswegen von Interesse, da die drei Algorithmen sehr unterschiedlich konzeptioniert wurden. So ist *MRPR'* ein Algorithmus, der nur handelt, wenn der Preis relativ stark vom Preis, zu dem zuletzt gehandelt wurde, abweicht. Dafür wird jedoch, wenn gehandelt wird, das gesamte Vermögen konvertiert. Hingegen ist *bTH'* ein Algorithmus, der, sofern der Preis in einem bestimmten Preisintervall liegt, bei jeder Preisänderung handelt. Jedoch werden bei kleinen Preisänderungen entsprechend kleine Anteile des Vermögens gehandelt. *2RPP* hingegen handelt nur, wenn bestimmte Preise über- bzw. unterschritten werden. So kann sowohl der Fall auftreten, dass *2RPP* bei relativ großen Preisänderungen nicht handelt, als auch der Fall, dass *2RPP* bei relativ kleinen Preisänderungen handelt. *2RPP* kann, im Gegensatz zu *MRPR'*, auch nur einen Teil des Vermögens handeln. Jedoch kann dieser nicht beliebig sein wie im Fall von *bTH'*. Ebenfalls wird untersucht,

wie sich die Algorithmen verhalten, wenn die verwendeten Zukunftsinformationen nur Abschätzungen auf Basis historischer Daten entsprechen.

Die Heuristiken Buy-and-Hold (*BH*) sowie Moving Average (*MA*) werden als zusätzliche Benchmarks verwendet. *BH* wird in der Literatur aufgrund seiner Eigenschaften häufig als Benchmark verwendet (vgl. z. B. Gençay 1998a, Ratner und Leal 1999, Gunasekarage und Power 2001, Teixeira und de Oliveira 2010 und Yu et al. 2013). *BH* investiert zum Preis q_1 das gesamte Vermögen in die ausgewählte Anlage und konvertiert zu q_T wieder zurück. Dazwischen wird kein Handel betrieben. *BH* verursacht durch diese Eigenschaft nur geringe Transaktionskosten. Ist ein Algorithmus nicht in der Lage, durchschnittlich ein besseres Ergebnis als *BH* zu erzielen, ist der Mehraufwand durch eventuelle notwendige Marktbeobachtungen oftmals nicht zu rechtfertigen. Es gilt:

$$b_t(BH) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t < T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1)$$

Der Moving Average zählt zu den meist verwendeten Indikatoren in der Praxis (vgl. Schulmeister 2009, S. 191, Fang et al. 2014, S. 32 und Papailias und Thomakos 2015, S. 459) und wird von zahlreichen Autoren untersucht (vgl. z. B. Brock et al. 1992, Gençay 1998b, Chang et al. 2004, Ellis und Parbery 2005, Ming-Ming und Siok-Hwa 2006 und Naved und Srivastava 2015). Beim *MA* werden zwei gleitende Durchschnitte unterschiedlicher Länge über die letzten Preise einer Anlage gebildet. Sei $MA(n_S)$ der gleitende Durchschnitt über die letzten n_S Preise und $MA(n_L)$ der gleitende Durchschnitt über die letzten n_L Preise mit $n_S < n_L$. Ist der Wert des kürzeren höher als der Wert des längeren gleitenden Durchschnittes einer Anlage, wird in die entsprechende Anlage investiert. Fällt der kürzere gleitende Durchschnitt wieder unter den längeren, werden die gehaltenen Anteile an der Anlage verkauft. Zudem kann ein Band bd festgelegt werden, welches einen Faktor darstellt, um den sich $MA(n_L)$ und $MA(n_S)$ mindestens voneinander unterscheiden müssen, damit gehandelt wird. Das Band verhindert somit, dass gehandelt wird, wenn $MA(n_S)$ nur einen minimal höheren bzw. niedrigeren Wert als $MA(n_L)$ erreicht. Dies dient der Vermeidung von Fehlsignalen und reduziert die Anzahl an Signalen, die generiert werden (vgl. Kersch 2014, S. 94). Der gleitende Durchschnitt zum Zeitpunkt t berechnet sich wie folgt (vgl. Strobel und Auer 2018, S. 171):

$$MA(n)_t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q_{t-i} \quad (5.2)$$

wobei n die Anzahl an betrachteten Preisen darstellt. Daraus ergibt sich der Algorithmus MA (vgl. Kresta und Franek 2015, S. 366):

$$s_t(MA) = \begin{cases} -1 & , \text{ wenn } MA(n_S)_t > MA(n_L)_t \cdot (1 + bd) \wedge \\ & \sum_{\tau=1}^{t-1} s_{\tau}(MA) = 0 \\ 1 & , \text{ wenn } MA(n_S)_t < MA(n_L)_t \cdot (1 - bd) \wedge , t = 1, \dots, T \\ & \sum_{\tau=1}^{t-1} s_{\tau}(MA) = -1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (5.3)$$

wobei $s_t(MA)$ ein Richtungssignal gemäß Formel (3.1) ist.

Um MA anzuwenden, sind die Parameter n_S, n_L sowie bd festzulegen. Die ausgewählten Parameter können als $(n_S; n_L; bd)$ dargestellt werden. Damit die Benchmark ein möglichst gutes Ergebnis erzielt, werden mehrere Werte für diese getestet. Dabei wird sich an in der Literatur oft verwendeten Parametern orientiert. Viele Autoren nutzen Parameter mit $n_S \leq 20$ und $20 \geq n_L \leq 240$ (vgl. z. B. Brock et al. 1992, Mills 1997, Chang et al. 2004, Ming-Ming und Siok-Hwa 2006 und Papailias und Thomakos 2015). Zudem wird oftmals ein Band von einem Prozent gewählt, d. h. $bd = 0,01$ (vgl. z. B. Brock et al. 1992, Bessembinder und Chan 1995 Ito 1999, Gunasekarage und Power 2001 und Kersch 2014). Um die bestmögliche Benchmark zu erhalten, wurden alle möglichen Kombinationen für $n_S \leq 20, 20 \geq n_L \leq 240$ sowie $bd \in \{0; 0,01\}$ getestet. Dies sind somit insgesamt 8.840 Parameterkombinationen, welche getestet wurden. Mit dem Tupel $(18; 195; 0)$ wurden die durchschnittlich besten Ergebnisse erzielt. Daher wird in der vorliegenden Arbeit der MA mit diesem Tupel als Benchmark verwendet.

Mit der durchgeführten empirischen Analyse werden die folgenden Fragestellungen untersucht:

1. Wie ist die Performanz von $2RPP$ verglichen mit den ausgewählten Algorithmen?
2. Welchen Einfluss hat die Länge des Handelszeitraums auf den durchschnittlichen Renditefaktor?

3. Welchen Einfluss haben die Transaktionskosten auf den durchschnittlichen Renditefaktor?
4. Welchen Einfluss hat die Qualität der verwendeten Preisgrenzen auf den durchschnittlichen Renditefaktor der kompetitiven Algorithmen?

5.1.1 Ausgewählte Performanzmaße

Als Performanzmaß wird der Renditefaktor R_t verwendet. Dieser gibt an, um welchen Faktor sich das Vermögen von $t - 1$ zu t verändert. Es gilt:

$$R_t(I) = \frac{W_t}{W_{t-1}}, t = 1, \dots, T \quad (5.4)$$

wobei $R_t(I)$ dem Renditefaktor zum Zeitpunkt t auf Preissequenz I entspricht.

Der Gesamtrenditenfaktor $R(I)$ ergibt sich aus den auf-multiplizierten Renditefaktoren:

$$R(I) = \prod_{t=1}^T R_t(I) \quad (5.5)$$

wobei $R_1(I) = 1$ gilt.

Durch explizite Transaktionskosten kann der Renditefaktor gemindert werden. Der transaktionskostenbereinigte Renditefaktor berechnet sich unterschiedlich, je nachdem ob fixe oder relative Transaktionskosten anfallen.

Die relativen bzw. fixen Transaktionskosten ergeben sich aus dem gehandelten Volumen bzw. der Anzahl an Transaktionen. Um die Ergebnisse hinsichtlich der Untersuchung des Einflusses der Transaktionskosten besser nachvollziehen zu können, werden diese zusätzlich angegeben. Das gehandelte Volumen GV gibt an, wie viel Vermögen auf einer Preissequenz insgesamt konvertiert wurde. Es gilt:

$$GV = \sum_{t=1}^T |Vol_t| \quad (5.6)$$

mit Vol_t als Volumen, dass zum Zeitpunkt t gehandelt wird.

Die zum Zeitpunkt t anfallenden relativen Transaktionskosten $TK_t^{rel, Proz}$ können nach Formel (2.5) berechnet werden. Somit ergibt sich für den um Transaktionskosten bereinigten Renditefaktor:

$$R_t^{rel}(I) = R_t(I) \cdot (1 - TK_t^{rel, Proz}) = R_t(I) \cdot \left(1 - \frac{Vol_t \cdot TKS}{W_t}\right) \quad (5.7)$$

mit TKS als Transaktionskostensatz (vgl. Kapitel 2.1.2.1).

$\frac{Vol_t}{W_t}$ gibt an, wie viel Prozent des aktuellen Vermögens W_t zum Zeitpunkt t gehandelt werden. Es gilt somit $\frac{Vol_t}{W_t} = |s_t^{M,W_t}|$. Dies kann mit Formel (3.4) in den absoluten Wert des modifizierten Richtungssignals $|s_t^M|$ umgerechnet werden. Aus Formel (3.8) folgt dann:

$$|b_t - b_{t,ist}| = |s_t^M| \cdot \frac{W_0}{W_t} = \frac{Vol_t}{W_t}. \quad (5.8)$$

Aus den Formeln (5.7) und (5.8) folgt somit der um relative Transaktionskosten bereinigte Renditefaktor:

$$R_t^{rel}(I) = R_t(I) \cdot (1 - (|b_t - b_{t,ist}|) \cdot TKS) \quad (5.9)$$

mit $b_{t,ist}$ als in die Anlage investiertem Anteil, wenn zum Zeitpunkt t nicht gehandelt wird.

Der um relative Transaktionskosten bereinigte Gesamtrenditefaktor $R^{rel}(I)$ berechnet sich analog zu Formel (5.5):

$$R^{rel}(I) = \prod_{t=1}^T R_t^{rel}(I). \quad (5.10)$$

Für fixe Transaktionskosten wird, statt wie zuvor den Renditefaktor um einen Faktor zu bereinigen, die Berechnungsformel für W_t angepasst. Sei $\mathbf{1}_t$ eine Binärvariable, die angibt, ob zum Zeitpunkt t gehandelt wird, mit:

$$\mathbf{1}_t = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn ein Trade zum Zeitpunkt } t \text{ ausgelöst wird} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} . \quad (5.11)$$

Sei weiterhin W'_t das Vermögen zum Zeitpunkt t , wenn fixe Transaktionskosten berücksichtigt werden. Formel (3.24) gibt an, wie sich das Vermögen innerhalb einer Periode ändert, wenn keine Transaktionskosten berücksichtigt werden. Wird dieses angepasst, gilt:

$$\frac{W'_{t+1}}{W'_t} = 1 - b_t + b_t \cdot \frac{q_t}{q_{t+1}} - (TK_{fix})^{\mathbf{1}_{t+1}} \quad (5.12)$$

wobei TK_{fix} die fixen Transaktionskosten darstellen, die anfallen, wenn gehandelt wird (vgl. Kapitel 2.1.2.1). Der um fixe Transaktionskosten bereinigte Renditefaktor $R_t^{fix}(I)$ ergibt sich analog zu Formel (5.4):

$$R_t^{fix}(I) = \frac{W'_t}{W'_{t-1}}, t = 1, \dots, T \quad (5.13)$$

und der um fixe Transaktionskosten bereinigte Gesamtrenditefaktor $R^{fix}(I)$ berechnet sich analog zu Formel (5.10):

$$R^{fix}(I) = \prod_{t=1}^T R_t^{fix}(I). \quad (5.14)$$

Von den Gesamtrenditefaktoren wird sowohl das arithmetische Mittel $\bar{R}(I)$ als Schätzer für den Erwartungswert als auch der Median $ME[R(I)]$ gebildet und im Folgenden untersucht. Die Hypothesentests werden auf Basis der $R(I)$ durchgeführt.

Da der Einfluss des Handelszeitraums T analysiert wird, sind die Erwartungswerte leichter zu vergleichen, wenn der jeweils annualisierte Renditefaktor angegeben wird. Daher werden die annualisierten Renditefaktoren R_A berechnet:

$$R_A = \bar{R}(I)^{\frac{254}{T}} \quad (5.15)$$

wobei angenommen wird, dass ein Jahr 254 Handelstage umfasst. Die bereinigten annualisierten Renditefaktoren berechnen sich analog zu Formel (5.15). Der angegebene Median bezieht sich auf die Gesamtrenditefaktoren $R(I)$.

Der Renditefaktor wird deswegen der Rendite als Performanzmaß vorgezogen, da ermittelt wird, um wie viel Prozent sich die Ergebnisse mindern, wenn Transaktionskosten berücksichtigt werden. Dazu wird die relative Minderung der Renditefaktoren ΔR in Prozent bestimmt. Es gilt:

$$\Delta R = \left(\frac{\bar{R}_A^O}{\bar{R}_A^T} - 1 \right) \cdot 100 \quad (5.16)$$

mit \bar{R}_A^O als durchschnittlicher annualisierter Renditefaktor und \bar{R}_A^T als durchschnittlicher annualisierter transaktionskostenbereinigter Renditefaktor. Im Falle negativer Renditen ist die Interpretation der Ergebnisse schwierig. Der Renditefaktor ist jedoch stets positiv. Daher wird dieser als Performanzmaß der Rendite vorgezogen.

5.1.2 Testdesigns

Im Rahmen dieser Untersuchung wird der Einfluss verschiedener Parameter auf die Performanzmaße der Algorithmen getestet. Die Untersuchung beschränkt sich

auf zwei Parameter: die Anzahl an Handelszeitpunkten T und die Art der expliziten Transaktionskosten. Es werden fünf verschiedene Handelsdauern analysiert $T \in \{10, 20, 63, 127, 254\}$, um zu prüfen, ob die annualisierten Renditefaktoren mit unterschiedlichen T konstant sind oder sich verändern. Die Unterteilung ist an Schmidt et al. (2010) angelehnt¹. Bei den Transaktionskosten wird zwischen der Nicht-Berücksichtigung von Transaktionskosten, relativen Transaktionskosten und fixen Transaktionskosten unterschieden.

Zusätzlich zu diesen beiden Parametern werden für die kompetitiven Algorithmen, welche die Preisobergrenze M und Preisuntergrenze m als Information benötigen, zwei verschiedene Methoden verwendet, diese zu bestimmen. Zum einen werden das Minimum und das Maximum der zukünftigen Preissequenz bestimmt und als Preisobergrenze und -untergrenze festgelegt. In diesem Fall werden die exakten Werte für M und m verwendet. Zum anderen werden die Preisgrenzen auf Basis historischer Werte geschätzt. In der praktischen Anwendung sind das Minimum und das Maximum der Preissequenz, auf die ein Algorithmus angewendet wird, nicht bekannt. Daher dient dieser Fall nur zur Bestimmung einer Obergrenze für die Performanz der entsprechenden Ergebnisse. Somit wird das Potential dieser Algorithmen gezeigt. Im zweiten Fall wird eine Methode aus der Literatur (vgl. Mohr und Schmidt 2008a und Mohr und Schmidt 2008b) zur Bestimmung der Preisgrenzen verwendet. Anhand dieser wird der Einfluss der Qualität der verwendeten Preisgrenzen analysiert. Im Folgenden werden mit $2RPP(E)$, $bTH'(E)$ und $MRPR'(E)$ die kompetitiven Algorithmen bezeichnet, welche die exakten Preisgrenzen verwenden. Die Varianten, welche Preisgrenzen auf Basis historischer Daten verwenden, werden mit $2RPP(H)$, $bTH'(H)$ bzw. $MRPR'(H)$ bezeichnet.

Aus den Parametern Handelszeitraum und Transaktionskosten ergeben sich insgesamt 15 Testdesigns (5 Handelszeiträume \cdot 3 Arten von Transaktionskosten). Ein Testdesign (TD) beschreibt die Rahmenbedingungen von den Simulationsläufen, bei denen das Verhalten der Algorithmen auf den verwendeten Preissequenzen simuliert wird. Im Folgenden werden zunächst die Rahmenbedingungen vorgestellt, die in allen Testdesigns gelten:

1. Das Startkapital ist auf $W_0 = 1$ Euro normiert (vgl. Li et al. 2012).
2. Zum Zeitpunkt T werden alle Anteile an den Wertpapieren verkauft (vgl. Schmidt et al. 2010).

¹Andere Unterteilungen finden sich beispielsweise bei Forner und Marhuenda (2003).

3. Es werden keine impliziten Transaktionskosten berücksichtigt. Ein Handelssignal wird somit zu dem Preis umgesetzt, der zur Generierung des Handelssignals verwendet wurde (vgl. Brock et al. 1992).
4. Handelssignale werden sofort und vollständig umgesetzt (vgl. Bessembinder und Chan 1995).
5. Leerverkäufe sind nicht erlaubt (vgl. Chang et al. 2004).
6. Es ist möglich, eine nicht-ganzzahlige Anzahl an Wertpapieren zu handeln (vgl. Schmidt et al. 2010 und Papailias und Thomakos 2015).
7. Das Vermögen, welches nicht in Wertpapiere investiert ist, wird nicht verzinst (vgl. Mohr und Schmidt 2013).

Im Folgenden werden die verwendeten Methoden zum Abschätzen der Preisgrenzen erläutert sowie die gewählten Werte für Transaktionskosten dargestellt.

5.1.2.1 Abschätzung der Preisgrenzen

Die betrachteten kompetitiven Algorithmen benötigen die Abschätzungen \hat{M} und \hat{m} für die tatsächlichen Preisgrenzen M und m . Diese Abschätzungen sind als problematisch anzusehen, da solche Informationen entweder nicht vorliegen oder Schätzfehlern unterliegen (vgl. Mohr et al. 2014, S. 103). Aufgrund dieser Schätzfehler kann es notwendig sein, die Preisgrenzen im Zeitablauf anzupassen. Daher müssen für jeden Zeitpunkt t Preisgrenzen \hat{M}_t und \hat{m}_t bestimmt werden. Im Rahmen der empirischen Untersuchung wird die Performanz der Algorithmen analysiert, wenn diese die exakten Werte für M und m als Preisschätzer verwenden. Dies stellt eine Obergrenze für die empirische Performanz dar. Eine Anpassung der exakten Preisschätzer im Zeitablauf ist nicht notwendig. Es gilt:

$$\hat{M}_t = M = \max_{t=1, \dots, T} \{q_t\}, t = 1, \dots, T \quad (5.17)$$

und

$$\hat{m}_t = m = \min_{t=1, \dots, T} \{q_t\}, t = 1, \dots, T. \quad (5.18)$$

Ebenfalls wird die Performanz der Algorithmen untersucht für den Fall, dass Preisschätzer auf Basis historischer Daten ermittelt werden. Dies ist der für die

T	10	20	63	127	254
Abweichung zu M	4,68	6,71	12,75	20,43	33,46
Abweichung zu m	5,15	7,65	15,03	24,83	43,41

Tabelle 5.1: Durchschnittliche Abweichung der Preisschätzer auf historischer Basis

Praxis relevante Fall, da die zukünftigen Preise nicht im Voraus bekannt sind. Für die Abschätzung der Preisgrenzen auf historischen Daten wird die Vorgehensweise von Mohr und Schmidt (2008a) verwendet. Weitere Methoden der Abschätzung von Extremwerten von Zeitreihen finden sich bei Coles (2001). Seien \hat{M}_0 und \hat{m}_0 die Preisgrenzen, die zu Beginn angenommen werden. Diese ergeben sich aus dem historisch größten bzw. kleinsten Wert zwischen einem Zeitpunkt t' und dem Zeitpunkt $t = 0$. Es gilt $t' = -T + 1$. Das heißt, für die Abschätzung von \hat{M}_0 und \hat{m}_0 werden T historische Zeitpunkte verwendet. Es gilt:

$$\hat{M}_0 = \max_{\tau=t', \dots, 0} \{q_\tau\} \quad (5.19)$$

und

$$\hat{m}_0 = \min_{\tau=t', \dots, 0} \{q_\tau\}. \quad (5.20)$$

Die Preisschätzer \hat{M}_t bzw. \hat{m}_t mit $t = 1, \dots, T$ werden angepasst, wenn ein Preis $q_t < \hat{m}_{t-1}$ bzw. $q_t > \hat{M}_{t-1}$ erscheint. Der Schätzer entspricht dann dem neu erschienenen Preis. Somit gilt:

$$\hat{M}_t = \max \left\{ \hat{M}_0, \max_{\tau=1, \dots, t} \{q_\tau\} \right\}, t = 1, \dots, T \quad (5.21)$$

und

$$\hat{m}_t = \min \left\{ \hat{m}_0, \min_{\tau=1, \dots, t} \{q_\tau\} \right\}, t = 1, \dots, T. \quad (5.22)$$

Die durchschnittlichen absoluten Abweichungen der Preisschätzer zu Beginn eines Simulationslaufes, d. h. \hat{M}_0 und \hat{m}_0 (vgl. Formel (5.19) bzw. Formel (5.20)) zu den exakten Werten M und m , sind in Tabelle 5.1 angegeben. Die Abweichungen wachsen mit steigendem T .

5.1.2.2 Transaktionskosten

Um das zur Berechnung der Renditefaktoren notwendige Vermögen W_t zu bestimmen, muss zunächst festgelegt werden, von welchem Wertpapier die Transaktionskosten abgezogen werden. Aus Gründen der Einfachheit wird im Folgenden angenommen, dass die Transaktionskosten entsprechend der Verteilung des Vermögens in Euro und die Anlage von diesen jeweils abgezogen werden. Dies führt dazu, dass das Verteilungsverhältnis des Vermögens sich durch die Bereinigung um Transaktionskosten nicht ändert. Für die relativen Transaktionskosten wird ein Transaktionskostensatz $TKS = 0,1\%$ angenommen. Dies entspricht dem relativen Transaktionskostensatz, der vom Broker *Interactive Brokers* berechnet wird².

Die fixen Transaktionskosten betragen $TK_{fix} = 0,001$ Euro. Bei der Festlegung der fixen Transaktionskosten wurde sich erneut am Broker *Interactive Brokers* orientiert. Dieser verlangt für jede Order mit einem Volumen unter 4000 Euro fixe Transaktionskosten von 4 Euro³. Die geringst möglichen fixen Transaktionskosten entsprechen somit $\frac{1}{1000}$ vom gehandelten Volumen. Auf ein Startkapital von 1 Euro normiert ergeben sich somit Mindesttransaktionskosten von 0,001 Euro. Die berücksichtigten Transaktionskosten entsprechen somit einer unteren Grenze und die ermittelten Kennzahlen sind weiterhin als Obergrenze für die Performance zu verstehen. Jedoch ist diese niedriger als ohne Berücksichtigung von fixen Transaktionskosten.

5.1.3 Evaluationsmethodik

Im Rahmen der empirischen Analyse wird $2RPP$ mit jeder Benchmark verglichen. Die Variante $2RPP(E)$, die die exakten Preisschätzer verwendet, wird jedoch nicht mit den kompetitiven Algorithmen mit historischen Preisschätzern verglichen. Umgekehrt gilt dies zudem für $2RPP(H)$. Entsprechend Kersch (2014) wird sowohl der Differenzentest als auch der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test durchgeführt. Somit wird getestet, ob $2RPP$ sowohl einen höheren Erwartungswert als auch einen höheren Median als die entsprechende Benchmark erreicht. Somit werden pro Testdesign 16 Hypothesentests und somit insgesamt 240 Hypothesentests durchgeführt. Seien R^{2RPP} und R^{BEN} jeweils die Wertereihen der Renditefaktoren von $2RPP$ bzw. der entsprechenden Benchmark. Dann entsprechen die Hypothesen für den Differenzentest:

²Stand: 16.02.2018

³Stand: 16.02.2018

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & E[R^{2RPP}] > E[R^{BEN}] \\ H_1 : \quad & E[R^{2RPP}] \leq E[R^{BEN}] \end{aligned} \quad (5.23)$$

und für den Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & ME[R^{2RPP}] > ME[R^{BEN}] \\ H_1 : \quad & ME[R^{2RPP}] \leq ME[R^{BEN}] \end{aligned} \quad (5.24)$$

Es ist jedoch zu beachten, dass die Prüfung der Differenzen der Renditefaktoren auf Normalverteilung entsprechend dem Jarque-Bera Test (vgl. Kapitel 2.2.3.2.2) stets negativ ausgefallen ist. Somit kann die Aussagekraft des Differenzentests eingeschränkt sein. Jedoch weisen die einzelnen Stichproben genug Elemente auf, damit der Differenzentest ein robustes Ergebnis erzielen kann. Kann der Differenzentest aufgrund der Verletzung der Normalverteilungsannahme nicht angewendet werden, ist der Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test als Alternative zu verwenden (vgl. Kapitel 2.2.3.2). Dieser Test wird hier zusätzlich zum Vergleich des Medians eingesetzt. Zudem wird somit die Robustheit der Ergebnisse des Differenzentests überprüft. Für die nachfolgenden empirischen Untersuchungen wird ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ verwendet (vgl. z. B. Avramov et al. 2007 und Schmidt et al. 2010). Es ist zu beachten, dass aus Gründen der Leserlichkeit hier nur angegeben wird, ob Signifikanz vorliegt oder nicht. Die entsprechenden Werte der Teststatistiken für den Differenzentest sowie den Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test werden im Anhang dargestellt (vgl. Kapitel B.2).

5.2 Datenset

Das zur Verfügung stehende Datenset umfasst die Schlusskurse von allen Aktien, welche am Handelsplatz Xetra im Zeitraum vom 01.01.2000 bis zum 31.12.2016 gehandelt wurden und deren International Securities Identification Number (ISIN) mit dem Kürzel DE beginnen. Die Daten umfassen somit 4322 Handelstage. Sie wurden am 10.07.2017 auf <http://finanzen.net> abgerufen. Aufgrund der höheren Qualität der Daten wurden die Wertpapierkurse der Frankfurter Börse denen der Xetra vorgezogen. Das Datenset wurde anschließend um alle Kurse bereinigt, die (1) Lücken über mindestens einen Handelstag aufweisen, (2) in denen der Preis an mehr als fünf aufeinanderfolgenden Handelstagen identisch ist und (3) in denen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Handelstagen eine Preissteigerung von über 200 % oder

T	10	20	63	127	254
Anzahl Instanzen pro Aktie	406	203	64	32	16
Anzahl Instanzen Gesamt (N_T)	41.412	20.706	6.528	3.264	1.632

Tabelle 5.2: Anzahl Instanzen

eine Preissenkung von über 50 % erfolgt. Das verbleibende Datenset umfasst 102 Aktien. Eine Liste der Aktien befindet sich im Anhang (vgl. Kapitel B.1).

Für einige der getesteten Algorithmen werden Daten benötigt, die zeitlich den Daten, auf die die Algorithmen angewendet werden voraus gehen. Daher wird auf den Daten des Jahres 2000 keine Simulation durchgeführt. Dieses Jahr dient nur der Schätzung der Preisgrenzen oder zur Ermittlung von gleitenden Durchschnitten. Somit stehen insgesamt 4068 Handelstage zur Verfügung. Die Gesamtanzahl an Instanzen N_T und somit die Anzahl der Simulationsläufe für die jeweiligen Simulationslängen T sind in Tabelle 5.2 dargestellt. Insgesamt ergeben sich somit 73.542 durchgeführte Simulationsläufe pro Algorithmus.

Ist T kein Teiler von 4068, werden übriggebliebene Handelstage nicht berücksichtigt. Dadurch wird gewährleistet, dass alle Instanzen gleich groß sind.

5.3 Empirische Ergebnisse

Im Folgenden werden die Testergebnisse präsentiert. Dabei werden zunächst die Testdesigns ohne Transaktionskosten als Ausgangsszenario vorgestellt. Anschließend wird für die relativen und die fixen Transaktionskosten analysiert, wie stark sich deren Ergebnisse von den jeweiligen Ausgangsszenarien unterscheiden.

5.3.1 Vergleich der Algorithmen

Zunächst werden die durchschnittlichen annualisierten Renditefaktoren ohne Transaktionskosten analysiert. Diese sind in Tabelle 5.3 dargestellt. Die kompetitiven Algorithmen mit exakten bzw. historischen Preisschätzern und Heuristiken sind jeweils gruppiert dargestellt.

Die kompetitiven Algorithmen mit exakten Preisschätzern erreichen mit Abstand die größten annualisierten Renditefaktoren. Diese fallen monoton mit steigendem Handelszeitraum T . Dies ist wenig überraschend, da mit kleineren T die Informationen

	T	10	20	63	127	254
Exakte Preisschätzer						
$2RPP(E)$		2,4627	1,9918	1,4986	1,3611	1,2432
$MRPR'(E)$		3,0653	2,3291	1,6147	1,4168	1,2717
$bTH'(E)$		2,7521	2,0818	1,4766	1,3195	1,2037
Historische Preisschätzer						
$2RPP(H)$		1,0733	1,0631	1,0429	1,0295	1,0368
$MRPR'(H)$		1,0509	1,0377	1,0155	1,0022	1,0237
$bTH'(H)$		1,0454	1,0360	1,0148	1,0019	1,0114
Heuristiken						
MA		1,0842	1,0996	1,0992	1,1060	1,1099
BH		1,0892	1,1097	1,0895	1,0996	1,1155

Tabelle 5.3: Annualisierte Renditefaktoren

über die Preisgrenzen besser genutzt werden, und bestätigt die Ergebnisse von Mohr und Schmidt (2013). $MRPR'(E)$ erreicht stets den höchsten annualisierten Renditefaktor. $bTH'(E)$ erzielt für $T \in \{10, 20\}$ und $2RPP(E)$ für $T \in \{63, 127, 254\}$ die zweit höchsten annualisierten Renditefaktoren.

Die Ergebnisse für kompetitive Algorithmen mit historischen Preisschätzer sind hingegen wesentlich geringer. So fallen die Renditefaktoren für $T = 10$ für alle kompetitiven Algorithmen um mehr als 50 %. Zur Erinnerung: Die durchschnittliche Abweichung der historischen Preisschätzer von den exakten Preisschätzern ist für $T = 10$ jeweils ca. 5%. Obwohl die Abweichung der Preisschätzer für $T = 254$ mit ca 33 % bzw. ca 43 % wesentlich stärker ausfällt, sinken die Renditefaktoren um einen im Vergleich relativ geringen Faktor. $2RPP$ reagiert am robustesten auf die mindere Qualität der Preisschätzer und erreicht nun durchgehend die höchsten annualisierten Renditefaktoren der kompetitiven Algorithmen. Es ist anzumerken, dass die Renditefaktoren im Fall historischer Preisschätzer mit steigendem T zunächst fallen, doch beim Anstieg von $T = 127$ auf $T = 254$ wieder ansteigen.

Vergleicht man die Ergebnisse der kompetitiven Algorithmen mit den Heuristiken, zeigt sich, dass die Heuristiken wesentlich geringere Renditefaktoren erzielen als die kompetitiven Algorithmen mit exakten Preisschätzern. Jedoch sind im Fall historischer Preisschätzer die Ergebnisse der Heuristiken stets höher.

Der Vergleich der Mediane der kompetitiven Algorithmen mit exakten Preisschät-

	T	10	20	63	127	254
Exakte Preisschätzer						
$2RPP(E)$		1,0303	1,0485	1,0974	1,1489	1,2173
$MRPR'(E)$		1,0363	1,0580	1,1103	1,1701	1,2330
$bTH'(E)$		1,0319	1,0490	1,0863	1,1262	1,1761
Historische Preisschätzer						
$2RPP(H)$		1,0046	1,0092	1,0196	1,0269	1,0403
$MRPR'(H)$		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$bTH'(H)$		1,0016	1,0055	1,0133	1,0188	1,0296
Heuristiken						
MA		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
BH		1,0025	1,0067	1,0180	1,0353	1,0800

Tabelle 5.4: Mediane der Renditefaktoren

zern führt zu einem unverändertem Ergebnis. Erneut erzielt $MRPR'(E)$ die höchsten Werte für alle T . Und erneut erreichen $bTH'(E)$ für $T \in \{10, 20\}$ bzw. $2RPP(E)$ für $T \in \{63, 127, 254\}$ die zweit höchsten Werte.

Für die kompetitiven Algorithmen mit historischen Preisschätzern ergibt sich jedoch ein Unterschied. Zwar erreicht weiterhin $2RPP(H)$ die höchsten Werte. Doch erreicht nun $bTH'(H)$ für alle T den zweit höchsten Median. Der Median von $MRPR'(H)$ ist konstant 1. Das bedeutet, dass $MRPR'(H)$ in mindestens 50 % der Fälle keine positive Rendite erzielt.

Dies gilt ebenfalls für MA . Dessen Median ist somit für alle T geringer als der von BH . Die Heuristiken sind erneut den kompetitiven Algorithmen mit exakten Preisschätzern unterlegen. Werden historische Preisschätzer verwendet, zeigt sich jedoch, dass im Vergleich mit $2RPP(H)$ nur BH für $T \in \{127, 254\}$ höhere Werte erreicht. MA erreicht hingegen in keinem Fall einen höheren Median als einer der kompetitiven Algorithmen.

Die Ergebnisse der Hypothesentests sind in Tabelle 5.5 dargestellt. D steht für den Differenzentest und W für den Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test. Ein x gibt an, dass $2RPP(E)$ bzw. $2RPP(H)$ ein signifikant höheres Ergebnis als die Benchmark erreicht. $2RPP(E)$ erreicht für alle T sowohl einen signifikant höheren Erwartungswert als auch Median als die Heuristiken. Im Vergleich mit den kompetitiven Algorithmen erreicht $2RPP(E)$ nur im Vergleich zu $bTH'(E)$ signifikant höhere Ergebnisse und

		$T = 10$	$T = 20$	$T = 63$	$T = 127$	$T = 254$
Algorithmus	Benchmark	D W	D W	D W	D W	D W
$2RPP(E)$	$MRPR'(E)$					
	$bTH'(E)$			x x	x x	x x
	MA	x x	x x	x x	x x	x x
	BH	x x	x x	x x	x x	x x
$2RPP(H)$	$MRPR'(H)$	x x	x x	x x	x x	x x
	$bTH'(H)$	x x	x x	x x	x x	x x
	MA	x	x			
	BH	x	x	x		

Tabelle 5.5: Ergebnisse Hypothesentest für $2RPP$

dies zudem nur für $T \in \{63, 127, 254\}$.

Die Ergebnisse der Hypothesentests für $2RPP(H)$ sind gegensätzlich. So dominiert $2RPP(H)$ nun statt der Heuristiken die kompetitiven Algorithmen. Im Vergleich zu den Heuristiken werden nur für kleine Handelszeiträume, d. h. $T \in \{10, 20\}$ für MA bzw. $T \in \{10, 20, 63\}$ für BH hinsichtlich des Medians signifikant höhere Ergebnisse erzielt.

5.3.2 Einfluss von relativen Transaktionskosten

Nachdem die Performanz der Algorithmen im Fall, dass keine Transaktionskosten berücksichtigt werden, miteinander verglichen wurde, wird nun der Einfluss der relativen Transaktionskosten auf die Algorithmen untersucht. Zudem wird getestet, ob sich durch eine unterschiedliche starke Auswirkung der relativen Transaktionskosten die Ergebnisse der Hypothesentests ändern.

In Tabelle 5.6 ist das durchschnittlich gehandelte Volumen der Algorithmen dargestellt. Für $2RPP$ und bTH' wächst das gehandelte Volumen mit steigendem T relativ stark an, wobei bTH' für große Handelszeiträume das wesentlich höhere Volumen aufweist. Die gehandelten Volumen von $MRPR'(E)$ steigen nur geringfügig mit steigendem T . Dies liegt daran, dass mit größerem Handelszeitraum die Preisgrenzen weiter voneinander entfernt sind. Umso größer müssen dann Preisänderungen sein, damit $MRPR'$ handelt. Zudem hat $MRPR'$ im Gegensatz zu $2RPP$ nicht die Eigenschaft, mehrmals zu handeln, wenn der Preis um bestimmte Werte schwankt. Für $MRPR'(H)$ liegt keine monotone Steigung des gehandelten Volumens mit steigendem

T vor. BH handelt zu Beginn und am Ende des Handelszeitraums, unabhängig von der Länge dieses. Das durchschnittlich gehandelte Volumen ist daher für alle T konstant. $MRPR'$ für alle T und MA für $T \in \{10, 20\}$ erzielen ein niedrigeres gehandeltes Volumen als BH . Das heißt, dass oftmals nicht das komplette Volumen gehandelt wird. Da $MRPR'$ und MA nicht-präemptive Algorithmen sind, lässt sich daraus schlussfolgern, dass beide auf einigen Sequenzen nicht handeln.

	T	10	20	63	127	254
Exakte Preisschätzer						
$2RPP(E)$		2,999	3,979	6,327	8,567	11,342
$MRPR'(E)$		2,301	2,550	2,753	2,845	2,852
$bTH'(E)$		2,464	4,733	15,759	32,892	66,616
Historische Preisschätzer						
$2RPP(H)$		2,035	2,614	3,991	5,096	6,681
$MRPR'(H)$		1,386	1,455	1,474	1,415	1,429
$bTH'(H)$		1,828	3,665	12,225	24,823	51,007
Heuristiken						
MA		1,200	1,282	1,629	2,136	3,136
BH		2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

Tabelle 5.6: Durchschnittlich gehandelte Volumen

In Abbildung 5.1 ist die relative Minderung der annualisierten Renditefaktoren verglichen mit den Ergebnissen aus den Testdesigns ohne Transaktionskosten dargestellt. $2RPP$ verzeichnet für $T = 10$ die größten Minderungen. bTH' erreicht hingegen für $T \in \{20, 63, 127, 254\}$ die größten Minderungen. Die Minderungen von $MRPR'(H)$ sind die einzigen, die für große T sogar geringer ausfallen als die von MA und BH . Mit Ausnahme von bTH' sinken für alle Algorithmen die Auswirkungen der Transaktionskosten auf den Renditefaktor mit steigendem T . Dies ist für BH nicht überraschend, da das gehandelte Volumen unabhängig von T ist. Für die anderen Algorithmen gilt dies jedoch nicht. Für die kompetitiven Algorithmen gilt zudem, dass sich die Renditefaktoren im Fall exakter Preisschätzer stärker mindern, als wenn historische Preisschätzer verwendet werden.

Tabelle 5.7 zeigt die resultierenden durchschnittlichen annualisierten Renditefaktoren unter Berücksichtigung relativer Transaktionskosten. $MRPR'(E)$ erzielt weiterhin die größten Renditefaktoren. Durch die Minderung durch Transaktionskosten ist der

MINDERUNG DER RENDITEFAKTOREN DURCH RELATIVE TRANSAKTIONSKOSTEN

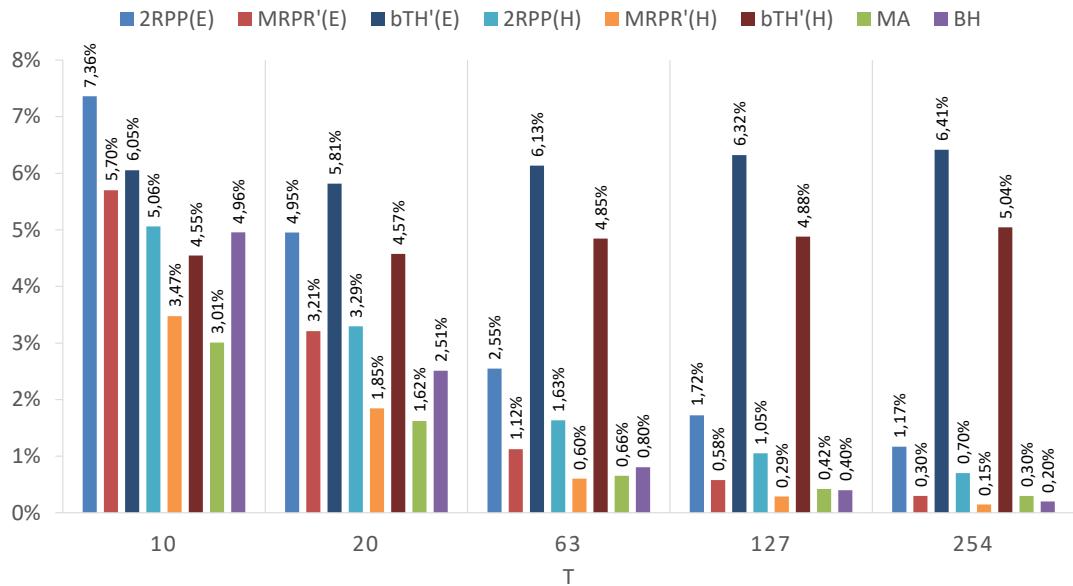


Abbildung 5.1: Minderungen der annualisierten Renditefaktoren durch relative Transaktionskosten

	T	10	20	63	127	254
--	-----	----	----	----	-----	-----

Exakte Preisschätzer

$2RPP(E)$	2,2815	1,8932	1,4604	1,3377	1,2287
$MRPR'(E)$	2,8906	2,2543	1,5965	1,4086	1,2679
$bTH'(E)$	2,5855	1,9608	1,3860	1,2361	1,1265

Historische Preisschätzer

$2RPP(H)$	1,0190	1,0281	1,0258	1,0187	1,0296
$MRPR'(H)$	1,0144	1,0186	1,0093	0,9993	1,0222
$bTH'(H)$	0,9979	0,9886	0,9656	0,9530	0,9604

Heuristiken

MA	1,0516	1,0817	1,0920	1,1013	1,1066
BH	1,0352	1,0818	1,0807	1,0952	1,1133

Tabelle 5.7: Annualisierte und um relative Transaktionskosten bereinigte Renditefaktoren

Renditefaktor von $bTH'(E)$ für $T = 254$ nah an den Renditefaktoren der Heuristiken.

$2RPP(H)$ erzielt unter den kompetitiven Algorithmen mit historischen Preisschätzern erneut die höchsten durchschnittlichen Renditefaktoren. $bTH'(H)$ für alle T sowie $MRPR'(H)$ für $T = 127$ erreichen einen durchschnittlichen Renditefaktor kleiner 1. Somit wird durch Nichthandeln ein durchschnittlich höherer Renditefaktor erzielt. Die Renditefaktoren von BH und MA liegen wie zuvor nah beieinander. Sie befinden sich weiterhin zwischen den Renditefaktoren der kompetitiven Algorithmen mit exakten und historischen Preisschätzern.

	T	10	20	63	127	254
Exakte Preisschätzer						
$2RPP(E)$		1,0271	1,0442	1,0898	1,1393	1,2023
$MRPR'(E)$		1,0337	1,0551	1,1070	1,1671	1,2290
$bTH'(E)$		1,0293	1,0438	1,0693	1,0884	1,0976
Historische Preisschätzer						
$2RPP(H)$		1,0027	1,0070	1,0165	1,0226	1,0357
$MRPR'(H)$		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$bTH'(H)$		1,0007	1,0029	1,0042	0,9997	0,9900
Heuristiken						
MA		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
BH		1,0005	1,0047	1,0160	1,0332	1,0779

Tabelle 5.8: Mediane der um relative Transaktionskosten bereinigten Renditefaktoren

Tabelle 5.8 stellt entsprechend die Mediane dar. Im Vergleich zum Szenario ohne Transaktionskosten erreicht $2RPP(E)$ nun auch für $T = 20$ einen größeren Median als $bTH'(E)$. Die Mediane von $2RPP(H)$ sind wie zuvor für alle T größer als die der anderen kompetitiven Algorithmen, die historische Preisschätzer verwenden. Zudem werden für $T \in \{10, 20, 63\}$ erneut höhere Mediane als für die Heuristiken erreicht. Interessant ist, dass die Mediane von $MRPR'(H)$ und MA nicht sinken. So betragen diese weiterhin 1. $bTH'(H)$ erreicht nun ebenfalls für den Median Werte kleiner 1. Das heißt, dass in diesen Fällen $bTH'(H)$ in mindestens der Hälfte der Simulationen einen Verlust erzielt hat.

Für die Ergebnisse der Hypothesentests ergeben sich keine Änderungen im Vergleich zum Fall, dass keine Transaktionskosten berücksichtigt werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.9 dargestellt.

		$T = 10$	$T = 20$	$T = 63$	$T = 127$	$T = 254$
Algorithmus	Benchmark	D W	D W	D W	D W	D W
$2RPP(E)$	$MRPR'(E)$					
	$bTH'(E)$			x x	x x	x x
	MA	x x	x x	x x	x x	x x
	BH	x x	x x	x x	x x	x x
$2RPP(H)$	$MRPR'(H)$	x x	x x	x x	x x	x x
	$bTH'(H)$	x x	x x	x x	x x	x x
	MA	x	x			
	BH	x	x	x		

Tabelle 5.9: Ergebnisse Hypothesentest für $2RPP$ im Fall relativer Transaktionskosten

5.3.3 Einfluss von fixen Transaktionskosten

Im Folgenden wird der Einfluss von fixen Transaktionskosten auf den Renditefaktor untersucht. Zudem wird getestet, ob sich durch eine unterschiedliche starke Auswirkung der fixen Transaktionskosten die Ergebnisse der Hypothesentests ändern.

In Tabelle 5.10 ist die durchschnittliche Anzahl an Transaktionen dargestellt, aus denen sich die fixen Transaktionskosten ergeben. Dabei ist zu beachten, dass diese im Falle von nicht-präemptiven Algorithmen dem durchschnittlich gehandeltem Volumen entsprechen.

Auch für die Anzahl an Transaktionen weisen die Algorithmen $2RPP$ und bTH' höhere Werte auf als die Heuristiken. Dabei ist der Unterschied merklich größer als beim gehandelten Volumen. Bei bTH' ist die Anzahl an Transaktionen jeweils nah an der Anzahl an Zeitpunkten. Somit sind bei diesen beiden Algorithmen größere Rückgänge des Renditefaktors zu erwarten als bei den anderen Algorithmen. Die Anzahl an Transaktionen von $MRPR'(E)$ und $MRPR'(H)$ sind relativ nah beieinander. Hingegen zeigt sich, dass $2RPP(H)$ weniger handelt als $2RPP(E)$. Die Anzahl an Transaktionen bestätigt zudem, dass MA und $MRPR'$ auf einigen Sequenzen nicht handeln. $2RPP(E)$ und $2RPP(H)$ erreichen jeweils höhere Werte als MA und BH .

In Abbildung 5.2 ist die relative Minderung des Renditefaktors verglichen mit den Ergebnissen aus den Testdesigns ohne Transaktionskosten abgebildet. Erneut gilt, dass für alle Algorithmen mit Ausnahme von bTH' der Einfluss der fixen Transaktionskosten mit steigendem T sinkt. bTH' leidet zudem unter den größten

	T	10	20	63	127	254
--	-----	----	----	----	-----	-----

Exakte Preisschätzer

$2RPP(E)$	4,655	6,793	11,715	16,196	21,722
$MRPR'(E)$	2,301	2,550	2,753	2,845	2,852
$bTH'(E)$	7,094	14,678	47,303	96,140	192,680

Historische Preisschätzer

$2RPP(H)$	3,460	4,632	7,361	9,570	12,686
$MRPR'(H)$	1,386	1,455	1,474	1,415	1,429
$bTH'(H)$	6,788	13,816	44,516	91,348	185,495

Heuristiken

MA	1,200	1,282	1,629	2,136	3,136
BH	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

Tabelle 5.10: Durchschnittliche Anzahl an Transaktionen

MINDERUNG DER RENDITEFAKTOREN DURCH FIXE TRANSAKTIONSKOSTEN

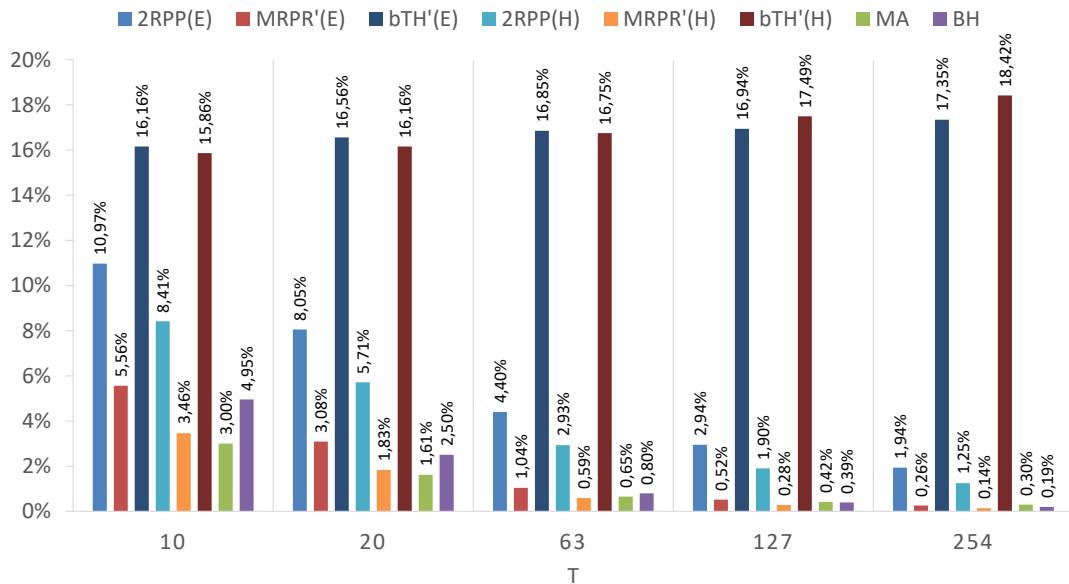


Abbildung 5.2: Minderung der annualisierten Renditefaktoren durch fixe Transaktionskosten

Minderungen der Renditefaktoren. Da MA für $T \in \{10, 20, 63\}$ seltener handelt als BH , ist dort der Einfluss geringer als auf BH . Die Minderungen von $2RPP(E)$ bzw. $2RPP(H)$ sind, wie schon bei relativen Transaktionskosten, höher als die von $MRPR'$ und den Heuristiken.

	T	10	20	63	127	254
Exakte Preisschätzer						
$2RPP(E)$		2,1925	1,8315	1,4327	1,3210	1,2191
$MRPR'(E)$		2,8948	2,2572	1,5978	1,4095	1,2685
$bTH'(E)$		2,3075	1,7370	1,2278	1,0960	0,9949
Historische Preisschätzer						
$2RPP(H)$		0,9830	1,0024	1,0123	1,0099	1,0239
$MRPR'(H)$		1,0145	1,0187	1,0094	0,9993	1,0222
$bTH'(H)$		0,8796	0,8686	0,8449	0,8266	0,8251
Heuristiken						
MA		1,0517	1,0818	1,0920	1,1014	1,1066
BH		1,0353	1,0819	1,0808	1,0953	1,1134

Tabelle 5.11: Annualisierte und um fixe Transaktionskosten bereinigte Renditefaktoren

Die resultierenden annualisierten Renditefaktoren sind in Tabelle 5.11 dargestellt. Erstmals erreicht mit $bTH'(E)$ ein kompetitiver Algorithmus mit exakten Preisschätzern einen durchschnittlichen Renditefaktor kleiner 1. Dieser erreicht zudem für $T \in \{127, 254\}$ bzw. für $T = 254$ geringere Renditefaktoren als MA bzw. BH . Die beiden anderen kompetitiven Algorithmen erreichen jedoch weiterhin Ergebnisse, die wesentlich höher als die der Heuristiken sind.

$2RPP(H)$ erreicht nun nicht mehr für alle T die höchsten Renditefaktoren von den drei kompetitiven Algorithmen. Für $T = 10$ ist der Wert des Renditefaktors kleiner 1 und geringer als der von $MRPR'(H)$. Auch $MRPR'(H)$ erreicht für $T = 127$ nun erstmals einen annualisierten Renditefaktor kleiner 1.

$2RPP$ weist geringfügig kleinere Werte für den Median auf als noch im Fall mit relativen Transaktionskosten. Dennoch reicht die Änderung aus, damit BH nun auch für $T = 63$ einen höheren Median als $2RPP(E)$ erreicht. $MRPR'$ weist geringfügig gestiegene Mediane auf. $bTH'(E)$ erreicht nun für $T = 254$ einen Median kleiner 1. Die Mediane von BH und MA sind nahezu identisch zu den Medianen unter

T	10	20	63	127	254
Exakte Preisschätzer					
$2RPP(E)$	1,0253	1,0412	1,0841	1,1315	1,1927
$MRPR'(E)$	1,0338	1,0552	1,1072	1,1673	1,2298
$bTH'(E)$	1,0245	1,0335	1,0365	1,0247	0,9663
Historische Preisschätzer					
$2RPP(H)$	1,0010	1,0049	1,0139	1,0189	1,0306
$MRPR'(H)$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$bTH'(H)$	0,9961	0,9928	0,9704	0,9288	0,8446
Heuristiken					
MA	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
BH	1,0005	1,0047	1,0160	1,0332	1,0780

Tabelle 5.12: Mediane der um fixe Transaktionskosten bereinigten Renditefaktoren

		$T = 10$		$T = 20$		$T = 63$		$T = 127$		$T = 254$	
Algorithmus	Benchmark	D	W	D	W	D	W	D	W	D	W
$2RPP(E)$	$MRPR'(E)$										
	$bTH'(E)$			x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x
	MA	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x
	BH	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x
$2RPP(H)$	$MRPR'(H)$	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x
	$bTH'(H)$	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x	x x
	MA	x	x	x	x						
	BH	x	x	x	x	x					

Tabelle 5.13: Ergebnisse Hypothesentest für $2RPP$ im Fall fixer Transaktionskosten

Berücksichtigung relativer Transaktionskosten. Es gilt erneut, dass die Mediane von $MRPR'(H)$ und MA für alle $T \geq 1$ entsprechen.

Die Ergebnisse der Hypothesentests weichen nun von den Ergebnissen im Fall ohne Transaktionskosten ab. Die Änderungen sind in Rot dargestellt (vgl. Tabelle 5.13). $2RPP(E)$ erreicht nun auch für $T = 20$ signifikant höhere Ergebnisse als $bTH'(E)$. Jedoch dominiert $2RPP(H)$ unter Berücksichtigung von fixen Transaktionskosten $MRPR'(H)$ nicht mehr. So erreicht $2RPP(H)$ nur für $T \in \{63, 127, 254\}$ einen signifikant höheren Median als $MRPR'(H)$.

5.4 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sollen nochmal die wichtigsten Erkenntnisse aus der empirischen Analyse zusammengefasst und die Fragestellungen beantwortet werden.

5.4.1 Beantwortung der Fragestellungen

Frage 1: Wie ist die Performanz von $2RPP$ verglichen mit den ausgewählten Algorithmen?

Die Beantwortung dieser Frage geht mit der Frage einher, welche Qualität die Abschätzung der Preisgrenzen M und m aufweist. Die Ergebnisse in allen untersuchten Fällen zeigen, dass $2RPP$ im Falle exakter Preisgrenzen in der Lage ist, die verwendeten Heuristiken für alle untersuchten T zu schlagen. Diese Dominanz verschwindet jedoch mit steigender Abweichung der Preisschätzer von den exakten Werten. Hingegen erreichen die anderen kompetitiven Algorithmen für exakte Werte zum Teil bessere Ergebnisse als $2RPP$. Es ist jedoch zu beachten, dass in der Untersuchung $2RPP$ die robustesten Ergebnisse hinsichtlich der Abweichung der historischen Preisschätzer von den exakten Werten aufweist.

Frage 2: Welchen Einfluss hat die Länge des Handelszeitraums auf den durchschnittlichen Renditefaktor?

Für die Heuristiken sowie die kompetitiven Algorithmen mit historischen Preisschätzern lässt sich kein Trend feststellen, ob längere oder kürzere Handelszeiträume zu höheren Ergebnissen führen. So kann eine Erhöhung der Anzahl an Handelszeitpunkten T dazu führen, dass der annualisierte Renditefaktor fällt oder steigt. Jedoch ergeben sich für die kompetitive Algorithmen mit exakten Preisschätzern eindeutige Ergebnisse. Die Renditefaktoren der drei Algorithmen sinken mit der Zeit.

Dies ist so zu erwarten gewesen. Sind die exakten Preisgrenzen für kurze Zeiträume bekannt, lassen sich diese Information besser nutzen, als wenn diese für einen längeren Zeitraum bekannt sind. Werden Transaktionskosten betrachtet, zeigt sich jedoch, dass der Einfluss dieser Transaktionskosten auf alle Algorithmen außer bTH' mit einem größeren T sinkt. Dies liegt daran, dass die Anzahl an ausgeführten Transaktionen nicht linear mit T wächst. So gilt für die kompetitiven Algorithmen, dass größere Werte für T zumeist dazu führen, dass die Preisgrenzen weiter auseinander liegen. Dementsprechend müssen für die beiden Algorithmen $2RPP$ und $MRPR'$ Preisänderungen größer ausfallen, damit gehandelt wird. Für die Heuristik BH gilt zudem, dass das gehandelte Volumen sowie die Anzahl an Transaktionskosten unabhängig von T sind. Der negative Einfluss der Transaktionskosten auf bTH' sinkt jedoch nicht mit steigendem T . Dies liegt daran, dass, wenn der Preis in einem bestimmten Bereich liegt, bei jeder Preisänderung gehandelt wird.

Frage 3: Welchen Einfluss haben die Transaktionskosten auf den durchschnittlichen Renditefaktor?

Bei allen Algorithmen sinkt der Erwartungswert der Renditefaktoren. Jedoch geschieht dies unterschiedlich stark. So erreicht bTH' verhältnismäßig starke Rückgänge der durchschnittlichen annualisierten Renditefaktoren sowie Mediane. Für fixe Transaktionskosten war dies so erwarten, da bTH' ggf. bei jeder kleinen Preisänderung handelt. Da aber teilweise nur marginale Anteile des Vermögens gehandelt werden, sind die hohen durchschnittlich gehandelten Volumen eher eine Überraschung. Bei den kompetitiven Algorithmen sinken die Ergebnisse von $MRPR'$ sowohl für fixe als auch für relative Transaktionskosten am geringsten. Somit erreicht die Vorgehensweise von $MRPR'$, nur bei großen Preisänderungen das gesamte Vermögen zu handeln, hinsichtlich der Transaktionskosten die besten Ergebnisse. $MRPR'$ erreicht zum Teil ebenfalls geringere Minderungen der durchschnittlichen Renditefaktoren als die Heuristiken. Es zeigt sich zudem, dass im Falle von exakten Preisschätzern nur die Ergebnisse von $bTH'(E)$ so stark sinken, dass die Heuristiken bessere Ergebnisse erzielen. $2RPP(E)$ und $MRPR'(E)$ dominieren die Heuristiken, auch wenn Transaktionskosten berücksichtigt werden.

Frage 4: Welchen Einfluss hat die Qualität der verwendeten Preisgrenzen auf den durchschnittlichen Renditefaktor der kompetitiven Algorithmen?

Die Qualität der Preisschätzer M und m entscheidet darüber, ob die kompetitiven Algorithmen die Heuristiken BH und MA hinsichtlich des Erwartungswertes sowie des Medians dominieren oder nicht. Mit steigender Abweichung von den exakten

Werten sinken sowohl der Erwartungswert als auch der Median für alle kompetitiven Algorithmen relativ stark. Allein $2RPP(H)$ erreicht für kleine T einen höheren Median als BH .

5.4.2 Fazit

Aus den Antworten zu den Fragestellungen ergibt sich, dass die kompetitiven Algorithmen die in der Praxis häufig verwendeten Heuristiken dominieren können. Dafür werden jedoch ausreichend genaue Abschätzungen von Zukunftsinformationen benötigt. Zudem zeigt sich, dass sich mit steigender Handelsdauer und durch die Berücksichtigung von Transaktionskosten die Ergebnisse von den kompetitiven Algorithmen zumeist stärker mindern als die der Heuristiken. Von den kompetitiven Algorithmen ist $2RPP$ hinsichtlich der Abweichungen der Preisschätzer von den exakten Werten am robustesten. Nachdem $2RPP$ sowohl theoretisch als auch empirisch evaluiert wurde, werden im nächsten Kapitel die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst.

6 Fazit und Ausblick

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und die Forschungsfragen abschließend diskutiert. Zudem wird ein Ausblick auf offene Fragestellungen, die noch zu beantworten sind, gegeben. Zunächst werden die wichtigsten Ergebnisse dieser Thesis kurz dargestellt:

1. Es wurde gezeigt, dass die kompetitive Analyse von Online-Conversion Algorithmen zu unterschiedlichen Worst-Case-Sequenzen und somit zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann, wenn diese entweder in Abhängigkeit von der Anzahl an Runs oder in der Abhängigkeit von der Anzahl an Zeitpunkten durchgeführt wird. Daher wird für die Algorithmen von Dannoura und Sakurai (1998), Mohr und Schmidt (2008a) und Schmidt (2017), die zur Lösung des bi-direktionalen und präemptiven bzw. nicht-präemptiven Conversion Problems dienen, erstmals die kompetitive Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten angegeben.
2. Es wurde ein Algorithmus vorgestellt, der für spezifische Parameter eine bessere kompetitive Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten erreicht als die kompetitiven bi-direktionalen Algorithmen in der Literatur.
3. Es wurde sowohl Ober- als auch Untergrenze der kompetitiven Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten für das bi-direktionale und präemptive Conversion Problem für gegebene konstante Preisgrenzen bestimmt. Die Untergrenze gibt an, dass kein Algorithmus eine niedrigere kompetitive Rate erreichen kann. Erreicht ein Algorithmus eine höhere kompetitive Rate als die Obergrenze, so ist dieser nicht optimal.
4. Die empirische Analyse zeigte zudem, dass, wenn die Abschätzung der verwendeten Preisgrenzen ausreichend genau ist, der vorgestellte Algorithmus in der Lage ist, ausgewählte Benchmarks zu dominieren.

6.1 Fazit

Da das Conversion Problem ein Handelsproblem ist, begann diese Arbeit mit einer Beschreibung des Börsenhandels. Dies diente der Darstellung des Kontextes, in dem die Conversion Algorithmen eingesetzt werden sollen. Da Handelsprobleme zu den Online-Problemen gehören, wurden zudem Methoden zur Evaluation von Online-Algorithmen vorgestellt. Dies umfasst sowohl die empirische als auch die theoretische Analyse. Im Anschluss wurde ein Überblick über die Conversion Literatur gegeben. Für die unterschiedlichen Ausprägungen des Conversion Problems wurde jeweils eine mathematische Darstellung gegeben. Auf Basis dieser wurden die verschiedenen Ausprägungen des Problems voneinander abgegrenzt und deren Beziehungen zueinander dargestellt. Der Überblick der Conversion-Algorithmen beinhaltet ausschließlich kompetitive Algorithmen, insbesondere diejenigen, die dieselben Zukunftsinformationen verwenden wie der in dieser Arbeit vorgestellte Algorithmus.

In Kapitel 4 wurde auf die Forschungsfrage 1 eingegangen. Dazu wurde ein Online-Algorithmus zur Lösung des bi-direktionalen und präemptiven Conversion Problems eingeführt. Die Zielsetzung war es, einen Algorithmus zu präsentieren, mit dem eine bessere kompetitive Rate erreicht wird als mit den bisher bekannten Algorithmen. Eine weitere Anforderung an den Algorithmus war es, diesen so zu gestalten, dass Transaktionskosten indirekt berücksichtigt werden. Der Algorithmus 2-Reservationspreis Politik ($2RPP$) definiert drei Preiskorridore. Gehandelt wird nur, wenn der aktuelle Preis in einem anderen Preiskorridor liegt als der vorhergehende Preis. Auf diese Weise sollen Transaktionskosten reduziert werden.

Für $2RPP$ wurde sowohl die kompetitive Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten als auch Runs bestimmt. Es wurde gezeigt, dass sich diese beiden kompetitive Raten nicht voneinander ableiten lassen. Ein Vergleich von $2RPP$ mit den Algorithmen aus der Literatur, welche die besten kompetitiven Raten in Abhängigkeit von Runs erreichen, zeigte, dass $2RPP$ nicht die beste kompetitive Rate in Abhängigkeit von Runs erreicht. Hingegen konnte für die kompetitive Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten gezeigt werden, dass $2RPP$ verglichen mit diesen Algorithmen für bestimmte Parameter die beste kompetitive Rate erreicht. Um diesen Vergleich zu ermöglichen, mussten zuvor für diese Algorithmen die kompetitive Raten in Abhängigkeit von Zeitpunkten ermittelt werden.

In Kapitel 5 wurde die zweite Forschungsfrage bearbeitet. Dazu wurden sowohl zwei kompetitive Algorithmen als auch zwei in der Praxis häufig verwendete Heuristiken

als Benchmarks verwendet. Das Ergebnis zeigte, dass *2RPP* für den Fall, dass die exakten Preisgrenzen im Voraus bekannt sind, die Heuristiken dominiert. Jedoch erreicht *2RPP* nicht die höchsten Ergebnisse der kompetitiven Algorithmen. Zudem wurde eine Methode zur Abschätzung der Preisgrenzen auf Basis historischer Daten von Mohr und Schmidt (2008a) verwendet. In diesem Fall konnte *2RPP* nur für spezifische Parameter signifikant höhere Ergebnisse erzielen als die Heuristiken. Die kompetitiven Algorithmen wurden hingegen dominiert. Zudem wurde gezeigt, dass *2RPP* durch Transaktionskosten einem stärkeren negativen Einfluss unterliegt als die beiden Heuristiken. Dies liegt daran, dass *2RPP* sowohl öfters als auch ein höheres Gesamtvolume handelt.

6.2 Ausblick

Es wurde gezeigt, dass *2RPP* für das bi-direktionale und präemptive Conversion Problem keinen optimalen Online-Algorithmus darstellt. Somit bleibt die Frage nach einem optimalen Online-Algorithmus für dieses Conversion Problem mit den entsprechenden Zukunftsinformationen weiterhin offen. Dies gilt sowohl für die kompetitive Rate in Abhängigkeit von Zeitpunkten, als auch von Runs.

Zur Bestimmung der Unter- und Obergrenze für das *P-BC* wurde der Algorithmus *EBA* vorgestellt. Für diesen Algorithmus wurde nicht die exakte kompetitive Rate ermittelt, sondern nur eine Obergrenze angegeben. Der Algorithmus *EBA* ist somit weiter zu untersuchen. Zudem gilt, dass *EBA* zumindest für ausgewählte Sequenzen den optimalen Online-Algorithmus darstellt. Hier ist zu untersuchen, ob dies auch für alle Sequenzen gilt.

Eine offene Fragestellung ist zudem die Auswirkung von Transaktionskosten auf die kompetitive Rate von Online-Algorithmen. Auch wenn einige Autoren Transaktionskosten indirekt berücksichtigen (vgl. Lorenz et al. 2009, Zhang et al. 2011 und Fung 2017), indem ihren Algorithmen eine maximale Anzahl an Transaktionen vorgegeben ist, stellt die Berücksichtigung von Transaktionskosten noch ein offenes Feld dar. Zudem ist zu analysieren, ob die optimalen Online-Algorithmen ihre Optimalität behalten, wenn Transaktionskosten berücksichtigt werden.

Die Literatur zu kompetitiven Conversion Algorithmen beschäftigt sich ausschließlich mit dem Fall, dass Leerverkäufe nicht erlaubt sind. Im Fall des uni-direktionalen Conversion Problems kann diese Nebenbedingung auch nicht aufgehoben werden. Jedoch kann das bi-direktionale Conversion Problem so umformuliert werden, dass

Leerverkäufe möglich sind. Dabei gilt jedoch zu beachten, dass in diesem Fall nur so investiert werden darf, dass das Endvermögen auch bei einer ungünstigen Preisentwicklung positiv bleibt, da sonst keine zulässige kompetitive Rate bestimmt werden kann.

Aus der empirischen Analyse in Kapitel 5 zeigt sich, dass kompetitive Algorithmen mit steigender Abweichung der Schätzer für die Preisgrenzen von den echten Preisgrenzen schlechtere Ergebnisse erzielt werden. Eine offene Frage ist daher, wie es möglich ist, die Preisgrenzen genau genug zu schätzen, um bessere Ergebnisse zu erzielen als die in der Praxis häufig verwendeten Heuristiken.

A Beweise

A.1 Kompetitive Rate von 2RPP

Theorem 2. Die kompetitive Rate $r(2RPP)_k$ von 2RPP in Abhängigkeit von k ist bei diskreter Preisentwicklung $\left(\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)^k$ für $k \geq 1$.

Beweis. Zunächst wird Analog zum Beweis von Lemma 5 die kompetitive Rate für $k = 1$ festgestellt.

(1) Feststellen der möglichen WC-Sequenzen:

Aufgrund von Lemma 4 müssen nur absteigende Runs betrachtet werden. Zudem ergibt sich aufgrund der Lemmata 1 und 2, dass zum Auffinden einer WC-Sequenz nur Sequenzen betrachtet werden müssen, die mit m enden und die nur Preise aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^2, M\}$ beinhalten. Daraus ergeben sich sechs Sequenzen, von denen mindestens eine eine WC-Sequenz für $k = 1$ darstellt. Diese sind: $\mathbf{q}_1 = M, q_{res}^2, q_{res}^1, m$; $\mathbf{q}_2 = q_{res}^2, q_{res}^1, m$; $\mathbf{q}_3 = M, q_{res}^1, m$; $\mathbf{q}_4 = M, q_{res}^2, m$; $\mathbf{q}_5 = q_{res}^1, m$ und $\mathbf{q}_6 = q_{res}^2, m$.

(2) Für die Sequenzen \mathbf{q}_i mit $i = 1, \dots, 6$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ berechnet:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = \frac{M}{m}, ON(\mathbf{q}_1) = \frac{M}{q_{res}^2} \cdot \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \frac{\frac{M}{m}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)};$$

$$\mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) = \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}, ON(\mathbf{q}_2) = \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = \frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}};$$

$$\mathbf{q}_3 : OPT(\mathbf{q}_3) = \frac{M}{m}, ON(\mathbf{q}_3) = \frac{M}{q_{res}^1} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}, \frac{OPT(\mathbf{q}_3)}{ON(\mathbf{q}_3)} = \frac{\frac{M}{m}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}};$$

$$\mathbf{q}_4 : OPT(\mathbf{q}_4) = \frac{M}{m}, ON(\mathbf{q}_4) = \frac{M}{q_{res}^2} \cdot \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot m} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} = \frac{\frac{M}{m}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)};$$

$$\mathbf{q}_5 : OPT(\mathbf{q}_5) = \frac{q_{res}^1}{m} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON(\mathbf{q}_5) = 1, \frac{OPT(\mathbf{q}_5)}{ON(\mathbf{q}_5)} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\mathbf{q}_6 : OPT(\mathbf{q}_6) = \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}, ON(\mathbf{q}_6) = \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot m} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{OPT(\mathbf{q}_6)}{ON(\mathbf{q}_6)} = \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}.$$

(3) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate gilt $r(2RPP)_{k=1} = \max \left\{ \frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)} \right\}, i = 1, \dots, 6$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ wird für $i = 1$ und $i = 2$ erreicht:

$$r(2RPP)_{k=1} = \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \frac{\frac{M}{m}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}. \quad (\text{A.1})$$

Aus der kompetitive Rate für $k = 1$ ergibt sich, analog zu Theorem 1, die kompetitive Rate für $k \geq 1$.

□

A.2 Eigenschaften von Worst-Case-Sequenzen von 2RPP

In diesem Abschnitt befinden sich die Beweise für die Lemmata 1 - 4 (vgl. Kapitel 4.3.1).

Lemma 1. Der letzte Preis q_T einer WC-Sequenz entspricht M oder m .

Beweis. Der Beweis wird per Widerspruch geführt. Für den Beweis des Lemmas sind nur die letzten beiden Zeitpunkte einer Sequenz von Relevanz. Daher werden nur Sequenzen mit $T = 2$ Zeitpunkten betrachtet. Die Untersuchung wird unterteilt in (1) der Preis fällt zwischen den letzten beiden Zeitpunkten und (2) der Preis steigt zwischen den letzten beiden Zeitpunkten.

(1) Der Preis fällt zum letzten Zeitpunkt:

(1.1) Festlegen der zu betrachtenden Sequenzen:

Es existiert dann eine zum letzten Zeitpunkt hin absteigende WC-Sequenz, die nicht mit m endet, wenn ein größerer Preis zu einem mindestens genauso großem Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ führt. Seien $\mathbf{q}_1 = q_1, q_2$ und $\mathbf{q}_2 = q_1, \tilde{q}_2$ Preissequenzen mit $q_{res}^2 \geq q_1 > q_2 > \tilde{q}_2$.

(1.2) Für die Sequenzen \mathbf{q}_i mit $i = 1, 2$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ berechnet:

$$\mathbf{q}_1 : OPT(\mathbf{q}_1) = \frac{q_1}{q_2}, ON(\mathbf{q}_1) = \frac{q_1}{q_2} \cdot (b_1 + 1 - b_1), \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} = \frac{\frac{q_1}{q_2}}{\frac{q_1}{q_2} \cdot b_1 + 1 - b_1};$$

$$\mathbf{q}_2 : OPT(\mathbf{q}_2) = \frac{q_1}{\tilde{q}_2}, ON(\mathbf{q}_2) = \frac{q_1}{\tilde{q}_2} \cdot (b_1 + 1 - b_1), \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} = \frac{\frac{q_1}{\tilde{q}_2}}{\frac{q_1}{\tilde{q}_2} \cdot b_1 + 1 - b_1}.$$

(1.3) Vergleich der Verhältnisse:

Wenn es eine WC-Sequenz gibt, die nicht mit m endet, muss es möglich sein, dass auf Sequenz \mathbf{q}_1 , die mit dem höheren Preis endet, das gleiche oder höhere Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht wird, wie bzw. als auf der Sequenz \mathbf{q}_2 . Es muss dann also gelten:

$$\begin{aligned} \frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} &\geq \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{q_1}{q_2}}{\frac{q_1}{q_2} \cdot b_1 + 1 - b_1} &\geq \frac{\frac{q_1}{\tilde{q}_2}}{\frac{q_1}{\tilde{q}_2} \cdot b_1 + 1 - b_1} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{q_1^2}{q_2 \cdot \tilde{q}_2} \cdot b_1 + \frac{q_1}{q_2} \cdot (1 - b_1)}{q_2} &\geq \frac{\frac{q_1^2}{q_2 \cdot \tilde{q}_2} \cdot b_1 + \frac{q_1}{\tilde{q}_2} \cdot (1 - b_1)}{\tilde{q}_2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{q_2} \cdot (1 - b_1) &\geq \frac{1}{\tilde{q}_2} \cdot (1 - b_1) \\ \Leftrightarrow q_2 &\leq \tilde{q}_2. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Dies verstößt gegen die Voraussetzung $q_2 > \tilde{q}_2$. Es ist zu beachten, dass gilt $1 - b_1 > 0$.

(1.4) Einordnung des Ergebnisses:

Aus Formel (A.2) folgt, dass eine fallende WC-Sequenz mit $q_{T-1} \leq q_{res}^2$ und $q_T > m$ keine WC-Sequenz darstellen kann. Gilt $q_{T-1} > q_{res}^2$ kann dies ebenfalls keine WC-Sequenz darstellen, da OPT und ON zum Zeitpunkt $T - 1$ die gleiche Vermögensaufteilung wählen und somit zum letzten Zeitpunkt ein Verhältnis $\frac{OPT}{ON} = 1$ erzielt wird. Daraus folgt, dass eine WC-Sequenz, die zum letzten Zeitpunkt hin fällt, mit dem Preis m endet.

(2) Der Preis steigt zum letzten Zeitpunkt:

(2.1) Festlegen der zu betrachtenden Sequenzen:

Analog zu (1.1) werden die Sequenzen $\mathbf{q}_3 = q_1, q_2$ und $\mathbf{q}_4 = q_1, \tilde{q}_2$ mit $q_{res}^1 < q_1 < q_2 < \tilde{q}_2$ betrachtet.

(2.2) Für die Sequenzen \mathbf{q}_i mit $i = 3, 4$ wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}_i)}{ON(\mathbf{q}_i)}$ berechnet:

$$\mathbf{q}_3 : OPT(\mathbf{q}_3) = 1, ON(\mathbf{q}_3) = \frac{q_1}{q_2} \cdot b_1 + 1 - b_1, \frac{OPT(\mathbf{q}_3)}{ON(\mathbf{q}_3)} = \frac{1}{\frac{q_1}{q_2} \cdot b_1 + 1 - b_1};$$

$$\mathbf{q}_4 : OPT(\mathbf{q}_4) = 1, ON(\mathbf{q}_4) = \frac{q_1}{\tilde{q}_2} \cdot b_1 + 1 - b_1, \frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} = \frac{1}{\frac{q_1}{\tilde{q}_2} \cdot b_1 + 1 - b_1}.$$

(2.3) Vergleich der Verhältnisse:

Wenn es eine WC-Sequenz gibt, die nicht mit M endet, muss es möglich sein, dass auf der Sequenz \mathbf{q}_3 , die mit dem niedrigeren Preis endet, das gleiche oder höhere Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erreicht wird wie bzw. als auf der Sequenz \mathbf{q}_4 . Es muss dann also gelten:

$$\begin{aligned} \frac{OPT(\mathbf{q}_3)}{ON(\mathbf{q}_3)} &\geq \frac{OPT(\mathbf{q}_4)}{ON(\mathbf{q}_4)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{q_1}{q_2} \cdot b_1 + 1 - b_1} &\geq \frac{1}{\frac{q_1}{\tilde{q}_2} \cdot b_1 + 1 - b_1} \\ \Leftrightarrow \frac{q_1}{\tilde{q}_2} \cdot b_1 + 1 - b_1 &\geq \frac{q_1}{q_2} \cdot b_1 + 1 - b_1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tilde{q}_2} \cdot b_1 &\geq \frac{1}{q_2} \cdot b_1 \\ \Leftrightarrow \tilde{q}_2 &\leq q_2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Dies verstößt gegen die Voraussetzung $q_2 < \tilde{q}_2$. Es ist zu beachten, dass gilt $b_1 > 0$.

(2.4) Einordnung des Ergebnisses:

Daraus folgt, dass eine steigende WC-Sequenz mit $q_{T-1} > q_{res}^1$ und $q_T < M$ keine WC-Sequenz darstellen kann. Gilt $q_{T-1} \leq q_{res}^1$ kann dies ebenfalls keine WC-Sequenz darstellen, da OPT und ON zum Zeitpunkt $T - 1$ die gleiche Vermögensaufteilung wählen und somit zum letzten Zeitpunkt ein Verhältnis $\frac{OPT}{ON} = 1$ erzielt wird. Daraus folgt, dass eine WC-Sequenz, die zum letzten Zeitpunkt hin steigt, mit dem Preis M endet.

(3) Zusammenführung der Ergebnisse:

Aus (1) und (2) folgt, dass der letzte Preis einer WC-Sequenz entweder M oder m ist. \square

Lemma 2. Bei diskreter Preisentwicklung beinhaltet mindestens eine WC-Sequenz nur Preise aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Beweis. Aus den Formeln (A.2) und (A.3) folgt, dass ein größerer Wert für $\frac{\max\{q_t, q_{t+1}\}}{\min\{q_t, q_{t+1}\}}$ zwischen zwei aufeinander folgenden Preisen zu einem größeren Verhältnis von $\frac{OPT}{ON}$ führt, sofern sich mit änderndem Preis nicht die Handelsentscheidung von ON ändert und sich diese von der von OPT unterscheidet. Sind OPT und ON gleich investiert, führt ein größerer Wert für $\frac{\max\{q_t, q_{t+1}\}}{\min\{q_t, q_{t+1}\}}$ zum gleichen Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$.

(1) Festlegen der zu betrachtenden Sequenzen:

Betrachtet wird eine Sequenz der Form $\mathbf{q} = q_t, q_{t+1}$ mit $q_{res}^i < q_t < q_{res}^{i+1}$ mit $i \in \{0, 1, 2\}$ und mit $q_{res}^0 = m$ sowie $q_{res}^3 = M$. Die Fälle $q_{t+1} > q_t$ und $q_{t+1} < q_t$ werden separat betrachtet.

(1.1) $q_{t+1} > q_t$:

In diesem Fall führt ein alternativer Preis $\tilde{q}_t = q_{res}^i + \epsilon$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ zu einem Verhältnis $\frac{q_{t+1}}{\tilde{q}_t} \geq \frac{q_{t+1}}{q_t}$. Die Handelsentscheidung von ON ändert sich dadurch nicht.

(1.2) $q_{t+1} < q_t$:

In diesem Fall führt ein alternativer Preis $\tilde{q}_t = q_{res}^{i+1}$ zu einem Verhältnis $\frac{\tilde{q}_t}{q_{t+1}} > \frac{q_t}{q_{t+1}}$. Die Handelsentscheidung von ON ändert sich dadurch nicht.

(2) Zusammenfassung der Ergebnisse:

Gilt für einen Preis $q_{res}^i < q_t < q_{res}^{i+1}$, wird mit einem alternativen Preis $\tilde{q}_t = q_{res}^i + \epsilon$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ bzw. $\tilde{q}_t = q_{res}^{i+1}$ ein größeres Verhältnis erreicht als $\frac{\max\{q_t, q_{t+1}\}}{\min\{q_t, q_{t+1}\}}$. Mit einem entsprechend größeren Verhältnis geht entweder ein gleich großes oder ein größeres Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ einher. Daraus folgt, dass mindestens eine WC-Sequenz nur Preise aus der im Lemma genannten Menge enthält.

\square

Lemma 3. Bei stetiger Preisentwicklung beinhaltet mindestens eine WC-Sequenz nur Runs die mit Preisen aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$ mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ beginnen und enden.

Beweis. Die Beweisführung basiert auf der Beweisführung von Lemma 2. Sei q_t der Preis mit dem ein Run beginnt und $q_{t'}$ der Preis mit dem dieser Run endet. Beginnt oder endet ein Run nicht mit einem Preis aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$, kann mit einem alternativen Preis ein größerer Wert für $\frac{\max\{q_t, q_{t'}\}}{\min\{q_t, q_{t'}\}}$ erreicht werden, ohne dass sich die Handelsentscheidung von ON ändert. Aus der Beweisführung von Lemma 2 folgt, dass ein größerer Wert $\frac{\max\{q_t, q_{t'}\}}{\min\{q_t, q_{t'}\}}$ nicht zu einem geringen Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ führen kann. Daraus folgt, dass im stetigen Fall mindestens eine WC-Sequenz nur Runs beinhaltet, die mit Preisen aus der Menge $\{m, q_{res}^1, q_{res}^1 + \epsilon, q_{res}^2, q_{res}^2 + \epsilon, M\}$ beginnen und enden. \square

A.3 Eigenschaften von Kehrsequenzen

Lemma 4. Angenommen, ON verwendet den Algorithmus 2RPP. Dann entspricht das Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q})}{ON(\mathbf{q})}$, das auf einer Preissequenz \mathbf{q} resultiert, dem Verhältnis $\frac{OPT(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}{ON(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}$, welches auf der Kehrsequenz $\mathbf{q}'(\mathbf{q})$ resultiert, wenn $\epsilon \rightarrow 0^+$ gilt.

Beweis. Formal beschrieben sagt das Lemma, dass für $\epsilon \rightarrow 0^+$ gilt: $\frac{OPT(\mathbf{q})}{ON(\mathbf{q})} = \frac{OPT(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}{ON(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}$. Der Algorithmus 2RPP ist so gestaltet, dass der Anteil des Vermögens b_t , der zum Preis q_t in Yen investiert wird, und der Anteil des Vermögens b'_t , der zum Kehrpreis q'_t in Yen investiert wird, sich zu 1 aufsummieren, d. h. $b_t + b'_t = 1$. Dies gilt jedoch nicht für Reservationspreise, da deren Kehrpreise ebenfalls Reservationspreise und somit den Wert der Intervallgrenze des nächst niedrigeren Intervalls darstellen. Für diese gilt somit $b_t + b'_t = 0,5$. Die Kehrpreise von Reservationspreisen werden daher gemäß Formel (4.6) um $\epsilon \rightarrow 0^+$ erhöht. Somit gilt auch dann $b_t + b'_t = 1$. Daher kann bei der Beweisführung o. B. d. A. eine Beschränkung auf Sequenzen ohne Reservationspreis erfolgen.

(1) Festlegen der zu untersuchenden Sequenzen:

Sei $\mathbf{q} = q_t, q_{t+1}$ eine Sequenz mit $q_t > q_{t+1}$ und $q_t, q_{t+1} \notin \{q_{res}^1, q_{res}^2\}$. Die Kehrsequenz ist dann $\mathbf{q}'(\mathbf{q}) = \frac{M \cdot m}{q_t}, \frac{M \cdot m}{q_{t+1}}$.

(2) Für die Sequenzen wird jeweils das Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ berechnet:

$$\mathbf{q} : OPT(\mathbf{q}) = \frac{q_t}{q_{t+1}}, ON(\mathbf{q}) = \frac{q_t}{q_{t+1}} \cdot b_t + 1 - b_t, \frac{OPT(\mathbf{q})}{ON(\mathbf{q})} = \frac{\frac{q_t}{q_{t+1}}}{\frac{q_t}{q_{t+1}} \cdot b_t + 1 - b_t};$$

$$\mathbf{q}'(\mathbf{q}) : OPT(\mathbf{q}'(\mathbf{q})) = 1, ON(\mathbf{q}'(\mathbf{q})) = \frac{\frac{M \cdot m}{q_t}}{\frac{M \cdot m}{q_{t+1}}} \cdot b'_t + 1 - b'_t, \frac{OPT(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}{ON(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))} = \frac{1}{\frac{\frac{M \cdot m}{q_t}}{\frac{M \cdot m}{q_{t+1}}} \cdot b'_t + 1 - b'_t}.$$

(3) Vergleich der Sequenzen:

Lemma 4 ist falsch, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \frac{OPT(\mathbf{q})}{ON(\mathbf{q})} &\neq \frac{OPT(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}{ON(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{q_t}{q_{t+1}}}{\frac{q_t}{q_{t+1}} \cdot b_t + 1 - b_t} &\neq \frac{1}{\frac{\frac{M \cdot m}{q_t}}{\frac{M \cdot m}{q_{t+1}}} \cdot b'_t + 1 - b'_t} \end{aligned}$$

Durch Substitution mit $b'_t = 1 - b_t$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\frac{q_t}{q_{t+1}} \cdot b_t + 1 - b_t}{\frac{q_t}{q_{t+1}}} &\neq \frac{\frac{M \cdot m}{q_t}}{\frac{q_t}{q_{t+1}}} \cdot (1 - b_t) + b_t \\ \Leftrightarrow \frac{q_t}{q_{t+1}} \cdot b_t + 1 - b_t &\neq \frac{q_t}{q_{t+1}} \cdot b_t + 1 - b_t \\ \Leftrightarrow 0 &\neq 0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Da Formel (A.4) falsch ist, folgt $\frac{OPT(\mathbf{q})}{ON(\mathbf{q})} = \frac{OPT(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}{ON(\mathbf{q}'(\mathbf{q}))}$. Für Sequenzen mit $q_t < q_{t+1}$ ist die Beweisführung analog.

(4) Einordnen des Ergebnisses:

Es wurde gezeigt, dass auf einer Sequenz bestehend aus $T = 2$ Preisen, das gleiche Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erzielt wird wie auf der entsprechenden Kehrsequenz. Da sich jede Sequenz in Teilsequenzen mit zwei Preisen zerlegen lässt, gilt dies ebenfalls für Sequenzen mit $T \geq 2$. \square

A.4 Feststellen der Maxima

Lemma 6:

Angenommen, es gilt $\frac{OPT(\mathbf{q}_1)}{ON(\mathbf{q}_1)} < \frac{OPT(\mathbf{q}_2)}{ON(\mathbf{q}_2)}$, dann muss gelten:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} && < \frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow & \frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} && < 2 \cdot \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} + 1 && < 0 \\
\Leftrightarrow & \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)^2 && < 0.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Da gilt $\frac{M}{m} > 1$, ist Formel (A.5) falsch. Daraus folgt, dass die Sequenz $\mathbf{q}_1 = q_{res}^2, M$ eine WC-Sequenz darstellt.

Lemma 8:

Für den Vergleich der Sequenzen \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 ist es ausreichend, nur die letzten beiden Zeitpunkte zu betrachten, da sich die beiden Sequenzen nur zu diesen unterscheiden. Somit sind die Teilsequenzen $\tilde{\mathbf{q}}_1 = q_{res}^2 + \epsilon, M$ und $\tilde{\mathbf{q}}_2 = q_{res}, m$ miteinander zu vergleichen. Diese wurden bereits in Lemma 6 miteinander verglichen, mit dem Ergebnis, dass auf der Teilsequenz $\tilde{\mathbf{q}}_1$ ein höheres Verhältnis $\frac{OPT}{ON}$ erzielt wird.

A.5 Alternativer Beweis für die kompetitive Rate von 2RPP

Im Folgenden wird sich auf eine Abbildung bezogen, welche die Fälle darstellt, die während der Beweisführung untersucht werden müssen. In dieser Abbildung repräsentieren durchgezogene Kanten unterschiedliche Runs. Der erste Run ist ein Y-Run, der zweite Run ein D-Run und der dritte Run ein Y-Run. Zusätzlich stellt die gestrichelte Kante den letzten Zeitpunkt q_T dar. Diese weitere Linie ist notwendig, da 2RPP keine Kenntnis über k besitzt und somit im zweiten Y-Run noch in Y investiert, obwohl am Ende des Runs alles in D investiert werden muss. Wird konvertiert wird dies durch zwei Knoten, die mit einem Pfeil verbunden sind, dargestellt. Der Ausgangsknoten gibt an, während welches Runs in Y investiert wird, während der Endknoten angibt, wann zurück in D konvertiert wird. Ist der Pfeil durchgezogen, konvertiert ON das gesamte Vermögen; ist der Pfeil gestrichelt, das halbe Vermögen.

Verfügt ein Ausgangsknoten über zwei ausgehende gestrichelte Pfeile, wird das gesamte Vermögen in Y konvertiert, aber auf zwei unterschiedlichen Runs jeweils teilweise zurück konvertiert. Verfügt ein Endknoten über zwei eingehende gestrichelte Pfeile, wird das gesamte Vermögen zurück in D konvertiert, welches zuvor auf zwei unterschiedlichen Runs jeweils teilweise in Y konvertiert wurde.

Lemma 9. Die kompetitive Rate $r(2RPP)_k = \left(\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right)^k$ ist erreichbar für DD-P-BC mit $q_{res}^1 = M^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}$ und $q_{res}^2 = M^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{1}{3}}$ für $k = 3$.

Beweis. (1) Konvertierungsmöglichkeiten für ON wenn $k = 3$:

ON kann während eines absteigenden D-Runs entweder nichts, die Hälfte seines Vermögens oder sein gesamtes Vermögen in Dollar konvertieren und auf einem ansteigenden Y-Run entweder nichts, die Hälfte seines Vermögens oder sein gesamtes Vermögen in Yen konvertieren. Für $k = 3$ Runs ergeben sich somit maximal $3^3 = 27$ Konvertierungsmöglichkeiten. Diese Zahl reduziert sich auf 14, da ON in einem Run nichts bzw. nicht alles konvertieren kann, wenn im Run zuvor nichts bzw. nicht alles konvertiert wurde. In Abbildung A.1 sind die 14 Möglichkeiten dargestellt.

(2) Worst-Case Rate $\frac{OPT_i}{ON_i}$ für jede Konvertierungsmöglichkeit ON_i :

$$ON_1 : OPT_1 \leq \frac{q_{res}^1}{m} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON_1 = 1, \frac{OPT_1}{ON_1} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$ON_2 : OPT_2 \leq \frac{q_{res}^1}{m} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON_2 \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{q_{res}^2}{M} = \\ \left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}, \frac{OPT_2}{ON_2} \leq \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}};$$

$$ON_3 : OPT_3 \leq \frac{q_{res}^1}{m} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON_3 \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot M} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \\ \frac{OPT_3}{ON_3} \leq \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}};$$

$$ON_4 : OPT_4 \leq \frac{M}{m}, ON_4 \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2} \right) = \left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\frac{\left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)}{\left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)}, \frac{OPT_4}{ON_4} \leq \frac{\frac{M}{m}}{\left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)};$$

$$ON_5 : OPT_5 \leq \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}, ON_5 \geq 1, \frac{OPT_5}{ON_5} \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}};$$

$$ON_6 : OPT_6 \leq \frac{M}{m}, ON_6 \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{q_{res}^2}{M} \cdot \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right), \frac{OPT_6}{ON_6} \leq$$

$$\frac{\frac{M}{m}}{\left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)};$$

$$ON_7 : OPT_7 \leq \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}, ON_7 \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{q_{res}^2}{M} = \left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}}, \frac{OPT_7}{ON_7} \leq \frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}}};$$

$$ON_8 : OPT_8 \leq \frac{M}{m}, ON_8 \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot q_{res}^1} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot M} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right), \frac{OPT_8}{ON_8} \leq$$

$$\frac{\frac{M}{m}}{\left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)};$$

$$ON_9 : OPT_9 \leq \frac{q_{res}^2}{m} = \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}, ON_9 \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot M} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{OPT_9}{ON_9} \leq \frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}};$$

$$ON_{10} : OPT_{10} \leq \frac{M}{q_{res}^2} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON_{10} \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{q_{res}^2}{M} = \\ \left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}, \frac{OPT_{10}}{ON_{10}} \leq \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}};$$

$$ON_{11} : OPT_{11} \leq \frac{q_{res}^2}{q_{res}^1} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON_{11} \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot M} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \\ \frac{OPT_{11}}{ON_{11}} \leq \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}};$$

$$ON_{12} : OPT_{12} \leq \frac{q_{res}^2}{q_{res}^1} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}, ON_{12} \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{q_{res}^2}{M} = \\ \left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}, \frac{OPT_{12}}{ON_{12}} \leq \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}};$$

$$ON_{13} : OPT_{13} \leq \frac{M}{q_{res}^1} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}, ON_{13} \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{q_{res}^2}{2 \cdot M} + \frac{1}{2}\right) = \\ \left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2, \frac{OPT_{13}}{ON_{13}} \leq \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2};$$

$$ON_{14} : OPT_{14} \leq \frac{M}{q_{res}^1} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}, ON_{14} \geq \left(\frac{q_{res}^1}{2 \cdot q_{res}^2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{q_{res}^2}{M} = \\ \left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}, \frac{OPT_{14}}{ON_{14}} \leq \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

(3) Feststellen des Maximums:

Für die kompetitive Rate gilt $r(2RPP)_{k=3} = \max\{\frac{OPT_i}{ON_i}\}, i = 1, \dots, 14$. Das maximale Verhältnis $\frac{OPT_i}{ON_i}$ wird für $i = 6$ erreicht:

$$\begin{aligned}
r(2RPP)_{k=3} &= \frac{OPT_6}{ON_6} \leq \frac{\frac{M}{m}}{\left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \\
&\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3} = \\
&\left(\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right)^3.
\end{aligned}
\tag{A.6}$$

□

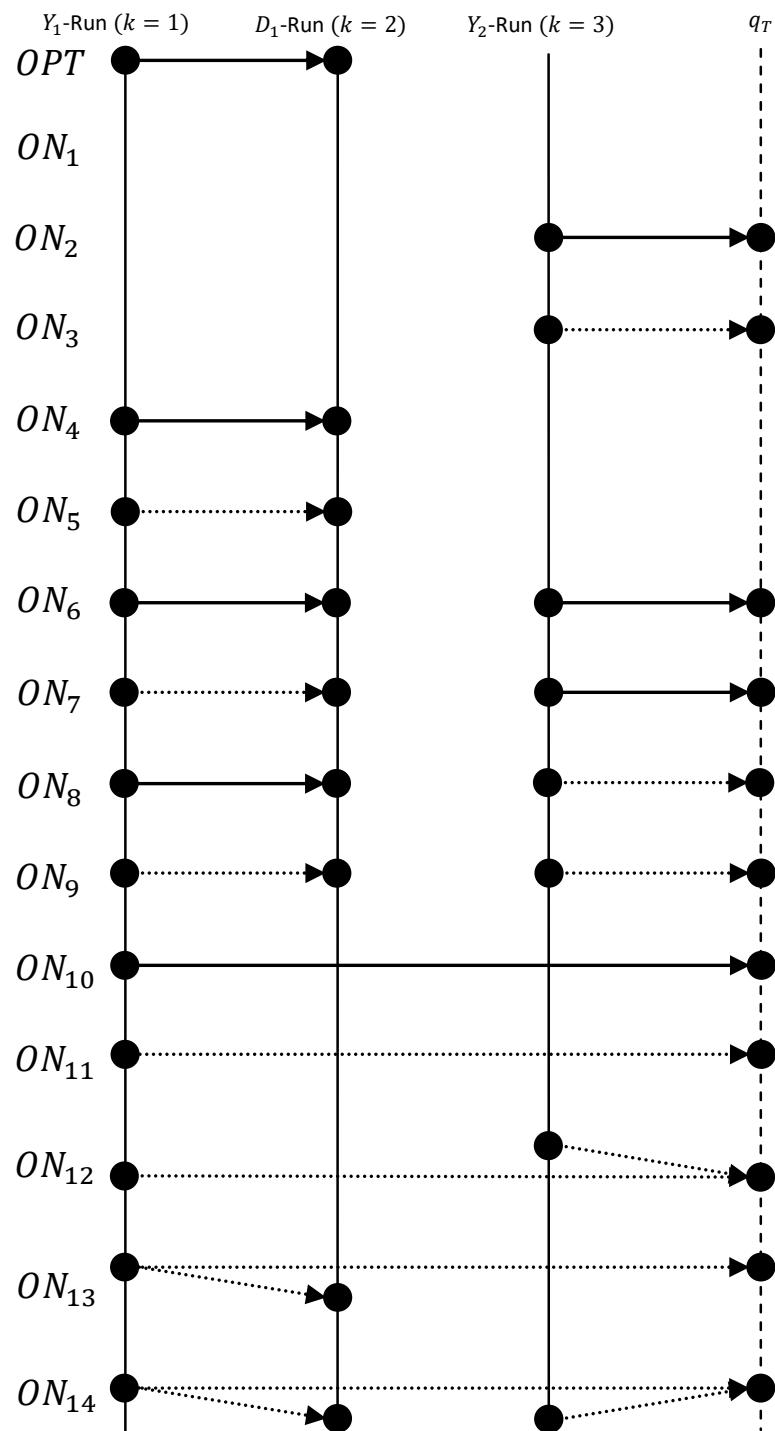


Abbildung A.1: Konvertierungsmöglichkeiten für *DD-P-BC* mit $k = 3$

B Empirische Analyse

B.1 Symbole der verwendeten Aktien

ADS, BAS, ALV, BAYN, BEI, BMW, CBK, CON, DAI, EOAN, FME, HEN, LIN, LHA, MRK, MUV2, PSM, RWE, SAP, SIE, TKA, VOW3, DTE, HEI, TGT, ADV, NDA, BWB, BSL, BIJ, GBF, BIO, BPE, COK, CSH, CEV, CWC, DBK, DEZ, GIL, DRI, DBAN, DUE, EOAN, ESY, ELG, EVT, FIE, FRE, FPE, G1A, GWI1, GSC1, GFK, GFT, HAB, HNR1, HAW, HDD, HEI, HEN, HOT, BOSS, INH, JEN, JUN3, SDF, SKB, KRN, KU2, LEO, MAN, MXHN, MUM, MEO, MLP, MGN, MUB, XMY, PFV, PNE3, PAH3, TPE, RTC, RHM, RHK, SZG, SGL, SNG, SZZ, SIX2, SOW, SWVK, SPM, SAZ, SZU, SMHN, TTR1, TUI1, UTDI, VIB3, VOS

B.2 Teststatistiken der Hypothesentests

Benchmark	$T = 10$	$T = 20$	$T = 63$	$T = 127$	$T = 254$
$MRPR'(E)$	-82,45	-53,93	-22,54	-13,36	-6,89
$bTH'(E)$	-36,36	-12,84	3,75	7,30	6,44
MA	126,88	90,52	48,53	34,07	15,95
BH	132,41	90,90	50,52	33,26	14,78
$MRPR'(H)$	9,01	9,33	9,85	10,22	4,61
$bTH'(H)$	10,04	8,84	8,41	7,76	6,06
MA	-1,37	-4,25	-6,04	-7,77	-7,17
BH	-2,16	-6,10	-5,82	-8,18	-7,97

Tabelle B.1: Teststatistiken Differenzentest (Ohne Transaktionskosten)

Benchmark	$T = 10$	$T = 20$	$T = 63$	$T = 127$	$T = 254$
$MRPR'(E)$	-87,98	-57,41	-24,42	-13,95	-7,89
$bTH'(E)$	-39,53	-14,23	4,61	8,60	7,11
MA	127,12	88,74	46,66	33,12	18,72
BH	128,09	87,98	47,39	31,99	19,25
$MRPR'(H)$	13,52	16,08	13,81	14,72	8,27
$bTH'(H)$	4,55	4,32	4,31	4,31	3,59
MA	19,66	9,42	-1,09	-4,81	-4,11
BH	21,07	10,94	3,63	-1,18	-2,85

Tabelle B.2: Teststatistiken Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test (Ohne Transaktionskosten)

Benchmark	$T = 10$	$T = 20$	$T = 63$	$T = 127$	$T = 254$
$MRPR'(E)$	-90,38	-61,12	-27,30	-17,52	-9,73
$bTH'(E)$	-41,30	-10,25	13,27	18,54	17,25
MA	120,51	85,84	45,91	32,18	14,85
BH	128,57	87,33	47,98	31,32	13,51
$MRPR'(H)$	1,98	3,65	6,08	7,41	2,64
$bTH'(H)$	8,05	13,41	18,37	18,53	16,51
MA	-4,31	-6,45	-7,23	-8,51	-7,62
BH	-2,34	-7,32	-6,99	-9,06	-8,55

Tabelle B.3: Teststatistiken Differenzentest (Relative Transaktionskosten)

Benchmark	$T = 10$	$T = 20$	$T = 63$	$T = 127$	$T = 254$
$MRPR'(E)$	-97,53	-65,94	-30,42	-18,74	-11,24
$bTH'(E)$	-45,84	-10,68	16,65	21,85	19,54
MA	122,72	85,71	44,90	31,90	17,81
BH	125,68	85,68	45,72	30,67	18,16
$MRPR'(H)$	5,27	9,56	9,79	11,78	6,19
$bTH'(H)$	1,99	10,61	16,57	17,59	16,27
MA	16,75	7,04	-2,37	-5,60	-4,62
BH	21,33	9,74	2,42	-2,18	-3,63

Tabelle B.4: Teststatistiken Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test (Relative Transaktionskosten)

Benchmark	$T = 10$	$T = 20$	$T = 63$	$T = 127$	$T = 254$
$MRPR'(E)$	-105,85	-73,28	-33,45	-22,03	-12,31
$bTH'(E)$	-16,77	15,47	38,99	43,14	39,06
MA	114,11	80,76	43,05	30,25	13,78
BH	121,86	82,16	45,01	29,41	12,42
$MRPR'(H)$	-13,67	-6,32	1,07	4,06	0,61
$bTH'(H)$	42,38	49,06	55,06	55,49	49,12
MA	-9,26	-9,70	-8,81	-9,50	-8,22
BH	-7,71	-11,00	-8,82	-10,19	-9,17

Tabelle B.5: Teststatistiken Differenzentest (Fixe Transaktionskosten)

Benchmark	$T = 10$	$T = 20$	$T = 63$	$T = 127$	$T = 254$
$MRPR'(E)$	-113,18	-78,54	-37,64	-23,74	-14,33
$bTH'(E)$	-12,64	22,69	42,75	39,79	31,37
MA	117,59	82,00	42,84	30,59	16,85
BH	120,69	81,89	43,60	29,24	17,15
$MRPR'(H)$	-15,07	-2,47	4,19	8,04	3,82
$bTH'(H)$	55,36	59,07	53,02	44,74	33,41
MA	10,70	2,89	-4,21	-6,74	-5,39
BH	15,27	5,46	0,36	-3,59	-4,52

Tabelle B.6: Teststatistiken Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test (Fixe Transaktionskosten)

Literatur

- Agarwal, A., Hazan, E., Kale, S. und Schapire, R. E. (2006). Algorithms for portfolio management based on the Newton method. In: *Proceedings of International Conference on Machine Learning*, S. 9–16.
- Akbar, M. und Baig, H. H. (2010). Reaction of Stock Prices to Dividend Announcements and Market Efficiency in Pakistan. *The Lahore Journal of Economics*, 15(1), S. 103–125.
- Albers, S. (2003). Online algorithms: a survey. *Mathematical Programming*, 97(1-2), S. 3–26.
- al-Binali, S. (1999). A Risk-Reward Framework for the Competitive Analysis of Financial Games. *Algorithmica*, 25(1), S. 99–115.
- Aldridge, I. (2010). *High-Frequency Trading*. Wiley Trading, New Jersey.
- Al-Jafari, M. K. und Abdulkadhim Altaee, H. H. (2011). Testing the random walk behavior and efficiency of the Egyptian equity market. *Journal of Money, Investment and Banking*, 22, S. 132–146.
- Almgren, R. F. und Chriss, N. (2001). Optimal Execution of Portfolio Transactions. *Journal of Risk*, 3(2), S. 5–39.
- Avramov, D., Chordia, T., Jostova, G. und Philipov, A. (2007). Momentum and Credit Rating. *The Journal of Finance*, 62(5), S. 2503–2520.
- Balvers, R., Wu, Y. und Gilliland, E. (2000). Mean Reversion across National Stock Markets and Parametric Contrarian Investment Strategies. *The Journal of Finance*, 55(2), S. 745–772.
- Ben-David, S. und Borodin, A. (1994). A New Measure for the Study of On-Line Algorithms. *Algorithmica*, 11(1), S. 73–91.
- Ben-David, S., Borodin, A., Karp, R. M., Tardos, G. und Wigderson, A. (1994). On the power of randomization in on-line algorithms. *Algorithmica*, 11(1), S. 2–14.
- Berutich, J. M., López, F., Luna, F. und Quintana, D. (2016). Robust technical trading strategies using GP for algorithmic portfolio selection. *Expert Systems with Applications*, 46(1), S. 307–315.

- Bessembinder, H. und Chan, K. (1995). The profitability of technical trading rules in the Asian stock markets. *Pacific-Basin Finance Journal*, 3(2-3), S. 257–284.
- Bessembinder, H. und Kaufman, H. M. (1998). Trading Costs and Volatility for Technology Stocks. *Financial Analysts Journal*, 54(5), S. 64–71.
- Black, F. und Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), S. 637–654.
- Bokhari, J., Cai, C., Hudson, R. und Keasey, K. (2005). The predictive ability and profitability of technical trading rules: does company size matter? *Economics Letters*, 86(1), S. 21–27.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), S. 307–327.
- Borodin, A. und El-Yaniv, R. (1998). *Online computation and competitive analysis*. Cambridge University Press, New York.
- Borodin, A., El-Yaniv, R. und Gogan, V. (2004). Can We Learn to Beat the Best Stock. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 21, S. 579–594.
- Bortz, J. (2005). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 6. Auflage. Springer, Heidelberg.
- Bourier, G. (2013). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik*. 8. Auflage. Springer, Wiesbaden.
- Boyar, J. und Favrholdt, L. M. (2007). The Relative Worst Order Ratio for Online Algorithms. *ACM Transactions on Algorithms*, 3(2). 22.
- Brock, W., Lakonishok, J. und LeBaron, B. (1992). Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Return. *Journal of Finance*, 47(5), S. 1732–1764.
- Büning, H. und Trenkler, G. (1994). *Nichtparametrische statistische Methoden*. 2. Auflage. DeGruyter, Berlin, New York.
- Campbell, J. Y., Grossman, S. J. und Wang, J. (1993). Trading Volume and Serial Correlation in Stock Returns. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(4), S. 905–939.
- Chang, E. J., Lima, E. J. A. und Tabak, B. M. (2004). Testing for predictability in emerging equity markets. *Emerging Markets Review*, 5(3), S. 295–316.
- Chang, P.-C., Liao, T. W., Lina, J.-J. und Fan, C.-Y. (2011). A dynamic threshold decision system for stock trading signal detection. *Applied Soft Computing*, 11, S. 3998–4010.

- Chen, G.-H., Kao, M.-Y., Lyuu, Y.-D. und Wong, H.-K. (2001). Optimal buy-and-hold strategies for financial markets with bounded daily returns. *SIAM Journal on Computing*, 37(2), S. 447–459.
- Chou, A., Cooperstock, J., El-Yaniv, R., Klugerman, M. und Leighton, T. (1995). The Statistical Adversary Allows Optimal Money-Making Trading Strategies. In: *Proceedings of the Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. Bd. 95, S. 467–476.
- Chua, C. T., Koh, W. T. H. und Ramaswamy, K. (2006). Profiting from Mean-Reverting Yield Curve Trading Strategies. *The Journal of Fixed Income*, 15(4), S. 20–33.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer, London.
- Cooney, J. W. und Sias, R. W. (2004). Informed trading and order type. *Journal of Banking & Finance*, 28(7), S. 1711–1743.
- Cover, T. M. (1991). Universal Portfolios. *Mathematical Finance*, 1(1), S. 1–29.
- Cox, J. C., Ross, S. A. und Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), S. 229–263.
- Damaschke, P., Ha, P. H. und Tsigas, P. (2009). Online Search with Time-Varying Price Bounds. *Algorithmica*, 55(4), S. 619–642.
- Dannoura, E. und Sakurai, K. (1998). An improvement on El-Yaniv-Fiat-Karp-Turpin’s money-making bi-directional trading strategy. *Information Processing Letters*, 66(1), S. 27–33.
- De Bondt, W. F. M. und Thaler, R. (1985). Does the Stock Market Overreact? *The Journal of Finance*, 40(3), S. 793–805.
- Dochow, R. (2016). *Online Algorithms for the Portfolio Selection Problem*. Springer Gabler, Wiesbaden.
- Dorfleitner, G. und Klein, C. (2002). Kursprognose mit Hilfe der technischen Analyse – eine empirische Untersuchung. *Financial Markets and Portfolio Management*, 16(4), S. 497–521.
- Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1), S. 1–26.
- Ellis, C. A. und Parbery, S. A. (2005). Is smarter better? A comparison of adaptive, and simple moving average trading strategies. *Research in International Business and Finance*, 19(3), S. 399–411.

- El-Yaniv, R., Fiat, A., Karp, R. M. und Turpin, G. (1992). Competitive analysis of financial games. In: *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, S. 327–333.
- El-Yaniv, R. (1998). Competitive solutions for online financial problems. *ACM Computing Surveys*, 30(1), S. 28–69.
- El-Yaniv, R., Fiat, A., Karp, R. M. und Turpin, G. (2001). Optimal Search and One-Way Trading Online Algorithms. *Algorithmica*, 30(1), S. 101–139.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), S. 987–1007.
- Fang, J., Jacobsen, B. und Qin, Y. (2014). Predictability of the simple technical trading rules: An out-of-sample test. *Review of Financial Economics*, 23(1), S. 30–45.
- Fiat, A. und Woeginger, G. J. (1998). Competitive Analysis of Algorithms. In: *Lecture Notes in Computer Science*. Bd. 1442, hrsg. von A. Fiat und G. J. Woeginger. Springer. Kapitel 1, S. 1–12.
- Forner, C. und Marhuenda, J. (2003). Contrarian and Momentum Strategies in the Spanish Stock Market. *European Financial Management*, 9(1), S. 67–88.
- Fourer, R., Gay, D. M. und Kernighan, B. W. (1990). A Modeling Language for Mathematical Programming. *Management Science*, 36(5), S. 519–554.
- Fujiwara, H., Iwama, K. und Sekiguchi, Y. (2011). Average-case competitive analyses for one-way trading. *Journal of Combinatorial Optimization*, 21(1), S. 83–107.
- Fung, S. P. Y. (2017). Optimal Online Two-Way Trading with Bounded Number of Transactions. In: *Computing and Combinatorics. COCOON 2017*, hrsg. von Y. Cao und J. Chen. Lecture Notes in Computer Science 10392, S. 212–223.
- Gençay, R. (1998a). Optimization of technical trading strategies and the profitability in security markets. *Economics Letters*, 59(2), S. 249–254.
- Gençay, R. (1998b). The predictability of security returns with simple technical trading rules. *Journal of Empirical Finance*, 5(4), S. 347–359.
- Gibbons, M. R., Ross, S. A. und Shanken, J. (1989). A Test of Efficiency of a Given Portfolio. *Econometrica*, 57(5), S. 1121–1152.
- Gomber, P. und Schweickert, U. (2002). Der Market Impact: Liquidität im elektronischen Wertpapierhandel. *Die Bank*, 7, S. 485–489.
- Gunasekaranage, A. und Power, D. M. (2001). The profitability of moving average trading rules in South Asian stock markets. *Emerging Markets Review*, 2(1), S. 17–33.

- Hadavandi, E., Shavandi, H. und Ghanbari, A. (2010). Integration of genetic fuzzy systems and artificial neural networks for stock price forecasting. *Knowledge-Based Systems*, 23(8), S. 800–808.
- Handa, P. und Schwartz, R. A. (1996). Limit Order Trading. *The Journal of Finance*, 51(5), S. 1835–1861.
- Harris, L. (2003). *Trading and Exchanges*. Oxford University Press, New York.
- Hasbrouck, J. (1990). Security Markets, Information and Liquidity. *Finanzmarkt und Portfolio Management*, 4(3), S. 230–242.
- Hazan, E. und Kale, S. (2015). An online portfolio selection algorithm with regret logarithmic in price variation. *Mathematical Finance*, 25(2), S. 288–310.
- Hejase, A. J., Srour, R. M., Hejase, H. J. und Younis, J. (2017). Technical Analysis: Exploring MACD in the Lebanese Stock Market. *Journal of Research in Business, Economics and Management*, 8(4), S. 1493–1502.
- Helmbold, D. P., Schapire, R. E., Singer, Y. und Warmuth, M. K. (1998). On-Line Portfolio Selection Using Multiplicative Updates. *Mathematical Finance*, 8(4), S. 325–347.
- Horst, R. und Tuy, H. (1996). *Global Optimization: Deterministic Approaches*. 3. Auflage. Springer, Berlin.
- Hsu, P.-H., Taylor, M. P. und Wang, Z. (2016). Technical trading: Is it still beating the foreign exchange market? *Journal of International Economics*, 102, S. 188–208.
- Hu, S., Guo, Q. und Li, H. (2005). Competitive Analysis of On-line Securities Investment. In: *Proceedings of the First International Conference on Algorithmic Applications in Management*. Bd. 3521, hrsg. von N. Megiddo, Y. Xu und B. Zhu. Springer, S. 224–232.
- Hudson, R., Dempsey, M. und Keasey, K. (1996). A note on the weak form efficiency of capital markets: The application of simple technical trading rules to UK stock prices - 1935 to 1994. *Journal of Banking and Finance*, 20(6), S. 1121–1132.
- Ito, A. (1999). Profits on technical trading rules and time-varying expected returns: Evidence from Pacific-Basin equity markets. *Pacific-Basin Finance Journal*, 7(3-4), S. 283–330.
- Jarque, C. M. und Bera, A. K. (1980). Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals. *Economics Letters*, 6(3), S. 255–259.

- Karp, R. M. (1992). On-line algorithms versus off-line algorithms: how much is it worth to know the future? In: *Proceedings of the IFIP Twelfth World Computer Congress*, S. 416–429.
- Kazem, A., Sharifi, E., Hussain, F. K., Saberi, M. und Hussain, O. K. (2013). Support vector regression with chaos-based firefly algorithm for stock market price forecasting. *Applied Soft Computing*, 13(2), S. 947–958.
- Kenyon, C. (1996). Best-Fit Bin-Packing with Random Order. In: *Proceedings of the seventh annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, S. 359–364.
- Kersch, M. (2014). Evaluation von Trading-Algorithmen unter realen Marktbedingungen: Ansätze zur praktischen Anwendbarkeit, Anforderungen, Implementierung. Diss. Universität des Saarlandes.
- Kersch, M. und Schmidt, G. (2011). Survey of Trading Systems for Individual Investors. In: *Information Systems for Global Financial Markets: Emerging Developments and Effects*, hrsg. von A. Y. Yap. IGI Global. Kapitel 8, S. 157–175.
- Kissel, R. (2006). The Expanded Implementation Shortfall: Understanding Transaction Cost Components. *The Journal of Trading*, 1(3), S. 6–16.
- Kissell, R. und Malamut, R. (2005). Understanding the Profit and Loss Distribution of Trading Algorithms. *Institutional Investor, Guide to Algorithmic Trading*, S. 41–49.
- Kivinen, J. und Warmuth, M. K. (1997). Exponentiated Gradient versus Gradient Descent for Linear Predictors. *Information and Computation*, 132(1), S. 1–63.
- Koutsoupias, E. und Papadimitriou, C. H. (2000). Beyond Competitive Analysis. *SIAM Journal on Computing*, 30(1), S. 300–317.
- Kresta, A. und Franek, J. (2015). Analysis of moving average rules applicability in Czech stock market. *Procedia Economics and Finance*, 30, S. 364–371.
- LeBaron, B. (1999). Technical trading rule profitability and foreign exchange intervention. *Journal of International Economics*, 49, S. 125–143.
- Lehn, J. und Wegmann, H. (2006). *Einführung in die Statistik*. 5. Auflage. Teubner, Wiesbaden.
- Li, B. und Hoi, S. C. H. (2014). Online Portfolio Selection: A Survey. *ACM Computing Surveys*, 46(3). 35.
- Li, B., Zhao, P., Hoi, S. C. H. und Gopalkrishnan, V. (2012). PAMR: Passive aggressive mean reversion strategy for portfolio selection. *Machine Learning*, 87(2), S. 221–258.

- Lippman, S. A. und McCall, J. J. (1981). The economics of uncertainty: Selected topics and probabilistic methods. In: *Handbook of Mathematical Economics*. Bd. 1, hrsg. von K. J. Arrow und M. D. Intriligator. North-Holland. Kapitel 6, S. 211–284.
- Lo, A. W. und MacKinlay, A. C. (1988). Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test. *The Review of Financial Studies*, 1(1), S. 41–66.
- Lorenz, J., Panagiotou, K. und Steger, A. (2009). Optimal Algorithms for k-Search with Application in Option Pricing. *Algorithmica*, 55(2), S. 311–328.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), S. 77–91.
- Mills, T. C. (1997). Technical Analysis and the London Stock Exchange: Testing Trading Rules Using the FT30. *International Journal of Finance & Economics*, 2(4), S. 319–331.
- Ming-Ming, L. und Siok-Hwa, L. (2006). The profitability of the simple moving averages and trading range breakout in the Asian stock markets. *Journal of Asian Economics*, 17(1), S. 144–170.
- Mittag, H.-J. (2017). *Statistik: Eine Einführung mit interaktiven Elementen*. 5. Auflage. Springer, Heidelberg.
- Mohr, E. (2011). Online Algorithms for Conversion Problems. Diss. Universität des Saarlandes.
- Mohr, E. (2014). Optimal Search with Bounded Daily Returns. In: *Proceedings of the IEEE International conference on control, decision and information technologies (CoDIT)*, hrsg. von I. Kacem, P. Laroche und Z. Róka, S. 231–235.
- Mohr, E., Ahmad, I. und Schmidt, G. (2014). Online algorithms for conversion problems: A survey. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 19(2), S. 87–104.
- Mohr, E. und Schmidt, G. (2008a). Empirical Analysis of an Online Algorithm for Multiple Trading Problems. In: *Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences*, hrsg. von H. Le Thi, P. Bouvry und T. P. Dinh. Communications in Computer and Information Science 14. Springer, Berlin Heidelberg, S. 293–302.
- Mohr, E. und Schmidt, G. (2008b). Trading in Financial Markets with Online Algorithms. In: *Operations Research Proceedings 2008*, hrsg. von B. Fleischmann, K.-H. Borgwardt, R. Klein und A. Tuma, S. 33–38.
- Mohr, E. und Schmidt, G. (2013). How much is it worth to know the future in online conversion problems? *Discrete Applied Mathematics*, 161(10), S. 1546–1555.

- Mostafa, M. M. (2010). Forecasting stock exchange movements using neural networks: Empirical evidence from Kuwait. *Expert Systems with Applications*, 37(9), S. 6302–6309.
- Motwani, R. und Raghavan, P. (1995). *Randomized Algorithms*. Cambridge University Press, New York.
- Narayan, P. K., Ahmed, H. A. und Narayan, S. (2014). Do Momentum-Based Trading Strategies Work in the Commodity Futures Markets? *The Journal of Future Markets*, 35(9), S. 868–891.
- Naved, M. und Srivastava, P. (2015). The Profitability of Five Popular Variations of Moving Averages on Indian Market Index S & P CNX Nifty 50 During January 2004–December 2014. *Advances in Economics and Business Management*, 2(1), S. 27–32.
- Neusser, K. (2011). *Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
- Newmyvaka, Y., Kearns, M., Papandreou, A. und Sycara, K. (2005). Electronic trading in order-driven markets: efficient execution. In: *Seventh IEEE International Conference on E-Commerce Technology (CEC'05)*, S. 190–197.
- Ni, J. und Zhang, C. (2005). An Efficient Implementation of the Backtesting of Trading Strategies. In: *Parallel and Distributed Processing and Applications. ISPA 2005. Lecture Notes in Computer Science*, Bd. 3758, hrsg. von Y. Pan, D. Chen, M. Guo, J. Cao und J. Dongarra, S. 126–131.
- Nwidobie, B. M. (2014). The random walk theory: an empirical test in the Nigerian capital market. *Asian Economic and Financial Review*, 4(12), S. 1840–1848.
- Obizhaeva, A. A. und Wang, J. (2013). Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. *Journal of Financial Markets*, 16(1), S. 1–32.
- O’Hara, M. (2015). High frequency market microstructure. *Journal of Financial Economics*, 116(2), S. 257–270.
- O. V. (2015). *Xetra Release 16.0 - Marktmodell Aktien*. URL: <http://www.xetra.com/blob/1208450/fa7176cf8615dc7c24877ada8c22bdf3/data/Marktmodell-aktien.pdf>.
- Papailias, F. und Thomakos, D. D. (2015). An improved moving average technical trading rule. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 428, S. 458–469.
- Poterba, J. M. und Summers, L. H. (1988). Mean Reversion in Stock Returns: Evidence and Implications. *Journal of Financial Economics*, 22(1), S. 27–59.

- Rachev, S. T., Hoechstoetter, M., Fabozzi, F. J. und Focardi, S. M. (2010). *Probability and Statistics for Finance*. Bd. 176. Wiley, New Jersey.
- Rader, D. J. (2010). *Deterministic Operations Research: Models and Methods in Linear Optimization*. Wiley, New Jersey.
- Raghavan, P. (1992). A statistical adversary for on-line algorithms. In: *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. Bd. 7, S. 79–83.
- Ratner, M. und Leal, R. P. (1999). Tests of technical trading strategies in the emerging equity markets of Latin America and Asia. *Journal of Banking & Finance*, 23(12), S. 1887–1905.
- Said, A. und Harper, A. H. (2015). The Efficiency of the Russian Stock Market: A Revisit of the Random Walk Hypothesis. *Academy of Accounting and Financial Studies Journal*, 19(1), S. 42–48.
- Schlittgen, R. (2008). *Einführung in die Statistik: Analyse und Modellierung von Daten*. Oldenbourg, München.
- Schmidt, G. (2017). Competitive analysis of bi-directional non-preemptive conversion. *Journal of Combinatorial Optimization*, 34(4), S. 1096–1113.
- Schmidt, G., Mohr, E. und Kersch, M. (2010). Experimental Analysis of an Online Trading Algorithm. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36, S. 519–526.
- Schmidt, H. (1988). *Wertpapierbörsen - Strukturprinzip, Organisation, Kassa- und Terminmärkte*. Vahlen, München.
- Schroeder, P., Dochow, R. und Schmidt, G. (2015). Conversion algorithms with a reward function and interrelated conversion rates. In: *Proceedings of the 45th International Conference on Computers and Industrial Engineering 2015*, S. 536–543.
- Schroeder, P., Schmidt, G. und Kacem, I. (2016). Optimal on-line algorithms for bi-directional nonpreemptive conversion with interrelated conversion rates. In: *2016 International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, S. 28–33.
- Schulmeister, S. (2009). Profitability of technical stock trading: Has it moved from daily to intraday data? *Review of Financial Economics*, 18, S. 190–201.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), S. 119–138.
- Sleator, D. D. und Tarjan, R. E. (1985). Amortized Efficiency of List Update and Paging Rules. *Communications of the ACM*, 28(2), S. 202–208.

- Strobel, M. und Auer, B. R. (2018). Does the predictive power of variable moving average rules vanish over time and can we explain such tendencies? *International Review of Economics and Finance*, 53, S. 168–184.
- Tabak, B. M. und Lima, E. J. (2009). Market efficiency of Brazilian exchange rate: Evidence from variance ratio statistics and technical trading rules. *European Journal of Operational Research*, 194(3), S. 814–820.
- Teixeira, L. A. und de Oliveira, A. L. I. (2010). A method for automatic stock trading combining technical analysis and nearest neighbor classification. *Expert Systems with Applications*, 37, S. 6885–6890.
- Teschl, G. und Teschl, S. (2006). *Mathematik für Informatiker: Band 2: Analysis und Statistik*. Springer, Berlin.
- Treynor, J. L. (1965). How to rate management investment funds. *Harvard Business Review*, 43(1), S. 63–75.
- Tsang, E. (1993). *Foundations of Constraint Satisfaction: The Classic Text*. Academic Press, London.
- Vweinhardt, J., Streimikiene, D., Rizwan, A. R., Nawaz, A. und Rehman, A. (2016). Mean reversion: an investigation from Karachi stock exchange sectors. *Technological and Economic Development of Economy*, 22(4), S. 493–511.
- Wagner, W. H. und Edwards, M. (1993). Best Execution. *Financial Analysts Journal*, 49(1), S. 65–71.
- Wang, F., Yu, P. L. H. und Cheung, D. W. (2014). Combining technical trading rules using particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 41(6), S. 3016–3026.
- Wang, J., Zhang, D. und Zhang, J. (2015). Mean reversion in stock prices of seven Asian stock markets: Unit root test and stationary test with Fourier functions. *International Review of Economics and Finance*, 37, S. 157–164.
- Wang, W., Wang, L., Lan, Y. und Zhang, J. X. (2016). Competitive difference analysis of the one-way trading problem with limited information. *European Journal of Operational Research*, 252(3), S. 879–887.
- Xu, Y., Zhang, W. und Zheng, F. (2011). Optimal algorithms for the online time series search problem. *Theoretical Computer Science*, 412(3), S. 192–197.
- Yu, H., Nartea, G. V., Gan, C. und Yao, L. J. (2013). Predictive ability and profitability of simple technical trading rules: Recent evidence from Southeast Asian stock markets. *International Review of Economics and Finance*, 25, S. 356–371.

- Zantow, R. und Dinauer, J. (2011). *Finanzwirtschaft des Unternehmens: die Grundlagen des modernen Finanzmanagements*. 3. Auflage. Pearson, München.
- Zhang, W., Xu, Y., Zheng, F. und Dong, Y. (2012a). Online algorithms for the multiple time series search problem. *Computers & Operations Research*, 39(5), S. 929–938.
- Zhang, W., Xu, Y., Zheng, F. und Dong, Y. (2012b). Optimal algorithms for online time series search and one-way trading with interrelated prices. *Journal of combinatorial optimization*, 23(2), S. 159–166.
- Zhang, W., Xu, Y., Zheng, F. und Liu, M. (2011). Online algorithms for the general k-search problem. *Information Processing Letters*, 111(14), S. 678–682.