

**Gebietszerlegungsverfahren zur Diskretisierung der
vektoriellen Helmholtz-Gleichung**

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Ingenieurwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von

Oliver Floch

Saarbrücken

2017

Tag des Kolloquiums: 18.04.2018

Dekan: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Guido Kickelbick

Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. Alfred .K. Louis

Vorsitz: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Michael Möller

Akademischer Mitarbeiter: Dr. rer. nat. Tilman Sauerwald

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei meiner Frau, Jacqueline Floch, bedanken. Sie hat durch ihre weitreichende Unterstützung, Fürsorge und Geduld maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Weiterhin gebührt mein besonderer Dank meinem Doktorvater, Herr Univ.-Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger, der mir die Bearbeitung dieses hochspannenden Themas ermöglicht hat. Nicht nur seine zahlreichen fachlichen Anregungen und seine ständige Diskussionsbereitschaft bei diversen wissenschaftlichen Fragestellungen, sondern auch seine inspirierende und ansteckende Begeisterung für die Thematik weiß ich sehr zu schätzen. Darüber hinaus möchte ich mich bei Herrn Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. A.K. Louis für sein Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Koreferats bedanken. Von genauso besonderer Wichtigkeit ist es mir zu erwähnen, dass ohne die fachliche Kompetenz und die unermüdliche Hilfsbereitschaft von PD Dr.-Ing. habil. Ortwin Farle die Arbeit wohl in dieser Form nicht zustande gekommen wäre. Dafür möchte ich dir herzlichst danken, Ortwin. Außerdem danke ich den aktuellen und ehemaligen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Theoretische Elektrotechnik für das hervorragende Arbeitsklima, die anregenden Diskussionen und die ausgezeichnete Teamarbeit. Die Zeit mit ihnen habe ich nicht nur aus fachlicher, sondern ebenso aus persönlicher Sicht als sehr wertvoll empfunden. Abschließend gebührt mein besonderer Dank meinen Eltern Stefanie und Joachim Floch.

D

Kurzfassung

Die Methode der finiten Elemente (FE) ist ein weit verbreitetes Werkzeug zur Simulation elektromagnetischer Strukturen im Frequenzbereich. Der numerische Aufwand zur direkten Lösung des resultierenden Gleichungssystems steigt jedoch signifikant mit zunehmender elektrischer Größe der zugrundeliegenden Struktur, so dass der Übergang zu iterativen Lösungsstrategien unabdingbar wird. Für diese ist die Verfügbarkeit effizienter Vorkonditionierer von höchster Bedeutung.

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der iterativen Lösung des aus der FE-Diskretisierung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung resultierenden linearen Gleichungssystems. Zur Vorkonditionierung der Systemmatrix wird ein nicht-überlappendes Gebietszerlegungsverfahren unter Berücksichtigung von Kopplungsbedingungen höherer Ordnung aufgezeigt. Darüber hinaus wird anhand analytischer und numerischer Untersuchungen der Einfluss unterschiedlicher Kopplungsbedingungen auf das Konvergenzverhalten des iterativen Lösers untersucht.

Die Simulation abstrahlender elektromagnetischer Strukturen mittels der FE-Methode erfordert darüber hinaus eine Beschränkung des Feldgebiets, welche beispielsweise durch die Einführung künstlicher, sogenannter absorbierender Randbedingungen geschieht. Aufbauend auf analytischen Untersuchungen zur Herleitung geeigneter Kopplungsbedingungen werden absorbierende Randbedingungen höherer Ordnung hergeleitet und im Rahmen einer FE-Diskretisierung umgesetzt.

Um eine breitbandige Charakterisierung der betrachteten Strukturen zur ermöglichen, wird aufbauend auf dem Gebietszerlegungsverfahren ein Modellordnungsreduktionsverfahren vorgestellt. Insbesondere wird eine Reduktion des zeitlichen Aufwands zur Generierung des reduzierten Models mithilfe einer adaptiven Grobraumkorrektur erreicht.

Abstract

The finite-element (FE) method is a commonly used tool for simulating electromagnetic structures in the frequency domain. However, the numerical effort for the direct solution of the resulting system of equations is growing significantly with increasing electrical size of the underlying structure, so that the transition to iterative solution strategies becomes indispensable. For these, the availability of efficient preconditioners is of utmost importance.

The focus of this work is on the iterative solution of the system of linear equations resulting from the FE discretization of the vector Helmholtz equation. For preconditioning the system matrix a non-overlapping domain-decomposition method, under consideration of higher-order transmission conditions, is pointed out. In addition, the effects of different kinds of transmission conditions on the convergence behavior of the iterative solver are analyzed by means of analytical and numerical investigations.

Moreover, the simulation of radiating electromagnetic structures by the FE method requires the field domain to be truncated, which may be done by, e.g., introducing so-called absorbing boundary conditions. Based on analytical investigations for deriving suitable transmission conditions, absorbing boundary conditions of higher order are derived and implemented in the context of a FE discretization.

To enable the broadband characterization of the considered structures, a method of model-order reduction based on the domain-decomposition approach is proposed. In particular, a reduction in the time spent for generating the reduced model is obtained, by means of an adaptive coarse-space correction.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Maxwellsche Gleichungen	5
2.2	Mathematische Hilfsmittel und Notation	6
2.3	Finite-Elemente-Methode	8
2.4	Vektorielle Helmholtz-Gleichung	9
2.4.1	Randwertproblem	10
2.4.2	Schwache Formulierung	10
2.4.3	Finite-Elemente-Diskretisierung	12
3	Iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme	15
3.1	Stationäre Verfahren	16
3.1.1	Konvergenz stationärer Verfahren	16
3.2	Krylovunterraumverfahren	17
3.2.1	GMRES-Verfahren	17
3.2.2	Konvergenz des GMRES-Verfahrens	18
3.2.3	Bemerkungen zur algorithmischen Umsetzung des GMRES-Verfahrens	19
3.3	Vorkonditionierung	20

4 Gebietszerlegungsverfahren für die vektorielle Helmholtz-Gleichung	23
4.1 Iterative Gebietszerlegungsverfahren	27
4.1.1 Der Halbraumfall	29
4.1.2 Approximation des Dirichlet-zu-Neumann Operators	35
4.1.3 Analyse lokaler Kopplung im Halbraumfall	36
4.1.4 Verallgemeinerung auf beschränkte Grenzflächen	40
4.1.5 Konvergenzverhalten des iterativen Verfahrens	43
4.2 Zusammenfassung	50
5 Finite-Elemente-Diskretisierung des Gebietszerlegungsverfahrens	51
5.1 Kopplung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$	52
5.1.1 Finite-Elemente-Diskretisierung	53
5.1.2 Spektralanalyse	56
5.1.3 Numerisches Experiment	57
5.2 Kopplung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TE}$	59
5.2.1 Finite-Elemente-Diskretisierung	61
5.2.2 Spektralanalyse	62
5.3 Kopplung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TM}$	63
5.3.1 Finite-Elemente-Diskretisierung	65
5.3.2 Spektralanalyse	66
5.4 Kopplung $\mathcal{B} = \mathcal{B}_C$	68
5.4.1 Finite-Elemente-Diskretisierung	69
5.4.2 Spektralanalyse	70
5.4.3 Charakterisierung der Eigenwerte	70
5.5 Iterative Lösungsstrategie des FE-DD-Systems	71

5.6	Numerische Experimente	75
5.7	h - p -Konvergenz	75
5.8	Skalierung des Konvergenzverhaltens	77
5.8.1	Skalierung mit der Anzahl der Teilgebiete	83
5.9	Grobraumkorrektur	87
5.9.1	Grobraumkorrektur durch ebene Wellen	89
5.9.2	Numerisches Experiment	90
5.10	Numerisches Beispiel	93
5.11	Zusammenfassung	96
6	Absorbierende Randbedingungen höherer Ordnung	97
6.1	Reflexion am Halbraum	98
6.1.1	Reflexion einer TE-Welle am Halbraum	98
6.1.2	Reflexion einer TM-Welle am Halbraum	100
6.1.3	Diskussion der Reflexionsfaktoren	101
6.1.4	Finite-Elemente-Diskretisierung	110
6.1.5	Numerisches Experiment	112
6.2	Zusammenfassung	113
7	Ein Ordnungsreduktionsverfahren	115
7.1	Projektionsbasiertes Ordnungsreduktionsverfahren	116
7.1.1	Ein adaptives Mehrpunktverfahren	117
7.1.2	Grobraumkorrektur durch reduziertes Modell	118
7.1.3	Numerisches Beispiel - Vivaldi-Antenne	120
7.1.4	Numerisches Beispiel - Patch-Antenne	124
7.2	Zusammenfassung	127

8 Zusammenfassung und Ausblick	129
Abbildungsverzeichnis	135
Tabellenverzeichnis	139
Literaturverzeichnis	141

Kapitel 1

Einleitung

Numerische Simulationsverfahren haben sich in vielen Bereichen der Elektrotechnik, sowohl in Nieder- als auch in Hochfrequenzanwendungen, als effizientes Werkzeug zur Analyse, Synthese und Optimierung komplexer Strukturen etabliert. Insbesondere die FE-Methode stellt in diesem Rahmen aufgrund der Handhabbarkeit komplexer geometrischer Strukturen, inhomogener Materialeigenschaften sowie der natürlichen Berücksichtigung von Randbedingungen ein leistungsfähiges Werkzeug zur Diskretisierung dar. Basis für die FE-Methode ist das in differentieller Form gegebene Randwertproblem und dessen schwache Formulierung [BS02], [Bra02]. Unter der Voraussetzung zeitharmonischer Anregungen, sowie linearer, zeitinvarianter Materialeigenschaften lässt sich ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen die vektorielle Helmholtz-Gleichung herleiten [Har01a], deren Diskretisierung mittels der FE-Methode in einem linearen Gleichungssystem resultiert, wobei die beteiligte Matrix weder symmetrisch noch positiv definit ist [Mon03]. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt abhängig von dessen Dimension und der verfügbaren Rechnerkapazität mittels direkter oder iterativer Lösungsverfahren. Der im Rahmen der FE-Diskretisierung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung entstehende Approximationsfehler setzt sich aus zwei Fehleranteilen zusammen: Auf der einen Seite eine lokale Fehlerkomponente, welche durch Projektion der kontinuierlichen Feldgrößen auf den FE-Approximationsraum entsteht und auf der anderen Seite eine globale Fehlerkomponente, welche durch numerische Dispersion hervorgerufen wird. Diese globale, häufig als Dispersionfehler bezeichnete Fehlerkomponente ist insbesondere nicht durch eine konstante Anzahl an finiten Elementen pro Wellenlänge beschränkt und dominiert besonders im Rahmen elektrisch großer Strukturen den Approximationsfehler [IB95], [Mon03], [MP94], [Ain04]. Um bei steigender elektrischer Größe einen konstanten Fehler zu gewährleisten, benötigt es somit eine Verfeinerung des FE-Netzes bzw. einen ausreichend hohen Polynomgrad der FE-Ansatzfunktionen. Die damit verbundene hohe Dimension des Gleichungssystems macht einen Übergang von direkten Methoden zu iterativen Lösungsverfahren unumgänglich. Eine weit verbreitete Klasse an iterativen Verfahren zur Lösung hochdimensionaler, schwach besetzter

linearer Gleichungssysteme stellen die Krylovunerraumverfahren dar, welche sich in die Gruppe der Projektionsverfahren einordnen lassen. Statt das ursprünglich hochdimensionale Gleichungssystem zu lösen, sucht man eine Näherungslösung als Element des niedrigdimensionalen Krylovunerraums im Rahmen einer Petrov-Galerkin-Projektion [Saa03]. Durch die Wahl der Petrov-Galerkin-Bedingung lassen sich unterschiedliche Formen an Krylovunerraumverfahren gewinnen. Welches Verfahren schließlich zum Einsatz kommt, hängt von den Eigenschaften der Systemmatrix ab: Als die am weitesten verbreiteten Verfahren ist zum einen die Methode der konjugierten Gradienten (CG) [Saa03] und zum anderen das Generalized-Minimal-Residual Verfahren (GMRES) [SS86] zu nennen. Während das CG-Verfahren im Rahmen von Gleichungssystemen mit positiv definiter Systemmatrix beweisbar konvergiert, lässt sich das GMRES-Verfahren auch im Fall einer indefiniten Matrix anwenden. Die Konvergenzgeschwindigkeit dieser Verfahren, und damit verbunden, der benötigte numerische Aufwand zur iterativen Lösung des Gleichungssystems wird weitestgehend durch die spektralen Eigenschaften der beteiligten Systemmatrix bestimmt. Ziel einer geeigneten Vorkonditionierung ist es somit, das resultierende Spektrum des vorkonditionierten Systems so zu beeinflussen, dass sich eine möglichst hohe Konvergenzgeschwindigkeit einstellt. Die Konstruktion geeigneter Vorkonditionierungsverfahren im Rahmen einer FE-Diskretisierung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung erweist sich hierbei aufgrund der indefiniten Gestalt der Systemmatrix als besonders anspruchsvoll: Neben physikalischen Resonanzen der Struktur, resultiert der hochdimensionale Nullraum des Rotationsoperators, in der Existenz negativer Eigenwerte [DEPL00]. Die Konstruktion geeigneter Vorkonditionierungsstrategien, ist Schwerpunkt aktueller Forschung, so dass in der Literatur eine Vielzahl unterschiedlicher Verfahren existieren. Ein Überblick über die unterschiedlichen Methoden ist in [Wat15] zu finden. Zu erwähnen sind hierbei Mehrgitterverfahren [Hac85], [TS01], ILU-Verfahren [SLC01] [MvdV77] und Gebietszerlegungsverfahren [TW05], [QV99], [SBG96]. Der Fokus dieser Arbeit liegt hierbei ausschließlich auf der Klasse der Gebietszerlegungsverfahren (engl.: domain-decomposition, DD), welche aufgrund ihrer Parallelisierbarkeit und Flexibilität zunehmend an Bedeutung gewinnen. Die wesentliche Idee hinter DD-Verfahren besteht darin, das ursprünglich hochdimensionale Problem in mehrere gekoppelte Teilprobleme zu zerlegen. Die Teilprobleme werden dabei auf Basis einer geometrischen Zerlegung des ursprünglichen Feldgebiets in beliebig viele Teilgebiete definiert. Die entstandenen Teilgebiete werden mittels Kopplungsbedingungen (engl.: transmission conditions, TC) gekoppelt, welche zum einen die Äquivalenz zum ursprünglichen Problem gewährleisten und zum anderen die Qualität des resultierenden Vorkonditioners beeinflussen. Im Rahmen von DD-Verfahren für die vektorielle Helmholtz-Gleichung existieren, basierend auf den Arbeiten [DJR92], [Des91] eine Vielzahl unterschiedlicher TCs [RL10], [PL12]. Hierbei werden die in [DJR92] eingeführten TC erster Ordnung unter Hinzunahme weiterer tangentialer Differentialoperatoren erweitert. Sie stellen lokale Approximationen des Dirichlet-zu-Neumann Operators (engl.: dirichlet-to-neumann, DtN) dar [BAG14].

Das im Rahmen dieser Arbeit dargestellte DD-Verfahren ermöglicht schließlich die iterative Lösung des FE-Systems in einem Frequenzpunkt. Praxisrelevante Anwendungen erfordern jedoch meist eine breitbandige Charakterisierung der zugrundeliegenden Struktur, so dass die Lösung in einem Frequenzpunkt nicht ausreichend ist. In diesem Rahmen stellen Modellordnungsreduktionsverfahren (MOR) eine etablierte und effiziente Methodenklasse dar. Das Ziel dieser Methoden ist die Generierung eines reduzierten Modells (engl. reduced-order-model, ROM), das im betrachteten Frequenzbereich das Systemverhalten des ursprünglichen Modells approximiert. Da das ROM von wesentlich geringerer Dimension als das ursprüngliche Modell ist, lässt es sich um ein Vielfaches schneller auswerten. Projektionsbasierte MOR-Verfahren erreichen die Ordnungsreduktion durch Projektion des Ausgangsmodells in einen niedrigdimensionalen Unterraum. Die resultierenden ROMs weisen hierbei dieselbe parametrische Struktur wie das Originalmodell auf. Ein etabliertes Verfahren dieser Klasse ist die Reduzierte-Basis-Methode (engl.: reduced-basis-method, RBM) [PR06], die den Projektionsraum aus Lösungen des Originalmodells in unterschiedlichen Frequenzpunkten konstruiert. Dieses Verfahren weist hohe numerische Robustheit auf und resultiert in niedrigdimensionalen Projektionsräumen. Zudem stehen für diese Methode adaptive Abtaststrategien [FHMS11] [HSZ14] sowie effizient auswertbare a-posteriori-Fehlerschranken zur Verfügung [CHMR09].

Ist das zugrundeliegende Feldgebiet unbeschränkt, wie es bei der Beschreibung von Abstrahlungs- oder Streuproblemen der Fall ist, erfordert deren Diskretisierung mittels der FE-Methode eine Beschränkung des Feldgebiets mit Hilfe künstlich eingeführter Randbedingungen, welche häufig als absorbierende Randbedingungen (engl.: absorbing boundary condition, ABC) bezeichnet werden. Diese Randbedingungen sollten einen möglichst großen Anteil der einfallenden elektromagnetischen Wellen absorbieren und somit die Abstrahlung in den Freiraum modellieren. Eine perfekte reflexionsfreie ABC lässt sich jedoch ausschließlich mithilfe nichtlokaler Operatoren, wie beispielsweise im Rahmen von Integralgleichungsverfahren erreichen [Né01]. Um den numerischen Aufwand zur Umsetzung der nichtlokalen ABCs zu verringern, bedient man sich dessen lokalen, auf Differentialoperatoren basierenden Approximationen. Beispiele dazu sind unter anderem in [Mur81], [BT80], [EM77], [GZL06] nachzulesen. Die Umsetzung solcher ABCs im Rahmen der FE-Methode erweist sich jedoch aufgrund der darin enthaltenen Differentialoperatoren höherer Ordnung als nicht trivial, so dass in der Praxis meist von einer möglichst einfachen Randbedingung erster Ordnung Gebrauch gemacht wird. Eine detaillierte Analyse der Reflexionseigenschaften unter Berücksichtigung einer ABC erster Ordnung bis hin zu einer Erweiterung auf ABCs höherer Ordnung wird im Rahmen dieser Arbeit aufgezeigt.

Zusammengefasst liegt der Fokus dieser Arbeit auf der breitbandigen Charakterisierung elektrisch großer Strukturen. Grundlage hierfür stellt die Umsetzung eines nicht-überlappenden DD-Verfahrens zur Lösung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung unter Nutzung von TCs höherer Ordnung dar. Darauf aufbauend wird ein

projektionsbasiertes MOR-Verfahren vorgestellt, welches durch eine adaptive Grob-
raumkorrektur erweitert wird. Mithilfe dieser Grob-
raumkorrektur lässt sich der
benötigte Aufwand zur Konstruktion des ROMs wesentlich reduzieren. In Kapitel 4
werden die genutzten TCs im Rahmen des DD-Verfahrens hergeleitet und im Kon-
text analytischer Untersuchungen auf ihren Einfluss auf das Konvergenzverhalten des
iterativen Lösers untersucht. Kapitel 5 präsentiert darauf aufbauend entsprechende
FE-Formulierungen und zeigt Möglichkeiten zur Konstruktion eines effizienten Vor-
konditionierers auf. Auf Basis eines numerischen Beispiels werden anschließend die
spektralen Eigenschaften des vorkonditionierten Systems untersucht und mit den
zuvor dargestellten analytischen Ergebnissen verglichen. Weitere numerische Experi-
mente untersuchen darüber hinaus die Abhängigkeit der Konvergenzgeschwindig-
keit von verschiedenen Parametern welche im Rahmen einer FE-DD-Diskretisierung
von Interesse sind. Aufgrund der Ähnlichkeit von TCs zu ABCs präsentiert Ka-
pitel 6 mögliche Erweiterungen der häufig verwendeten ABCs erster Ordnung auf
ABCs höherer Ordnung resultierend aus den Überlegungen im Kontext des DD-Ver-
fahrens. Analytische Untersuchungen zeigen im Anschluss die Vorteile der ABCs
höherer Ordnung und werden anschließend im Rahmen einer FE-Diskretisierung va-
lidiert. In Kapitel 7 wird aufbauend auf dem DD-Verfahren ein projektionsbasiertes
MOR-Verfahren aufgezeigt. Zusätzlich wird im Rahmen der ROM-Generierung eine
Grob-
raumkorrektur vorgeschlagen, welche die benötigte Zeit zur ROM-Erstellung
deutlich reduziert. Numerische Beispiele demonstrieren die Effizienz des vorgeschla-
genen Verfahrens.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Maxwellsche Gleichungen

Die klassische Theorie elektromagnetischer Felder basiert auf den Maxwellschen Gleichungen. Diese entsprechen einem gekoppelten System partieller Differentialgleichungen gegeben durch

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_c + \mathcal{J}_i + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \varrho, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0. \quad (2.1d)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{H} die magnetische Erregung, \mathcal{D} die elektrische Flussdichte, \mathcal{J}_c die elektrische Leitungsstromdichte, \mathcal{J}_i die eingeprägte Stromdichte, \mathcal{E} die elektrische Feldstärke, \mathcal{B} die magnetische Flussdichte und ϱ die Raumladungsdichte. Die Maxwellschen Gleichungen sind durch Materialbeziehungen zwischen den Feldgrößen zu ergänzen. Diese sind durch die Konstitutivgleichungen der Form

$$\mathcal{B} = \underline{\underline{\mu}} \mathcal{H} = \mu_0 \underline{\underline{\mu}}_r \mathcal{H}, \quad (2.2a)$$

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\epsilon}} \mathcal{E} = \epsilon_0 \underline{\underline{\epsilon}}_r \mathcal{E}, \quad (2.2b)$$

$$\mathcal{J}_c = \underline{\underline{\sigma}} \mathcal{E}, \quad (2.2c)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $\underline{\underline{\mu}}$ den magnetischen Permeabilitätstensor, welcher als Produkt der Vakuumpermeabilität μ_0 und dem relativen magnetischen Permeabilitätstensor $\underline{\underline{\mu}}_r$ geschrieben werden kann, $\underline{\underline{\epsilon}}$ den elektrischen Permittivitätstensor als

Produkt der Vakuumpermittivität ϵ_0 und dem relativen elektrischen Permittivitätstensor $\underline{\underline{\epsilon}}_r$, und $\underline{\underline{\sigma}}$ den elektrischen Leitfähigkeitstensor. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich im weiteren Verlauf auf lineare, zeitinvariante und isotrope Materialeigenschaften, so dass sich die Konstitutivgleichungen (2.2) unter Berücksichtigung der nun skalarwertigen Materialparametern μ , ϵ und σ wie folgt vereinfachen:

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H} = \mu_0 \mu_r \mathcal{H}, \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{E}, \quad (2.3b)$$

$$\mathcal{J}_c = \sigma \mathcal{E}. \quad (2.3c)$$

Unter der Voraussetzung linearer zeitinvarianter Materialeigenschaften lassen sich die Maxwellschen Gleichungen durch Transformation in den Frequenzbereich in zeitharmonischer Form angeben. Unter Berücksichtigung der Kreisfrequenz ω , welche durch die Beziehung

$$\omega = 2\pi f \quad (2.4)$$

mit der Frequenz f in Verbindung steht lauten die Maxwellschen Gleichungen in zeitharmonischer Form

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad (2.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_i + j\omega \mathbf{D}, \quad (2.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.5d)$$

Hierin beschreiben \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{J}_e , \mathbf{J}_i und ρ die den Größen \mathcal{E} , \mathcal{D} , \mathcal{H} , \mathcal{B} , \mathcal{J}_e , \mathcal{J}_i und ϱ zugeordneten Phasoren. Die zugehörigen Konstitutivgleichungen lauten in diesem Fall

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2.6b)$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.6c)$$

2.2 Mathematische Hilfsmittel und Notation

An dieser Stelle sollen die wichtigsten innerhalb dieser Arbeit genutzten mathematischen Hilfsmittel zusammengefasst werden. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$. Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ bezeichnet den nach außen gerichteten Normalenvektor auf $\partial\Omega$. Für vektorwertige Funktionen $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ auf dem Gebiet Ω sei das Skalarprodukt entsprechend

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} := \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (2.7)$$

definiert. Hierbei bezeichnet $\bar{\mathbf{u}}$ die konjugiert komplexe Darstellung von \mathbf{u} . Weiterhin seien die folgenden, auf dem Rand $\partial\Omega$ definierten Bilinearformen entsprechend

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \quad (2.8)$$

$$\langle p, f \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} \bar{p} \cdot f \, d\Gamma, \quad (2.9)$$

eingeführt. Hierbei beschreibt sowohl \mathbf{u} als auch \mathbf{v} eine vektorwertige Funktion während p und f skalarwertige Funktionen darstellen. Aufbauend auf dieser Notation lassen sich die folgenden Funktionenräume definieren:

$$\mathbf{L}^2(\Omega) := \left\{ \mathbf{w} \mid (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\Omega} < \infty \right\}, \quad (2.10a)$$

$$L^2(\Omega) := \left\{ u \mid (u, u)_{\Omega} < \infty \right\}, \quad (2.10b)$$

$$\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}, \quad (2.10c)$$

$$H(\text{grad}; \Omega) := \left\{ w \in L^2(\Omega) \mid \nabla w \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}. \quad (2.10d)$$

Für hinreichend glatte Funktionen \mathbf{u} und p seien zusätzlich die Spuroperatoren π_T , γ_T , γ_t durch

$$\pi_T(\mathbf{u}) := \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.11a)$$

$$\gamma_T(\mathbf{u}) := \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.11b)$$

$$\gamma_t(w) := w|_{\partial\Omega} \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.11c)$$

definiert. Für eine detaillierte Beschreibung der Spuroperatoren (2.11) im Rahmen der Sobolevräume (2.10) gemäß

$$\pi_T(\mathbf{u}) : \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \mapsto \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}; \partial\Omega) \subset \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (2.12)$$

$$\gamma_T(\mathbf{u}) : \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \mapsto \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}; \partial\Omega) \subset \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (2.13)$$

$$\gamma_p(w) : H(\text{grad}; \Omega) \mapsto H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (2.14)$$

und insbesondere den damit verbundenen Spurräumen $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sowie $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}; \partial\Omega)$ und $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}; \partial\Omega)$ sei auf die Arbeiten [BC01a] und [BC01b] verwiesen. Innerhalb dieser Arbeit wird zusätzlich zu den Differentialoperatoren rot , grad und div , von auf dem Rand $\Gamma \subset \partial\Omega$ definierten tangentialen Differentialoperatoren rot_T , grad_T sowie div_T Gebrauch gemacht. Am einfachsten lassen sich diese im Rahmen eines kartesischen Koordinatensystems einführen. Hierzu bezeichne $\Gamma := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ eine in der x - y -Ebene befindliche Fläche. Mithilfe der Zerlegung des Nablaoperators ∇ in tangentiale und normale Komponenten entsprechend

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (2.15)$$

seien die Oberflächendifferentialoperatoren gemäß

$$\text{rot}_T \mathbf{u} := \nabla_T \times \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

$$\text{grad}_T \mathbf{w} := \nabla_T w, \quad (2.17)$$

$$\text{div}_T \mathbf{u} := \nabla_T \cdot \mathbf{u}, \quad (2.18)$$

definiert, deren Definition im Rahmen von Sobolevräumen Beispielsweise in [BC01a], [BC01b] und [Né01] nachzulesen ist. Die Größe \mathbf{e}_z bezeichnet hierbei den Einheitsvektor in z -Richtung.

2.3 Finite-Elemente-Methode

Die Diskretisierung der innerhalb dieser Arbeit betrachteten Randwertprobleme erfolgt mithilfe der FE-Methode. Das grundsätzliche Vorgehen im Rahmen dieser Methode soll an dieser Stelle zusammengefasst werden. Eine detaillierte Beschreibung ist beispielsweise in [BS02] oder [EG04] nachzulesen. Ausgangspunkt der FE-Methode ist die aus einem Randwertproblem resultierende schwache Formulierung der Form:

$$\text{Finde } u \in X, \text{ so dass } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in X, \quad (2.19)$$

definiert durch die Billinearform $a(\cdot, \cdot) : X \times X \mapsto \mathbb{C}$, dem linearen Funktional $f : X \mapsto \mathbb{C}$ und einem geeigneten problemangepassten Funktionenraum X . Wird das schwache Problem (2.19) mithilfe eines endlichdimensionalen Teilraums $V^h \subset X$ im Rahmen eines Galerkin-Verfahrens entsprechend

$$\text{Finde } u^h \in V^h, \text{ so dass } a(u^h, v^h) = f(v^h), \quad \forall v^h \in V^h, \quad (2.20)$$

approximiert so lässt sich durch Übergang zu einer Basis $\{v_i\} \subset V^h$ und entsprechender Darstellung des Lösung u^h gemäß

$$u^h = \sum_{i=1}^N [\mathbf{x}]_i v_i, \quad v_i \in V^h \quad (2.21)$$

aus dem diskreten Problem (2.20) ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.22)$$

gewinnen. Die beteiligten Größen sind hierbei wie folgt definiert:

$$[\mathbf{A}]_{ij} := a(v_i, v_j) \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (2.23)$$

$$[\mathbf{b}]_i := f(v_i) \in \mathbb{C}^N, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{x} := ([\mathbf{x}]_1, \dots, [\mathbf{x}]_N)^T \in \mathbb{C}^N. \quad (2.25)$$

Die FE-Methode zeichnet sich durch die Wahl der Basisfunktionen v_i aus: Basierend auf einer geometrischen Zerlegung $\mathcal{T}(\Omega)$ des zugrundeliegenden Feldgebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ in sogenannte finite Elemente einfacher geometrische Gestalt werden die Basisfunktionen v_i meist lokal, auf Basis eines einzelnen Elementes durch Polynome definiert [BS08]. Im Rahmen dieser Arbeit basiert die FE-Methode auf einem FE-Netz $\mathcal{T}(\Omega)$ bestehend aus geradlinigen Tetraedern, wobei die genutzten FE-Räume jenen aus [Ing06] entsprechen. Somit bezeichne im Folgenden

$$\mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}} \subset \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega), \quad (2.26)$$

$$\mathcal{V}_\Omega^{\text{grad}} \subset H(\text{grad}; \Omega) \quad (2.27)$$

den $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ - bzw. $H(\text{grad}; \Omega)$ -konformen FE-Ansatzraum gemäß der Definition aus [Ing06]. Entsprechende auf dem Teilrand $\Gamma \subset \partial\Omega$ definierte FE-Räume lassen sich durch Anwendung der Spuroperatoren π_T und γ_p gemäß

$$\mathcal{V}_\Gamma^{\text{rot}} := \pi_T(\mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}}) \subset \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}; \partial\Omega) \subset \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (2.28)$$

$$\mathcal{V}_\Gamma^{\text{grad}} := \gamma_p(\mathcal{V}_\Omega^{\text{grad}}) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (2.29)$$

gewinnen.

2.4 Vektorielle Helmholtz-Gleichung

Aus den Maxwellschen Gleichungen (2.5) lässt sich eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in der elektrischen Feldstärke gewinnen. Unter Zuhilfenahme der Konstitutivgleichungen (2.6) folgt durch Anwendung des Rotationsoperators auf (2.5a) und Substitution der Gleichung (2.5b) die vektorielle Helmholtzgleichung für die elektrische Feldstärke, gegeben durch

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \sigma \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_i, \quad (2.30)$$

mit der Freiraum-Wellenimpedanz

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (2.31)$$

sowie der Freiraumwellenzahl

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}, \quad (2.32)$$

worin

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (2.33)$$

2.4.1 Randwertproblem

Unter Berücksichtigung geeigneter Randbedingungen lässt sich aus der vektoriellen Helmholtzgleichung (2.30) ein zugehöriges Randwertproblem gewinnen, welches im weiteren Verlauf mithilfe der FE-Methode diskretisiert wird werden kann. Hierzu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein hinreichend reguläres Gebiet entsprechend Abbildung 2.1, dessen Rand $\partial\Omega$ sich aus dem Dirichletschen Rand Γ_E , dem Neumannschen Rand Γ_N , sowie dem absorbierenden Rand Γ_A zusammensetzt. Ausgehend von der vektoriellen Helmholtzgleichung (2.30) wird das folgende Randwertproblem betrachtet:

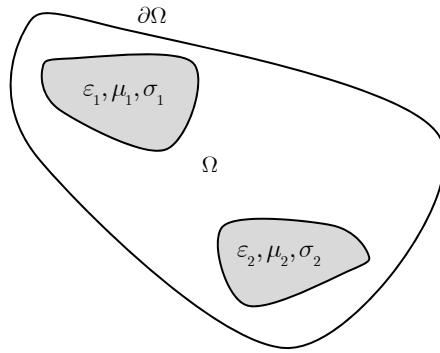


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Gebiets Ω

Problem 2.1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_A$. Finde \mathbf{E} so dass:

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \sigma \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_e, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.34a)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}) = 0, \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (2.34b)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = jk_0 \eta_0 \mathbf{H}_t, \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (2.34c)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}), \quad \text{auf } \Gamma_A. \quad (2.34d)$$

Gleichung (2.34b) beschreibt hierbei eine homogene Dirichlet-Randbedingung und modelliert perfekt elektrisch leitfähige Ränder, während (2.34c) eine inhomogene Neumann-Randbedingung darstellt, mithilfe derer die Anregung der Struktur realisiert wird. Die Robinsche Randbedingung (2.34d) beschreibt eine ABC erster Ordnung und dient der Beschränkung des Feldgebiets.

2.4.2 Schwache Formulierung

Zur Diskretisierung des Randwertproblems (2.34) wird in dieser Arbeit die FE-Methode gemäß Abschnitt 2.3 herangezogen. Grundlage hierfür ist die zugehörige

schwache Formulierung. Die starke Form entsprechend Problem 2.1 lässt sich durch Multiplikation von Gleichung (2.34a) mit einer Testfunktion $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}; \Omega)$ und anschließender partieller Integration in eine schwache Form überführen. Hierbei bezeichnet $\mathbf{H}_E(\text{rot}; \Omega) \subset \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ den durch

$$\mathbf{H}_E(\text{rot}; \Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) : \pi_T(\mathbf{u}) = 0 \text{ auf } \Gamma_E \right\} \quad (2.35)$$

definierten Unterraum jener Funktionen mit verschwindender Tangentialspur auf dem Dirichletschen Rand Γ_E . Die schwache Formulierung lautet somit:

Problem 2.2. *Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}; \Omega)$, so dass*

$$\begin{aligned} & \left(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{v} \right)_\Omega + \left(\sigma \mathbf{E}, \mathbf{v} \right)_\Omega - k_0^2 \left(\epsilon_r \mathbf{E}, \mathbf{v} \right)_\Omega + j k_0 \left(\pi_T(\mathbf{E}), \pi_T(\mathbf{v}) \right)_{\Gamma_A} \\ &= -j k_0 \eta_0 \left(\mathbf{J}_i, \mathbf{v} \right)_\Omega - j k_0 \eta_0 \left(\mathbf{h}_t, \pi_T(\mathbf{v}) \right)_{\Gamma_H}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^0(\text{rot}, \Omega). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mithilfe der Bilinearform $a : \mathbf{H}_E(\text{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}; \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ sowie dem Funktional $f : \mathbf{H}_E(\text{rot}; \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \left(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{v} \right)_\Omega + j k_0 \eta_0 \left(\sigma \mathbf{E}, \mathbf{v} \right)_\Omega - k_0^2 \left(\epsilon_r \mathbf{E}, \mathbf{v} \right)_\Omega \\ &+ j k_0 \left(\pi_T(\mathbf{E}), \pi_T(\mathbf{v}) \right)_{\Gamma_A}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$f(\mathbf{v}) := -j k_0 \eta_0 \left(\mathbf{J}_i, \mathbf{v} \right)_\Omega - j k_0 \eta_0 \left(\mathbf{h}_t, \pi_T(\mathbf{v}) \right)_{\Gamma_H}, \quad (2.38)$$

folgt die kompakte Notation des schwachen Problems 2.2 gemäß: Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}; \Omega)$, so dass

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega). \quad (2.39)$$

Die beteiligte Bilinearform (2.37) erweist sich als indefinit. Das damit verbundene instabile Verhalten des Lösungsoperators kommt besonders unter Anwesenheit von ausgeprägten Resonanzerscheinungen zum tragen. Die weiteren Untersuchungen beschränken sich dementsprechend auf den Fall verschwindender Leitfähigkeit $\sigma = 0$ um die Robustheit der vorgestellten Verfahren zu demonstrieren. Die Frage nach der Wohlgestelltheit der kontinuierlichen schwachen Formulierung (2.39) lässt sich in diesem Fall mithilfe der Fredholmschen Alternative [Wer07, S. 266] beantworten, welche sich im Wesentlichen die spektralen Eigenschaften des zugehörigen Operators zu Nutze macht. Entsprechende Beweise sind unter anderem in [MD01], [Mon03] und [Hip02] nachzulesen: Im Falle eines nicht verschwindenden Randes $\Gamma_A \neq \emptyset$ ist das schwache Problem 2.2 unabhängig von der Wellenzahl k_0 stets wohlgestellt. Im Falle verschwindender ABCs, $\Gamma_A = \emptyset$ lässt sich die Wohlgestelltheit nur für jene Wellenzahlen k_0 gewährleisten, welche keine Eigenresonanzen der Struktur darstellen.

2.4.3 Finite-Elemente-Diskretisierung

Die Approximation des schwachen Problems nach (2.39) mithilfe des endlichdimensionalen Teilraums $\mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}} \subset \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ nach (2.26) resultiert in dem approximierenden Problem:

Problem 2.3. Finde $\mathbf{E}_h \in \mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}}$, so dass

$$a(\mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h) = f(\mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}}. \quad (2.40)$$

Durch Übergang zu einer N_E -dimensionalen FE-Basis $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N_E}\} \subset \mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}}$ des Approximationstraums $\mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}}$ folgt für die elektrische Feldstärke die Darstellung

$$\mathbf{E}_h = \sum_{i=1}^{N_E} [\mathbf{x}_E]_i \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{w}_i \in \mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}}, \quad (2.41)$$

und somit das lineare Gleichungssystem der Gestalt

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_E = \mathbf{b}. \quad (2.42)$$

Die Systemmatrix \mathbf{A} und die rechte Seite \mathbf{b} sind entsprechend

$$\mathbf{A} = (\mathbf{S} + jk_0 \mathbf{B} - k_0^2 \mathbf{T}) \in \mathbb{C}^{N_E \times N_E}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{b} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{b}^h - jk_0 \eta_0 \mathbf{b}^J \in \mathbb{R}^{N_E \times 1} \quad (2.44)$$

definiert. Die enthaltenen Größen $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N_E \times N_E}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_E \times N_E}$, $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N_E \times N_E}$, $\mathbf{b}^h \in \mathbb{R}^{N_E}$ und $\mathbf{b}^J \in \mathbb{R}^{N_E}$ sind gegeben durch

$$[\mathbf{S}]_{i,j} := \left(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{w}_i, \nabla \times \mathbf{w}_j \right)_\Omega, \quad (2.45a)$$

$$[\mathbf{B}]_{i,j} := \left(\pi_t(\mathbf{w}_i), \pi_t(\mathbf{w}_j) \right)_\Omega, \quad (2.45b)$$

$$[\mathbf{T}]_{i,j} := \left(\epsilon_r \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \right)_\Omega, \quad (2.45c)$$

$$[\mathbf{b}^h]_i := \left(\mathbf{H}_t, \pi_t(\mathbf{w}_i) \right)_{\Gamma_H}, \quad (2.45d)$$

$$[\mathbf{b}^J]_{i,j} := \left(\mathbf{J}_e, \mathbf{w}_i \right)_\Omega. \quad (2.45e)$$

Auch im Fall des diskreten Problems 2.3 stellt sich die Frage nach der Existenz entsprechender Lösungen. Aussagen zur Wohlgestelltheit von Problem 2.3 lassen sich für das betrachtete Problem nur asymptotisch bezüglich der Dimension $\dim(\mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}})$ und somit auch der Netzfeinheit h aus jener des kontinuierlichen Problems 2.1 ableiten. Dieses Verhalten überträgt sich entsprechend auf das Konvergenzverhalten $\mathbf{E}_h \rightarrow \mathbf{E}$, falls $h \rightarrow 0$. Der wesentliche Grund für dieses Verhalten ist hierbei die Existenz einer nicht-lokalen Fehlerkomponente, welche häufig mit Dispersionsfehler

bezeichnet wird. Detaillierte Aussagen diesbezüglich sind unter anderem in [Kik89], [MD01], [Ain04] und [Ihl13] nachzulesen. Des Weiteren erweist sich die Bilinearform in (2.40) und somit auch die Matrix (2.43) aufgrund des Nullraums des Rotationsoperators, entsprechend $\text{range}(\text{grad}) \subset \text{ker}(\text{rot})$ als indefinit: Betrachtet man exemplarisch den Fall eines verschwindenden absorbierenden Randes $\Gamma_A = \emptyset$ so zeigen sich selbst für eine beliebig kleine Wellenzahl $k_0 > 0$ negative Eigenwerte im Spektrum der Matrix \mathbf{A} , welche Feldern im Nullraum des Rotationsoperators zuzuordnen sind. Übersteigt die Wellenzahl k_0 jene einer physikalischen Resonanz der Struktur, so resultiert dies ebenfalls in einem Eigenwert in der negativen Halbebene. Auf eine detaillierte Spektralanalyse der FE-Systemmatrix \mathbf{A} soll an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen werden. Der interessierte Leser sei auf die Arbeit [DEPL00] verwiesen.

Kapitel 3

Iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Die Lösung des aus der FE-Formulierung (2.40) resultierenden Gleichungssystems (2.42) mit Hilfe direkter Lösungsverfahren ist aufgrund der hohen Dimension der FE-Systemmatrix \mathbf{A} in (2.42) insbesondere für den Fall komplexer, elektrisch großer Strukturen mit hohem numerischem Aufwand verbunden: Die Dimension des Gleichungssystems wird hierbei durch die Dimension des FE-Ansatzraums $\mathcal{V}_\Omega^{\text{rot}}$ und somit durch die Netzfeinheit h und die Polynomordnung p der Ansatzfunktionen bestimmt. Insbesondere die Reduktion des in Abschnitt 2.4.3 erwähnten Dispersionsfehlers [MP94] erfordert eine hinreichend feine Netzfeinheit h beziehungsweise Polynomordnung p und führt zu einem wesentlichen Anstieg der Dimension des Gleichungssystems. Unter der Voraussetzung beschränkter Rechnerkapazitäten ist somit der Übergang von direkten Verfahren auf iterative Lösungsverfahren unumgänglich.

Im weiteren Verlauf soll auf die Lösung des FE-Gleichungssystems (2.42) mit Hilfe iterativer Lösungsverfahren eingegangen werden. Iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme lassen sich im Wesentlichen in zwei Klassen einordnen: Stationäre Verfahren und projektionsbasierte Verfahren [TB97] [Saa03]. Innerhalb dieser Arbeit werden Verfahren beider Klassen eingesetzt und sollen im weiteren Verlauf kurz zusammengefasst werden. Hierzu wird das Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.1}$$

mit der regulären, quadratischen und komplexwertigen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, der rechten Seite $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^N$ und dem gesuchten Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ betrachtet.

3.1 Stationäre Verfahren

Iterative Lösungsverfahren, welche einer Iterationsvorschrift der Form

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{x}^k + \mathbf{f} \quad (3.2)$$

genügen, werden als stationäre Verfahren bezeichnet. Diese basieren auf einer Zerlegung der Matrix \mathbf{A} entsprechend

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} \quad (3.3)$$

und motivieren durch Einsetzen von (3.3) in (3.1) die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}^k + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.4)$$

Diese Darstellung ist von der Gestalt (3.2), wobei die Iterationsmatrix \mathbf{G} und die rechte Seite \mathbf{f} durch

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}, \quad (3.6)$$

definiert sind. Die innerhalb dieser Arbeit genutzten Verfahren basieren auf einer Zerlegung der Matrix \mathbf{A} der Gestalt

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{D} - \mathbf{A}, \quad (\text{Jacobi}), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{F}, \quad (\text{Vorwärts-Gauss-Seidel}). \quad (3.8)$$

Die Matrix \mathbf{D} beschreibt hierbei den Diagonalanteil, während die Matrizen $-\mathbf{E}$ und $-\mathbf{F}$ den strikten unteren bzw. strikten oberen Dreiecksanteil der Matrix \mathbf{A} beinhalten.

3.1.1 Konvergenz stationärer Verfahren

Das Spektrum $\sigma(\mathbf{A})$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ sei definiert durch die Menge

$$\sigma(\mathbf{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ nicht injektiv}\}, \quad (3.9)$$

weiterhin bezeichne

$$\rho(\mathbf{A}) := \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |\lambda| \quad (3.10)$$

den Spektralradius der Matrix $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Das Konvergenzverhalten eines stationären Verfahrens nach (3.2) ist durch die spektralen Eigenschaften der Iterationsmatrix \mathbf{G} bestimmt, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 3.1. *Sei $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, mit $\rho(\mathbf{G}) < 1$, dann konvergiert die durch (3.2) definierte Folge $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^N$ und alle \mathbf{x}_0 gegen die exakte Lösung \mathbf{x} von (3.1). Umgekehrt, konvergiert die Folge $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^N$ und alle \mathbf{x}_0 , dann gilt $\rho(\mathbf{G}) < 1$.*

Beweis. Siehe [Saa03, S. 112]. □

3.2 Krylovunterraumverfahren

Die zweite hier betrachtete Klasse von Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems (3.1) sind die sogenannten Krylovunterraumverfahren [Saa03, S. 151]. Diese lassen sich in die Klasse der Projektionsverfahren einordnen und suchen im m -ten Iterationschritt eine Näherungslösung $\tilde{\mathbf{x}}_m$ im Rahmen eines Petrov-Galerkin-Verfahrens entsprechend

$$\tilde{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_m, \quad (3.11a)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_m = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_m \in \mathcal{L}_m^\perp. \quad (3.11b)$$

Der Raum \mathcal{K}_m wird als Krylovraum m -ter Ordnung bezeichnet und basiert auf dem Residuum $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, so dass

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0) = \text{span} \{ \mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{r}_0 \}. \quad (3.12)$$

Mit Hinblick auf die Definition (3.12) lässt sich die Näherungslösung $\tilde{\mathbf{x}}_m$ und das zugehörige Residuum $\tilde{\mathbf{r}}_m$ wie folgt darstellen:

$$\tilde{\mathbf{x}}_m \approx \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}_0 + q_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{r}_0, \quad (3.13)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_m = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_m = (\mathbf{I} - \mathbf{A}g_{m-1}(\mathbf{A}))\mathbf{r}_0 = p_m(\mathbf{A})\mathbf{r}_0. \quad (3.14)$$

Hierbei bezeichnet q_{m-1} ein beliebiges Polynom vom Grad $m-1$ und p_m ein Polynom von maximalem Grad m sowie der Nebenbedingung $p_m(\mathbf{0}) = 1$. Krylovunterraumverfahren basieren somit alle auf dem Konzept der Polynomapproximation (3.13), unterscheiden sich jedoch in der Wahl der Petrov-Galerkin-Bedingung (3.14) und somit der Wahl der Testraums \mathcal{L}_m . Basierend auf der projektionsbasierten Definition existieren unterschiedliche Ausführungen von Krylovraumverfahren. Diese Arbeit beschränkt sich diesbezüglich auf das GMRES-Verfahren nach [SS86], da es insbesondere auch im Falle einer nicht symmetrischen Matrix \mathbf{A} zur Lösung des zugehörigen Gleichungssystems geeignet ist.

3.2.1 GMRES-Verfahren

Das GMRES-Verfahren [SS86] wird durch die Wahl $\mathcal{L}_m = \mathbf{A}\mathcal{K}_m$ charakterisiert und lautet gemäß (3.11):

$$\text{Finde } \tilde{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_m, \quad \text{so dass} \quad \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_m \perp \mathbf{A}\mathcal{K}_m. \quad (3.15)$$

Es lässt sich zeigen [Saa03, S. 164], dass das in (3.15) dargestellte Projektionsverfahren die euklidische Norm des zugehörigen Residuums $\mathbf{r}_m = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_m$ über dem Krylovraum \mathcal{K}_m minimiert. Somit lässt sich das GMRES-Verfahren nach (3.15) ebenfalls als Minimierungsproblem in der Darstellung

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_m} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_m\|_2 = \min_{\tilde{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_m} \|\mathbf{r}_m\|_2 \quad (3.16)$$

formulieren. Mithilfe der Darstellung (3.14) erhält man eine weitere äquivalente Darstellung des GMRES-Verfahrens entsprechend

$$\min_{p_m \in \tilde{\mathbb{P}}_m} \|p_m(\mathbf{A})\mathbf{r}_0\|_2, \quad (3.17)$$

welche die Grundlage für eine Vielzahl von Konvergenzaussagen darstellt.

3.2.2 Konvergenz des GMRES-Verfahrens

Analog zu den Ergebnissen aus Abschnitt 3.1.1 soll eine Aussage über das Konvergenzverhalten des GMRES-Verfahrens getroffen werden. Im Fall einer nicht symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ lässt sich nur wenig über die Konvergenz des GMRES-Verfahrens aussagen [SS86],[Saa03]. Um dennoch ein Gefühl für das Konvergenzverhalten zu erhalten, wird im Folgenden die Diagonalsierbarkeit der Matrix \mathbf{A} vorausgesetzt. Basierend auf der Charakterisierung des GMRES als polynomielles Minimierungsproblem (3.17) folgt für die euklidische Norm des Residuums im m -ten Iterationsschritt die Darstellung

$$\|\tilde{\mathbf{r}}_m\|_2 = \min_{p \in \tilde{\mathbb{P}}} \|p_m(\mathbf{A})\mathbf{r}_0\|_2 \quad (3.18)$$

und somit die Abschätzung

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_m\|_2}{\|\mathbf{r}_0\|_2} \leq \min_{p \in \tilde{\mathbb{P}}} \|p_m(\mathbf{A})\|_2. \quad (3.19)$$

Der folgende Satz basiert auf Abschätzung (3.19) und zeigt ein Konvergenzresultat unter der bereits erwähnten Einschränkung der Diagonalsierbarkeit von \mathbf{A} .

Satz 3.2. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ diagonalisierbar, entsprechend $\mathbf{A} = \mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}^{-1}$. Hierbei bezeichnet $\Lambda = \text{diag } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ die aus den Eigenwerten bestehende Diagonalmatrix. Es bezeichne $\mathbf{r}_m = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m$ das Residuum im m -ten Iterationsschritt. Für die euklidische Norm des Residuums folgt in diesem Fall die Darstellung*

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_m\|_2}{\|\mathbf{r}_0\|_2} \leq \|\mathbf{X}\|_2 \|\mathbf{X}^{-1}\|_2 \min_{p \in \tilde{\mathbb{P}}} \max_{i=1, \dots, N} |p(\lambda_i)| \quad (3.20)$$

Beweis. Siehe [Saa03, S. 206]. □

Aufgrund der in (3.20) anwesenden Konditionszahl $\kappa(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_2 \|\mathbf{X}^{-1}\|_2$ der Eigenvektormatrix ist die Abschätzung (3.20) im Allgemeinen jedoch nur von geringem Nutzen. Gilt jedoch die Einschränkung $\kappa(\mathbf{X}) \approx 1$, also insbesondere unter der Voraussetzung einer normalen Matrix \mathbf{A} , so ist die Abschätzung scharf und beschränkt sich auf das polynomiale Approximationsproblem der Gestalt

$$\min_{p \in \tilde{\mathbb{P}}} \max_{i=1, \dots, n} |p(\lambda_i)|. \quad (3.21)$$

Für den Fall einer normalen Matrix wird in [LT04] eine Lösung des Approximationsproblems aufgezeigt: Unter der Annahme, dass das Spektrum der betrachteten Matrix \mathbf{A} in der komplexen Kreisscheibe $B_r(c) := \{z \in \mathbb{C}; |z - c| \leq r\}$ enthalten ist, kann mithilfe des Polynoms $\hat{p}_m(z) = (c^{-1}(c - z))^m \in \tilde{\mathbb{P}}_m$ die folgende Abschätzung gewonnen werden:

$$\min_{p \in \tilde{\mathbb{P}}} \max_{i=1, \dots, n} |p(\lambda_i)| \leq \left| \frac{r}{c} \right|^m. \quad (3.22)$$

Mit Blick auf (3.19) und (3.22) folgt eine Abschätzung für das Residuum im m -ten Iterationsschritt des GMRES-Verfahrens der Form

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_m\|_2}{\|\mathbf{r}_0\|_2} \leq \left| \frac{r}{c} \right|^m. \quad (3.23)$$

Dementsprechend ist eine umso größere Konvergenzgeschwindigkeit zu erwarten, je kleiner der Radius r der Kreisscheibe $B_r(c)$ ist, und je weiter diese vom Ursprung entfernt liegt. Verallgemeinerungen der Resultate auf nicht-normale Matrizen sind beispielsweise in [LT04] nachzulesen und aktueller Stand der Forschung.

3.2.3 Bemerkungen zur algorithmischen Umsetzung des GMRES-Verfahrens

Mithilfe einer der Darstellungen aus Abschnitt 3.2.1 ist das GMRES-Verfahren vollständig beschrieben. Praktisch stellt sich jedoch die Frage, wie das Optimierungsproblem (3.16) innerhalb jeder Iteration möglichst mit geringem Aufwand gelöst werden kann. Zuerst erweist es sich als notwendig, eine Orthonormalbasis des Krylovraums \mathcal{K}_m zu erzeugen. Dies geschieht mithilfe eines modifizierten Gram-Schmidt-Verfahrens im Rahmen des folgenden Arnoldi-Algorithmus:

Bezeichne $\mathbf{V}_m \in \mathbb{C}^{N \times m}$, mit $\text{range}(\mathbf{V}_m) = \mathcal{K}_m$ sowie $\mathbf{V}_m^* \mathbf{V}_m = \mathbf{I}$ die aus den nach Algorithmus 3.1 definierten Basisvektoren \mathbf{v}_i erzeugte Matrix, so lässt sich gemäß [Saa03, S. 172] das Residuum (3.16) in Abhängigkeit des Koordinatenvektors \mathbf{y}_m wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_m} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_m\|_2 &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_m \mathbf{y}_m)\|_2 \\ &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{V}_m \mathbf{y}_m\|_2 \\ &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N} \|\beta \mathbf{e}_1 - \overline{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}_m\|_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Matrix $\overline{\mathbf{H}}_m$ beschreibt hierbei die $(m+1) \times m$ -dimensionale Hessenbergmatrix erzeugt nach Algorithmus 3.1. Das ursprüngliche Optimierungsproblem (3.16) lässt sich somit durch jenes aus Gleichung (3.24) ersetzen, welches ein lineares Ausgleichsproblem darstellt und beispielsweise im Rahmen einer QR-Zerlegung mittels Givens-rotation oder Householderverfahren gelöst werden kann. Zusammenfassend besteht das GMRES-Verfahren aus zwei wesentlichen Schritten:

Algorithmus 3.1 Modifiziertes Arnoldi-Verfahren

Eingang: Residuum \mathbf{r}_0 , Matrix \mathbf{A} , Dimension m des Krylovraums \mathcal{K}_m .

Ausgang: Orthonormale Basis $\{\mathbf{v}_i\}, i = 1 \dots m$ des Krylovraums \mathcal{K}_m , Hessenbergmatrix $\overline{\mathbf{H}}_m$.

Wähle $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{r}_0}{\beta}$ mit $\beta = \|r_0\|$

for $j = 1, 2, \dots, m$ **do**

$\mathbf{w}_j := \mathbf{A}\mathbf{v}_j$

for $l = 1, 2, \dots, j$ **do**

$\overline{\mathbf{H}}_{i,j} := \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle$

$\mathbf{w}_j := \mathbf{w}_j - \overline{\mathbf{H}}_{i,j} \mathbf{v}_i$

end for

$\overline{\mathbf{H}}_{j+1,j} := \|\mathbf{w}_j\|$

$\mathbf{v}_{j+1} := \frac{\mathbf{w}_j}{\overline{\mathbf{H}}_{j+1,j}}$

end for

1. Die Konstruktion einer orthonormalen Basis \mathbf{V}_m des Krylovraums \mathcal{K}_m mithilfe des Arnoldi-Verfahrens entsprechend Algorithmus 3.1.
2. Die Lösung des Optimierungsproblems (3.24) im Rahmen einer QR-Zerlegung mittels Givens-Rotation oder Householder-Verfahren.

Die Kosten des GMRES-Verfahrens werden von jenen des Arnoldi-Verfahrens dominiert. Von Bedeutung ist auch der Speicheraufwand des Verfahrens, da alle Basisvektoren $\mathbf{v}_i, i = 1 \dots m$ abgespeichert werden müssen, um abschließend die Näherungslösung $\tilde{\mathbf{x}}_m = \mathbf{V}_m \mathbf{y}_m$ berechnen zu können. Der im Laufe der Iteration des GMRES-Verfahrens ansteigende Speicheraufwand stellt somit insbesondere bei der Lösung hochdimensionaler Gleichungssysteme ein Problem dar. Um den Speicher- aufwand zu begrenzen, lässt sich das GMRES-Verfahren nach jeweils l Iterationen abbrechen, um dann den iterativen Prozess mit der aktuellen Iterierten als Startvektor neu zu starten. Diese Variante des GMRES-Verfahrens wird im Folgenden als GMRES(l)-Verfahren bezeichnet, dessen detaillierte Umsetzung in [Saa03, S. 179] nachzulesen ist. Ein Nachteil dieser Variante ist jedoch die mögliche Stagnation der Konvergenz, was wiederum die Notwendigkeit einer geeigneten Vorkonditionierung motiviert.

3.3 Vorkonditionierung

Unter einer geeigneten vorkonditionierenden Matrix für das Gleichungssystem (3.1), versteht man eine invertierbare Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, so dass $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \approx \mathbf{I}$. Mit Hinblick auf die Konvergenzeigenschaften des GMRES-Verfahrens gemäß Abschnitt 3.2.2,

sollte die Matrix \mathbf{M} so gewählt werden, so dass ein möglichst konzentriertes Spektrum der vorkonditionierenden Matrix $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ entsteht. Weiterhin sollte die Wirkung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ des Vorkonditionierers mit möglichst geringem numerischen Aufwand zu berechnen sein. Interpretiert man die Iterationsvorschrift (3.2) als Fixpunktiteration zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (3.25)$$

so folgt aus

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} \quad (3.26)$$

eine äquivalente Darstellung von (3.25) der Form

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.27)$$

Das System (3.27) hat somit die Gestalt eines zu (3.1) gehörigen vorkonditionierten Systems. Hierbei ist die Matrix \mathbf{M} wie folgt definiert:

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}, \quad (\text{Jacobi}), \quad (3.28)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E}, \quad (\text{Vorwärts-Gauss-Seidel}). \quad (3.29)$$

Der Fokus der folgenden Kapitel liegt in der Konstruktion eines geeigneten Vorkonditionierers der Gestalt (3.28) bzw. (3.29) zur Lösung des Gleichungssystems mittels des GMRES(l)-Verfahrens, resultierend aus der FE-Diskretisierung der vektoriellen Helmholtzgleichung. Grundlage hierfür stellt das im nächsten Schritt eingeführte nicht-überlappende DD-Verfahren dar.

Kapitel 4

Nicht-überlappende Gebietszerlegungsverfahren für die vektorielle Helmholtz-Gleichung

Nicht-überlappende DD-Verfahren haben in den letzten Jahren zunehmend an Aufmerksamkeit gewonnen. Insbesondere im Rahmen der Simulation elektromagnetischer Strukturen haben sie sich als effektives Werkzeug herausgestellt. Ein Schwerpunkt der Forschung liegt diesbezüglich insbesondere auf der Konstruktion geeigneter TCs. In der Arbeit von Després [DJER92], wurden TCs erster Ordnung vorgeschlagen und die damit verbundenen Konvergenzeigenschaften untersucht: Während die Dämpfung ausbreitungsfähiger Fehlerkomponenten gewährleistet ist, erfahren evanescente modale Fehlerkomponenten keine Dämpfung. Um dieses Konvergenzverhalten positiv zu beeinflussen, liegt der Fokus aktueller Forschung auf der Erweiterung TCs durch Hinzunahme zusätzlicher tangentialer Differentialoperatoren. Aufbauend auf den Arbeiten [RL10], [PRL10], [RGG06] und [DGL⁺15] werden innerhalb dieses Kapitels TCs höherer Ordnung eingeführt und im Rahmen eines iterativen DD-Verfahrens einer detaillierten Konvergenzanalyse unterzogen. Nicht-überlappende DD-Verfahren basieren auf einer Zerlegung des zugrundeliegenden Feldgebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ in N_D nicht-überlappende Teilgebiete Ω_i , mit $i \in \{1 \dots N_D\}$. Die hieraus resultierende Zerlegung des Feldgebiets wird somit durch

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_D} \Omega_i, \quad (4.1a)$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad (4.1b)$$

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}. \quad (4.1c)$$

beschrieben, so dass durch die Zerlegung des Feldgebiets Ω gemäß (4.1) zusätzliche Grenzflächen Γ_{ij} , mit $i, j \in \{1, \dots, N_D\}$ entstehen. Zur Vereinfachung der Notation,

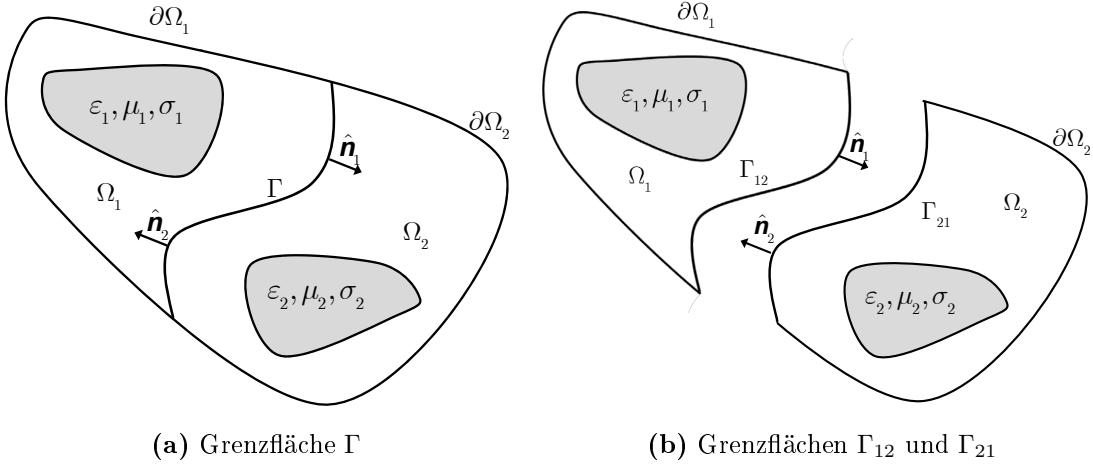


Abbildung 4.1: Zerlegung des Gebiets Ω in die beiden Teilgebiete Ω_1 und Ω_2

basieren die nachfolgenden Betrachtungen stets auf einer Zerlegung in die beiden nicht-überlappenden Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 der Form

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (4.2a)$$

$$\Gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}. \quad (4.2b)$$

Die Zerlegung ist exemplarisch in Abbildung 4.1 dargestellt. Auf Grundlage der geometrischen Zerlegung des ursprünglichen Feldgebiets Ω in die beiden nicht-überlappenden Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 gemäß (4.2) lässt sich unter Berücksichtigung geeigneter Stetigkeitsbedingungen ein zum ursprünglichen Randwertproblem (2.34) äquivalentes Problem aufstellen. Dieses hat die folgende Gestalt:

Problem 4.1 (Zweigebiets-Randwertproblem).

$$\nabla \times \mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1 - k_0^2 \epsilon_{r1} \mathbf{E}_1 = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_{i1} \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.3a)$$

$$\nabla \times \mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2 - k_0^2 \epsilon_{r2} \mathbf{E}_2 = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_{i2} \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.3b)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.3c)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1) = \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.3d)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E^1, \quad (4.3e)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E^2, \quad (4.3f)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = jk_0 \eta_0 \mathbf{h}_1 \quad \text{auf } \Gamma_H^1, \quad (4.3g)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) = jk_0 \eta_0 \mathbf{h}_2 \quad \text{auf } \Gamma_H^2, \quad (4.3h)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_A^1, \quad (4.3i)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_A^2, \quad (4.3j)$$

wobei die Restriktion Γ_X^1 und Γ_X^2 , für $X \in \{E, H, A\}$ wie folgt definiert sind:

$$\Gamma_X^1 = \Gamma_X \cap \partial\Omega_1, \quad (4.4)$$

$$\Gamma_X^2 = \Gamma_X \cap \partial\Omega_2 \quad \text{für } X \in \{E, H, A\}. \quad (4.5)$$

Weiterhin bezeichnen die Größen \mathbf{J}_{i1} , \mathbf{J}_{i2} , \mathbf{h}_1 und \mathbf{h}_2 die den Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 zugeordneten Restriktionen der in Problem 2.1 definierten Anregungen \mathbf{h} und \mathbf{J}_i . Es ist zu erkennen, dass Problem 4.1 neben den durch Restriktion des globalen Randwertproblems entstandenen lokalen Gleichungen (4.3a) und (4.3b) zusätzliche TCs (4.3c)-(4.3d) auf der Grenzfläche Γ vorschreibt. Diese stellen notwendige Stetigkeitsbedingungen für die elektrische Feldstärke und die magnetische Erregung dar und führen zur Äquivalenz des globalen Randwertproblems (2.1) und jenem nach Problem 4.1:

Satz 4.1 (Äquivalenz). *Das Randwertproblem nach Problem 2.1 und jenes nach Problem 4.1 sind äquivalent.*

Beweis. Seien

$$a_1 : \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (4.6)$$

$$a_2 : \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (4.7)$$

$$f_1 : \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (4.8)$$

$$f_2 : \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (4.9)$$

die Restriktionen der global definierten Bilinearform $a : \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ und des linearen Funktional $f : \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ nach (2.37) und (2.38) auf die Teilgebiete Ω_1 bzw. Ω_2 . Die schwache Form von Randwertproblem (4.3) lautet hiermit:

Finde $\mathbf{E}_1 \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1)$ und $\mathbf{E}_2 \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2)$, so dass:

$$a_1(\mathbf{E}_1, \mathbf{v}_1) = f_1(\mathbf{v}_1) \quad \forall \mathbf{v}_1 \in \mathbf{H}_\Gamma(\text{rot}, \Omega_1), \quad (4.10a)$$

$$a_2(\mathbf{E}_2, \mathbf{v}_2) = f_2(\mathbf{v}_2) \quad \forall \mathbf{v}_2 \in \mathbf{H}_\Gamma(\text{rot}, \Omega_2), \quad (4.10b)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1) = \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.10c)$$

$$a_1(\mathbf{E}_1, R_1 \boldsymbol{\lambda}) + a_2(\mathbf{E}_2, R_2 \boldsymbol{\lambda}) = f_1(R_1 \boldsymbol{\lambda}) + f_2(R_2 \boldsymbol{\lambda}), \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}^\Gamma \quad (4.10d)$$

mit

$$\mathbf{H}_\Gamma(\text{rot}, \Omega_i) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_i) : \pi_t(\mathbf{u}) = 0 \text{ auf } \Gamma\}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{V}^\Gamma := \{\mathbf{w} : \mathbf{w} = \pi_t(\mathbf{u}) \text{ auf } \Gamma \text{ für } \mathbf{u} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega)\} \quad (4.12)$$

und den beliebigen Fortsetzungsoperatoren $R_1 : \mathbf{V}^\Gamma \rightarrow \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1)$ und $R_2 : \mathbf{V}^\Gamma \rightarrow \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2)$. Die Gleichung (4.10d) stellt hierbei eine schwache Form der TC (4.3c) dar. Sei zunächst $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega)$ die Lösung des globalen Randwertproblems (2.34). Die Restriktionen \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 auf die jeweiligen Teilgebiete erfüllen somit die lokalen Gleichungen (4.10a) und (4.10b) sowie die Stetigkeitsbedingung (4.10c). Für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}^\Gamma$ sei

$$R\boldsymbol{\lambda} = \begin{cases} R_1 \boldsymbol{\lambda} & \text{in } \Omega_1, \\ R_2 \boldsymbol{\lambda} & \text{in } \Omega_2, \end{cases} \quad (4.13)$$

so dass $R\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega)$ und somit

$$a(\mathbf{E}, R\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{E}), \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}^\Gamma, \quad (4.14)$$

$$a_1(\mathbf{E}_1, R_1\boldsymbol{\lambda}) + a_2(\mathbf{E}_2, R_2\boldsymbol{\lambda}) = f_1(\mathbf{E}_1) + f_2(\mathbf{E}_2), \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{V}^\Gamma, \quad (4.15)$$

so dass (4.10d) ebenfalls erfüllt ist. Nun seien \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 die lokalen Lösung des schwachen Problems (4.10). Es bezeichne

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}_1 & \text{in } \Omega_1, \\ \mathbf{E}_2 & \text{in } \Omega_2, \end{cases} \quad (4.16)$$

die aus \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 zusammengesetzte Lösung. Gleichung (4.10c) impliziert $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Für ein beliebiges $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^0(\text{rot}, \Omega)$ gilt $\boldsymbol{\lambda} := \pi_T(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}^\Gamma$, so dass mit $R\boldsymbol{\lambda}$ nach (4.13), $(\mathbf{v}_1 - R_1\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{H}_\Gamma(\text{rot}, \Omega_1)$ und $(\mathbf{v}_2 - R_2\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{H}_\Gamma(\text{rot}, \Omega_2)$. Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (4.10a), (4.10b) und (4.10d) die Behauptung

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^2 a_i(\mathbf{E}_i, \mathbf{v}_i) + a_i(\mathbf{E}_i, R_i\boldsymbol{\lambda}) - a_i(\mathbf{E}_i, R_i\boldsymbol{\lambda}) \quad (4.17)$$

$$= \sum_{i=1}^2 [a_i(\mathbf{E}_i, (\mathbf{v}_i - R_i\boldsymbol{\lambda})) + a_i(\mathbf{E}_i, R_i\boldsymbol{\lambda})] \quad (4.18)$$

$$= f(\mathbf{v}). \quad (4.19)$$

□

4.1 Iterative Gebietszerlegungsverfahren

Die Berücksichtigung geeigneter TCs ermöglicht, auf Basis einer nicht-überlappenden Zerlegung des Feldgebiets ein zum ursprünglichen Randwertproblem äquivalentes Randwertproblem gemäß (4.3) zu formulieren. Der Vorteil einer solchen Gebietszerlegung besteht in der Möglichkeit, anstatt eines möglicherweise sehr komplexen Randwertproblems, iterativ eine Folge weniger komplexer Teilprobleme zu lösen. Eine solche Folge von Lösungen soll im weiteren Verlauf im Rahmen eines iterativen Prozesses konstruiert werden. Um die entstehenden Teilprobleme möglichst voneinander zu entkoppeln, erweist es sich als zweckmäßig, zwischen den beiden Rändern

$$\Gamma_{12} = \overline{\Omega_1} \cap \Gamma \text{ und } \Gamma_{21} = \overline{\Omega_2} \cap \Gamma \quad (4.20)$$

zu unterscheiden, so dass sich die TCs (4.3c) und (4.3d) im Rahmen von Problem 4.1 in äquivalenter Weise entsprechend

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.21a)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) = -\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.21b)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1) = \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.21c)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_2) = \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.21d)$$

angeben lassen. Während die TCs (4.21) nach Satz 4.1 hinreichende Äquivalenzbedingungen darstellen, sind sie im Rahmen eines iterativen Lösungsverfahrens nur bedingt geeignet: Werden beispielsweise die beiden Spuren $\mathbf{g}_t := \gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2)$ und $\mathbf{f}_t := \pi_T(\mathbf{E}_2)$ als bekannt vorausgesetzt, so stellen die Gleichungen (4.3a), (4.3g) und (4.3i) aus Problem 4.1 in Verbindung mit (4.21a) und (4.21c) ein lokales Randwertproblem der Form

$$\nabla \times \mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1 - k_0^2 \epsilon_{r1} \mathbf{E}_1 = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_{i1} \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.22a)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_A^1, \quad (4.22b)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = \mathbf{g}_t \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.22c)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1) = \mathbf{f}_t \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.22d)$$

dar. Erfolgt die Anregung bei einer Frequenz nahe der Resonanz des Teilgebiets Ω_1 , so erweist sich, insbesondere im Fall einer verschwindenden ABC, $\Gamma_A^1 = \emptyset$, das Problem (4.22) als zunehmend schlecht gestellt. Diese Tatsache lässt sich jedoch durch Umformen der TCs (4.21) umgehen. Diese lassen sich durch Linearkombination in der äquivalenten Darstellung

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.23a)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) = -\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.23b)$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ notieren. Sei $\mathbf{a}_t := -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2)$, so folgt in diesem Fall das lokale Randwertproblem der Form

$$\nabla \times \mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1 - k_0^2 \epsilon_{r1} \mathbf{E}_1 = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_{e1} \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.24)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_A^1, \quad (4.25)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) = \mathbf{a}_t \quad \text{auf } \Gamma_{12}. \quad (4.26)$$

Durch den Übergang von (4.21) auf die Linearkombinationen (4.23) folgt somit insbesondere auch im Fall $\Gamma_A^1 = \emptyset$ stets die Wohlgestelltheit des Problems. Die TCs (4.23) stellen Robinsche Randbedingungen dar und wurden erstmals im Rahmen eines iterativen DD-Verfahrens zur Lösung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung in der Arbeit [Des91] vorgestellt. Das dort vorgeschlagene iterative Verfahren lässt sich wie folgt notieren:

Problem 4.2 (Iteratives DD-Verfahren). *Zu gegebenen Initialwerten $(\mathbf{E}_1^0, \mathbf{E}_2^0)$, finde $(\mathbf{E}_1^n, \mathbf{E}_2^n) \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_2)$, so dass:*

$$\nabla \times \mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n - k_0^2 \epsilon_{r1} \mathbf{E}_1^n = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_{e1} \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.27a)$$

$$\nabla \times \mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n - k_0^2 \epsilon_{r2} \mathbf{E}_2^n = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_{e2} \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.27b)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) + \alpha \mathbf{E}_1^n = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{n-1}) + \alpha \mathbf{E}_2^{n-1} \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.27c)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) + \alpha \mathbf{E}_2^n = -\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^{n-1}) + \alpha \mathbf{E}_1^{n-1} \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.27d)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1^n) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E^1, \quad (4.27e)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_2^n) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E^2, \quad (4.27f)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) = jk_0 \eta_0 \mathbf{h}_1 \quad \text{auf } \Gamma_H^1, \quad (4.27g)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) = jk_0 \eta_0 \mathbf{h}_2 \quad \text{auf } \Gamma_H^2, \quad (4.27h)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_A^1, \quad (4.27i)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_A^2. \quad (4.27j)$$

Darüber hinaus zeigt die Arbeit [CDJP97] erstmals detaillierte Konvergenzresultate mithilfe einer Fourieranalyse. Die Ergebnisse zeigen die Schwächen einer TC erster Ordnung gemäß (4.27c) und (4.27d): Während ausbreitungsfähige Modenkomponenten der aus (4.2) resultierenden Fehlerfolge im Laufe der Iteration gedämpft werden, erfahren evaneszente Modenkomponenten keine Dämpfung. Die Konvergenz dieser evaneszenten Komponenten lässt sich jedoch, wie in der Arbeit [RGG06] gezeigt, mithilfe einer Erweiterung der TCs durch Hinzunahme tangentialer Differentialoperatoren erreichen. Dementsprechend seien die TCs wie nachfolgend in verallgemeinerter Form gegeben:

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1) = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.28a)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2) = -\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.28b)$$

wobei die Operatoren \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 verallgemeinerte Kopplungsoperatoren darstellen. Die TC gemäß (4.27c) und (4.27d) folgt durch die Wahl $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \alpha \mathcal{I}$. Hierbei beschreibt \mathcal{I} den Identitätsoperator. Unter Berücksichtigung dieser verallgemeinerten Kopplungsoperatoren lautet das iterative Verfahren schließlich:

Problem 4.3 (Iteratives DD-Verfahren). Zu gegebenen Startwerten $(\mathbf{E}_1^0, \mathbf{E}_2^0)$, finde $(\mathbf{E}_1^n, \mathbf{E}_2^n) \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_2)$, so dass

$$\nabla \times \mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n - k_0^2 \epsilon_{r1} \mathbf{E}_1^n = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_{e1} \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.29a)$$

$$\nabla \times \mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n - k_0^2 \epsilon_{r2} \mathbf{E}_2^n = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_{e2} \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.29b)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) + \mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1^n) = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{n-1}) + \mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2^{n-1}) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.29c)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) + \mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2^n) = -\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^{n-1}) + \mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1^{n-1}) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.29d)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1^n) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E^1, \quad (4.29e)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_2^n) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E^2, \quad (4.29f)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) = jk_0 \eta_0 \mathbf{h}_1 \quad \text{auf } \Gamma_H^1, \quad (4.29g)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) = jk_0 \eta_0 \mathbf{h}_2 \quad \text{auf } \Gamma_H^2, \quad (4.29h)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_A^1, \quad (4.29i)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_A^2. \quad (4.29j)$$

4.1.1 Der Halbraumfall

Es stellt sich nun die Frage nach dem Einfluss der Kopplungsoperatoren \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 auf die Konvergenzgeschwindigkeit des iterativen Lösungsverfahrens nach Problem 4.3. Dieser Abschnitt präsentiert eine detaillierte Konvergenzanalyse des iterativen DD-Verfahrens. Um das enthaltene Randwertproblem in eine möglichst einfache Gestalt zu überführen und somit analytische Lösungen angeben zu können, beschränkt sich die Konvergenzanalyse auf den Halbraumfall, eine Zerlegung des Gebiets der Form:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (4.30a)$$

$$\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0), \quad (4.30b)$$

$$\Omega_2 = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (4.30c)$$

$$\Gamma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \quad (4.30d)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma \cap \overline{\Omega}_1, \quad \Gamma_{21} = \Gamma \cap \overline{\Omega}_2. \quad (4.30e)$$

Weiterhin werden im weiteren Verlauf stets homogene Materialeigenschaften vorausgesetzt. Die betrachtete Zerlegung erlaubt aufgrund der unbeschränkten Geometrie des Randes Γ den Einsatz der Fouriertransformation. Im Rahmen der weiteren Konvergenzanalyse wird die Konvergenz der Fehlerfolge $(\mathbf{E}_1^n - \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2^n - \mathbf{E}_2)$ gegen die Nulllösung untersucht. Hierbei beschreibt $\mathbf{E}_i, i = 1, 2$ die exakte Lösung von Problem 4.1 und $\mathbf{E}_i^n, n \in \mathbb{N}, i = 1, 2$ die durch Problem 4.3 definierte Folge. Es sei bemerkt, dass dieses Vorgehen durch die Linearität des betrachteten Randwertproblems gerechtfertigt ist. Dieses Vorgehen führt unter den gemachten Einschränkungen an das Gebiet Ω auf das folgende homogene Randwertproblem für den Fehler, welcher im weiteren Verlauf mit $\mathbf{E}_i^n, n \in \mathbb{N}, i = 1, 2$ bezeichnet wird:

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_1^n = 0 \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.31a)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) + \mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1^n) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{n-1}) + \mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2^{n-1}) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.31\text{b})$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \nabla \times \mathbf{E}_1^n \times |\mathbf{r}|^{-1} \mathbf{r} + jk_0 \mathbf{E}_1^n = 0, \quad (4.31\text{c})$$

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_2^n = 0 \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.31\text{d})$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) + \mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2^n) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^{n-1}) + \mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1^{n-1}) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.31\text{e})$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \nabla \times \mathbf{E}_2^n \times |\mathbf{r}|^{-1} \mathbf{r} + jk_0 \mathbf{E}_2^n = 0. \quad (4.31\text{f})$$

Die Randbedingungen (4.31c) und (4.31f) werden als Silver-Müllersche-Abstrahlungsbedingungen bezeichnet und gewährleisten die Wohlgestelltheit des Randwertproblems (4.31) auch im Fall eines unbeschränkten Feldgebiets Ω [Né01]. Mithilfe der Fouriertransformation bezüglich der transversalen Koordinaten $\mathbf{r}_T = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ definiert durch

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}_T, z) = \mathcal{F}\mathbf{E} = \int_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}_T, z) e^{j\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{k}_T} d\mathbf{r}_T = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}_T, z) e^{j\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{k}_T} d\mathbf{r}_T, \quad (4.32)$$

wobei $\mathbf{k}_T = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$ die transversale Wellenzahl beschreibt, und unter Berücksichtigung der Identität

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F} \quad (4.33)$$

lässt sich das Randwertproblem (4.31) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\mathbf{E}}_1 + (|\mathbf{k}_T|^2 - k^2) \hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.34\text{a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \sigma_{\mathcal{B}_1} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1) \\ = -\mathcal{F}\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \sigma_{\mathcal{B}_2} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) \end{aligned} \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.34\text{b})$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla \times \hat{\mathbf{E}}_1 \times |z|^{-1} \mathbf{z} + jk_0 \hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{0} \quad (4.34\text{c})$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{E}}_2 + (|\mathbf{k}_T|^2 - k^2) \hat{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.34\text{d})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \sigma_{\mathcal{B}_2} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) \\ = -\mathcal{F}\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \sigma_{\mathcal{B}_1} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1) \end{aligned} \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.34\text{e})$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla \times \hat{\mathbf{E}}_2 \times |z|^{-1} \mathbf{x} + jk_0 \hat{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{0} \quad (4.34\text{f})$$

überführen. Zur Vereinfachung der Notation wurde an dieser Stelle auf den Iterationsindex $n \in \mathbb{N}$ verzichtet. Die Größen $\sigma_{\mathcal{B}_1}$ und $\sigma_{\mathcal{B}_2}$ in (4.34b) sowie (4.34e) bezeichnen hierbei die Symbole der Kopplungsoperatoren \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 , welche in Abhängigkeit der fouriertransformierten Tangentialkomponenten

$$\mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_1) = \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1) = [\hat{e}_{x,1}, \hat{e}_{y,1}, 0]^T, \quad (4.35)$$

$$\mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2) = \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) = [\hat{e}_{x,2}, \hat{e}_{y,2}, 0]^T, \quad (4.36)$$

entsprechend

$$\mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1) = \mathcal{F}^{-1}(\sigma_{\mathcal{B}_1} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1)), \quad (4.37)$$

$$\mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2) = \mathcal{F}^{-1}(\sigma_{\mathcal{B}_2} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2)) \quad (4.38)$$

definiert sind. Der Operator \mathcal{F}^{-1} beschreibt die inverse Fouriertransformation gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}\hat{\mathbf{E}} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}_T, z) e^{-j\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{k}_T} d\mathbf{k}_T. \quad (4.39)$$

Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (4.34a) und (4.34d) lassen sich unter Berücksichtigung der Ausstrahlungsbedingungen (4.34c) und (4.34f) wie folgt angeben:

$$\hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{a}(\mathbf{k}_T) e^{j\lambda z} \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.40a)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{b}(\mathbf{k}_T) e^{-j\lambda z} \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.40b)$$

wobei die Größe $\lambda = \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_T|^2}$ den Ausbreitungskoeffizienten beschreibt. Um die TCs (4.34b) und (4.34e) zu berücksichtigen, müssen die fouriertransformierten Spuren $\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1)$ und $\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2)$ berechnet werden. Mithilfe der Lösungen (4.40a) und (4.40b) lassen sich die damit verbundenen Symbole $\sigma_{\gamma_t,1}$ und $\sigma_{\gamma_t,2}$ im Sinne von

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = F^{-1}(\sigma_{\gamma,1} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1)) \quad (4.41a)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) = F^{-1}(\sigma_{\gamma,2} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2)) \quad (4.41b)$$

berechnen. Sie sind im folgenden Satz zusammengefasst dargestellt:

Satz 4.2. Seien \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 die Lösungen von Randwertproblem (4.31). Die Symbole $\sigma_{\gamma_t,1}$ und $\sigma_{\gamma_t,2}$ der Tangentialspuren gemäß Definition (4.41) sind gegeben durch

$$\sigma_{\gamma,1} = \sigma_{\gamma,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

$$\text{mit } \mathbf{R} = \frac{-1}{j\lambda\mu_r} \begin{bmatrix} k_y^2 - k^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 - k^2 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Beweis. Der Beweis beschränkt sich auf das Gebiet Ω_2 , analoges Vorgehen liefert die Behauptung ebenfalls in Ω_1 . Mithilfe einer Zerlegung der elektrischen Feldstärke in transversale und longitudinale Komponenten entsprechend $\mathbf{E}_2 = \pi_T(\mathbf{E}_2) + e_{z,2} \mathbf{e}_z$ sowie der entsprechenden Aufspaltung des Nablaoperators in transversale und longitudinale Komponenten gemäß $\nabla = \nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$ folgt für die Fouriertransformation des Spuroperators die Darstellung

$$\mathcal{F}\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) = \mathcal{F}\gamma_T\left(\mu_r^{-1} \left[\nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right] \times \mu_r^{-1} \left[\pi_T(\mathbf{E}_2) + e_{z,2} \mathbf{e}_z \right] \right)$$

$$= \mathcal{F}\gamma_T\left(\mu_r^{-1}\nabla_T \times e_{z,2}e_z\right) + \mathcal{F}\gamma_T\left(\mu_r^{-1}\frac{\partial}{\partial z}e_z \times \pi_T(\mathbf{E}_2)\right). \quad (4.44)$$

Mithilfe der tangentialen Fouriertransformation lässt sich der tangentiale Nablaoperator im Rahmen der Korrespondenz

$$\nabla_T \circ \bullet \mathbf{k}_T \quad (4.45)$$

angeben. Weiterhin folgt aus (4.40) für die Ableitung $\frac{\partial}{\partial z}e_z$ die Darstellung

$$\frac{\partial}{\partial z}e_z \rightarrow -j\lambda e_z, \quad (4.46)$$

so dass sich (4.44) unter Berücksichtigung von (4.45) und (4.46) durch

$$\begin{aligned} &= \gamma_T\left(\mu_r^{-1}\nabla_T \times \hat{e}_{z,2}e_z\right) - \gamma_T\left(\mu_r^{-1}j\lambda e_z \times \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2)\right) \\ &= \mu_r^{-1}\gamma_T\left(j\mathbf{k}_T \times \hat{e}_{z,2}e_z\right) + j\lambda\mu_r^{-1}\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) \end{aligned} \quad (4.47)$$

darstellen lässt. Die fouriertransformierte longitudinale Komponente $\hat{e}_{z,2}$ innerhalb des ersten Summanden von (4.47) lässt sich für Wellenzahlen $k \neq 0$ unter Berücksichtigung der Quellenfreiheit

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}_2) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}_2) = \mathbf{k} \cdot (\epsilon \hat{\mathbf{E}}_2) = 0 \quad (4.48)$$

durch die fouriertransformierten Transversalkomponenten $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1)$ in der Form

$$\hat{e}_{z,2} = \lambda^{-1}\mathbf{k}_T \cdot \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) \quad (4.49)$$

ausdrücken. Mit (4.49) folgt für den ersten Summanden in (4.47) die Darstellung

$$\begin{aligned} \mu_r^{-1}\gamma_T\left(j\mathbf{k}_T \times e_{z,2}e_z\right) &= \mu_r^{-1} \begin{bmatrix} jk_x \hat{e}_{z,2} \\ jk_y \hat{e}_{z,2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \mu_r^{-1} j \lambda^{-1} \begin{bmatrix} k_x (k_x \hat{e}_{x,2} + k_y \hat{e}_{y,2}) \\ k_y (k_x \hat{e}_{x,2} + k_y \hat{e}_{y,2}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \mu_r^{-1} j \lambda^{-1} \begin{bmatrix} k_x^2 & k_x k_y & 0 \\ k_x k_y & k_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_{x,2} \\ \hat{e}_{y,2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \mu_r^{-1} j \lambda^{-1} \begin{bmatrix} k_x^2 & k_x k_y & 0 \\ k_x k_y & k_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Unter Berücksichtigung von (4.50) folgt aus (4.47) schließlich die gesuchte Darstellung der fouriertransformierten Spur $\mathcal{F}\gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_2)$ in Abhängigkeit der Tangentialkomponenten $\mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2) = \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2)$ entsprechend

$$\mathcal{F}\gamma_T\left(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_2\right) = \mu_r^{-1}\gamma_T\left(j\mathbf{k}_T \times \hat{e}_{z,2}e_z\right) + j\gamma\mu_r^{-1}\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_r^{-1} j \lambda^{-1} \begin{bmatrix} k_x^2 & k_x k_y & 0 \\ k_x k_y & k_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) + \mu_r^{-1} \begin{bmatrix} j\lambda & 0 & 0 \\ 0 & j\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) \\
&= \frac{j}{\mu_r \lambda} \begin{bmatrix} -\lambda^2 - k_x^2 & -k_x k_y & 0 \\ -k_x k_y & -\lambda^2 - j k_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) \\
&= \frac{j}{\mu_r \lambda} \begin{bmatrix} k_y^2 - k^2 & -k_x k_y & 0 \\ -k_x k_y & k_x^2 - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) \\
&= \frac{-1}{j \lambda \mu_r} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2) = \sigma_{\gamma,2}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

□

Die erhaltenen Symbole der Spuroperatoren nach Satz 4.2 ermöglichen, auf Basis der Iterationsvorschriften (4.34b) und (4.34e) die Konvergenz der fouriertransformierten Tangentialspuren $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^n)$ und $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^n)$ auf den Rändern Γ_{12} und Γ_{21} näher zu analysieren. Einsetzen der Symbole $\sigma_{\gamma,1}$ und $\sigma_{\gamma,2}$ gemäß Satz 4.2 in die Kopp lungsgleichungen (4.34b) und (4.34e) führt auf den Zusammenhang

$$\mathbf{R} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^n) + \sigma_{\mathcal{B}_1} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^n) = -\mathbf{R} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^{n-1}) + \sigma_{\mathcal{B}_2} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^{n-1}) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \tag{4.52}$$

$$\mathbf{R} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^n) + \sigma_{\mathcal{B}_2} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^n) = -\mathbf{R} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^{n-1}) + \sigma_{\mathcal{B}_1} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^{n-1}) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \tag{4.53}$$

welcher ausschließlich in den Tangentialkomponenten formuliert ist. Unter der Annahme der Regularität der Matrizen $[\mathbf{R} + \sigma_{\mathcal{B}_1}] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ sowie $[\mathbf{R} + \sigma_{\mathcal{B}_2}] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ folgt aus (4.52) und (4.53) die Darstellung

$$\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^n) = [\mathbf{R} + \sigma_{\mathcal{B}_1}]^{-1} [\sigma_{\mathcal{B}_2} - \mathbf{R}] \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^{n-1}), \tag{4.54}$$

$$\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^n) = [\mathbf{R} + \sigma_{\mathcal{B}_2}]^{-1} [\sigma_{\mathcal{B}_1} - \mathbf{R}] \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^{n-1}), \tag{4.55}$$

woraus sich unter Berücksichtigung des Initialfehlers $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^0)$ und $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^0)$ die gesuchte Iterationsvorschrift

$$\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^{2n}) = \mathbf{B}_1 \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^0), \tag{4.56}$$

$$\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^{2n}) = \mathbf{B}_2 \pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^0) \tag{4.57}$$

ableiten lässt. Die beiden Iterationsmatrizen \mathbf{B}_1 und \mathbf{B}_2 sind definiert durch

$$\mathbf{B}_1 = \left([\mathbf{R} + \sigma_{\mathcal{B}_1}]^{-1} [\sigma_{\mathcal{B}_2} - \mathbf{R}] \right) \left([\mathbf{R} + \sigma_{\mathcal{B}_2}]^{-1} [\sigma_{\mathcal{B}_1} - \mathbf{R}] \right), \tag{4.58a}$$

$$\mathbf{B}_2 = \left([\mathbf{R} + \sigma_{\mathcal{B}_2}]^{-1} [\sigma_{\mathcal{B}_1} - \mathbf{R}] \right) \left([\mathbf{R} + \sigma_{\mathcal{B}_1}]^{-1} [\sigma_{\mathcal{B}_2} - \mathbf{R}] \right). \tag{4.58b}$$

Mit Hinblick auf den Zusammenhang (4.58) konvergieren die Fehlerfolgen $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^n)$ und $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^n)$ genau dann gegen die Nulllösung, wenn der Spektralradius der Iterationsmatrizen \mathbf{B}_2 und \mathbf{B}_1 den Bedingungen

$$\rho(\mathbf{B}_1) < 1, \quad (4.59)$$

$$\rho(\mathbf{B}_2) < 1 \quad (4.60)$$

genügt. Aufgrund der Eindeutigkeit des Randwertproblems (4.31) impliziert die Konvergenz der Tangentialkomponenten ebenfalls die Konvergenz der Fehlerfolgen $\hat{\mathbf{E}}_1^n$ und $\hat{\mathbf{E}}_2^n$ im inneren der Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 . Insbesondere resultiert die Wahl einer TC gemäß

$$\sigma_{\mathcal{B}_1} = \sigma_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{R} \quad (4.61)$$

in einem verschwindenden Spektralradius der Iterationsmatrizen gemäß $\rho(\mathbf{B}_1) = \rho(\mathbf{B}_2) = 0$. Unter Berücksichtigung einer Kopplung gemäß (4.61) konvergiert die Fehlerfolge innerhalb von zwei Iterationen gegen die Nulllösung. Ein Kopplungsoperator der Gestalt (4.61) repräsentiert dementsprechend einen im Sinne der Konvergenzgeschwindigkeit optimalen Kopplungsoperator. Dieser dem Symbol $\sigma_{\mathcal{B}} = \mathbf{R}$ zugehörige Operator, welcher die Tangentialkomponente $\pi_T(\mathbf{E})$ der Lösung des Randwertproblems auf die zugehörige Spur $\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E})$ abbildet entspricht dem DtN-Operator und ist im Rahmen des folgenden Satzes definiert.

Satz 4.3. *Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ ein Gebiet, wobei $\Gamma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ den Rand darstellt. Unter der Voraussetzung homogener Materialeigenschaften sei \mathbf{E} die Lösung des Randwertproblems*

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.62)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}) = \mathbf{g}_\Gamma \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.63)$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \nabla \times \mathbf{E} \times |\mathbf{r}|^{-1} \mathbf{r} + jk_0 \mathbf{u} = 0. \quad (4.64)$$

Bezeichne weiterhin \mathcal{L}^{-1} den zu Randwertproblem (4.62) zugehörige Lösungsoperator, so dass $\mathbf{E} = \mathcal{L}^{-1} \mathbf{g}_\Gamma = \mathcal{L}^{-1} \pi_T(\mathbf{E})$. Der Operator \mathcal{C} definiert durch

$$\mathcal{C} \pi_T(\mathbf{E}) := \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times (L^{-1} \pi_T(\mathbf{E}))) \quad \text{auf } \Gamma \quad (4.65)$$

wird im Folgenden mit Dirichlet-zu-Neumann Operator bezeichnet. Das Symbol $\sigma_{\mathcal{C}}$ des Operators \mathcal{C} , so dass

$$\mathcal{C} \pi_T(\mathbf{E}) = F^{-1} [\sigma_{\mathcal{C}} \pi_T(\hat{\mathbf{E}})], \quad (4.66)$$

ist gegeben durch

$$\sigma_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}), \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \frac{-1}{j \lambda \mu_r} \begin{bmatrix} k_y^2 - k^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 - k^2 \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

wobei $\hat{\mathbf{E}}$ die Fouriertransformierte der Lösung \mathbf{E} von (4.62) darstellt.

Beweis. Die Aussage ist eine direkte Folgerung aus Satz 4.2. \square

Die Definition (4.66) des DtN-Operators \mathcal{C} zeigt insbesondere dessen nicht-lokale Struktur, da dessen Anwendung die Lösung von Randwertproblem (4.62) beinhaltet. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird eine Möglichkeit zur Diskretisierung des iterativen DD-Verfahrens (4.31) vorgestellt. Auf Basis der bisherigen Resultate würde es nahe liegen, in diesem Rahmen eine diskrete Version des DtN-Operators zur Kopplung heranzuziehen. Die Diskretisierung des DtN-Operators [MP96] im Rahmen eines numerischen Verfahrens resultiert jedoch aufgrund seiner globalen Struktur in einer dicht besetzten Matrix, so dass dessen Umsetzung einen hohen numerischen Aufwand mit sich bringt. Um die Kosten im Rahmen einer Diskretisierung zu reduzieren, bedient man sich in der Praxis lokaler, durch Differentialoperatoren darstellbarer Approximationen des DtN-Operators, welche im Folgenden motiviert werden sollen.

4.1.2 Approximation des Dirichlet-zu-Neumann Operators

Auf Basis des Symbols \mathbf{R} des DtN-Operators \mathcal{C} nach Satz 4.3 lassen sich zugehörige lokale Approximationen des Operators gewinnen: Die inverse Fouriertransformation des Ausbreitungskoeffizienten $\lambda = \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_T|^2}$ resultiert in der Darstellung

$$\mathcal{F}^{-1}\lambda = k\mathcal{F}^{-1}\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}_T|^2}{k^2}} = k\left(\mathbf{I} - \frac{1}{k^2}\Delta_T\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.68)$$

wobei Δ_T den tangentialen Laplace Operator auf Γ darstellt [Né01]. Weiterhin sei das Symbols σ_R des zweifach angewendeten tangentialen Rotationsoperators entsprechend

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E})) &= \sigma_R \pi_T(\hat{\mathbf{E}}) \\ &= -\mathbf{k}_T \times \mathbf{k}_T \times \pi_T(\hat{\mathbf{E}}) \\ &= \begin{bmatrix} k_y^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 \end{bmatrix} \pi_T(\hat{\mathbf{E}}), \end{aligned} \quad (4.69)$$

definiert. Durch Aufspalten des Symbols \mathbf{R} des DtN-Operators \mathcal{C} nach Satz (4.3) gemäß

$$\frac{-1}{j\lambda\mu_r} \begin{bmatrix} k_y^2 - k^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 - k^2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{j\lambda\mu_r} \left(\begin{bmatrix} k_y^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k^2 & 0 \\ 0 & -k^2 \end{bmatrix} \right) \quad (4.70)$$

folgt durch Anwendung der inversen Fouriertransformation auf Gleichung (4.70), die folgende Darstellung des DtN-Operators \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^{-1} \mathcal{C}_2, \quad (4.71a)$$

$$\text{wobei } \mathcal{C}_1 = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{k^2} \Delta_T \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.71b)$$

$$\mathcal{C}_2 = \frac{1}{j\mu_r k} \left(\text{rot}_\Gamma \text{rot}_\Gamma - k^2 \mathbf{I} \right). \quad (4.71c)$$

Die TCs (4.31b) und (4.31e) haben unter Berücksichtigung einer DtN-Kopplung gemäß $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{C}$ die Gestalt

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \mathcal{C} \pi_T(\mathbf{E}_1) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathcal{C} \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.72)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathcal{C} \pi_T(\mathbf{E}_2) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \mathcal{C} \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.73)$$

und lassen sich mithilfe der beiden Operatoren \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 nach (4.71) sowie dem Zusammenhang $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^{-1} \mathcal{C}_2$ in die äquivalente Darstellung

$$\mathcal{C}_1 \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \mathcal{C}_2 \pi_T(\mathbf{E}_1) = -\mathcal{C}_1 \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathcal{C}_2 \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.74)$$

$$\mathcal{C}_1 \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathcal{C}_2 \pi_T(\mathbf{E}_2) = -\mathcal{C}_1 \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \mathcal{C}_2 \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.75)$$

überführen. Die Darstellungen (4.74)-(4.75) stellen die Grundlage einer Vielzahl lokaler Approximationen dar [RL10],[BAG14]. Die in dieser Arbeit genutzte Approximation des DtN-Operators nach [RL10] basiert auf einer Näherung des Operators \mathcal{C}_1 entsprechend

$$\mathcal{C}_1 \approx \mathbf{I} + \gamma \text{grad}_T \text{div}_T, \quad (4.76a)$$

$$\mathcal{C}_2 = \alpha \mathbf{I} + \beta \text{rot}_T \text{rot}_T, \quad (4.76b)$$

mit den komplexwertigen Parametern $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$. Der approximierte Operator \mathcal{C}_1 sowie der Operator \mathcal{C}_2 beinhalten ausschließlich tangentiale Differentialoperatoren und lassen sich im Gegensatz zur der DtN-Abbildung aufgrund ihrer lokalen Gestalt durch eine schwach besetzte Matrix im Rahmen eines Diskretierungsverfahrens darstellen. Auf Basis der Größen \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 nach (4.76) lassen sich somit die folgenden Kopplungsoperatoren gewinnen:

$$\mathcal{B}_1(\mathbf{E}) = \alpha \pi_T(\mathbf{E}), \quad (4.77a)$$

$$\mathcal{B}_{TE}(\mathbf{E}) = \alpha \pi_T(\mathbf{E}) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}), \quad (4.77b)$$

$$\mathcal{B}_{TM}(\mathbf{E}) = \alpha \pi_T(\mathbf{E}) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}), \quad (4.77c)$$

$$\mathcal{B}_C(\mathbf{E}) = \alpha \pi_T(\mathbf{E}) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}), \quad (4.77d)$$

mit den komplexen Größen α, β und γ . Die weiteren Ausführungen beschränken sich auf die Kopplungsoperatoren $\mathcal{B}_X, X \in \{1, TE, TM, C\}$.

4.1.3 Analyse lokaler Kopplung im Halbraumfall

Nachdem Ausgehend von der optimalen Form \mathcal{C} des Kopplungsoperators \mathcal{B} die lokalen Approximationen nach Definition 4.1.2 motiviert wurden, soll eine Aussage über

das Konvergenzverhalten des iterativen DD-Verfahrens (4.31) unter Berücksichtigung der Kopplungsoperatoren $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{TE}, \mathcal{B}_{TM}$ sowie \mathcal{B}_C nach (4.77) getroffen werden. Darüber hinaus soll in diesem Rahmen eine konkrete Wahl der Parameter α, β und γ aus Definition 4.1.2 vorgestellt werden. Die Konvergenzanalyse beschränkt sich analog den bisherigen Betrachtungen auf den Fall homogener Materialbeziehungen sowie den Halbraumfall entsprechend einer Gebietszerlegung gemäß (4.30). In diesem Fall lassen sich die Fehler \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 innerhalb der beiden Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 entsprechend

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^{TE} + \mathbf{E}_1^{TM}, \quad (4.78a)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^{TE} + \mathbf{E}_2^{TM} \quad (4.78b)$$

in die transversal-elektrischen (TE) und transversal-magnetischen (TM) Komponenten zerlegen, welche wiederum selbst Lösungen des homogenen Problems (4.31) darstellen [Har01b]. Diese Zerlegung ermöglicht somit eine separate Konvergenzanalyse für TE- und TM-Moden. Sie erlaubt insbesondere, die Symbole der in den Kopplungsoperatoren nach (4.77) enthaltenen Differentialoperatoren in eine möglichst einfache Gestalt zu überführen, welche im folgenden Satz dargestellt sind.

Satz 4.4 (Halbraum-Fall, TE-TM). *Es seien \mathbf{E}_1^{TE} , \mathbf{E}_2^{TE} , sowie \mathbf{E}_1^{TM} und \mathbf{E}_2^{TM} die TE- sowie die TM-Komponenten der aus dem iterativen Verfahren (4.31) resultierenden Fehlerfolge. In Abhängigkeit der fouriertransformierten Tangentialkomponenten $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^{TM})$, $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^{TM})$, $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_1^{TE})$ und $\pi_T(\hat{\mathbf{E}}_2^{TE})$ lassen sich die folgenden Zusammenhänge gewinnen:*

$$\mathcal{F}(\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i^{TE})) = \frac{j\lambda}{\mu_r} \mathcal{F}(\pi_T(\mathbf{E}_i^{TE})), \quad (4.79a)$$

$$\mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_i^{TE})) = |\mathbf{k}_T|^2 \mathcal{F}(\pi_T(\mathbf{E}_i^{TE})), \quad (4.79b)$$

$$\mathcal{F}(\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i^{TE})) = 0 \quad (4.79c)$$

für die TE-Komponenten, sowie

$$\mathcal{F}(\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i^{TM})) = -\frac{k^2}{j\lambda\mu_r} \mathcal{F}(\pi_T(\mathbf{E}_i^{TM})), \quad (4.79d)$$

$$\mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_i^{TM})) = 0, \quad (4.79e)$$

$$\mathcal{F}(\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i^{TM})) = -\frac{|\mathbf{k}_T|^2 k^2}{j\lambda\mu_r} \mathcal{F}(\pi_T(\mathbf{E}_i^{TM})) \quad (4.79f)$$

für TM-Komponenten und $i \in \{1, 2\}$.

Beweis. Der Beweis beschränkt sich wiederum auf das Teilgebiet Ω_2 und lässt sich analog für das Gebiet Ω_1 führen. Die Zerlegung in TE- und TM-Komponenten sowie die Quellenfreiheit der Feldgrößen erlauben die Darstellung der Feldgrößen mithilfe von Einkomponenten-Vektorpotentialen [Har01b] der Form

$$\mathbf{F}_2 = F_{z2} \mathbf{e}_z \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.80a)$$

$$\mathbf{A}_2 = A_{z2} \mathbf{e}_z \quad \text{in } \Omega_2. \quad (4.80\text{b})$$

Die z -Komponenten des elektrischen Vektorpotentials \mathbf{F}_2 und des magnetischen Vektorpotentials \mathbf{A}_2 genügen hierbei den homogenen Differentialgleichungen

$$-\Delta F_{z2} - k^2 F_{z2} = 0 \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.81\text{a})$$

$$-\Delta A_{z2} - k^2 A_{z2} = 0 \quad \text{in } \Omega_2. \quad (4.81\text{b})$$

Anwendung der transversalen Fouriertransformation (4.32) überführt die partiellen Differentialgleichungen (4.81) in die gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$-\frac{\partial}{\partial z} \hat{F}_{z2} + (|\mathbf{k}_T|^2 - k^2) \hat{F}_{z2} = 0 \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.82\text{a})$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \hat{A}_{z2} + (|\mathbf{k}_T|^2 - k^2) \hat{A}_{z2} = 0 \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.82\text{b})$$

deren Lösungen unter der Berücksichtigung der Austrahlungsbedingungen (4.34c) und (4.34f) durch

$$\hat{F}_{z2} = a_1(\mathbf{k}_T) e^{-j\lambda z} \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.83)$$

$$\hat{A}_{z2} = b_1(\mathbf{k}_T) e^{-j\lambda z} \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.84)$$

gegeben sind. Hierbei beschreibt $\lambda = \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_T|^2}$ analog zu den vorangegangenen Betrachtungen den Ausbreitungskoeffizienten. Ist die Lösung von (4.81) gefunden, folgt die elektrische Feldstärke im TE- bzw. TM-Fall entsprechend

$$\mathbf{E}_2^{TE} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times F_{z2} \mathbf{e}_z = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{e}_z \times \nabla_T F_{z2} = \frac{1}{\epsilon} \gamma_T (\nabla_T F_{z2}) \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{E}_2^{TM} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \times (\nabla \times A_{z2} \mathbf{e}_z) = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} (-j\lambda \nabla_T A_{z2} + |\mathbf{k}_T|^2 A_{z2} \mathbf{e}_z) \quad \text{in } \Omega_2. \quad (4.86)$$

Mithilfe der Zusammenhänge (4.85) und (4.86) lassen sich die fouriertransformierten Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke entsprechend

$$\mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TE}) = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{F}\gamma_T (\nabla_T F_{z2}), \quad (4.87)$$

$$\mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) = \frac{-\lambda}{\omega\epsilon\mu} \mathcal{F}\pi_T(\nabla_T A_{z2}) = \frac{-\lambda}{\omega\epsilon\mu} \mathcal{F}\gamma_T (\nabla_T A_{z2} \times \mathbf{e}_z) \quad (4.88)$$

durch Vektorpotentiale ausdrücken. Auf Basis einer Zerlegung des Nablaoperators in tangentiale und longitudinale Komponenten entsprechend

$$\nabla = \nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z = \nabla_T - j\lambda \mathbf{e}_z \quad (4.89)$$

und den Zusammenhängen (4.81) und (4.87) folgt für das fouriertransformierte Bild des Spuroperators γ_T unter der Voraussetzung von TE-Moden die Darstellung

$$\mathcal{F}\gamma_T (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{TE}) = -\frac{1}{\epsilon\mu_r} \mathcal{F}\gamma_T (\nabla \times \nabla \times F_{z2} \mathbf{e}_z)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\epsilon\mu_r} \mathcal{F}\gamma_T(-\Delta F_{z2}\mathbf{e}_z + \nabla(\nabla \cdot F_{z2}\mathbf{e}_z)) \\
&= -\frac{1}{\epsilon\mu_r} \mathcal{F}\gamma_T(k^2 F_{z2}\mathbf{e}_z - j\lambda \nabla_T F_{z2} - \lambda^2 F_{z2}\mathbf{e}_z) \\
&= -\frac{1}{\epsilon\mu_r} \mathcal{F}\gamma_T(|\mathbf{k}_T^2| F_{z2}\mathbf{e}_z - j\lambda \nabla_T F_{z2}) \\
&= \frac{j\lambda}{\epsilon\mu_r} \mathcal{F}\gamma_T(\nabla_T F_{z2}) = \frac{j\lambda}{\mu_r} \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TE}). \tag{4.90}
\end{aligned}$$

Darüber hinaus folgt aus Gleichung (4.88) unter Berücksichtigung von (4.89) das fouriertransformierte Bild des Spuroperators γ_T unter der Voraussetzung der Anwesenheit von TM-Moden gemäß

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{TM}) &= \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \mathcal{F}\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times (-j\lambda \nabla_T A_{z2} + |\mathbf{k}_T^2| A_{z2}\mathbf{e}_z)) \\
&= \frac{-j\lambda}{j\omega\epsilon\mu\mu_r} \mathcal{F}\gamma_T(\nabla \times \nabla_T A_{z2}) + \frac{|\mathbf{k}_T^2|}{j\omega\epsilon\mu\mu_r} \gamma_T(\nabla \times A_{z2}\mathbf{e}_z) \\
&= \frac{\lambda^2}{j\omega\epsilon\mu\mu_r} \gamma_T(\nabla_T A_{z2} \times \mathbf{e}_z) + \frac{|\mathbf{k}_T^2|}{j\omega\epsilon\mu\mu_r} \gamma_T(\nabla_T A_{z2} \times \mathbf{e}_z) \\
&= \frac{\lambda^2}{j\omega\epsilon\mu\mu_r} \frac{\omega\epsilon\mu}{-\lambda} \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) + \frac{|\mathbf{k}_T^2|}{j\omega\epsilon\mu\mu_r} \frac{\omega\epsilon\mu}{-\lambda} \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) \\
&= \frac{j\lambda}{\mu_r} \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) + \frac{j|\mathbf{k}_T^2|}{\mu_r\lambda} \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) \\
&= \frac{-1}{j\lambda\mu_r} (\lambda^2 + |\mathbf{k}_T^2|) \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) \\
&= \frac{-k^2}{j\lambda\mu_r} \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}). \tag{4.91}
\end{aligned}$$

Die verbleibenden gesuchten Gleichungen (4.79b), (4.79e), (4.79c) und (4.79f) folgen durch analoges Vorgehen entsprechend

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2^{TE})) &= -\frac{1}{\epsilon} \mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times (\nabla \times F_{z2}\mathbf{e}_z)) \\
&= -\frac{1}{\epsilon} \mathcal{F}(\nabla_T \times (\nabla_T(\nabla_T \cdot F_{z2}\mathbf{e}_z) - \Delta_T F_{z2}\mathbf{e}_z)) \\
&= -\frac{|\mathbf{k}_T^2|}{\epsilon} \mathcal{F}(\nabla_T \times F_{z2}\mathbf{e}_z) \\
&= |\mathbf{k}_T^2| \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2), \tag{4.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{TE})) &= \frac{j\lambda}{\mu_r} \mathcal{F}(\nabla_T \nabla_T \cdot \pi_T(\mathbf{E}_2^{TE})) \\
&= \frac{j\lambda}{\mu_r} \mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2^{TE})) + \frac{j\lambda}{\mu_r} \mathcal{F}\Delta_T \pi_T(\mathbf{E}_2^{TE})
\end{aligned}$$

$$= \frac{j\lambda}{\mu_r} |\mathbf{k}_T^2| \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TE}) - \frac{j\lambda}{\mu_r} |\mathbf{k}_T^2| \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TE}) = 0 \quad (4.93)$$

im TE-Fall und gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2^{TM})) &= \frac{j\lambda}{j\omega\epsilon\mu} \mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times (\pi_t(\nabla_T A_{z2}))) \\ &= \frac{j\lambda}{j\omega\epsilon\mu} \mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times (\nabla_T A_{z2})) = 0, \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{TM})) &= \frac{-k^2}{j\lambda\mu_r} \mathcal{F}(\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T \pi_T(\mathbf{E}_2^{TM})) \\ &= \frac{-k^2}{j\lambda\mu_r} \mathcal{F}(\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) + \Delta_T \pi_T(\mathbf{E}_2^{TM})) \\ &= \frac{|\mathbf{k}_T^2| k^2}{j\lambda\mu_r} \mathcal{F}\pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) \end{aligned} \quad (4.95)$$

unter der Annahme von TM-Moden. \square

Die Gleichungen (4.79e) und (4.79c) nach Satz 4.4 zeigen insbesondere, dass TE- und TM- Moden im Nullraum verschiedener tangentialer Differentialoperatoren liegen. Während für TE-Moden

$$\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{TE}) = 0 \quad (4.96)$$

folgt, lässt sich für TM-Moden der Zusammenhang

$$\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2^{TM}) = 0 \quad (4.97)$$

folgern. Auf die Konsequenz dieser Eigenschaft wird in Abschnitt 4.1.5 wieder eingegangen.

4.1.4 Verallgemeinerung auf beschränkte Grenzflächen

Die im Laufe der weiteren Untersuchungen gewonnenen analytischen Konvergenzresultate werden in Kapitel 5 im Rahmen der FE-Methode mittels eines numerischen Beispiels validiert. Die Gebietszerlegung (4.30) erweist sich in diesem Kontext aufgrund der unbeschränkten Grenzfläche Γ jedoch als ungeeignet. Somit erweist es sich als notwendig, die Gebietszerlegung auf eine beschränkte Grenzfläche zu verallgemeinern. Die bisherigen Betrachtungen basierend auf der Halbraumgeometrie ermöglichen aufgrund der Unbeschränktheit der Grenzfläche Γ nach (4.30d) den Einsatz der transversalen Fouriertransformation (4.32). Im Fall einer beschränkten Grenzfläche ist diese Vorgehensweise nicht mehr anwendbar, jedoch lassen sich die

Ergebnisse aus Satz 4.4 übertragen, was im Folgenden gezeigt werden soll. Unter Berücksichtigung des beschränkten Randes $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^2$ lautet die Gebietszerlegung

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (4.98a)$$

$$\Omega_1 = \tilde{\Gamma} \times (-\infty, 0), \quad \Omega_2 = \tilde{\Gamma} \times (0, \infty) \quad (4.98b)$$

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} \times \{0\}, \quad (4.98c)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma \cap \overline{\Omega}_1, \quad \Gamma_{21} = \Gamma \cap \overline{\Omega}_2. \quad (4.98d)$$

Unter der Voraussetzung ausschließlich perfekt elektrisch leitfähiger Ränder $\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{12}$ und $\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{21}$ lautet das Randwertproblem für die Fehlerfolgen \mathbf{E}_1^n und \mathbf{E}_2^n in diesem Fall

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_1^n = 0, \quad \text{in } \Omega_1, \quad (4.99a)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) + \mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1^n) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{n-1}) + \mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2^{n-1}), \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.99b)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1) = 0, \quad \text{auf } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{12}, \quad (4.99c)$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \nabla \times \mathbf{E}_1^n \times |\mathbf{r}|^{-1} \mathbf{r} + jk_0 \mathbf{E}_1^n = 0, \quad (4.99d)$$

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_2^n = 0, \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.99e)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) + \mathcal{B}_2(\mathbf{E}_2^n) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^{n-1}) + \mathcal{B}_1(\mathbf{E}_1^{n-1}), \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.99f)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_2) = 0, \quad \text{auf } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{21}, \quad (4.99g)$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \nabla \times \mathbf{E}_2^n \times |\mathbf{r}|^{-1} \mathbf{r} + jk_0 \mathbf{E}_2^n = 0. \quad (4.99h)$$

Zur Vereinfachung der Notation beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf das Gebiet Ω_2 . Analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 4.1.3 lässt sich die elektrische Feldstärke in TE- und TM-Moden gemäß (4.78) zerlegen und unter Zuhilfenahme der Einkomponenten-Vektorpotenziale \mathbf{F}_2 und \mathbf{A}_2

$$\mathbf{F}_2 = F_{z2} \mathbf{e}_z \quad \text{in } \Omega_2, \quad (4.100a)$$

$$\mathbf{A}_2 = A_{z2} \mathbf{e}_z \quad \text{in } \Omega_2 \quad (4.100b)$$

darstellen, welche wiederum dem homogenen Randwertproblem

$$-\Delta v_2 - k^2 v_2 = 0 \quad \text{in } \Omega_2, \quad v_2 \in \{A_{z2}, F_{z2}\}, \quad (4.101)$$

genügen. Aufgrund der beschränkten Geometrie der Grenzfläche ist es in diesem Fall nicht zulässig, die partielle Differentialgleichung (4.101) mithilfe der tangentialen Fouriertransformation in eine gewöhnliche Differentialgleichung zu überführen. Jedoch lässt sich mithilfe des Zerlegung des Laplaceoperators in tangentiale und transversale Komponenten gemäß

$$\Delta = \Delta_T + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4.102)$$

und einem Separationsansatz entsprechend

$$v_2(\mathbf{r}) = V_2(\mathbf{r}_T)Z_2(z) \quad (4.103)$$

die z -Abhängigkeit in der Differentialgleichung in der Form

$$-\Delta_T V_2(\mathbf{r}_T)Z_i(z) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}V_2(\mathbf{r}_T)Z_2(z) - k^2V_2(\mathbf{r}_T)Z_2(z) = 0 \quad \text{in } \Omega_2 \quad (4.104)$$

separieren. Somit lässt sich die Lösung von (4.104) unter der Berücksichtigung der Austrahlungsbedingungen (4.34c) und (4.34f) in der Form

$$v_2(\mathbf{r}) = V_2(\mathbf{r}_T)e^{-j\lambda z} \quad \text{in } \Omega_2 \quad (4.105)$$

angeben, womit sich die auftretenden Differentialoperatoren zu

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\lambda, \quad (4.106)$$

$$\Delta = \Delta_T - \lambda^2 \quad (4.107)$$

vereinfachen lassen. Einsetzen dieser Beziehungen in (4.104) liefert die Gleichung

$$-\Delta_T V_2 - (k^2 - \lambda^2) V_2 = 0 \quad \text{in } \Gamma_{21}. \quad (4.108)$$

Mit der Substitution $k_T^2 := k^2 - \lambda^2$ folgt schließlich

$$-\Delta_T V_2 - k_T^2 V_2 = 0 \quad \text{in } \Gamma_{21}. \quad (4.109)$$

Insbesondere bleiben die Gleichungen (4.85) und (4.88) zur Berechnung der elektrischen Feldstärke auf Basis der Vektorpotenziale \mathbf{A}_2 und \mathbf{F}_2 weiterhin gültig. Somit lassen sich die Berechnungen (4.90)-(4.95) im Rahmen des Beweises von Satz 4.4 durch die Substitution $k_T = |\mathbf{k}_T|$ auf diesen Fall übertragen. Während $|\mathbf{k}_T|$ im Fall einer unbeschränkten Grenzfläche den Betrag der transversalen Wellenzahl im Rahmen der Fouriertransformation darstellt, entspricht k_T unter Berücksichtigung eines beschränkten Randes einem Eigenwert. Das zugehörige Eigenwertproblem lautet mit (4.109) und unter Berücksichtigung der homogenen Dirichletrandbedingung (4.99g)

$$-\Delta_T V_2 = k_T^2 V_2, \quad \text{in } \Gamma_{21}, \quad (4.110)$$

$$V_2 = 0 \quad \text{auf } \partial\Gamma_{21}. \quad (4.111)$$

Mithilfe der Lösungen des Eigenwertproblems (4.110) und der Gleichung (4.105) folgen die gewünschten Zusammenhänge entsprechend

$$\gamma_T (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i^{TE}) = \frac{j\lambda}{\mu_r} \pi_T(\mathbf{E}_i^{TE}), \quad (4.112a)$$

$$\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_i^{TE}) = k_T^2 \pi_T(\mathbf{E}_i^{TE}), \quad (4.112b)$$

$$\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i^{TE}) = 0 \quad (4.112c)$$

für die TE-Komponenten, sowie

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i^{TM}) = -\frac{k^2}{j\lambda\mu_r} \pi_T(\mathbf{E}_i^{TM}), \quad (4.112d)$$

$$\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_i^{TM}) = 0, \quad (4.112e)$$

$$\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i^{TM}) = -\frac{k_T^2 k^2}{j\lambda\mu_r} \pi_T(\mathbf{E}_i^{TM}) \quad (4.112f)$$

für TM-Komponenten und $i \in \{1, 2\}$.

4.1.5 Konvergenzverhalten des iterativen Verfahrens

Die gewonnenen Resultate aus Satz 4.4 bzw. die Zusammenhänge in (4.112) ermöglichen nun eine detaillierte Konvergenzanalyse des iterativen DD-Verfahrens (4.29) unter Berücksichtigung der Kopplungsoperatoren (4.77). Ausgehend von der Iterationsvorschrift auf den Grenzflächen entsprechend

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^n) + \mathcal{B}_X(\mathbf{E}_1^n) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^{n-1}) + \mathcal{B}_X(\mathbf{E}_2^{n-1}) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.113)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2^n) + \mathcal{B}_X(\mathbf{E}_2^n) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1^{n-1}) + \mathcal{B}_X(\mathbf{E}_1^{n-1}) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.114)$$

mit $\mathcal{B}_X, X \in \{1, TE, TM, C\}$ nach (4.77) folgt durch Substitution der Gleichungen (4.112) die Iterationsvorschrift für die Tangentialkomponenten $\pi_T(\mathbf{E}_i)$, $i = 1, 2$ gemäß

$$\pi_T(\mathbf{E}_1^{2n}) = \rho_Y^Z \pi_T(\mathbf{E}_1^0) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (4.115a)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_2^{2n}) = \rho_Y^Z \pi_T(\mathbf{E}_2^0) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (4.115b)$$

worin $\mathbf{E}_i^0, i = 1, 2$ den Anfangsfehler beschreibt. Der Konvergenzfaktor ρ_Z^Y , mit $Y \in \{TE, TM\}$ und $Z \in \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{TE}, \mathcal{B}_{TM}, \mathcal{B}_C\}$ ist gegeben durch:

$$\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE} = \frac{j\lambda\mu_r^{-1} + \alpha}{-j\lambda\mu_r^{-1} + \alpha}, \quad (4.116a)$$

$$\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TE} = \frac{j\lambda\mu_r^{-1} + \alpha}{-j\lambda\mu_r^{-1} + \alpha}, \quad (4.116b)$$

$$\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TE} = \frac{j\lambda\mu_r^{-1} + \alpha + \beta k_T^2}{-j\lambda\mu_r^{-1} + \alpha + \beta k_T^2}, \quad (4.116c)$$

$$\rho_{\mathcal{B}_C}^{TE} = \frac{j\lambda\mu_r^{-1} + \alpha + \beta k_T^2}{-j\lambda\mu_r^{-1} + \alpha + \beta k_T^2} \quad (4.116d)$$

für TE-Moden, sowie

$$\rho_{\mathcal{B}_1}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha j\lambda\mu_r}{k^2 + \alpha j\lambda\mu_r}, \quad (4.117a)$$

$$\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha j \lambda \mu_r - \gamma k_T^2 k^2}{k^2 + \alpha j \lambda \mu_r - \gamma k_T^2 k^2}, \quad (4.117b)$$

$$\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha j \lambda \mu_r}{k^2 + \alpha j \lambda \mu_r}, \quad (4.117c)$$

$$\rho_{\mathcal{B}_C}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha j \lambda \mu_r - \gamma k_T^2 k^2}{k^2 + \alpha j \lambda \mu_r - \gamma k_T^2 k^2} \quad (4.117d)$$

für TM-Moden, mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Diskussion der Konvergenzfaktoren

Die geschlossene Form der Konvergenzfaktoren (4.116) und (4.117) ermöglicht im folgenden Schritt eine separate Konvergenzanalyse des iterativen DD-Verfahrens für TE- und TM-Komponenten der Fehlerfolge durchzuführen.

Kopplung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$

Unter Berücksichtigung des Kopplungsoperators niedrigster Ordnung $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ vereinfachen sich die Darstellungen (4.116a) und (4.117a) des Konvergenzfaktors zu

$$\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE} = \frac{j \lambda \mu_r^{-1} + \alpha}{-j \lambda \mu_r^{-1} + \alpha}, \quad \rho_{\mathcal{B}_1}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha j \lambda \mu_r}{k^2 + \alpha j \lambda \mu_r}. \quad (4.118)$$

Die Konvergenzfaktoren unterscheiden sich somit im Allgemeinen für TE-Felder und TM-Felder und hängen wesentlich von der Lage des Parameters $\alpha \in \mathbb{C}$ innerhalb der komplexen Ebene ab. Mit dem rein komplexen Parameter

$$\alpha = -j \mu_r^{-1} k \quad (4.119)$$

folgt aus (4.118) die Gleichheit der Konvergenzfaktoren

$$\rho_{\mathcal{B}_1} = \rho_{\mathcal{B}_1}^{TE} = \rho_{\mathcal{B}_1}^{TM} = \frac{k - \lambda}{k + \lambda}, \quad (4.120)$$

welche in Abbildung 4.2a exemplarisch für $k = 2$ rad/m dargestellt sind. Es ist zu erkennen, dass unter Berücksichtigung ausbreitungsfähiger Moden, $k > k_T$, und somit

$$\lambda = \sqrt{k^2 - k_T^2} \in \mathbb{R}^+ \quad (4.121)$$

der Konvergenzfaktor (4.120) stets kleiner als eins ist, während evaneszente Moden, $k < k_T$, und dementsprechend

$$\lambda = \sqrt{k^2 - k_T^2} \in j\mathbb{R}^+ \quad (4.122)$$

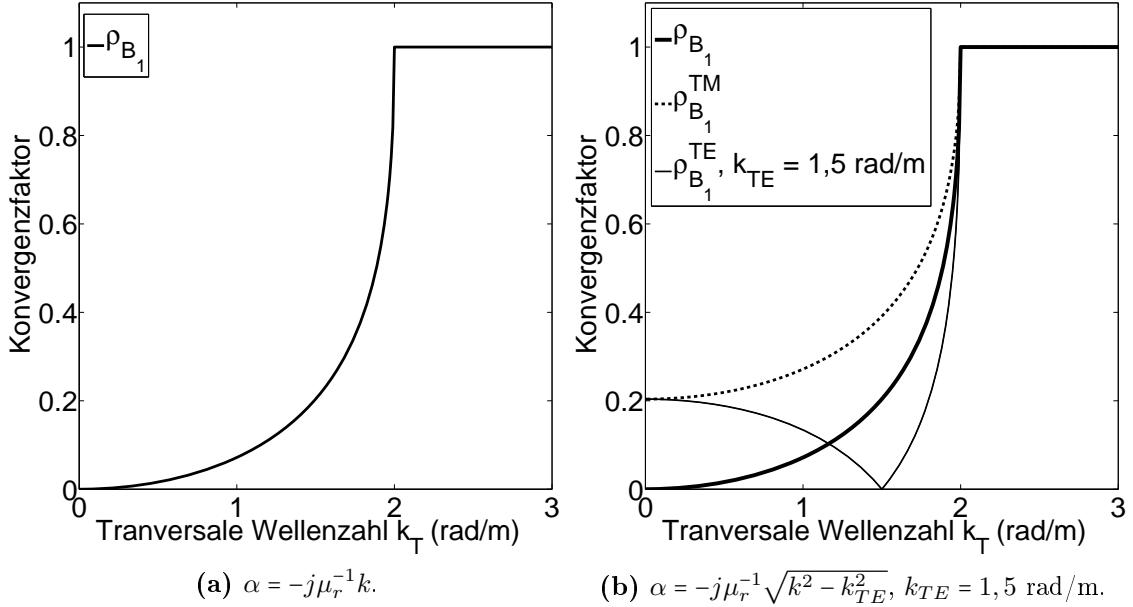


Abbildung 4.2: Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TM}$ für $k = 2 \text{ rad/m}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl k_T .

einen Konvergenzfaktor $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE} = \rho_{\mathcal{B}_1}^{TM} = 1$ erfahren. Somit erfahren ausbreitungsfähige TE- und TM-Komponenten des Fehlers im Rahmen des iterativen Verfahrens eine Dämpfung, während die evaneszenten Komponenten unbeeinflusst bleiben. Weiterhin sei bemerkt, dass der Konvergenzfaktor (4.120) eine Nullstelle bei $k = \lambda$ besitzt, was $k_T = 0$ impliziert. Diese Klasse von Feldern lässt sich im Halbraumfall mit normal einfallenden Wellen identifizieren. Hinsichtlich der allgemeinen Form (4.118) der Konvergenzfaktoren besitzen diese die von α abhängigen Nullstellen

$$\alpha = -\mu_r^{-1}j\lambda \Rightarrow \rho_{\mathcal{B}_1}^{TE}(\alpha) = 0 \quad \text{für TE-Moden,} \quad (4.123)$$

$$\alpha = -j\frac{k^2}{\lambda\mu_r} \Rightarrow \rho_{\mathcal{B}_1}^{TM}(\alpha) = 0 \quad \text{für TM-Moden.} \quad (4.124)$$

Dementsprechend lässt sich nach Abbildung 4.2b für eine vorgegebene transversale Wellenzahl $k_T = k_{T0}$ durch die Wahl

$$\alpha = -\mu_r^{-1}j\sqrt{k^2 - k_{TE}^2} \quad \text{für TE-Moden,} \quad (4.125)$$

$$\alpha = -j\frac{k^2}{\mu_r\sqrt{k^2 - k_{TM}^2}}, \quad \text{für TM-Moden} \quad (4.126)$$

eine Nullstelle des Konvergenzfaktors bei $k_T = k_{TM}$ bzw. $k_T = k_{TE}$ erreichen. Mit Blick auf Abbildung 4.2b bewirkt dies jedoch zum einen einen Anstieg des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE}$ für Wellenzahlen $k_T < k_{TE}$ und zum anderen eine Verschlechterung des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TM}$ für ausbreitungsfähige TM-Komponenten. Bisher wurde ein rein imaginärer Parameter $\alpha \in -j\mathbb{R}^+$ betrachtet. Durch Hinzunahme eines nicht-verschwindenden Realteils lässt sich nach Abbildung 4.3 die Konvergenz

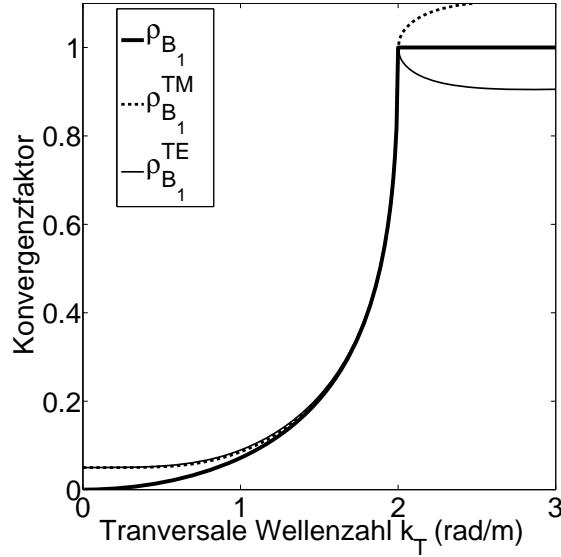


Abbildung 4.3: Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m und $\alpha = (-j\mu_r^{-1}k + 0.2)$ in Abhängigkeit von k_T .

evaneszenter TE-Felder erreichen. Dies bewirkt jedoch einerseits den Anstieg der Konvergenzfaktoren $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE}$ und $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TM}$ im Bereich ausbreitungsfähiger Moden und zum anderen einem Konvergenzfaktor $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TM} > 1$ im Fall evaneszenter TM-Felder. Unter Berücksichtigung einer TC erster Ordnung gemäß $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ ist somit die simultane Konvergenz sowohl ausbreitungsfähiger TE- und TM-Komponenten als auch evaneszenter TE- und TM-Komponenten nicht zu erreichen.

Kopplung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TM}$

Im weiteren Verlauf sei $\alpha = -jk\mu_r^{-1}$, so dass $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE} = \rho_{\mathcal{B}_1}^{TM} = \rho_{\mathcal{B}_1}$. Hiermit vereinfachen sich die Konvergenzfaktoren (4.116b) und (4.117b) im Rahmen zu

$$\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TE} = \frac{k - \lambda}{k + \lambda}, \quad (4.127)$$

$$\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TM} = \frac{k^2 - k\lambda - \gamma(k^2 - \lambda^2)k^2}{k^2 + k\lambda - \gamma(k^2 - \lambda^2)k^2}. \quad (4.128)$$

Die Gleichheit der Konvergenzfaktoren (4.128) und (4.120) zeigt, dass sich durch Erweiterung des Kopplungsoperators \mathcal{B}_1 auf \mathcal{B}_{TM} das Konvergenzverhalten der TE-Komponenten nicht verbessern lässt. Begründen lässt sich dieses Verhalten durch die Beobachtung, dass dieser Feldtyp nach (4.112c) im Nullraum des Operators $\nabla_t \nabla_t \cdot \gamma_T (\mu_r^{-1} \nabla \times \cdot)$ liegt. Weiterhin repräsentiert der Konvergenzfaktor $\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TM}$ nach (4.128) nun ein Polynom zweiten Grades in der Variable λ und lässt sich dementsprechend in die Darstellung

$$\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TM} = \frac{(k - \lambda)(\gamma k^2 + \gamma k \lambda - 1)}{(k + \lambda)(\gamma k^2 - \gamma k \lambda - 1)} \quad (4.129)$$

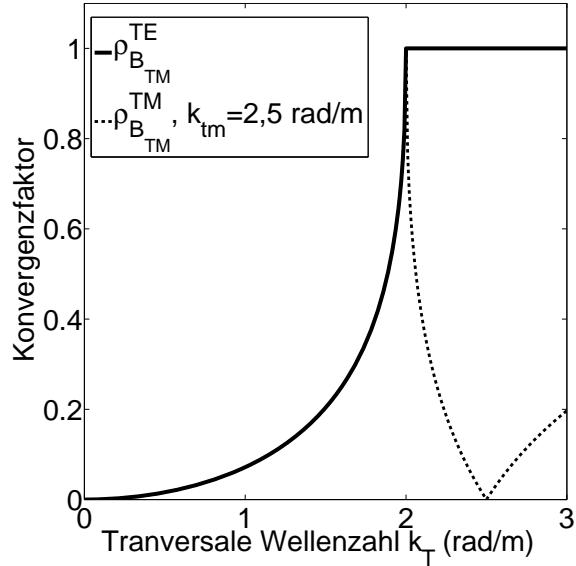


Abbildung 4.4: Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{B_{TM}}^{TE}$ bzw. $\rho_{B_{TM}}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m, $\alpha = -jk\mu_r^{-1}k$ und $\gamma = \frac{1}{k^2 + k\sqrt{k^2 - k_{tm}^2}}$, $k_{tm} = 2,5$ rad/m in Abhängigkeit von k_T .

überführen. Hieraus wird ersichtlich, dass neben der Nullstelle bei $\lambda = k$ eine zweite Nullstelle bei

$$\lambda = -\frac{\gamma k^2 - 1}{\gamma k} \quad (4.130)$$

existiert. Dementsprechend folgt bei Vorgabe einer transversalen Wellenzahl k_{tm} durch die Wahl

$$\gamma = \frac{1}{k^2 + k\lambda_{tm}}, \quad \text{mit} \quad \lambda_{tm} = \sqrt{k^2 - k_{tm}^2} \quad (4.131)$$

eine zusätzliche Nullstelle des Reflexionsfaktors $\rho_{B_{TM}}^{TM}$ an der Stelle $k_T = k_{tm}$. Durch die Vorgabe einer transversalen Wellenzahl $k_{tm} > k$ folgt insbesondere ein Konvergenzfaktor $\rho_{B_{TM}}^{TM} < 1$ für evanescente TM-Felder, während die ausbreitungsfähigen Felder unbeeinflusst bleiben. In Abbildung 4.4 ist dieses Verhalten exemplarisch für $k_{tm} = 2,5$ rad/m dargestellt.

Kopplung $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{TE}$

Eine TC gemäß $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{TE}$, resultiert mit $\alpha = -jk\mu_r^{-1}$ in den Konvergenzfaktoren (4.116c) und (4.117c) der Gestalt

$$\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TE} = \frac{j\lambda - jk + \beta(k^2 - \lambda^2)}{-j\lambda - jk + \beta(k^2 - \lambda^2)}, \quad (4.132)$$

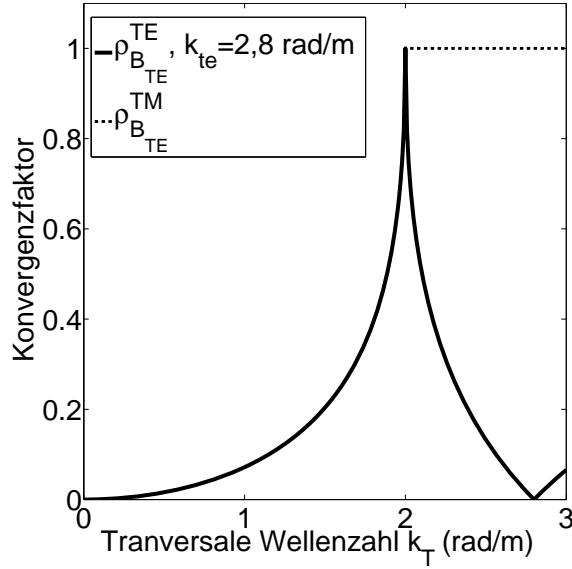


Abbildung 4.5: Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m, $\alpha = -j\mu_r^{-1}k$ und $\beta = \frac{j}{k + \sqrt{k^2 - k_{te}^2}}$, $k_{te} = 2,8$ rad/m in Abhängigkeit von k_T .

$$\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TM} = \frac{k - \lambda}{k + \lambda}. \quad (4.133)$$

Eine Zerlegung von (4.132) in Linearfaktoren entsprechend

$$\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TE} = \frac{(k - \lambda)(\beta k - \beta\lambda + j)}{(k + \lambda)(\beta k + \beta\lambda + j)} \quad (4.134)$$

zeigt neben der Nullstelle in $k = \lambda$ eine zweite Nullstelle in

$$\lambda = \frac{j - \beta k}{\beta}. \quad (4.135)$$

Bei vorgegebener transversaler Wellenzahl k_{te} führt somit die Wahl

$$\beta = \frac{j}{k + \lambda_{te}}, \quad \text{mit} \quad \lambda_{te} = \sqrt{k^2 - k_{te}^2} \quad (4.136)$$

auf einen verschwindenden Konvergenzfaktor $\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TE}$ an der Stelle $k_T = k_{te}$. Ähnlich zum vorangegangenen Fall lässt sich folglich durch die Wahl $k_{te} > k$ die Dämpfung evaneszenter TE-Komponenten erreichen. Ein erneuter Vergleich von (4.133) und (4.120) zeigt darüber hinaus, dass eine Erweiterung des Kopplungsoperators von \mathcal{B}_1 auf \mathcal{B}_{TE} das Konvergenzverhalten der TM-Komponenten unverändert lässt. Dieses Verhalten ist in diesem Fall nach (4.112e) auf den Nullraum des Differenzialoperators $\nabla_t \times \nabla_t \times \cdot$, entsprechend (4.79e) zurückzuführen. Abbildung 4.5 zeigt die Konvergenzfaktoren für die Vorgabe einer Nullstelle bei $k_{te} = 2,8$ rad/m.

Kopplung $\mathcal{B} = \mathcal{B}_C$

Schließlich führt eine TC der Form $\mathcal{B} = \mathcal{B}_C$ unter der Vorgabe $\alpha = -j\mu_r^{-1}k$ auf die beiden Konvergenzfaktoren

$$\rho_{\mathcal{B}_C}^{TM} = \frac{k^2 - k\lambda - \gamma(k^2 - \lambda^2)k^2}{k^2 + k\lambda - \gamma(k^2 - \lambda^2)k^2}, \quad (4.137)$$

$$\rho_{\mathcal{B}_C}^{TE} = \frac{j\lambda - jk + \beta(k^2 - \lambda^2)}{-j\lambda - jk + \beta(k^2 - \lambda^2)}. \quad (4.138)$$

Mit Hinblick auf die Darstellungen (4.129) und (4.132) weisen die Konvergenzfaktoren (4.137) und (4.138) neben den Nullstellen bei $\lambda = k$ durch die Vorgabe der Parameter β und γ entsprechend

$$\beta = \frac{j}{k + \lambda_{te}}, \quad (4.139)$$

$$\gamma = \frac{1}{k^2 + k\lambda_{tm}} \quad (4.140)$$

weitere Nullstellen an den Stellen

$$\lambda_{te} = \sqrt{k^2 - k_{te}^2}, \quad (4.141)$$

$$\lambda_{tm} = \sqrt{k^2 - k_{tm}^2} \quad (4.142)$$

auf. Somit ermöglicht eine TC gemäß $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_C$, wie in Abbildung 4.6 dargestellt, eine voneinander unabhängige Modifikation der Konvergenzfaktoren $\rho_{TE}^{\mathcal{B}_C}$ und $\rho_{TM}^{\mathcal{B}_C}$.

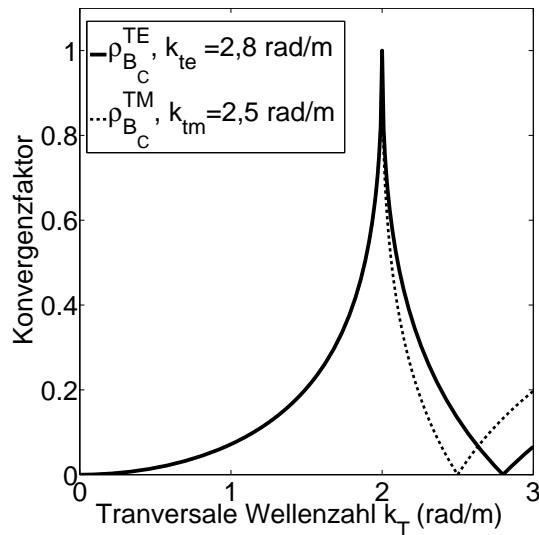


Abbildung 4.6: Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_C}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_C}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m, $\alpha = -j\mu_r^{-1}k$, $\beta = \frac{j}{k + \sqrt{k^2 - k_{te}^2}}$, $\gamma = \frac{1}{k^2 + k\sqrt{k^2 - k_{tm}^2}}$, $k_{te} = 2,8$ rad/m und $k_{tm} = 2,5$ rad/m.

4.2 Zusammenfassung

Die durch Approximation des DtN-Operators gewonnenen Kopplungsoperatoren höherer Ordnung bewirken eine wesentliche Verbesserung der Konvergenzeigenschaften des iterativen DD-Verfahrens. Während evaneszente Fehlerkomponenten unter Berücksichtigung einer TC erster Ordnung entsprechend $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$ keine Dämpfung erfahren, ermöglicht eine TC im Sinne von $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_C$ die Dämpfung sowohl evaneszenter TE- als auch TM-Komponenten.

Kapitel 5

Finite-Elemente-Diskretisierung des Gebietszerlegungsverfahrens

Nachdem in Kapitel 4 die Vorteile einer TC höherer Ordnung anhand analytischer Untersuchungen aufgezeigt wurden, soll im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf Basis von [RL10] eine geeignete FE-DD-Formulierung des übergeordneten DD-Verfahrens vorgestellt werden. Um einen Vergleich zu den bereits gewonnenen analytischen Ergebnissen zu ermöglichen, werden für die Kopplungsoperatoren gemäß (4.77) separate FE-DD-Formulierungen aufgezeigt. Der Vergleich basiert auf einer algebraischen Form des iterativen DD-Verfahrens (4.29) sowie einer numerischen Spektralanalyse der damit verbundenen Iterationsmatrix. Ausgangspunkt für diese weiteren Untersuchungen ist das folgende Randwertproblem:

$$\nabla \times \mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1 - k_0^2 \epsilon_{r1} \mathbf{E}_1 = 0 \quad \text{in } \Omega_1, \quad (5.1a)$$

$$\nabla \times \mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2 - k_0^2 \epsilon_{r2} \mathbf{E}_2 = 0 \quad \text{in } \Omega_2, \quad (5.1b)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \mathcal{B}_X(\mathbf{E}_1) = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathcal{B}_X(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (5.1c)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \mathcal{B}_X(\mathbf{E}_2) = -\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \mathcal{B}_X(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}, \quad (5.1d)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_1) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E^1, \quad (5.1e)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E^2, \quad (5.1f)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = jk_0 \eta_0 \mathbf{h}_1 \quad \text{auf } \Gamma_H^1, \quad (5.1g)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) = jk_0 \eta_0 \mathbf{h}_2 \quad \text{auf } \Gamma_H^2, \quad (5.1h)$$

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_A^1, \quad (5.1i)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) = jk_0 \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_A^2. \quad (5.1j)$$

mit dem Kopplungsoperator $\mathcal{B}_X, X \in \{1, TE, TM, C\}$ nach (4.77). Es sei bemerkt, dass zur Vereinfachung der Notation auf volumenförmige Anregungen verzichtet wird, so dass $\mathbf{J}_i = 0$.

5.1 Kopplung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$

Eine TC niedrigster Ordnung entspricht jener nach (4.77a). Die TCs (5.1c) und (5.1d) vereinfachen sich in diesem Fall zu den Robinschen TCs der Gestalt

$$\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (5.2a)$$

$$\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) = -\gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}. \quad (5.2b)$$

Grundlage einer FE-Formulierung von Randwertproblem (5.1) unter Berücksichtigung der TCs (5.2) stellt die zugehörige schwache Formulierung dar, welche der folgende Satz aufzeigt.

Satz 5.1 (Schwache Formulierung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$). *Eine mögliche schwache Formulierung von Randwertproblem (5.1) lautet: Finde $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2)$ und $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{12}) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{21})$, so dass:*

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} - k_0^2 \left(\epsilon_{r1} \mathbf{E}_1, \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} + \left\langle \mathbf{j}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{12}} \\ & + jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_1), \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{A_1}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_H^1}, \end{aligned} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2, \nabla \times \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} - k_0^2 \left(\epsilon_{r2} \mathbf{E}_2, \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} + \left\langle \mathbf{j}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{21}} \\ & + jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_2), \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{A_2}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_H^2}, \end{aligned} \quad (5.3b)$$

$$\left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} = -\left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}}, \quad (5.3c)$$

$$\left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} = -\left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}}, \quad (5.3d)$$

$$\forall (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2) \text{ und } \forall (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{12}) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{21}).$$

Beweis. Multiplikation von (4.29a) und (4.29b) mit Testfunktionen $\mathbf{w}_1 \in \mathbf{H}^0(\text{rot}, \Omega_1)$ und $\mathbf{w}_2 \in \mathbf{H}^0(\text{rot}, \Omega_2)$ sowie anschließender partieller Integration führt auf die lokalen schwachen Formulierungen innerhalb der Teildomänen Ω_1 und Ω_2 der Form

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} - k_0^2 \left(\epsilon_{r1} \mathbf{E}_1, \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} + \left\langle \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1), \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{12}} \\ & + jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_1), \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{A_1}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_H^1}, \end{aligned} \quad (5.4a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2, \nabla \times \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} - k_0^2 \left(\epsilon_{r2} \mathbf{E}_2, \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} + \left\langle \gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2), \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{21}} \\ & + jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_2), \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{A_2}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_H^2}. \end{aligned} \quad (5.4b)$$

Zur Diskretisierung der TCs (5.2) erweist es sich als notwendig, zusätzliche Hilfsfelder einzuführen. Auf Basis der Arbeit [RL07] werden diese entsprechend

$$\mathbf{j}_1 = \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{12}) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{j}_2 = \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{21}) \quad \text{auf } \Gamma_{21} \quad (5.6)$$

definiert. Durch die Substitutionen

$$\gamma_T(\mu_{r_1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) \mapsto \mathbf{j}_1, \quad (5.7)$$

$$\gamma_T(\mu_{r_2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) \mapsto \mathbf{j}_2, \quad (5.8)$$

folgen aus (5.4a) und (5.4b) die gesuchten Gleichungen (5.3a) und (5.3b) entsprechend

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r_1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} - k_0^2 \left(\epsilon_{r_1} \mathbf{E}_1, \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} + \left\langle \mathbf{j}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{12}} \\ & + jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_1), \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{A_1}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_H^1}, \end{aligned} \quad (5.9a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r_2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2, \nabla \times \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} - k_0^2 \left(\epsilon_{r_2} \mathbf{E}_2, \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} + \left\langle \mathbf{j}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{21}} \\ & + jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_2), \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{A_2}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_H^2}. \end{aligned} \quad (5.9b)$$

Zur schwachen Formulierung der TCs werden die Kopplungsgleichungen (5.1c) und (5.1d) im Sinne einer Dualpaarung mit geeigneten Testfunktionen $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{12})$ und $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{21})$ multipliziert, so dass

$$\left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} = -\left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}}, \quad (5.10a)$$

$$\left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} = -\left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}}. \quad (5.10b)$$

Zusammengefasst folgt aus (5.4) und (5.10) die schwache Formulierung nach Satz 5.1. \square

5.1.1 Finite-Elemente-Diskretisierung

Basierend auf der schwachen Formulierung nach Satz 5.1 lässt sich eine zugehörige FE-Diskretisierung angeben. Dazu seien die folgenden endlichdimensionalen FE-Ansatzzräume definiert, welche auf den Definitionen aus Abschnitt 2.3 beruhen:

$$\mathcal{V}_{\Omega_1}^{\text{rot}} \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_1), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{ \mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_1^{N_{E1}} \} = \mathcal{V}_{\Omega_1}^{\text{rot}}, \quad (5.11a)$$

$$\mathcal{V}_{\Omega_2}^{\text{rot}} \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_2), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{ \mathbf{v}_2^1, \dots, \mathbf{v}_2^{N_{E2}} \} = \mathcal{V}_{\Omega_2}^{\text{rot}}, \quad (5.11b)$$

$$\mathcal{V}_{\Gamma_{12}}^{\text{rot}} \subset \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{12}), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{ \mathbf{u}_1^1, \dots, \mathbf{u}_1^{N_{J1}} \} = \mathcal{V}_{\Gamma_{12}}^{\text{rot}}, \quad (5.11c)$$

$$\mathcal{V}_{\Gamma_{21}}^{\text{rot}} \subset \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{21}), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{ \mathbf{u}_2^1, \dots, \mathbf{u}_2^{N_{J2}} \} = \mathcal{V}_{\Gamma_{21}}^{\text{rot}}. \quad (5.11\text{d})$$

Im Rahmen der FE-Ansatzräume (5.11) besitzen die FE-Approximation $\mathbf{E}_1^h, \mathbf{E}_2^h, \mathbf{j}_1^h$ und \mathbf{j}_2^h die Darstellungen

$$\mathbf{E}_1^h = \sum_{i=1}^{N_{EI1}} [\mathbf{x}_1^{EI}]_i \mathbf{v}_1^i + \sum_{i=1}^{N_{E\Gamma 1}} [\mathbf{x}_1^{E\Gamma}]_i \mathbf{v}_1^i, \quad \mathbf{v}_1^i \in \mathcal{V}_{\Omega_1}^{\text{rot}}, \quad (5.12\text{a})$$

$$\mathbf{E}_2^h = \sum_{i=1}^{N_{EI2}} [\mathbf{x}_2^{EI}]_i \mathbf{v}_2^i + \sum_{i=1}^{N_{E\Gamma 2}} [\mathbf{x}_2^{E\Gamma}]_i \mathbf{v}_2^i, \quad \mathbf{v}_2^i \in \mathcal{V}_{\Omega_1}^{\text{rot}}, \quad (5.12\text{b})$$

$$\mathbf{j}_1^h = \sum_{i=1}^{N_{J1}} [\mathbf{x}_1^J]_i \mathbf{u}_1^i, \quad \mathbf{u}_1^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_{12}}^{\text{rot}}, \quad (5.12\text{c})$$

$$\mathbf{j}_2^h = \sum_{i=1}^{N_{J2}} [\mathbf{x}_2^J]_i \mathbf{u}_2^i, \quad \mathbf{u}_2^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_{21}}^{\text{rot}}, \quad (5.12\text{d})$$

wobei innerhalb der Repräsentation der elektrischen Feldstärke \mathbf{E}_1^h und \mathbf{E}_2^h nach (5.12a) und (5.12b) eine Partitionierung der Freiheitsgrade bezüglich derer auf den Grenzflächen Γ_{12} und Γ_{21} und jener aus dem Inneren der Feldgebiete Ω_1 und Ω_2 durchgeführt wurden. An dieser Stelle ist die nicht-konforme Approximation der Hilfsfelder $\mathbf{j}_i^h \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{ij})$ mit $i, j \in \{1, 2\}$ mittels rotorkonformer Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_n^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_{ij}}^{\text{rot}}$ mit $i, j \in \{1, 2\}$ zu erwähnen. Numerische Untersuchungen, welche im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, zeigen jedoch analog zu den Ergebnissen aus [RL07] ausschließlich für diese Wahl des Ansatz- bzw. Testraums eine Approximationsordnung, welche mit jener der herkömmlichen FE-Methode übereinstimmt. Basierend auf (5.12) sowie der schwachen Formulierung nach Satz 5.1 resultiert im Rahmen eines Galerkin-Verfahrens das FEDD-System

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}_1} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (5.13)$$

Die beteiligten Größen $\mathbf{A}^{\mathcal{B}_1}$, \mathbf{b} und \mathbf{x} weisen hierbei die folgende Blockgestalt auf:

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2 \times N_1+N_2}, \quad (5.14\text{a})$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}, \quad (5.14\text{b})$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}. \quad (5.14\text{c})$$

Die Dimension der beteiligten Größen folgt zu $N_1 = N_{EI1} + N_{E\Gamma 1} + N_{J1}$ innerhalb von Teilgebiet Ω_1 sowie $N_2 = N_{EI2} + N_{E\Gamma 2} + N_{J2}$ in Ω_2 . Unter Berücksichtigung der Separation zwischen inneren Freiheitsgraden und jenen auf den Grenzflächen Γ_{12} und Γ_{21} lassen sich die beteiligten Blockmatrizen \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{C}_{12} , \mathbf{C}_{21} und Blockvektoren \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 entsprechend

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{II} - k_0^2 \mathbf{S}_1^{II} + jk_0 \mathbf{T}_1^{II} & \mathbf{A}_1^{I\Gamma} - k_0^2 \mathbf{S}_1^{I\Gamma} + jk_0 \mathbf{T}_1^{I\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1^{\Gamma I} - k_0^2 \mathbf{S}_1^{\Gamma I} + jk_0 \mathbf{T}_1^{\Gamma I} & \mathbf{A}_1^{\Gamma\Gamma} - k_0^2 \mathbf{S}_1^{\Gamma\Gamma} + jk_0 \mathbf{T}_1^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{11}^{JE} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{11}^{EJ} & \mathbf{T}_{11}^{JJ} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_1}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2^{II} - k_0^2 \mathbf{S}_2^{II} + jk_0 \mathbf{T}_2^{II} & \mathbf{A}_2^{I\Gamma} - k_0^2 \mathbf{S}_2^{I\Gamma} + jk_0 \mathbf{T}_2^{I\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{\Gamma I} - k_0^2 \mathbf{S}_2^{\Gamma I} + jk_0 \mathbf{T}_2^{\Gamma I} & \mathbf{A}_2^{\Gamma\Gamma} - k_0^2 \mathbf{S}_2^{\Gamma\Gamma} + jk_0 \mathbf{T}_2^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{22}^{JE} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22}^{EJ} & \mathbf{T}_{22}^{JJ} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_2}, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{12}^{EJ} & \mathbf{T}_{12}^{JJ} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{21}^{EJ} & \mathbf{T}_{21}^{JJ} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_1}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{EI} \\ \mathbf{x}_1^{E\Gamma} \\ \mathbf{x}_1^J \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times 1}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2^{EI} \\ \mathbf{x}_2^{E\Gamma} \\ \mathbf{x}_2^J \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times 1}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{EI} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times 1}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2^{EI} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times 1} \quad (5.20)$$

notieren. Die enthaltenen Größen sind dabei wie folgt definiert:

$$[\mathbf{A}_m]_{ij} = \left(\mu_{rm}^{-1} \nabla \times \mathbf{v}_m^i, \nabla \times \mathbf{v}_m^j \right)_{\Omega_m}, \quad \mathbf{v}_m^i, \mathbf{v}_m^j \in \mathcal{V}_{\Omega_m}^{\text{rot}}, \quad (5.21a)$$

$$[\mathbf{S}_m]_{ij} = \left(\epsilon_{rm} \mathbf{v}_m^i, \mathbf{v}_m^j \right)_{\Omega_m}, \quad \mathbf{v}_m^i, \mathbf{v}_m^j \in \mathcal{V}_{\Omega_m}^{\text{rot}}, \quad (5.21b)$$

$$[\mathbf{T}_m]_{ij} = \left\langle \pi_T(\mathbf{v}_m^i), \pi_T(\mathbf{v}_m^j) \right\rangle_{\Gamma_{mn}}, \quad \mathbf{v}_m^i \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^{\Omega_m}, \mathbf{u}_n^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{rot}}, \quad (5.21c)$$

$$[\mathbf{T}_{mn}^{EJ}]_{ij} = \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{v}_m^i), \mathbf{u}_n^j \right\rangle_{\Gamma_{mn}}, \quad \mathbf{v}_m^i \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^{\Omega_m}, \mathbf{u}_n^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{rot}}, \quad (5.21d)$$

$$[\mathbf{T}_{mn}^{JE}]_{ij} = \left\langle \mathbf{u}_m^i, \pi_T(\mathbf{v}_n^j) \right\rangle_{\Gamma_{mn}}, \quad \mathbf{u}_m^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{rot}}, \mathbf{v}_n^j \in \mathcal{V}_{\Omega_m}^{\text{rot}}, \quad (5.21e)$$

$$[\mathbf{T}_{mn}^{JJ}]_{ij} = \left\langle \mathbf{u}_m^i, \mathbf{u}_n^j \right\rangle_{\Gamma_{mn}}, \quad \mathbf{u}_m^i, \mathbf{u}_n^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{rot}}, \quad (5.21f)$$

$$[\mathbf{b}_m]_i = \left(\mathbf{J}_m, \mathbf{v}_m^i \right)_{\Omega_m}, \quad \mathbf{v}_m^i \in \mathcal{V}_{\Omega_m}^{\text{rot}}, \quad (5.21g)$$

wobei $m, n \in \{1, 2\}$. Die Blockgestalt des FE-DD-Systems (5.14a) repräsentiert charakteristisch die Gebietszerlegung: Die Diagonalblöcke \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 repräsentieren die den Teilproblemen zugeordneten Randwertprobleme, während die Matrizen \mathbf{C}_{12} und \mathbf{C}_{21} die TC der Teilgebiete bewirken. Weiterhin ist zu erwähnen, dass die Systemmatrix $\mathbf{A}^{\mathcal{B}_1}$ unsymmetrisch ist, während die den Teilgebieten zugeordneten Matrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 zumindest im Falle einer TC erster Ordnung symmetrisch sind. Jedoch wird sich herausstellen, dass diese Symmetrie unter Berücksichtigung einer TC höherer Ordnung verloren geht.

5.1.2 Spektralanalyse

Aufbauend auf der FE-DD-Formulierung (5.13) lässt sich eine algebraische Form des iterativen DD-Verfahrens (4.29) angeben. Mithilfe der Blockgestalt des FE-Systems entsprechend den Definitionen in (5.14) lässt sich das iterative Verfahren (4.29) in der algebraischen Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{12} \\ -\mathbf{C}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

notieren. Unter Berücksichtigung der Definitionen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{12} \\ -\mathbf{C}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

folgt aus (5.22) die Darstellung

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{G}\mathbf{x}^n + \mathbf{f}, \quad (5.26)$$

$$\text{mit } \mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}, \quad (5.27)$$

und entspricht somit nach (3.2) und (3.7) einer Blockvariante des stationären Jacobi-Verfahrens, dessen Konvergenz nach Satz 3.1 unter der Voraussetzung $\rho(\mathbf{G}) < 1$ gewährleistet ist. Nach (3.27) lässt sich diese Blockvariante des Jacobiverfahrens ebenfalls als ein mittels des Vorkonditionierers

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

vorkonditioniertes Gleichungssystem interpretieren. Diese stellt die Grundlage der weiteren Untersuchungen, im Rahmen derer das Spektrum $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})$ des vorkonditionierten Systems mittels numerischer Experimente untersucht wird. Für das vorkonditionierte System folgt die Darstellung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{N}) \quad (5.29)$$

$$= \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \quad (5.30)$$

$$= \mathbf{I} - \mathbf{G} \quad (5.31)$$

und somit der folgende Zusammenhang zwischen dem Spektrum der vorkonditionierten Matrix $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})$ und jenem der Iterationsmatrix $\rho(\mathbf{G})$:

$$\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{G}) + [1 \ 0]^\top. \quad (5.32)$$

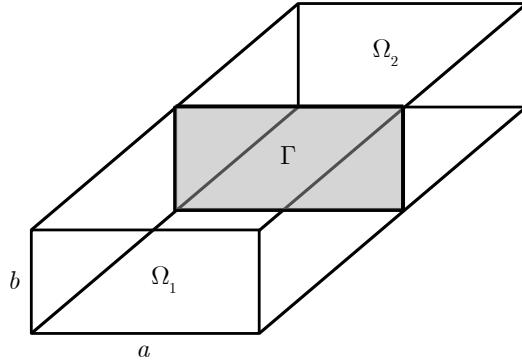


Abbildung 5.1: Geometrie des WR-90 Rechteckwellenleiters.

Nach Satz 3.1 konvergiert das Jacobiverfahren somit unter den äquivalenten Bedingungen

$$\rho(\mathbf{G}) \subset B_1(0), \quad (5.33)$$

$$\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}) \subset B_1(1). \quad (5.34)$$

5.1.3 Numerisches Experiment

Als Basis der folgenden numerischen Untersuchungen dient das Modell eines Wellenleiters mit perfekt elektrisch leitfähiger Berandung gemäß Abbildung 5.1. Die Querschnittsabmessungen sind gegeben durch $a = 22,86$ mm, $b = 10,12$ mm und die Länge ist zu $l = 45$ mm gewählt. Dieser trägt ein gleichmäßiges FE-Netz $\mathcal{T}(\Omega)$ der Netzfeinheit h und ist in zwei gleichgroße Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 zerlegt, so dass insbesondere die beiden FE-Netze $\mathcal{T}(\Gamma_{12})$ und $\mathcal{T}(\Gamma_{21})$ der jeweiligen planaren Grenzflächen Γ_{12} und Γ_{21} übereinstimmen. Die Polynomordnung p der beteiligten FE-Räume ist entsprechend $p = 2$ gewählt. Die beiden Wellenleitertore des Hohlleiters sind mit einer absorbierenden Randbedingung erster Ordnung entsprechend (5.1i) und (5.1j) abgeschlossen. Im Rahmen der TC ist der Parameter α auf Basis der analytischen Vorüberlegung (4.119) gemäß

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = -jk_0 \quad (5.35)$$

gewählt. In Abbildung 5.2 ist das Spektrum der vorkonditionierten Matrix $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_1})$ für unterschiedliche Betriebsfrequenzen f dargestellt. Die analytischen Vorbetrachtungen aus Abschnitt 4.1.5 lassen unter Berücksichtigung einer TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$ ausschließlich die Konvergenz ausbreitungsfähigen TE- und TM-Moden erwarten. Dementsprechend zeigen sich nach Abbildung 5.2a bei einer Frequenz von $f = 6$ GHz, welche unterhalb der Grenzfrequenz $f_c = 6,55$ GHz des TE₁₀-Modes nach Tabelle 5.1 liegt, hauptsächlich Eigenwerte auf dem Rand des verschobenen Einheitskreises $\overline{B}_1(1)$.

Mode	m	n	Grenzfrequenz f_c (GHz)
TE	1	0	6,55
TE	2	0	13,11
TE	0	1	14,75
TE, TM	1	1	16,14

Tabelle 5.1: Grenzfrequenzen eines WR-90 Rechteckwellenleiters.

Jene Eigenwerte im Punkt $(1, 0)$ entsprechen den durch Anwendung des Vorkonditionierers vollständig eliminierten, lokalen Spektren der Teilgebietsmatrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 nach (5.15) und (5.16). Weiterhin ist eine Punktsymmetrie des Spektrums bezüglich des Punktes $(1, 0)$ zu beobachten, welche auf die symmetrische Form des Block-Jacobi-Vorkonditionierers (5.23) zurückzuführen ist. Sukzessives Erhöhen der Anregungsfrequenz f führt entsprechend den Abbildungen 5.2b, 5.2c und 5.2d auf zusätzliche reelle Eigenwerte im Inneren des verschobenen Einheitskreises, so dass bei einer Frequenz von $f = 16.5$ GHz schließlich 5 Paare punktsymmetrischer und reeller Eigenwerte zu beobachten sind. In Übereinstimmung zu den analytischen Ergebnissen entsprechen diese nach Tabelle 5.1 genau den fünf bis dahin ausbreitungsfähigen Moden. Es sei bemerkt, dass die identische Grenzfrequenzen des TE_{11} und des TM_{11} -Modes zu doppelten Eigenwerten bei $x_1 \approx (0.5, 0)$ und $x_2 \approx (1.5, 0)$ führen, was wiederum die vorhergesagte identische Konvergenzrate für TE- und TM-Moden nach (4.120) widerspiegelt.

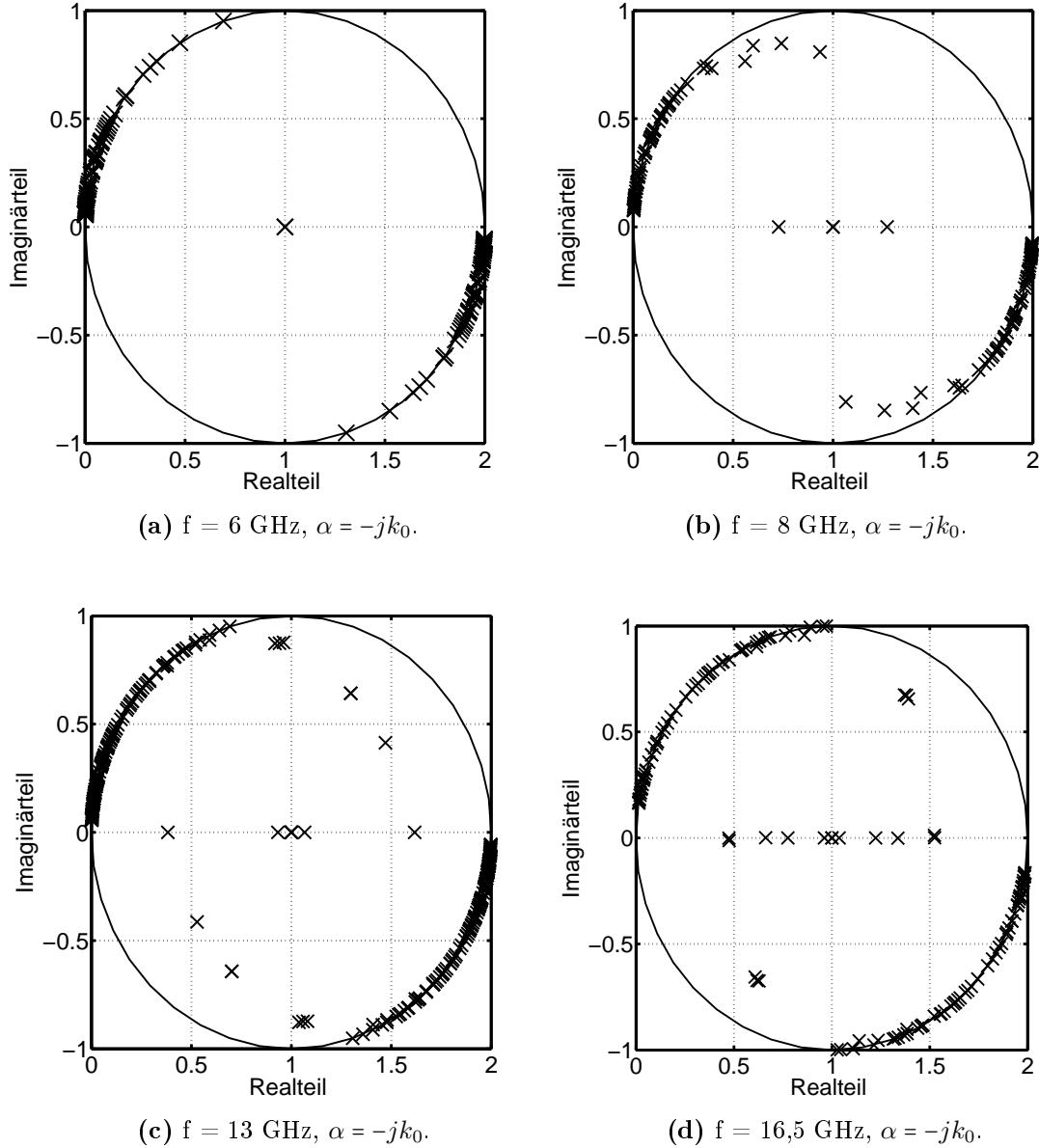


Abbildung 5.2: Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_1})$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems (5.34) für unterschiedliche Betriebsfrequenzen f .

5.2 Kopplung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TE}$

Im nächsten Schritt wird eine Erweiterung des Kopplungsoperators gemäß $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{TE}$ nach (4.77b) untersucht. Diese resultiert somit in den Kopplungsbedingungen der Gestalt

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1)$$

$$= -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (5.36a)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2) \\ &= -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1) \quad \text{auf } \Gamma_{21}. \end{aligned} \quad (5.36b)$$

Das bis auf die TCs (5.36) identische Randwertproblem (5.2) lässt sich gemäß dem folgenden Satz im schwächer Form notieren:

Satz 5.2 (Schwache Formulierung $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{TE}$). Eine mögliche schwache Formulierung von Randwertproblem (5.2) lautet: Finde $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2)$ und $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{12}) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{21})$, so dass

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} - k_0^2 \left(\epsilon_{r1} \mathbf{E}_1, \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} + \left\langle \mathbf{j}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{12}} \\ &+ jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_1), \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{A_1}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_H^1}, \end{aligned} \quad (5.37a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2, \nabla \times \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} - k_0^2 \left(\epsilon_{r2} \mathbf{E}_2, \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} + \left\langle \mathbf{j}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{21}} \\ &+ jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_2), \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{A_2}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_H^2}, \end{aligned} \quad (5.37b)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1), \nabla_T \times \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} = \\ & - \left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2), \nabla_T \times \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{21}}, \end{aligned} \quad (5.37c)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2), \nabla_T \times \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} = \\ & - \left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1), \nabla_T \times \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{12}}, \end{aligned} \quad (5.37d)$$

$$\forall (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2) \text{ und } \forall (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{12}) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{21}).$$

Beweis. Die den Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 zugeordneten Gleichungen (5.37a) und (5.37b) folgen analog zu dem Beweis von Satz 5.1 entsprechend einer TC erster Ordnung. Multiplikation der TCs (5.36a) und (5.36b) mit geeigneten Testfunktionen $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{12})$ und $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{21})$ sowie anschließende Integration über die Ränder Γ_{12} und Γ_{21} liefert die Darstellung

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} = \\ & - \left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}}, \end{aligned} \quad (5.38a)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} = \\ & - \left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}}. \end{aligned} \quad (5.38b)$$

Mithilfe partieller Integration entsprechend

$$\left\langle \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1), \nabla_T \times \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}}, \quad (5.39)$$

$$\left\langle \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2), \nabla_T \times \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{12}} \quad (5.40)$$

folgen schließlich aus (5.38) die gesuchten schwachen Formulierungen der Übergangsbedingungen (5.37c) und (5.37d). \square

5.2.1 Finite-Elemente-Diskretisierung

Basierend auf den FE-Räumen (5.11) und der Repräsentationen (5.12) folgt aus einer Galerkin-Approximation der schwachen Formulierung nach Satz 5.2 das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TE}} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (5.41)$$

Die beteiligten Größen $\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TE}}$, \mathbf{b} und \mathbf{x} lassen sich wiederum in Blockgestalt gemäß

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TE}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2 \times N_1+N_2}, \quad (5.42a)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}, \quad (5.42b)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}, \quad (5.42c)$$

mit den Dimensionen $N_1 = N_{EI1} + N_{E\Gamma 1} + N_{J1}$ sowie $N_2 = N_{EI2} + N_{E\Gamma 2} + N_{J2}$ notieren, wobei die beteiligten Blockmatrizen und Blockvektoren durch

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{II} - k_0^2 \mathbf{S}_1^{II} + jk_0 \mathbf{T}_1^{II} & \mathbf{A}_1^{I\Gamma} - k_0^2 \mathbf{S}_1^{I\Gamma} + jk_0 \mathbf{T}_1^{I\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1^{\Gamma I} - k_0^2 \mathbf{S}_1^{\Gamma I} + jk_0 \mathbf{T}_1^{\Gamma I} & \mathbf{A}_1^{\Gamma\Gamma} - k_0^2 \mathbf{S}_1^{\Gamma\Gamma} + jk_0 \mathbf{T}_1^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{11}^{JE} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{11}^{EJ} + \mathbf{S}_{11}^{EJ} & \mathbf{T}_{11}^{JJ} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_1}, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2^{II} - k_0^2 \mathbf{S}_2^{II} + jk_0 \mathbf{T}_2^{II} & \mathbf{A}_2^{I\Gamma} - k_0^2 \mathbf{S}_2^{I\Gamma} + jk_0 \mathbf{T}_2^{I\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{\Gamma I} - k_0^2 \mathbf{S}_2^{\Gamma I} + jk_0 \mathbf{T}_2^{\Gamma I} & \mathbf{A}_2^{\Gamma\Gamma} - k_0^2 \mathbf{S}_2^{\Gamma\Gamma} + jk_0 \mathbf{T}_2^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{22}^{JE} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22}^{EJ} + \mathbf{S}_{22}^{EJ} & \mathbf{T}_{22}^{JJ} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_2}, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{12}^{EJ} - \mathbf{S}_{12}^{EJ} & \mathbf{T}_{12}^{JJ} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{21}^{EJ} - \mathbf{S}_{21}^{EJ} & \mathbf{T}_{21}^{JJ} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_1} \quad (5.46)$$

definiert sind. Darin entsprechen die Größen \mathbf{A}_m , \mathbf{S}_m , $\mathbf{T}_{mn}^{E,J}$, $\mathbf{T}_{mn}^{J,E}$, $\mathbf{T}_{mn}^{J,J}$ und \mathbf{b}_m jenen nach (5.21), und die aufgrund der erweiterten TC zusätzliche vorhandene Matrix $\mathbf{S}_{mn}^{E,J}$ ist gegeben durch

$$[\mathbf{S}_{mn}^{E,J}]_{ij} = \left\langle \beta \nabla \times \pi_T(\mathbf{v}_m^i), \nabla \times \mathbf{u}_n^j \right\rangle_{\Gamma_{mn}}, \quad \mathbf{v}_m^i \in \mathcal{V}_{\Omega_m}^{\text{rot}}, \quad \mathbf{u}_n^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{rot}}, \quad (5.47)$$

wobei $m, n \in \{1, 2\}$.

5.2.2 Spektralanalyse

Im Rahmen des folgenden numerischen Experiments stimmen sowohl das Modell, als auch die FE-Parameter Netzfeinheit und Polynomordnung mit denen aus Abschnitt 5.1.3 überein. Die Anregung geschieht bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz. Um den Einfluss der erweiterten TC (5.36) zu verdeutlichen, zeigen die Abbildungen 5.3a und 5.3b die Eigenwertverteilung der vorkonditionierten Systemmatrix zum einen für die Wahl der Parameter α und β gemäß

$$\alpha = -jk_0 \quad \text{und} \quad \beta = 0, \quad (5.48)$$

was analog zum vorangegangenen Abschnitt einer TC niedrigster Ordnung entspricht, und zum anderen für die Wahl

$$\alpha = -jk_0 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{j}{k_0 + \sqrt{k_0^2 - k_{te}^2}} \quad (5.49)$$

nach (4.136) mit $k_{te} = 523.2$ rad/m. Während im erstgenannten Fall nach Abbildung 5.3a ausschließlich die den ausbreitungsfähigen TE- und TM-Moden zugeordneten Eigenwerte im Inneren des verschobenen Einheitskreises $\bar{B}_1(1)$ zu erkennen sind, führt eine Erweiterung der TCs von \mathcal{B}_1 auf \mathcal{B}_{TE} , in Analogie zu den analytischen Vor betrachtungen nach Abbildung 4.5 zur zusätzlichen Konvergenz ausbreitungsfähiger TE-Moden. Dies äußert sich nach Abbildung 5.3b durch eine Verschiebungen der zugehörigen Eigenwerte vom Rand ins Innere des verschobenen Einheitskreises $\bar{B}_1(1)$. Die den TM-Moden zugeordneten Eigenwerte verbleiben analog zur TC niedrigster Ordnung auf dem Rand des Einheitskreises.

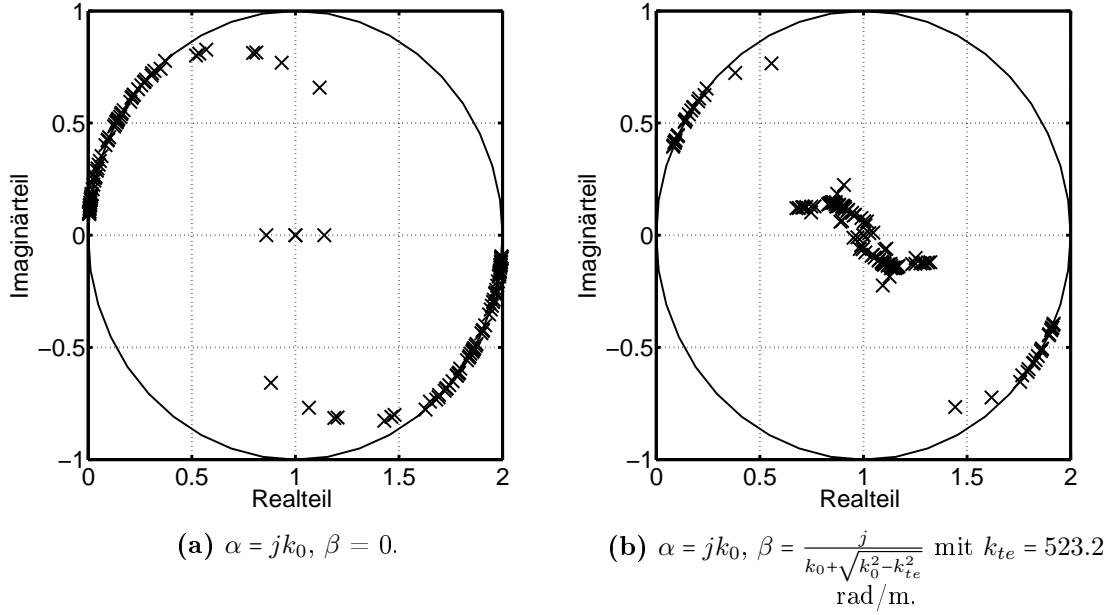


Abbildung 5.3: Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TE}})$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz.

5.3 Kopplung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TM}$

Unter Berücksichtigung der TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TM}$ nach (4.77d) folgen die TCs gemäß

$$\begin{aligned} \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) \\ = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \end{aligned} \quad (5.50a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) \\ = -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{21}. \end{aligned} \quad (5.50b)$$

Die schwache Formulierung von Randwertproblem (5.1) im Rahmen einer TC nach (5.50) zeigt der folgende Satz.

Satz 5.3 (Schwache Formulierung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TM}$). *Eine mögliche schwache Formulierung von Randwertproblem (5.2) lautet: Finde $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2)$, $(p_1, p_2) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{12}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{21})$ und $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{12}) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{21})$ so dass*

$$\left(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} - k_0^2 \left(\epsilon_{r1} \mathbf{E}_1, \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} + \left(\mathbf{j}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right)_{\Gamma_{12}}$$

$$+jk_0\left(\pi_T(\mathbf{E}_1), \pi_T(\mathbf{w}_1)\right)_{\Gamma_{A_1}} = -jk_0\eta_0\left(\mathbf{h}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1)\right)_{\Gamma_H^1}, \quad (5.51a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r2}^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_2, \nabla \times \mathbf{w}_2\right)_{\Omega_2} - k_0^2\left(\epsilon_{r2}\mathbf{E}_2, \mathbf{w}_2\right)_{\Omega_2} + \left(\mathbf{j}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2)\right)_{\Gamma_{21}} \\ & +jk_0\left(\pi_T(\mathbf{E}_2), \pi_T(\mathbf{w}_2)\right)_{\Gamma_{A_2}} = -jk_0\eta_0\left(\mathbf{h}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2)\right)_{\Gamma_H^2}, \end{aligned} \quad (5.51b)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1\right)_{\Gamma_{12}} + \left(\alpha\pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_1\right)_{\Gamma_{12}} + \left(\gamma\nabla_T p_1, \mathbf{u}_1\right)_{\Gamma_{12}} = \\ & -\left(\mathbf{j}_2, \mathbf{u}_1\right)_{\Gamma_{12}} + \left(\alpha\pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_1\right)_{\Gamma_{12}} - \left(\gamma\nabla_T p_2, \mathbf{u}_1\right)_{\Gamma_{21}}, \end{aligned} \quad (5.51c)$$

$$\left(p_1, w_1\right)_{\Gamma_{12}} = -\left(\mathbf{j}_1, \nabla_T p_1\right)_{\Gamma_{12}}, \quad (5.51d)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{j}_2, \mathbf{u}_2\right)_{\Gamma_{21}} + \left(\alpha\pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_2\right)_{\Gamma_{21}} + \left(\gamma\nabla_T p_2, \mathbf{u}_2\right)_{\Gamma_{21}} = \\ & -\left(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_2\right)_{\Gamma_{21}} + \left(\alpha\pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_2\right)_{\Gamma_{21}} - \left(\gamma\nabla_T p_1, \mathbf{u}_2\right)_{\Gamma_{12}}, \end{aligned} \quad (5.51e)$$

$$\left(p_2, w_2\right)_{\Gamma_{21}} = -\left(\mathbf{j}_2, \nabla_T p_2\right)_{\Gamma_{21}}, \quad (5.51f)$$

$\forall (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2)$, $\forall (w_1, w_2) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{12}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{21})$ und $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{12}) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{21})$.

Beweis. Die den Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 zugeordneten Gleichungen (5.51a) und (5.51b) folgen analog zu dem Beweis von Satz 5.1. Durch den zusätzlich enthaltenen tangentialen Differentialoperator $\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_2)$ innerhalb der Kopp lungsgleichungen (5.50) ist es notwendig, zwei weitere skalarwertige Hilfsfunktionen einzuführen [RL07]. Diese seien gemäß

$$p_1 := \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_1) = \nabla_T \cdot \mathbf{j}_1 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{12}), \quad (5.52)$$

$$p_2 := \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_2) = \nabla_T \cdot \mathbf{j}_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{21}) \quad (5.53)$$

definiert. Multiplikation der Übergangsbedingungen (5.50a) und (5.50b) mit Testfunktionen $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{12})$ und $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{21})$ führt nach Integration über die Grenzflächen Γ_{12} und Γ_{21} auf die Gleichungen (5.51c) und (5.51e). Testen der Definitionsgleichungen (5.52) und (5.53) mit Testfunktionen $w_1 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{12})$ und $w_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{21})$ führt auf die Darstellungen

$$\left(p_1, w_1\right)_{\Gamma_{12}} = \left(\nabla_T \cdot \mathbf{j}_1, w_1\right)_{\Gamma_{12}}, \quad (5.54)$$

$$\left(p_2, w_2\right)_{\Gamma_{21}} = \left(\nabla_T \cdot \mathbf{j}_2, w_2\right)_{\Gamma_{21}} \quad (5.55)$$

und somit nach partieller Integration auf die Form

$$\left(p_1, w_1\right)_{\Gamma_{12}} = -\left(\mathbf{j}_1, \nabla_T w_1\right)_{\Gamma_{12}}, \quad (5.56)$$

$$\langle p_2, w_2 \rangle_{\Gamma_{21}} = - \langle \mathbf{j}_2, \nabla_T w_2 \rangle_{\Gamma_{21}} \quad (5.57)$$

entsprechend den gesuchten Gleichungen (5.51d) und (5.51f). \square

5.3.1 Finite-Elemente-Diskretisierung

Zur Diskretisierung der skalarwertigen Hilfsfunktionen p_1 und p_2 nach (5.52) und (5.53) werden zusätzlich zu den in (5.11) genutzten FE-Räumen die Approximationsräume

$$\mathcal{V}_{\Gamma_{12}}^{\text{grad}} \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{21}), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{w_1^1, \dots, w_1^{N_{P1}}\} = \mathcal{V}_{\Gamma_{12}}^{\text{grad}}, \quad (5.58a)$$

$$\mathcal{V}_{\Gamma_{21}}^{\text{grad}} \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{21}), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{w_2^1, \dots, w_2^{N_{P2}}\} = \mathcal{V}_{\Gamma_{21}}^{\text{grad}} \quad (5.58b)$$

genutzt. Repräsentation der Größen $\mathbf{E}_1^h, \mathbf{E}_2^h, \mathbf{j}_1^h$ und \mathbf{j}_2^h entsprechend (5.12) sowie die Darstellung der nun zusätzlich eingeführten Größen p_1 und p_2 nach (5.52) und (5.53) im Sinne von

$$p_1^h = \sum_{i=1}^{N_{P1}} [\mathbf{x}_1^P]_i w_1^i, \quad w_1^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_{12}}^{\text{grad}}, \quad (5.59a)$$

$$p_2^h = \sum_{i=1}^{N_{P2}} [\mathbf{x}_2^P]_i w_2^i, \quad w_2^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_{21}}^{\text{grad}}, \quad (5.59b)$$

liefert das Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TM}} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (5.60)$$

Die beteiligten Größen $\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TM}}$, \mathbf{b} und \mathbf{x} lassen sich wiederum in Blockform gemäß

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TM}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2 \times N_1+N_2}, \quad (5.61a)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}, \quad (5.61b)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2} \quad (5.61c)$$

mit der durch N_{P1} bzw. N_{P2} vergrößerten Anzahl an Freiheitsgraden $N_1 = N_{EI1} + N_{ER1} + N_{J1} + N_{P1}$ sowie $N_2 = N_{EI2} + N_{ER2} + N_{J2} + N_{P2}$ darstellen. Die Blockmatrizen sind entsprechend

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{II} & \mathbf{A}_1^{I\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1^{\Gamma I} & \mathbf{A}_1^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{11}^{EJ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{11}^{JE} & \mathbf{T}_{11}^{JJ} & \mathbf{D}_{11}^{JP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{11}^{PJ} & \mathbf{T}_{11}^{PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_1}, \quad (5.62)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2^{II} & \mathbf{A}_2^{I\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{\Gamma I} & \mathbf{A}_2^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{22}^{EJ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22}^{JE} & \mathbf{T}_{22}^{JJ} & \mathbf{D}_{22}^{JP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}^{PJ} & \mathbf{T}_{22}^{PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_2}, \quad (5.63)$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{12}^{JE} & \mathbf{T}_{12}^{JJ} & \mathbf{D}_{12}^{JP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2}, \quad (5.64)$$

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{21}^{JE} & \mathbf{T}_{21}^{JJ} & \mathbf{D}_{21}^{JP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_1} \quad (5.65)$$

definiert, während die Blockvektoren \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{y}_1 sowie \mathbf{y}_2 die Form

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{EI} \\ \mathbf{x}_1^{E\Gamma} \\ \mathbf{x}_1^J \\ \mathbf{x}_1^P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times 1}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2^{EI} \\ \mathbf{x}_2^{E\Gamma} \\ \mathbf{x}_2^J \\ \mathbf{x}_2^P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times 1}, \quad (5.66)$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{EI} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times 1}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2^{EI} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times 1} \quad (5.67)$$

besitzen. Die enthaltenen Größen \mathbf{A}_m , \mathbf{S}_m , \mathbf{T}_{mn}^{EJ} , \mathbf{T}_{mn}^{JE} , \mathbf{T}_{mn}^{JJ} , \mathbf{b}_m und \mathbf{S}_{mn}^{EJ} entsprechen hierbei jenen nach (5.21) sowie (5.47). Die zusätzlichen Größen \mathbf{D}_{mn}^{PJ} , \mathbf{T}_{mn}^{PP} sowie \mathbf{F}_{mn}^{JP} sind gegeben durch

$$[\mathbf{D}_{mn}^{PJ}]_{ij} = \langle \gamma \nabla w_n^j, \mathbf{u}_m^i \rangle_{\Gamma_{mn}}, \quad \mathbf{u}_m^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{rot}}, \quad w_n^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{grad}}, \quad (5.68a)$$

$$[\mathbf{T}_{mn}^{PP}]_{ij} = \langle w_m^i, w_n^j \rangle_{\Gamma_{mn}}, \quad w_m^i, w_n^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{grad}}, \quad (5.68b)$$

$$[\mathbf{F}_{mn}^{JP}]_{ij} = \langle \mathbf{u}_n^j, \nabla w_m^i \rangle_{\Gamma_{mn}}, \quad w_m^i, w_n^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{grad}}, \quad \mathbf{u}_n^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_{mn}}^{\text{rot}}, \quad (5.68c)$$

wobei $m, n \in \{1, 2\}$.

5.3.2 Spektralanalyse

Die Abbildungen 5.4a und 5.4b zeigen das resultierende Spektrum der vorkonditionierten FE-DD-Systemmatrix (5.61a) für die Parameterwahl

$$\alpha = -jk_0 \quad \text{und} \quad \gamma = 0, \quad (5.69)$$

resultierend in einer Kopplung $\mathcal{B}_X = B_1$ sowie

$$\alpha = -jk_0 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{k_0^2 + k_0 \sqrt{k_0^2 - k_{te}^2}}, \quad (5.70)$$

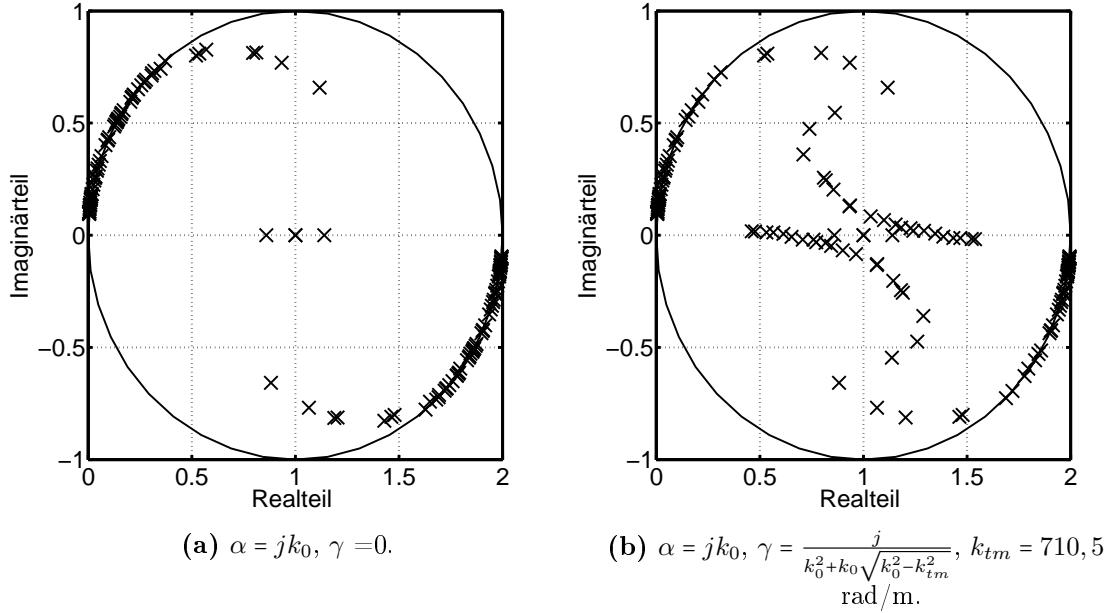


Abbildung 5.4: Spektrum $\sigma(M^{-1}A^{\mathcal{B}_{TM}})$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei einer Frequenz $f = 10$ GHz.

entsprechend $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TM}$, wobei $k_{tm} = 710,5$ rad/m und $f = 10$ GHz entsprechen. In Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.5 lassen sich durch die Erweiterung der Kopplungsbedingungen im Sinne von (5.50) nun die den evaneszenten TM-Moden zugeordneten Eigenwerte beeinflussen. Dies äußert sich mit Hinblick auf Abbildung 5.4b durch die Verschiebung dieser Eigenwerte ins Innere des Einheitskreises $\bar{B}_1(1)$. In Abbildung 5.4a ist zum Vergleich das Spektrum resultierend aus einer Kopplung erster Ordnung aufgezeigt.

5.4 Kopplung $\mathcal{B} = \mathcal{B}_C$

Die FE-Diskretisierung des DD-Verfahrens entsprechend Randwertproblem (5.1) unter Berücksichtigung der Kopplungsoperatoren $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{TE}$ und \mathcal{B}_{TM} stellen schließlich die Grundlage für die vollständige TC \mathcal{B}_C nach (4.77d), so dass

$$\begin{aligned} & \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) \\ &= -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \end{aligned} \quad (5.71a)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1) \\ &= -\gamma_T(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1) + \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2) \quad \text{auf } \Gamma_{12}. \end{aligned} \quad (5.71b)$$

Die schwache Formulierung von (5.1) im Rahmen der TCs (5.71) ist gegeben durch:

Satz 5.4 (Schwache Formulierung $\mathcal{B} = \mathcal{B}_C$). *Eine mögliche schwache Formulierung von Randwertproblem (5.2) lautet: Finde $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2)$, $(p_1, p_2) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{12}) \times H^{\frac{1}{2}}(\text{grad}, \Gamma_{21})$ und $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{12}) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{21})$ so dass*

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r1}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} - k_0^2 \left(\epsilon_{r1} \mathbf{E}_1, \mathbf{w}_1 \right)_{\Omega_1} + \left\langle \mathbf{j}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{12}} \\ & \quad + jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_1), \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_{A_1}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_1, \pi_T(\mathbf{w}_1) \right\rangle_{\Gamma_H^1}, \end{aligned} \quad (5.72a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{r2}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_2, \nabla \times \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} - k_0^2 \left(\epsilon_{r2} \mathbf{E}_2, \mathbf{w}_2 \right)_{\Omega_2} + \left\langle \mathbf{j}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{21}} \\ & \quad + jk_0 \left\langle \pi_T(\mathbf{E}_2), \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_{A_2}} = -jk_0 \eta_0 \left\langle \mathbf{h}_2, \pi_T(\mathbf{w}_2) \right\rangle_{\Gamma_H^2}, \end{aligned} \quad (5.72b)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_1), \nabla_T \times \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \gamma \nabla_T p_1, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} = \\ & - \left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} - \left\langle \gamma \nabla_T p_2, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\Gamma_{21}}, \end{aligned} \quad (5.72c)$$

$$\left\langle p_1, w_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}} = - \left\langle \mathbf{j}_1, \nabla_T p_1 \right\rangle_{\Gamma_{12}}, \quad (5.72d)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_2), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}_2), \nabla_T \times \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \gamma \nabla_T p_2, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} = \\ & - \left\langle \mathbf{j}_1, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} + \left\langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}_1), \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}} - \left\langle \gamma \nabla_T p_1, \mathbf{u}_2 \right\rangle_{\Gamma_{12}}, \end{aligned} \quad (5.72e)$$

$$\left\langle p_2, w_2 \right\rangle_{\Gamma_{12}} = - \left\langle \mathbf{j}_2, \nabla_T p_2 \right\rangle_{\Gamma_{21}}, \quad (5.72f)$$

$\forall (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_1) \times \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega_2)$, $\forall (w_1, w_2) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{12}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{21})$ und $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{12}) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_{21})$.

Beweis. Folgt aus dem Beweis von Satz 5.3 \square

5.4.1 Finite-Elemente-Diskretisierung

Die Darstellung der vektoriellen Größen $\mathbf{E}_1^h, \mathbf{E}_2^h, \mathbf{j}_1^h, \mathbf{j}_2^h$ entsprechend (5.12) sowie der skalaren Größen p_1 und p_2 gemäß (5.59) liefert das FE-DD-System

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}_C} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (5.73)$$

Die beteiligten Größen $\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TC}}$, \mathbf{b} und \mathbf{x} sind wie folgt definiert:

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}_C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2 \times N_1+N_2}, \quad (5.74a)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}, \quad (5.74b)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}, \quad (5.74c)$$

wobei $N_1 = N_{EI1} + N_{E\Gamma 1} + N_{J1} + N_{P1}$ sowie $N_2 = N_{EI2} + N_{E\Gamma 2} + N_{J2} + N_{P2}$, Die Blockgrößen \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{C}_{12} und \mathbf{C}_{21} haben die Form

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{II} & \mathbf{A}_1^{I\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1^{\Gamma I} & \mathbf{A}_1^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{11}^{EJ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{11}^{JE} + \mathbf{S}_{11}^{JE} & \mathbf{T}_{11}^{JJ} & \mathbf{D}_{11}^{JP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{11}^{PJ} & \mathbf{T}_{11}^{PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_1}, \quad (5.75)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2^{II} & \mathbf{A}_2^{I\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{\Gamma I} & \mathbf{A}_2^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{22}^{EJ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22}^{JE} + \mathbf{S}_{22}^{JE} & \mathbf{T}_{22}^{JJ} & \mathbf{D}_{22}^{JP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}^{PJ} & \mathbf{T}_{22}^{PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_2}, \quad (5.76)$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{12}^{JE} - \mathbf{S}_{12}^{JE} & \mathbf{T}_{12}^{JJ} & \mathbf{D}_{12}^{JP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2}, \quad (5.77)$$

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{21}^{JE} - \mathbf{S}_{21}^{JE} & \mathbf{T}_{21}^{JJ} & \mathbf{D}_{21}^{JP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_1} \quad (5.78)$$

und

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{EI} \\ \mathbf{x}_1^{E\Gamma} \\ \mathbf{x}_1^J \\ \mathbf{x}_1^P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2^{EI} \\ \mathbf{x}_2^{E\Gamma} \\ \mathbf{x}_2^J \\ \mathbf{x}_2^P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2}, \quad (5.79)$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{EI} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2^{EI} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_2}. \quad (5.80)$$

Die enthaltenen Größen \mathbf{A}_m , \mathbf{S}_m , \mathbf{T}_{mn}^{EJ} , \mathbf{T}_{mn}^{JE} , \mathbf{T}_{mn}^{JJ} , \mathbf{b}_m , \mathbf{D}_{mn}^{JP} , \mathbf{S}_{mn}^{EJ} und \mathbf{T}_{mn}^{PP} sind entsprechend (5.21), (5.47) und (5.68) definiert.

5.4.2 Spektralanalyse

Die Abbildungen 5.5a und 5.5b zeigen das resultierende Spektrum der vorkonditionierten FE-DD-Systemmatrix (5.74a) bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz für die Parameter α , β und γ gemäß

$$\alpha = -jk_0, \quad \beta = 0, \quad \text{und} \quad \gamma = 0, \quad (5.81)$$

entsprechend einer Robinschen TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$ sowie

$$\alpha = -jk_0, \quad \beta = \frac{j}{k + \sqrt{k_0^2 - k_{te}^2}}, \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{k_0^2 + k_0 \sqrt{k_0^2 - k_{tm}^2}}, \quad (5.82)$$

resultierend in einer TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_C$, wobei $k_{tm} = 710,5$ rad/m und $k_{te} = 523,2$ rad/m. Entsprechend den analytischen Ergebnissen, dargestellt in Abbildung 4.6, zeigt sich unter Berücksichtigung einer TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_C$ sowohl eine Dämpfung ausbreitungsfähiger TE- und TM-Moden als auch der evaneszenten TE- und TM-Komponenten, resultierend in einer Verschiebung der entsprechenden Eigenwerte ins Innere des verschobenen Einheitskreises gemäß Abbildung 5.5b.

5.4.3 Charakterisierung der Eigenwerte

Der Einfluss der Kopplungsoperatoren auf die spektralen Eigenschaften der vorkonditionierten Systemmatrizen aus (5.13), (5.41), (5.60) und (5.73) zeigt eine Übereinstimmung mit den Ergebnissen der analytischen Untersuchungen aus Abschnitt 4.1.5. Insbesondere konnte durch die separate Betrachtung der vier Kopplungsoperatoren \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_{TM} , \mathcal{B}_{TE} und \mathcal{B}_C eine Verbindung zwischen den Teilmengen des Spektrums $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_X})$, $X \in \{1, TE, TM, C\}$ des vorkonditionierten Systems und den TE- bzw. TM-Komponenten des Fehlers hergestellt werden. Dies motiviert eine Charakterisierung des Spektrums $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_X})$, $X \in \{1, TE, TM, C\}$ der folgenden Gestalt:

- Typ σ_E^{TE} : Hierbei handelt es sich um jene Eigenwerte, welche den evaneszenten TE-Moden zuzuordnen sind.

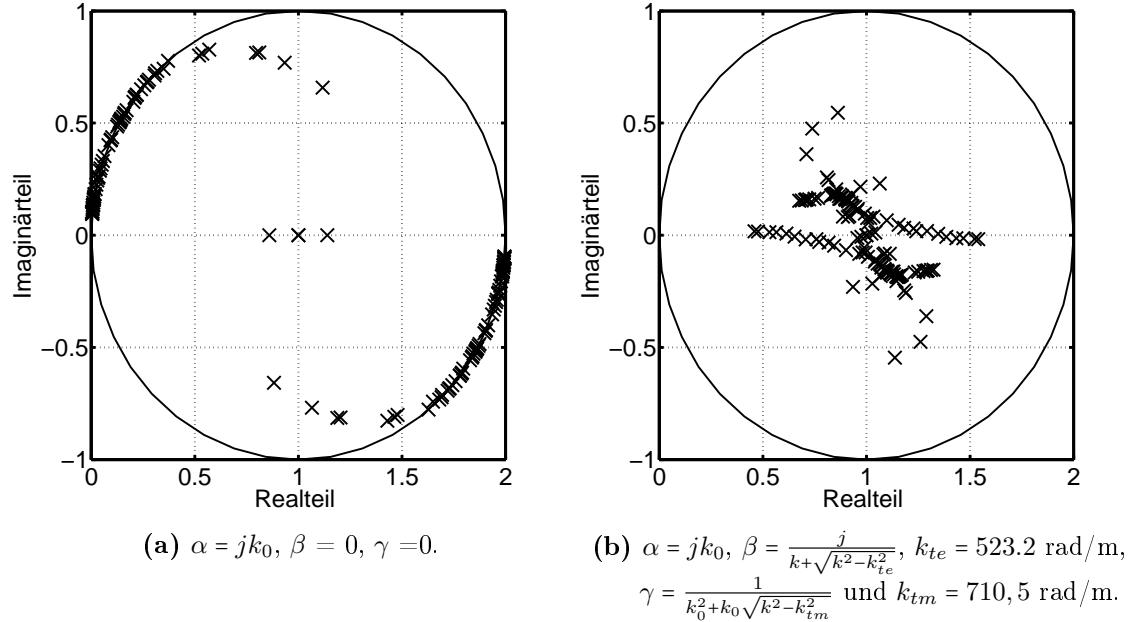


Abbildung 5.5: Spektrum des vorkonditionierten FE-DD-Systems $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_C})$ bei einer Frequenz von $f = 10 \text{ GHz}$.

- Typ σ_E^{TM} : Hierbei handelt es sich um jene Eigenwerte, welche den evaneszenten TM-Moden zuzuordnen sind.
- Typ σ_P^{TE} : Hierbei handelt es sich um jene Eigenwerte, welche den ausbreitungsfähigen TE-Moden zuzuordnen sind.
- Typ σ_P^{TM} : Hierbei handelt es sich um jene Eigenwerte, welche den ausbreitungsfähigen TM-Moden zuzuordnen sind.

5.5 Iterative Lösungsstrategie des FE-DD-Systems

Das iterative DD-Verfahren (4.29) stellt entsprechend den Überlegungen aus Abschnitt 5.1.2 eine Blockvariante des stationären Jakobi-Verfahrens gemäß (3.2) dar und kann prinzipiell als alleinstehendes Lösungsverfahren herangezogen werden. Aufgrund der höheren Robustheit wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch auf die Klasse der Krylovunterraumverfahren gemäß Abschnitt 3.2 zurückgegriffen. Speziell wird aufgrund der unsymmetrischen Struktur der FE-DD-Systemmatrizen in (5.13), (5.41), (5.60) und (5.73) ein vorkonditioniertes GMRES-Verfahren gemäß Abschnitt 3.2.1 zur Lösung des FE-DD-Systems genutzt. Die folgenden Betrachtungen zeigen exemplarisch am Beispiel einer TC höchster Ordnung $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_C$, wie sich das FE-DD-System (5.73) mittels des GMRES-Verfahrens effizient lösen lässt. Im Rahmen der

FE-DD-Formulierung kommt die Gebietszerlegung unabhängig von der Wahl der TC durch die Blockgestalt der FE-DD-Systemmatrix \mathbf{A}^C nach (5.74a) gemäß

$$\mathbf{A}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2 \times N_1+N_2} \quad (5.83)$$

zum Ausdruck. Im Laufe der Spektralanalyse gemäß Abschnitt 5.1.2 wurde bereits das Spektrum des vorkonditionierten FE-DD-Systems anhand eines numerischen Beispiels untersucht, wobei hierbei auf einen Block-Jacobi-Vorkonditionierer bestehend aus dem Diagonalanteil der FE-DD-Systemmatrix aus (5.83) zurückgegriffen wurde. Darauf aufbauend wird im weiteren Verlauf der Arbeit ein mit den Matrizen \mathbf{M}_J und \mathbf{M}_G der Form

$$\mathbf{M}_J := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(N_1+N_2) \times (N_1+N_2)}, \quad (5.84)$$

$$\mathbf{M}_G := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(N_1+N_2) \times (N_1+N_2)} \quad (5.85)$$

vorkonditioniertes GMRES-Verfahren genutzt. Es sei bemerkt, dass es sich bei der Matrix \mathbf{M}_G um eine Blockvariante des Gauss-Seidel-Vorkonditionierers nach (3.29) handelt, welcher einer Erweiterung des Block-Jacobi-Vorkonditionierers \mathbf{M}_J darstellt. Anwendung von $\mathbf{M}_X^{-1}, X \in \{J, G\}$ auf das FE-DD-Gleichungssystem (5.73) resultiert in dem vorkonditionierten System der Form

$$\mathbf{M}_X^{-1} \mathbf{A}^C \mathbf{x} = \mathbf{M}_X^{-1} \mathbf{y}, \quad X \in \{J, G\}, \quad (5.86)$$

wobei $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^T \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}$ den Lösungsvektor nach (5.79) und $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2]^T \in \mathbb{C}^{N_1+N_2}$ die rechte Seite nach (5.80) beschreibt. Zur Lösung des vorkonditionierten Systems (5.86) im Rahmen eines GMRES-Verfahrens wird entweder die separate Wirkung des Vorkonditionierers $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}_X^{-1} \mathbf{x}$ und der Systemmatrix $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}^C \mathbf{x}$ oder die Wirkung der bereits vorkonditionierten Matrix $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{M}_X^{-1} \mathbf{A}^C) \mathbf{x}$ benötigt. In beiden Fällen ist es notwendig, die Wirkung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{x}, i \in \{1, 2\}$ zu berechnen. Betrachtet man beispielsweise die Wirkung des Block-Jacobi-Vorkonditionierers \mathbf{M}_J^{-1} entsprechend

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}_J^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.87)$$

so muss die Lösung der beiden lokalen, den Teilgebieten zugeordneten Teilprobleme der Form

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1, \quad (5.88a)$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 \quad (5.88b)$$

berechnet werden. Ein großer Vorteil von DD-Verfahren besteht darin, dass die Dimension dieser Teilprobleme durch die Anzahl der Teilgebiete in welche das ursprüngliche Feldgebiet zerlegt wurde, variiert werden kann. Insbesondere erlaubt eine hinreichend hohe Anzahl an Teilgebieten eine direkte Lösung der Gleichungssysteme

(5.88), was im weiteren Verlauf der Arbeit stets vorausgesetzt wird. Die Dimension des globalen FE-DD-Systems ist insbesondere im Fall elektrisch großer Strukturen jedoch sehr hoch und erfordert im Rahmen des GMRES-Lösers einen erheblichen numerischen Aufwand. Die hohe Dimension lässt sich jedoch durch Modifikation des vorkonditionierten Systems (5.86) reduzieren: Die Struktur des von (5.86) erlaubt es die dem Inneren der Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 zugeordneten Freiheitsgrade \mathbf{x}_1^{EI} und \mathbf{x}_2^{EI} aus dem Gleichungssystem zu eliminieren. Diese häufig als Kondensierung bezeichnete Reduktion auf die den Grenzflächen Γ_{12} und Γ_{21} zugeordneten Freiheitsgrade $[\mathbf{x}_1^{E\Gamma} \mathbf{x}_1^J \mathbf{x}_1^P]^T \in \mathbb{C}^{N_{\Gamma_1}}$ und $[\mathbf{x}_2^{E\Gamma} \mathbf{x}_2^J \mathbf{x}_2^P]^T \in \mathbb{C}^{N_{\Gamma_2}}$ wird im Folgenden exemplarisch an dem mit \mathbf{M}_J^{-1} vorkonditionierten System (5.86) beschrieben. Dieses folgt durch Multiplikation mit \mathbf{M}_J^{-1} von links entsprechend

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_{21} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.89)$$

wobei die beiden den Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 zugehörigen Einheitsmatrizen \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 durch

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^{EI} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_1^{E\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_1^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_1^P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}, \quad (5.90)$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2^{EI} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^{E\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}, \quad (5.91)$$

definiert sind. Mithilfe der Restriktionsoperatoren \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 definiert durch

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_1^{EI} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_1^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_1^P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma_1} \times N_1}, \quad (5.92)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^{EI} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma_2} \times N_2}, \quad (5.93)$$

so dass

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{E\Gamma} \\ \mathbf{x}_1^J \\ \mathbf{x}_1^P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_{\Gamma_1}}, \quad (5.94)$$

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2^{E\Gamma} \\ \mathbf{x}_2^J \\ \mathbf{x}_2^P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_{\Gamma_2}}, \quad (5.95)$$

lässt sich das System (5.89) unter Berücksichtigung der Eigenschaft

$$\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 = \mathbf{I}_1^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^{E\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_1^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_1^P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma 1} \times N_{\Gamma 1}}, \quad (5.96)$$

$$\mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 = \mathbf{I}_2^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2^{E\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma 2} \times N_{\Gamma 2}} \quad (5.97)$$

auf ein Gleichungssystem, formuliert in den Unbekannten \mathbf{x}_1^Γ und \mathbf{x}_2^Γ der Form

$$\mathbf{A}_J^\Gamma \mathbf{x}^\Gamma = \mathbf{b}_J^\Gamma \quad (5.98)$$

mit

$$\mathbf{A}_J^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^\Gamma & \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_{12} \mathbf{R}_2^T \\ \mathbf{R}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_{21} \mathbf{R}_1^T & \mathbf{I}_2^\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}, \quad (5.99)$$

$$\mathbf{x}^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\Gamma \\ \mathbf{x}_2^\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_\Gamma \times 1}, \quad (5.100)$$

$$\mathbf{b}_J^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{R}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_\Gamma \times 1} \quad (5.101)$$

reduzieren. Vorteilhaft hierbei ist die durch die Reduktion bedingte wesentlich geringeren Dimension $N^\Gamma = N_1^\Gamma + N_2^\Gamma \ll N_1 + N_2$. Gleiches Vorgehen liefert auch im Fall des Vorkonditionierers \mathbf{M}_G^{-1} nach (5.85) das kondensierte Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}_G^\Gamma \mathbf{x}^\Gamma = \mathbf{b}_J^\Gamma, \quad (5.102)$$

wobei

$$\mathbf{A}_G^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^\Gamma & \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_{12} \mathbf{R}_2^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2^\Gamma - \mathbf{R}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_{21} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_{12} \mathbf{R}_2^T \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}, \quad (5.103)$$

$$\mathbf{x}^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\Gamma \\ \mathbf{x}_2^\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}, \quad (5.104)$$

$$\mathbf{b}_G^\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{R}_2 \mathbf{A}_2^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{C}_{21} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{y}_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_\Gamma \times N_\Gamma}. \quad (5.105)$$

Ist die Lösung $[\mathbf{x}_1^\Gamma \ \mathbf{x}_2^\Gamma]^T$ des Gleichungssystems (5.98) bzw. (5.102) mithilfe des GMRES-Verfahrens berechnet, so wird diese durch die Vorschrift

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} (\mathbf{y}_1 - \mathbf{C}_{12} \mathbf{R}_2^T \mathbf{x}_2^\Gamma), \quad (5.106)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_2^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbf{C}_{21} \mathbf{R}_1^T \mathbf{x}_1^\Gamma) \quad (5.107)$$

ins Innere der Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 fortgesetzt. Zusammengefasst lässt sich das folgende zweistufige Lösungsschema formulieren:

1. Lösung des Gleichungssystems (5.98) bzw. (5.102) mithilfe eines GMRES-Verfahrens.
2. Fortsetzung der Lösung $[\mathbf{x}_1^\Gamma \ \mathbf{x}_2^\Gamma]^T$ ins Innere der Teilgebiete gemäß (5.106) und (5.107).

5.6 Numerische Experimente

Im nächsten Schritt werden die diskreten FE-DD-Formulierungen nach Abschnitt 5 zum einen auf ihre Approximationseigenschaften (h - p -Konvergenz) im Vergleich zur klassischen FE-Formulierung entsprechend Abschnitt 2.4.3 und zum anderen auf den Einfluss verschiedener Parameter auf das Konvergenzverhalten des GMRES-Lösers untersucht.

5.7 h - p -Konvergenz

Zur Untersuchung der Approximationseigenschaften der FE-Formulierungen (5.13), (5.41), (5.60) und (5.73) dient das Modell eines WR-90 Rechteckhohleiters nach Abbildung 5.1, welcher eine perfekt elektrisch leitfähige Berandung trägt. Dessen Abmessungen sind durch $a = 22.36$ mm, $b = 10.12$ mm und der Länge $l = 45$ mm definiert. Das zugehörige Gebiet Ω ist im Rahmen einer Gebietszerlegung in die beiden gleichen Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 zerlegt, und trägt ein gleichmäßiges FE-Netz $\mathcal{T}(\Omega) = \mathcal{T}(\Omega_1) \cup \mathcal{T}(\Omega_2)$. Hierbei sei bemerkt, dass die den Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 zugeordneten Teilnetze als gleich angenommen werden. Der Hohlleiter wird mit dem TE_{10} -Mode bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz gespeist während die beiden Wellenleitertore mit der Wellenimpedanz des TE_{10} -Modes abgeschlossen sind. Die Abbildungen 5.6a - 5.6d zeigen den Fehler im Transmissionsparameter gegeben durch

$$e_{12} = |S_{12} - S_{12}^{ref}|, \quad (5.108)$$

in Abhängigkeit des Netzparameters h sowie der Polynomordnung p der beteiligten FE-Räume für die unterschiedlichen FE-Formulierungen (5.13), (5.41), (5.60) und (5.73) im Rahmen der Kopplungsoperatoren nach (4.77). Darüber hinaus ist der aus der klassischen FE-Diskretisierung (2.42) resultierende Fehler aufgezeigt. Es zeigt sich in allen Fällen eine Übereinstimmung der h – p Konvergenzeigenschaften zwischen klassischer FE- und FE-DD-Formulierung sowie eine Konvergenzrate im Fehler e_{12} der Ordnung h^{2p} entsprechend der theoretischen Vorhersage [MD01].

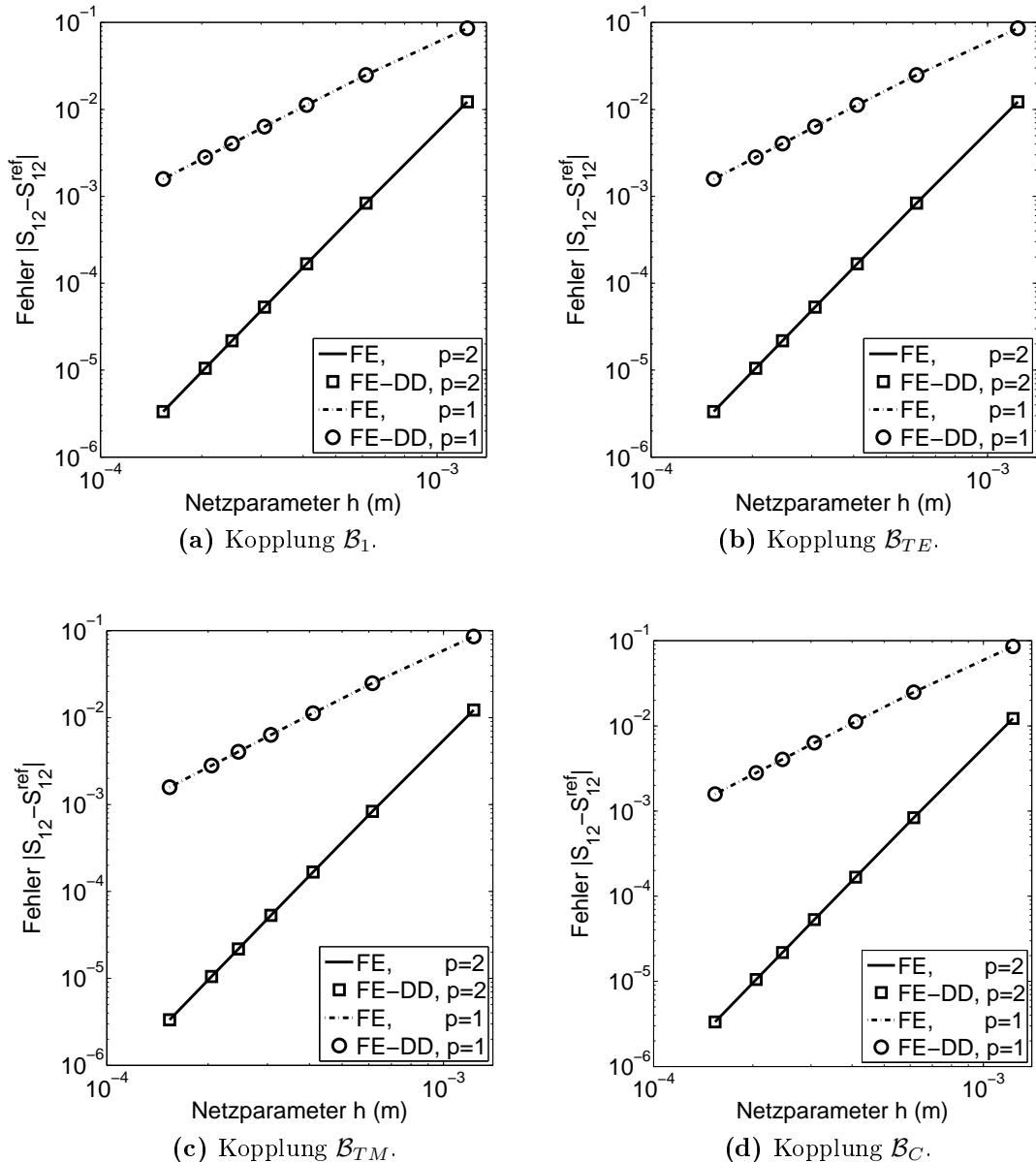


Abbildung 5.6: Fehler $|S_{12} - S_{12}^{\text{ref}}|$ im Transmissionsparameter in Abhängigkeit des Netzparameters h bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz.

5.8 Skalierung des Konvergenzverhaltens

Zusätzlich zu den Approximationseigenschaften der FE-DD-Formulierung wird im Folgenden die Auswirkung gewisser Parameter auf das Spektrum und das damit verbundene Konvergenzverhalten des iterativen GMRES-Lösers untersucht. Hierbei liegt das Augenmerk auf der Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens von der Netzfeinheit h des FE-Netzes sowie der elektrischen Größe der Struktur bedingt durch eine zunehmende Anzahl an Teilgebieten. Im Rahmen der Untersuchungen werden die entsprechende FE-Systeme (5.13), (5.41), (5.60) und (5.73) mithilfe eines Block-Jacobi vorkonditionierten GMRES(30)-Verfahrens entsprechend dem Vorgehen aus Abschnitt 5.5 gelöst.

Skalierung bezüglich der Netzfeinheit h

Als Modell dient das aus zwei gleichen Teildomänen Ω_1 und Ω_2 bestehende Segment eines WR-90 Rechteckhohleiters mit perfekt elektrisch leitfähiger Berandung nach Abbildung 5.1 der Dimension $a = 22.36$, $b = 10.12$ mm und der Länge $l = 45$ mm. Dieser trägt ein gleichmäßiges FE-Netz $\mathcal{T}(\Omega)$ der Netzfeinheit h und wird mit dem TE_{10} Mode bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz gespeist, während die beiden Wellenleitertore mit der entsprechenden Wellenimpedanz des TE_{10} Modes abgeschlossen sind. Die Abbildungen 5.7a und 5.7b zeigen die Norm des relativen Residuums des iterativen Lösers in Abhängigkeit der Iterationszahl für die Polynomordnungen $p = 1$ und $p = 2$ der beteiligten FE-Räume sowie für die unterschiedlichen Kopplungsoperatoren \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_{TE} , \mathcal{B}_{TM} und \mathcal{B}_C . Die Netzfeinheit h beträgt $h = \frac{\lambda}{32}$. Mit Blick auf Abbildung 5.7 zeigt sich ein von der Art der TC unabhängiger Einbruch des relativen Residuums auf circa $\|r\|_2 = 10^{-2}$, welcher sich durch die unabhängig von der TC gewährleisteten Dämpfung der ausbreitungsfähigen TE- und TM-Komponenten entsprechend den Eigenwerten vom Typ σ_P^{TE} und σ_P^{TM} erklären lässt. Gefolgt wird dieses Verhalten von einem Bereich herabgesetzter Konvergenzrate, welcher je nach Wahl des Kopplungsoperators \mathcal{B}_X , $X \in \{1, TE, TM, C\}$ unterschiedlich stark ausgeprägt ist und mit Hinblick auf Abbildung 5.8 umso stärker ausfällt, je feiner das FE-Netz gewählt wird. Dieser Effekt lässt sich durch Blick auf das entsprechende Spektrum der vorkonditionierten Matrix $\sigma(\mathbf{M}_J^{-1} \mathbf{A}^X)$, $X \in \{1, TE, TM, C\}$ erklären, welches in Abbildung 5.9 und Abbildung 5.10 für eine Netzfeinheit von $h = \frac{\lambda}{4}$ und $h = \frac{\lambda}{8}$ sowie einer Polynomordnung $p = 1$ dargestellt ist: Unter Berücksichtigung einer TC niedrigster Ordnung entsprechend $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$ äußert sich entsprechend Abbildung 5.9a und 5.10a die Verfeinerung des FE-Netzes in einer erhöhten Anzahl von Eigenwerten vom Typ σ_E^{TE} und σ_E^{TM} auf dem Rand $\partial\bar{B}_1(1)$ des verschobenen Einheitskreis $\bar{B}_1(1)$, deren Häufungspunkt sich durch die Netzverfeinerung in Richtung des Ursprungs $(0, 0)$ bewegt. Mit Hinblick auf die Konvergenzeigenschaften des genutzten GMRES-Verfahrens nach (3.23) ist zu erwarten, dass diese dem Ursprung nahe liegenden Eigenwerte zu einer

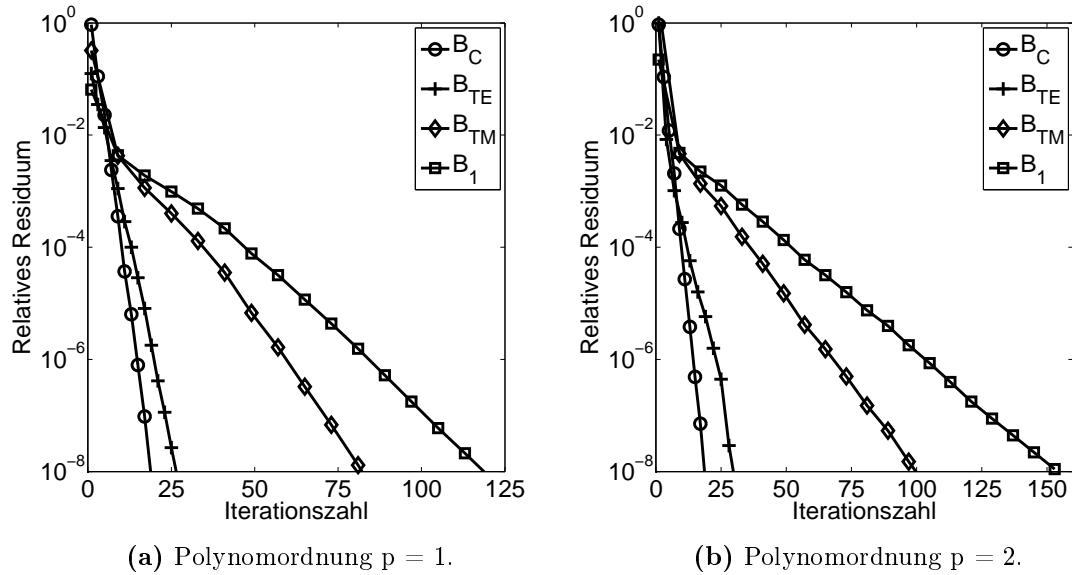


Abbildung 5.7: Relatives Residuum $\|r\|_2$ des GMRES-Lösers in Abhängigkeit des Kopplungsgoperators $\mathcal{B}_X, X \in \{1, TE, TM, C\}$.

Verschlechterung der Konvergenzrate führen, und dass somit eine ausgeprägte Skalierung der Iterationszahl in Abhängigkeit der Netzfeinheit h entsteht. Betrachtet man das Konvergenzverhalten für die beiden Kopplungsoperatoren \mathcal{B}_{TE} und \mathcal{B}_{TM} nach den Abbildungen 5.8b und 5.8c, so zeigt sich im erst genannten Fall ein wesentlich geringer ausgeprägter Einbruch der Konvergenzordnung gegenüber einer TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_1$. Im zweiten genannten Fall ist nur eine geringe Verbesserung gegenüber einer TC niedrigster Ordnung zu verzeichnen. Mit Blick auf die zugehörigen Spektren nach Abbildung 5.9b, 5.10b, 5.9c und 5.10c sind die dem Ursprung am nächsten liegenden Eigenwerte jene vom Typ σ_E^{TE} , welche unter Nutzung der TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TE}$ ins Innere von $\overline{B}_1(1)$ verschoben werden. Die Eigenwerte vom Typ σ_E^{TM} werden unter Berücksichtigung der TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TM}$ zwar ebenfalls ins Innere von $\overline{B}_1(1)$ verschoben, hatten jedoch ursprünglich einen wesentlich kleineren Abstand zum Ursprung $(0, 0)$, was den geringeren Einfluss des Kopplungsoperators $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{TM}$ erklärt. Die Berücksichtigung des Kopplungsoperators $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_C$ resultiert letztendlich in einer von der Netzfeinheit h nahezu unabhängigen und deutlich vergrößerten Konvergenzordnung entsprechend der Abbildung 5.8d. Diese ist bedingt durch die simultane Verschiebung der Eigenwerte vom Typ σ_E^{TE} und σ_E^{TM} ins Innere von $\overline{B}_1(1)$. Die benötigten Iterationszahlen zum Erreichen eines relativen Residuums von $\|r\|_2 = 10^{-8}$ sind in Abbildung 5.11a und Abbildung 5.11b für eine Polynomordnung von $p = 1$ und $p = 2$ zu erkennen. Durch Vergleich der Abbildung 5.7a und 5.7b, lässt sich ebenfalls eine von der Polynomordnung unabhängige Konvergenzgeschwindigkeit vermuten.

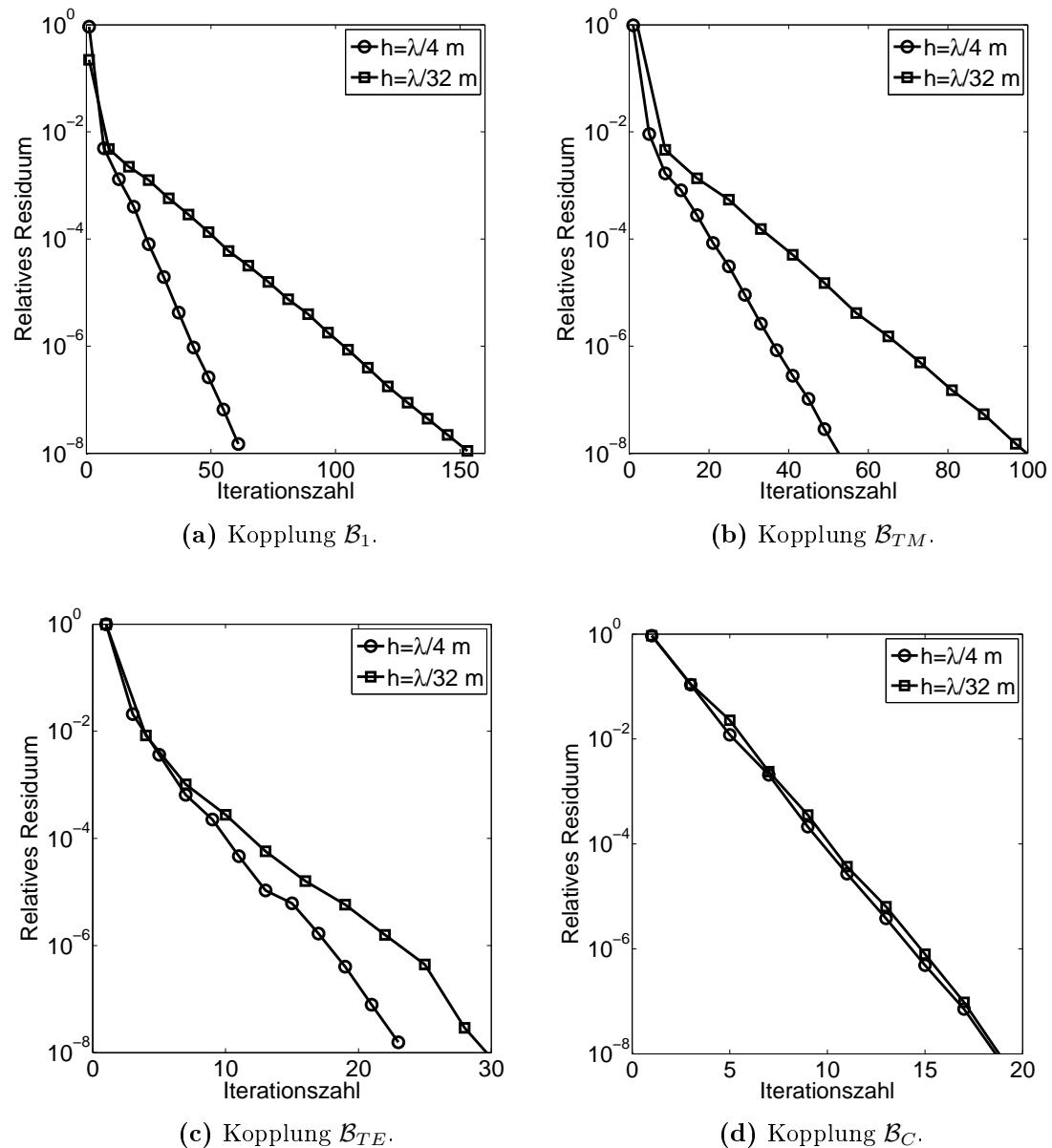
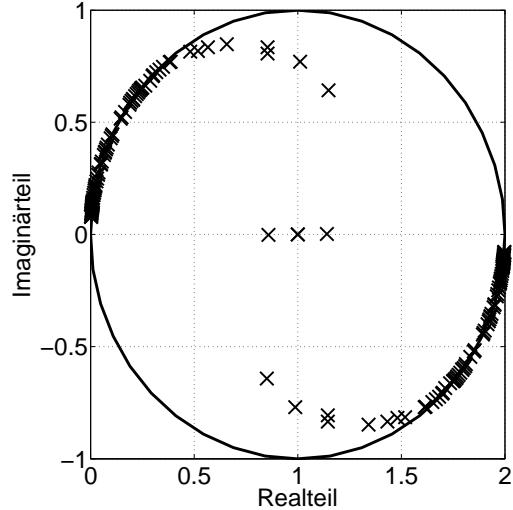
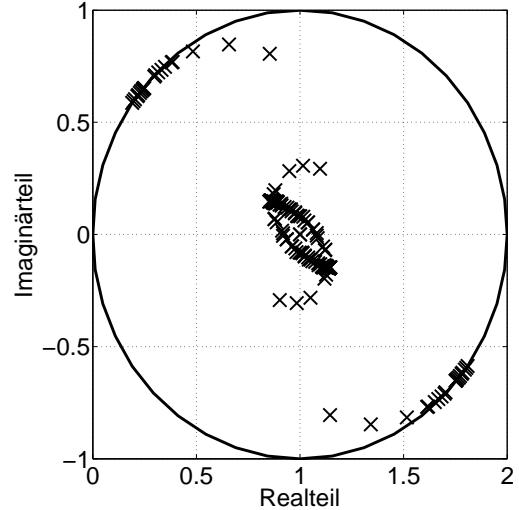


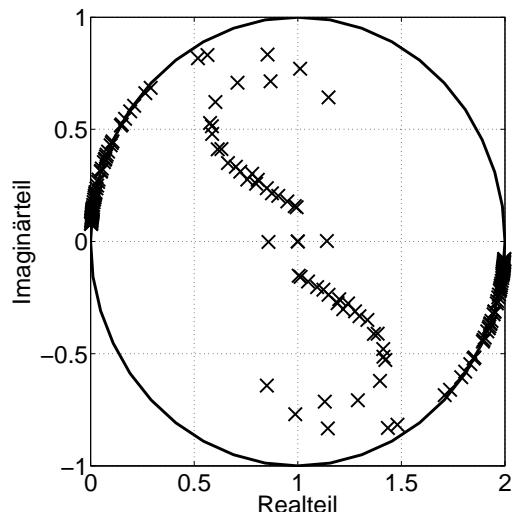
Abbildung 5.8: Relatives Residuum $\|r\|_2$ des GMRES-Lösers in Abhängigkeit der Iterationszahl für unterschiedliche Netzfeinheiten h bei $f = 10$ GHz sowie $p = 2$.



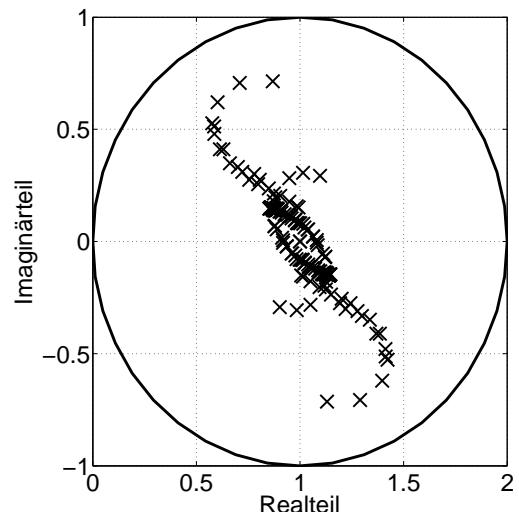
(a) $p = 1, \frac{h}{\lambda} = \frac{1}{8}, \mathcal{B} = \mathcal{B}_1$.



(b) $p = 1, \frac{h}{\lambda} = \frac{1}{8}, \mathcal{B} = \mathcal{B}_{TE}$.



(c) $p = 1, \frac{h}{\lambda} = \frac{1}{8}, \mathcal{B} = \mathcal{B}_{TM}$.



(d) $p = 1, \frac{h}{\lambda} = \frac{1}{8}, \mathcal{B} = \mathcal{B}_C$.

Abbildung 5.9: Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{\mathcal{B}_X})$, $X \in \{1, TE, TM, C\}$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei $f = 10$ GHz.

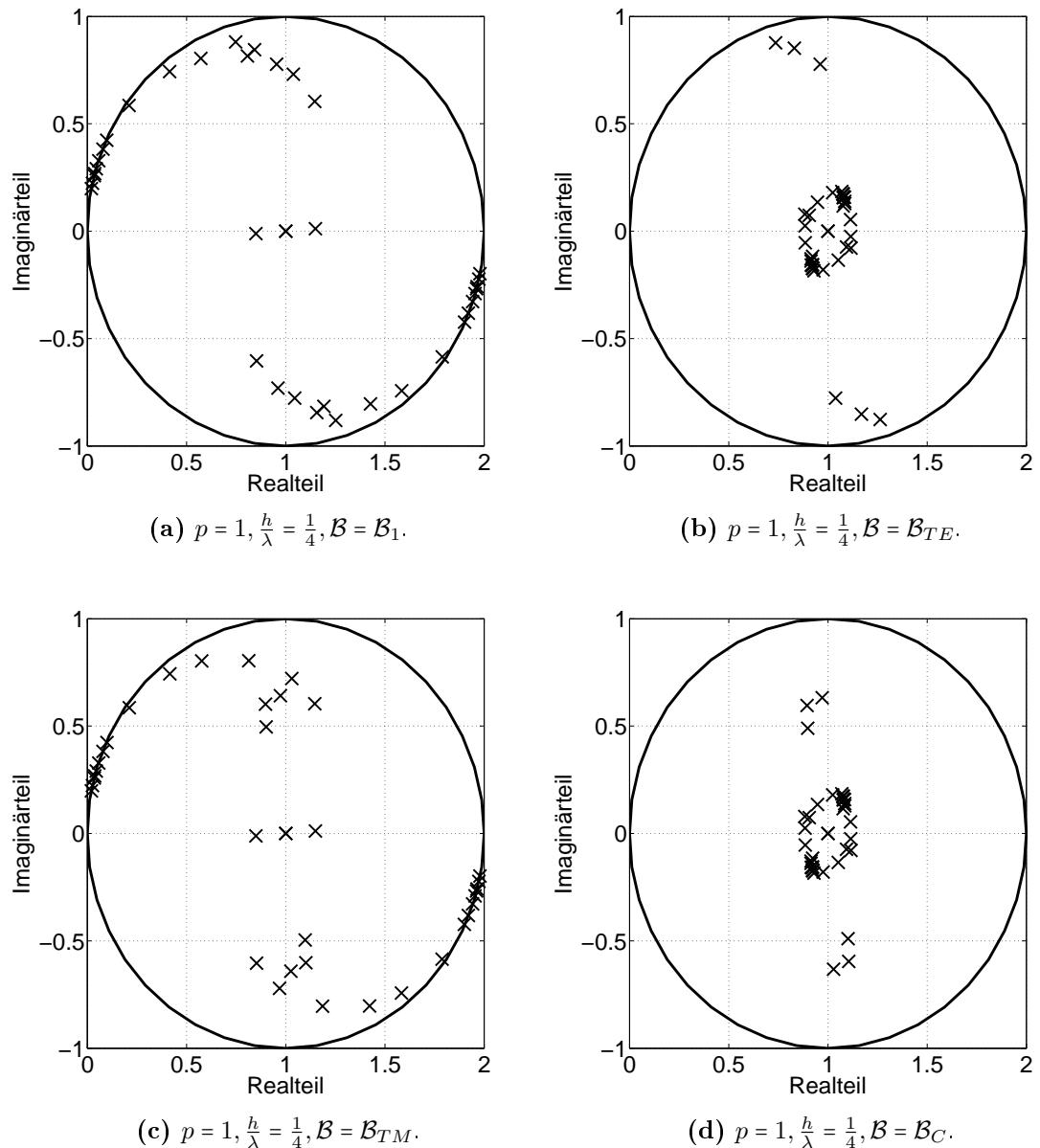


Abbildung 5.10: Spektrum $\sigma(M^{-1}A^{\mathcal{B}_X})$, $X \in \{1, TE, TM, C\}$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei $f = 10$ GHz.

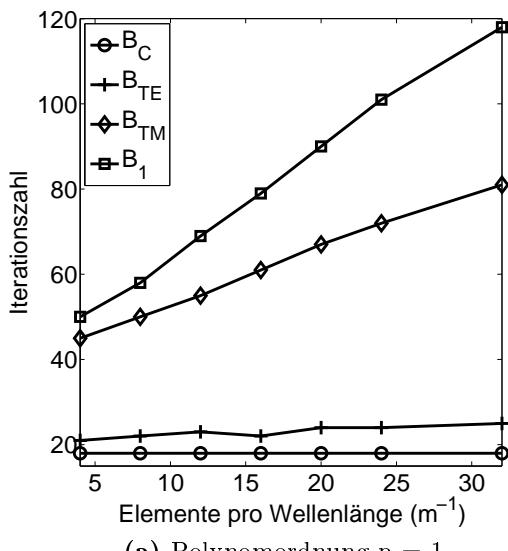
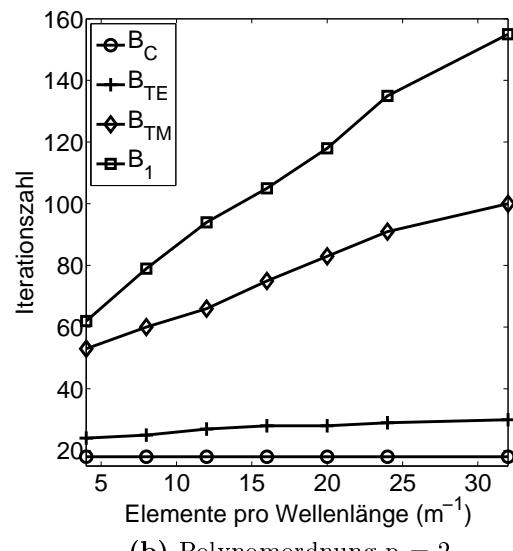
(a) Polynomordnung $p = 1$.(b) Polynomordnung $p = 2$.

Abbildung 5.11: Benötigte Iterationszahl zum Erreichen eines relativen Residuum von $\|r\|_2 = 10^{-8}$ in Abhängigkeit der Netzfeinheit h

5.8.1 Skalierung mit der Anzahl der Teilgebiete

Das folgende numerische Experiment untersucht die Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens von der Anzahl an Teilgebieten und der elektrischen Größe der Struktur unter Voraussetzung konstanter Teilgebietsabmessungen. Betrachtet wird hierzu ein Segment eines WR-90 Hohlleiters mit perfekt elektrisch leitfähiger Berandung der Dimension $a = 22.36$ mm, $b = 10.12$ mm und der Länge $l = 30$ mm. Dieses definiert durch N_D -faches Duplizieren in eine Koordinatenrichtung die Geometrie der Gesamtstruktur. Die Anregung der Struktur geschieht mit einem TE_{10} Mode bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz, wobei die beiden Wellenleitertore mit der dem Mode entsprechenden Wellenimpedanz abgeschlossen sind. Die Netzfeinheit beträgt $h = \frac{\lambda}{16}$, und die Polynomordnung der FE-Ansatzfunktionen entspricht $p = 2$. Abbildung 5.12 zeigt das Konvergenzverhalten des GMRES- Lösers für $N_D = 40$ Teilgebiete unter Berücksichtigung der vier Kopplungsoperatoren $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{TE}, \mathcal{B}_{TM}$ und \mathcal{B}_C . Nach dem bereits erläuterten Einbruch des relativen Residuums auf ungefähr $\|r\|_2 = 10^{-2}$ bedingt durch die Dämpfung der Komponenten vom Typ σ_P^{TE} und Typ σ_P^{TM} ist ein Plateau im relativen Residuum bis zu einer Iterationszahl von ungefähr 40 Iterationen zu erkennen. Dieses zeigt sich ebenso in Abbildung 5.14, welche den Konvergenzverlauf für die unterschiedlichen Kopplungsoperatoren vergleichend für $N_D = 40$ und $N_D = 20$ Teilgebiete darstellt. Hieraus ist ersichtlich, dass die Länge des zuvor genannten Plateaus ungefähr mit der Anzahl der Teilgebiete N_D übereinstimmt. Die sich nach der Überschreitung des Plateaus einstellende Konvergenzordnung ist wiederum abhängig von der Art der TC und ist wie in Abschnitt 5.8 durch die unterschiedlich starke Dämpfung der Fehlerkomponenten entsprechend den Eigenwerten vom Typ σ_E^{TE} und Typ σ_E^{TM} zu erklären. Darauf hinaus verdeutlicht Abbildung 5.15 den Einfluss der Teilgebietsanzahl auf das Spektrum $\sigma(\mathbf{M}_J^{-1} \mathbf{A}^X), X \in \{1, TE, TM, C\}$ der vorkonditionierten Matrix, welches exemplarisch für $N_D = 2, N_D = 3$ und $N_D = 4$ Teilgebiete unter Berücksichtigung einer TC gemäß $\mathcal{B} = \mathcal{B}_C$ aufgetragen ist. Es zeigt sich, dass jedes zusätzlich vorhandene Teilgebiet eine weitere Menge an Eigenwerten der Typen $\sigma_E^{TE}, \sigma_E^{TM}, \sigma_P^{TE}$ und σ_P^{TM} mit sich bringt. Zusammenfassend zeigt die Abbildung 5.13 die benötigte Iterationszahl des GMRES-Lösers zum Erreichen eines relativen Residuums von $\|r\|_2 = 10^{-8}$ in Abhängigkeit der TC. Bedingt durch das zuvor genannte Plateau ist in allen Fällen eine deutliche Abhängigkeit der benötigten Iterationszahl von der Anzahl der Teilgebiete zu erkennen.

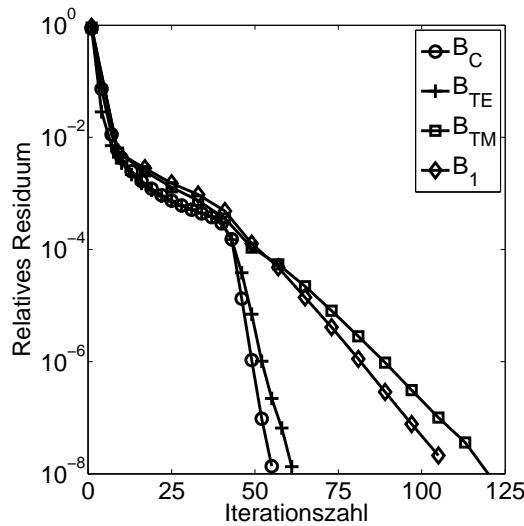


Abbildung 5.12: Betrag des relativen Residuums $\|r\|_2$ in Abhängigkeit der Iterationszahl bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz, $N_D = 40$ und $h = \frac{\lambda}{16}$.

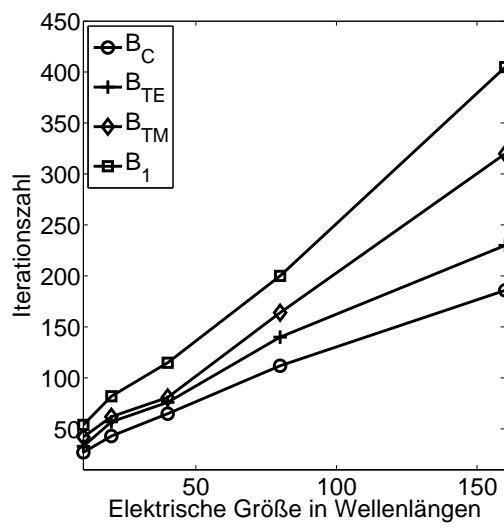


Abbildung 5.13: Benötigte Iterationszahl zum Erreichen eines relativen Residuum von $\|r\|_2 = 10^{-8}$ in Abhängigkeit der elektrischen Größe der Struktur bei $f = 10$ GHz und $h = \frac{\lambda}{16}$.

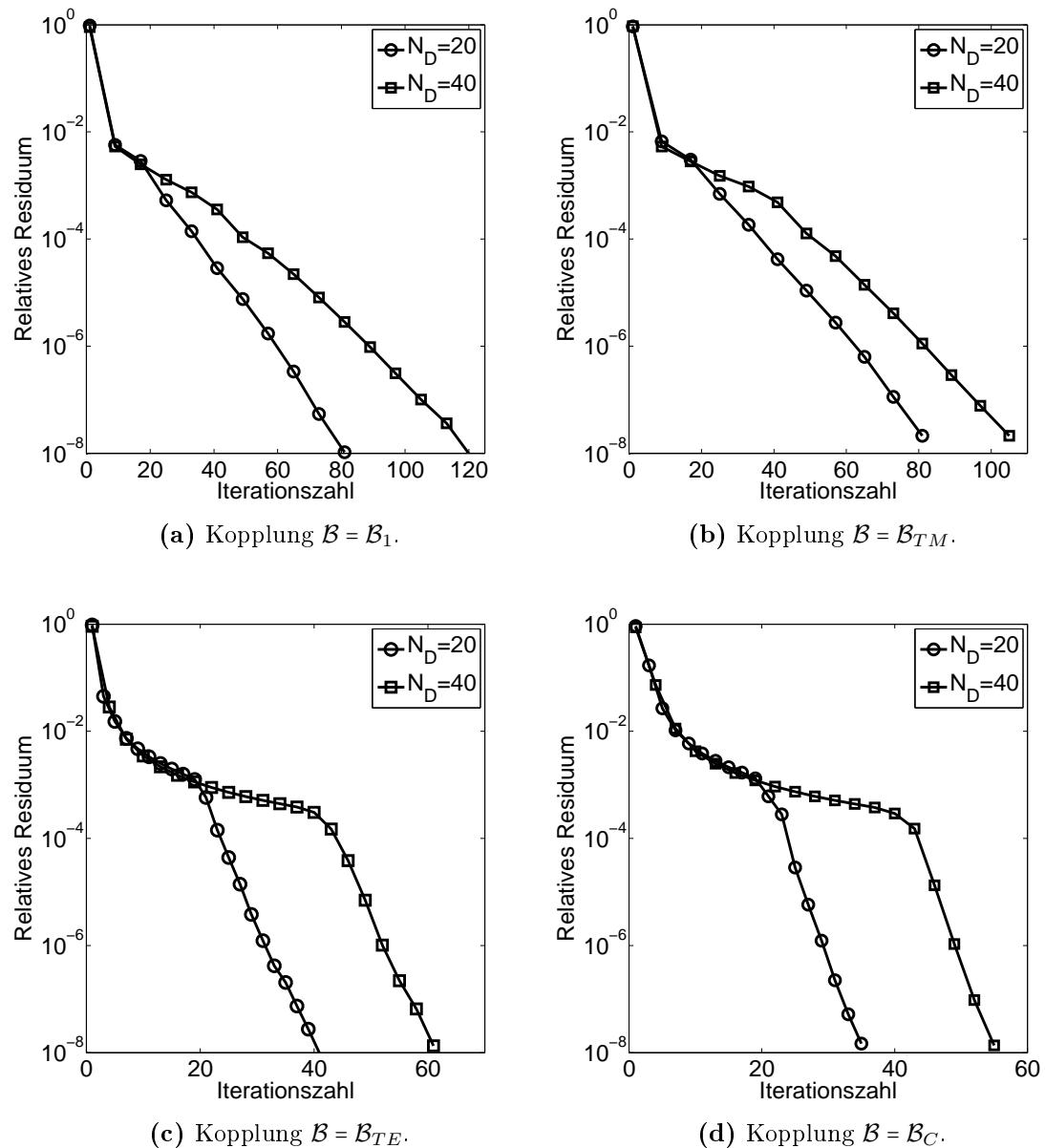


Abbildung 5.14: Betrag des relativen Residuums $\|r\|_2$ in Abhängigkeit der Iterationszahl für $f = 10$ GHz und $h = \frac{\lambda}{16}$.

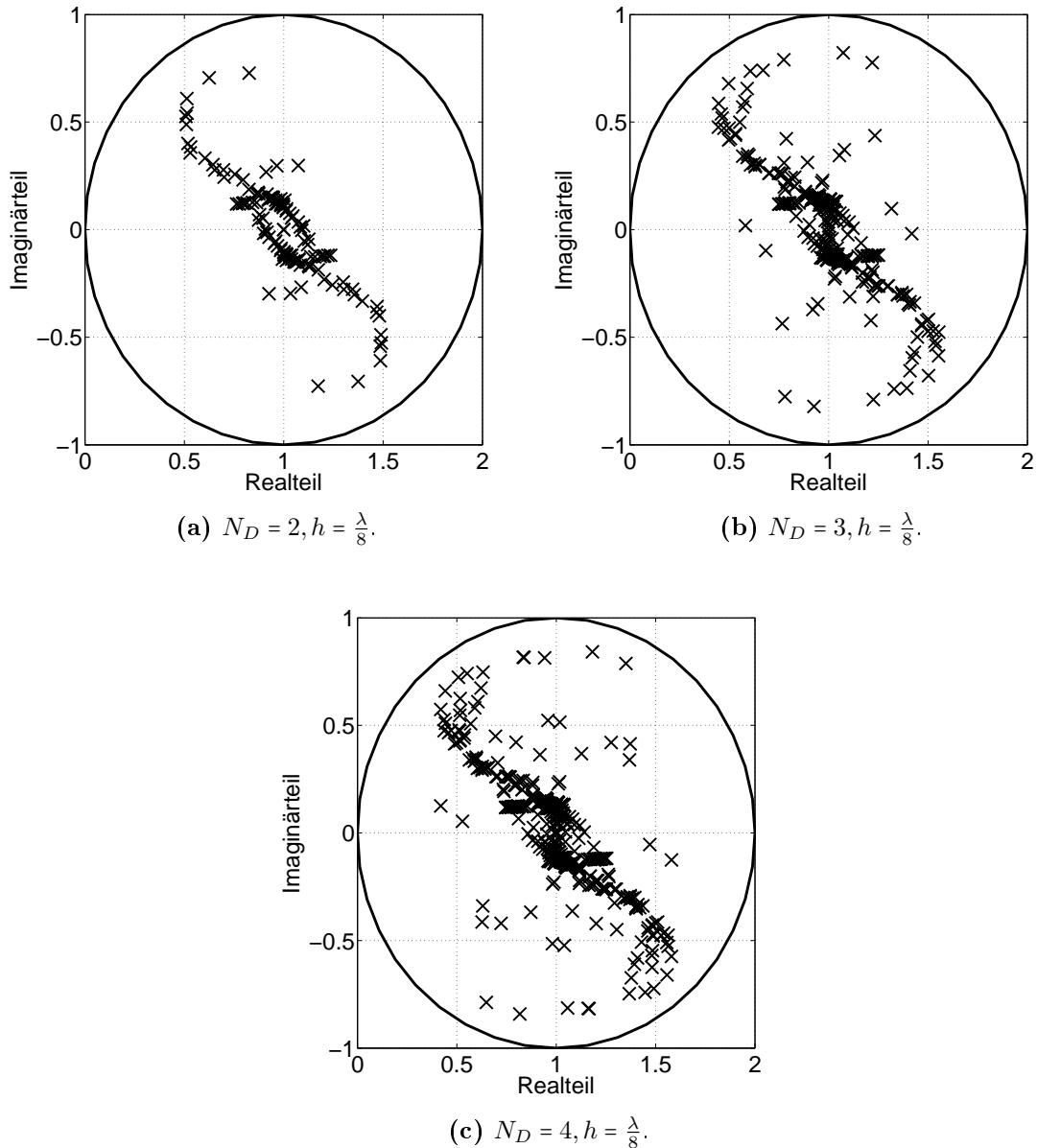


Abbildung 5.15: Spektrum $\sigma(M^{-1}A^{\mathcal{B}_X})$, $X \in \{1, TE, TM, C\}$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei $f = 10$ GHz für eine unterschiedliche Anzahl N_D an Teilgebieten.

5.9 Grobraumkorrektur

Die in Abschnitt 5.8.1 aufgezeigte Skalierung des Konvergenzverhaltens mit der Anzahl N_D an Teilgebieten zeigt sich als typisches Phänomen im Rahmen von DD-Verfahren [Wid09], [TW05], [PL12]. Es zeigt sich, dass eine solche Skalierung durch die Hinzunahme einer globalen Korrektur des Fehlers innerhalb des iterativen Lösungsprozesses vermeidbar ist. Dementsprechend wird dieser Korrekturmechanismus häufig als Grobraumkorrektur bezeichnet. Es stellt sich somit die Frage, wie sich eine solche globale Korrektur auf geeignete Weise im Rahmen eines iterativen Lösungsverfahrens umsetzen lässt. Speziell soll im weiteren Verlauf eine Grobraumkorrektur auf Basis einer erweiterten Vorkonditionierung aufgezeigt werden. Ziel ist es, den iterativen Lösungsprozess, zur Lösung des vorkonditionierten Systems (5.98) bzw. (5.102) der Form

$$\mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{x}^\Gamma = \mathbf{b}_J^\Gamma, \quad X \in \{J, G\} \quad (5.109)$$

um eine Grobraumkorrektur zu erweitern. Es sei bemerkt, dass das kondensierte System (5.109) der Dimension $N_\Gamma \times N_\Gamma$ bereits die Wirkung des DD-Vorkonditionierers (5.84) bzw. (5.85) beinhaltet. Die Umsetzung einer Grobraumkorrektur lässt sich durch die folgende Überlegung motivieren: Angenommen $\bar{\mathbf{x}}$ bezeichne die aktuelle Näherungslösung innerhalb eines Projektionsverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems (5.109). Durch Lösen des orthogonalen Projektionsproblems

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} \bar{\mathbf{y}}, \quad (5.110)$$

$$\mathbf{Z}^* \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{Z}^* (\mathbf{b} - \mathbf{A}_X^\Gamma (\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} \bar{\mathbf{y}})) = 0, \quad (5.111)$$

kann die aktuelle Näherung $\bar{\mathbf{x}}$ durch Addition einer Grobraumkomponente $\mathbf{x}_c = \mathbf{Z} \bar{\mathbf{y}}$ korrigiert werden. Hierbei spannen die Spalten der Matrix $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{N_\Gamma \times N_c}$ einen vorgegebenen Grobraum \mathcal{V}^c auf. Die korrigierte Lösung folgt unter Berücksichtigung der Lösung des projizierten Systems

$$\mathbf{Z}^* \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{Z} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{Z}^* \bar{\mathbf{r}} \quad (5.112)$$

entsprechend

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} (\mathbf{Z}^* \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^* (\mathbf{b} - \mathbf{A}_X^\Gamma) \\ &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} (\mathbf{Z}^* \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^* \bar{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Auf Basis von (5.113) lässt sich das aktualisierte Residuum $\bar{\mathbf{r}}$ in Abhängigkeit des Residuums $\bar{\mathbf{r}}$ gemäß

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}_X^\Gamma \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}_X^\Gamma (\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} (\mathbf{Z}^* \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^* \bar{\mathbf{r}}) \quad (5.114)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{Z} (\mathbf{Z}^* \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^*) \bar{\mathbf{r}} \quad (5.115)$$

berechnen, so dass insbesondere die Orthogonalitätsbedingung $\mathbf{Z}^* \bar{\mathbf{r}} = 0$ erfüllt ist. Somit lässt sich die aufgezeigte Korrektur ebenfalls durch Lösung des vorkonditionierten Systems

$$\mathbf{P}_D \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{x} = \mathbf{P}_D \mathbf{b}, \quad (5.116)$$

mit der vorkonditionierenden Matrix

$$\mathbf{P}_D = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{Z} \left(\mathbf{Z}^* \mathbf{A}_X^\Gamma \mathbf{Z} \right)^{-1} \mathbf{Z}^* \right) \in \mathbb{C}^{N_\Gamma \times N_\Gamma} \quad (5.117)$$

im Rahmen eines Projektionsverfahrens umsetzen. Entscheidend für das Konvergenzverhalten des GMRES-Lösers, angewandt auf das um eine Grobraumkorrektur erweiterte System (5.116), ist wiederum das Spektrum der vorkonditionierten Systemmatrix $\mathbf{P}_D \mathbf{A}_X^\Gamma, X \in \{J, G\}$. Hierbei stellt sich insbesondere die Frage, wie sich die Grobraumkorrektur und somit die Form des Grobraums auf das Spektrum auswirkt. Allgemein definiert diese Fragestellung ein noch offenes Problem und ist Gegenstand aktueller Forschung [LTV17]. Im Spezialfall eines Grobraums, bestehend aus Eigenvektoren der vorkonditionierten Systemmatrix, zeigt die Arbeit [EN08] jedoch folgendes Ergebnis:

Satz 5.5. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ diagonalisierbar gemäß der Darstellung $\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1}$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{\Lambda} = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \}$, die aus den Eigenwerten bestehende Diagonalmatrix. Ein Grobraum der Form $\text{range}(\mathbf{Z}) = \text{range}(\mathbf{X})$ der Dimension $\dim(\text{range}(\mathbf{Z})) = r$ resultiert in dem Spektrum*

$$\sigma(\mathbf{P}_D \mathbf{A}) = \{0, \dots, 0, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_N\}. \quad (5.118)$$

Beweis. Siehe [EN08]. □

Eine Grobraumkorrektur im Sinne von Satz 5.5 ermöglicht somit die Elimination spezifizierter Eigenwerte aus dem Spektrum der vorkonditionierten Systemmatrix. Der Grobraum $\text{range}(\mathbf{Z})$ sollte also möglichst so gewählt sein, dass die hinsichtlich des Konvergenzverhaltens des GMRES-Lösers kritischen Eigenwerte aus dem Spektrum der vorkonditionierten Systemmatrix eliminiert werden. Ein Grobraum der Form $\text{range}(\mathbf{Z}) = \text{range}(\mathbf{X})$ ist jedoch aufgrund der meist unbekannten bzw. nur unter hohem numerischen Aufwand berechenbaren Eigenvektoren \mathbf{X} nur von geringer praktischer Bedeutung. Die Konvergenzanalyse nach Abschnitt 4.1.5 lässt jedoch Rückschlüsse auf die kritischen Eigenwerte der vorkonditionierten Systemmatrix $\mathbf{P}_D \mathbf{A}_X^\Gamma, X \in \{J, G\}$ zu: Mit Hinblick auf Abbildung 4.6 zeigte sich ein Konvergenzfaktor $\rho_{\mathcal{B}_C}^{TE} = \rho_{\mathcal{B}_C}^{TM} = 1$ für sich tangential zur Grenzfläche Γ ausbreitende Moden, gemäß einer transversalen Wellenzahl $k_T = k$. Somit liegt es nahe, den Grobraum $\text{range}(\mathbf{Z})$ derart zu konstruieren, dass dieser diese kritischen Fehlerkomponenten hinreichend gut approximiert. Dies motiviert die in der Arbeit [PL12] aufgezeigte Grobraumkonstruktion auf Basis sich tangential zur Grenzfläche Γ ausbreitender ebener Wellen.

5.9.1 Grobraumkorrektur durch ebene Wellen

Die Konstruktion des Grobraums bestehend aus ebenen Wellen gemäß [PL12] basiert auf der im Rahmen der FE-DD-Formulierung eingeführten Hilfsfelder \mathbf{j}_i , p_i und \mathbf{e}_i der Form

$$\mathbf{e}_i = \pi_T(\mathbf{E}_i), \quad (5.119a)$$

$$\mathbf{j}_i = \gamma_T(\mu_{r_i}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i), \quad (5.119b)$$

$$p_i = \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_i), \quad \text{mit } i \in \{1, 2\}, \quad (5.119c)$$

welche den Grenzflächen $\Gamma_{ij}, i, j \in \{1, 2\}$ zugeordnet sind. Den Hilfsfelder (5.119) werden anschließend entsprechend dem Vorgehen aus [PL12] die folgenden ebenen Wellen zugeteilt:

$$\mathbf{e}_i^n = \left(\sin \phi_n \hat{\mathbf{e}}_x - \cos \phi_n \hat{\mathbf{e}}_y \right) e^{-j\tilde{k}(\cos \phi_n x + \sin \phi_n y)}, \quad (5.120a)$$

$$\mathbf{j}_i^n = \left(\cos \phi_n \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \phi_n \hat{\mathbf{e}}_y \right) e^{-j\tilde{k}(\cos \phi_n x + \sin \phi_n y)}, \quad (5.120b)$$

$$p_i^n = e^{-j\tilde{k}(\cos \phi_n x + \sin \phi_n y)}, \quad (5.120c)$$

$$\phi_n = \frac{2\pi(n-1)}{N^\phi}, \quad \text{mit } i \in \{1, 2\} \text{ und } n \in \mathbb{N}. \quad (5.120d)$$

Die Abbildung 5.16 verdeutlicht die Konstruktion des Grobraums nach (5.120), dessen Dimension N_c im Wesentlichen durch die Zahl N^ϕ an Ausbreitungsrichtungen bestimmt ist. Basierend auf der analytischen Beschreibung des Grobraums (5.120)

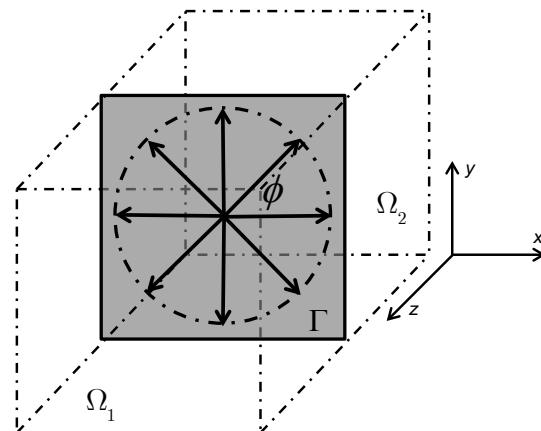


Abbildung 5.16: Geometrie der Grobraumzerlegung bestehend aus ebenen Wellen.

lässt sich die Projektionsmatrix $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{(N^{E\Gamma}+N^J+N^P) \times 3N^\phi}$ entsprechend (5.121) gemäß der Darstellung

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^{E\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_1^J & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_1^P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2^{E\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2^P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(N^{E\Gamma}+N^J+N^P) \times 3N^\phi} \quad (5.121)$$

erzeugen. Die enthaltenen Blockmatrizen sind von der Gestalt

$$\mathbf{Z}_1^{E\Gamma} = \left[\mathbf{e}_1^{\phi 1} \cdots \mathbf{e}_1^{\phi N^\phi} \right] \in \mathbb{C}^{N_1^{E\Gamma} \times N^\phi}, \quad (5.122)$$

$$\mathbf{Z}_2^{E\Gamma} = \left[\mathbf{e}_2^{\phi 1} \cdots \mathbf{e}_2^{\phi N^\phi} \right] \in \mathbb{C}^{N_2^{E\Gamma} \times N^\phi}, \quad (5.123)$$

$$\mathbf{Z}_1^J = \left[\mathbf{j}_1^{\phi 1} \cdots \mathbf{j}_1^{\phi N^\phi} \right] \in \mathbb{C}^{N_1^J \times N^\phi}, \quad (5.124)$$

$$\mathbf{Z}_2^J = \left[\mathbf{j}_2^{\phi 1} \cdots \mathbf{j}_2^{\phi N^\phi} \right] \in \mathbb{C}^{N_2^J \times N^\phi}, \quad (5.125)$$

$$\mathbf{Z}_1^P = \left[\mathbf{p}_1^{\phi 1} \cdots \mathbf{p}_1^{\phi N^\phi} \right] \in \mathbb{C}^{N_1^P \times N^\phi}, \quad (5.126)$$

$$\mathbf{Z}_2^P = \left[\mathbf{p}_2^{\phi 1} \cdots \mathbf{p}_2^{\phi N^\phi} \right] \in \mathbb{C}^{N_2^P \times N^\phi}, \quad (5.127)$$

wobei die enthaltenen Spaltenvektoren $\mathbf{e}_i^{\phi n} \in \mathbb{C}^{N_1^{E\Gamma} \times 1}$, $\mathbf{j}_i^{\phi n} \in \mathbb{C}^{N_1^J \times 1}$ und $\mathbf{p}_i^{\phi n} \in \mathbb{C}^{N_1^P \times 1}$, mit $i \in \{1, 2\}$ und $n = 1 \cdots N^\phi$ durch Projektion der ebenen Wellen \mathbf{e}_i^n , \mathbf{j}_i^n und \mathbf{p}_i^n nach (5.120) auf die entsprechenden den Grenzflächen Γ_{12} und Γ_{21} zugeordneten FE-Räume $\mathcal{V}_{\Gamma_{12}}^{\text{grad}}$, $\mathcal{V}_{\Gamma_{21}}^{\text{grad}}$, $\mathcal{V}_{\Gamma_{12}}^{\text{rot}}$ und $\mathcal{V}_{\Gamma_{21}}^{\text{rot}}$ entstehen.

5.9.2 Numerisches Experiment

Um den Einfluss der Grobraumkorrektur entsprechend Abschnitt 5.9 zu untersuchen, wird im Folgenden das numerische Experiment aus Abschnitt 5.8.1 wiederholt. Speziell wird in diesem Rahmen das vorkonditionierte System (5.116) mittels eines GMRES-Verfahrens gelöst, wobei der Grobraum auf Basis ebener Wellen gemäß Abschnitt 5.9.1 definiert ist. Hierbei wird die Wellenzahl in (5.120) entsprechend $\tilde{k} = \frac{2\pi}{a} \text{ rad/m}$ gewählt. Die Abbildung 5.18 zeigt das Spektrum $\sigma(\mathbf{P}_D \mathbf{A}_J^\Gamma)$ in Abhängigkeit der Anzahl ebener Wellen N^ϕ und für eine Struktur bestehend aus $N_D = 4$ Teilgebieten: Es zeigt sich bereits bei einer Anzahl von $N^\phi = 8$ Basisfunktionen eine wesentlich stärkere Konzentration der Eigenwerte um den Punkt $(1, 0)$. Um den Einfluss der Anzahl berücksichtigter ebener Wellen auf das Konvergenzverhalten zu demonstrieren, zeigt Abbildung (5.17) den Verlauf des relativen Residuums exemplarisch für $N_D = 160$ Teilgebiete. In Übereinstimmung mit dem Verhalten des Spektrums zeigt sich auch in diesem Fall bereits ab einer Anzahl von $N^\phi = 8$ Basisfunktionen ein verschwindendes Plateau im relativen Residuum. Dies resultiert

entsprechend Abbildung 5.19 in einer von der Anzahl N_D an Teilgebieten unabhängigen Konvergenzgeschwindigkeit des Lösers.

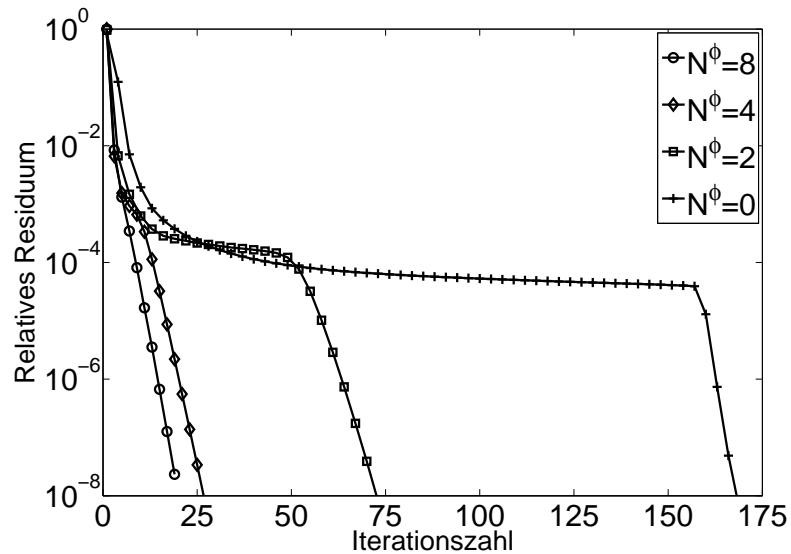


Abbildung 5.17: Betrag des relativen Residuums in Abhängigkeit der Iterationszahl für eine unterschiedliche Anzahl N^ϕ an ebenen Wellen bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz und $N_D = 160$ Teilgebieten.

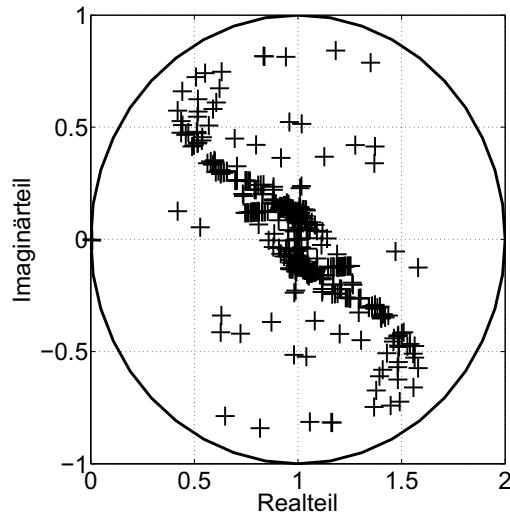
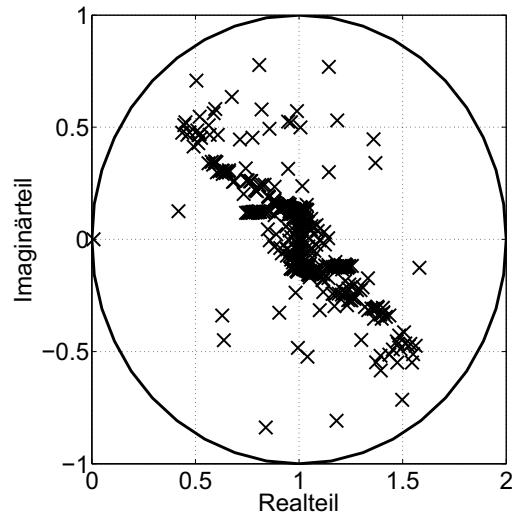
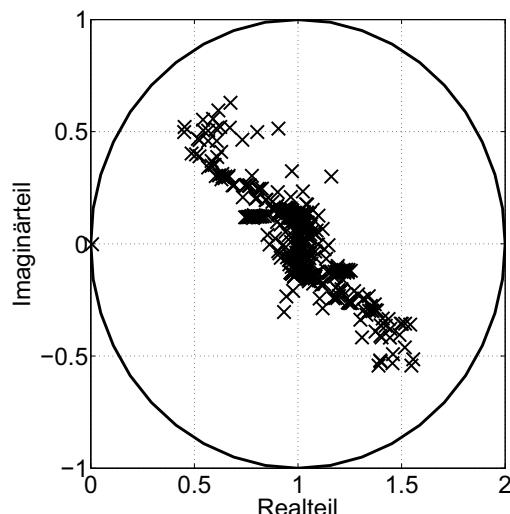
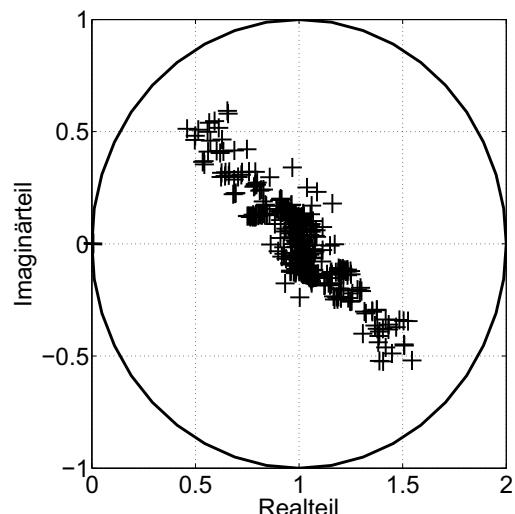
(a) $N^{\phi} = 0, h = \frac{\lambda}{8}$.(b) $N^{\phi} = 2, h = \frac{\lambda}{8}$.(c) $N^{\phi} = 4, h = \frac{\lambda}{8}$.(d) $N^{\phi} = 8, h = \frac{\lambda}{8}$.

Abbildung 5.18: Spektrum $\sigma(\mathbf{P}_D \mathbf{A}_J^\Gamma)$ des vorkonditionierten FE-DD Systems bei $f = 10$ GHz für $N_D = 4$ Teilgebiete unter Berücksichtigung einer Grobraumkorrektur auf Basis ebener Wellen.

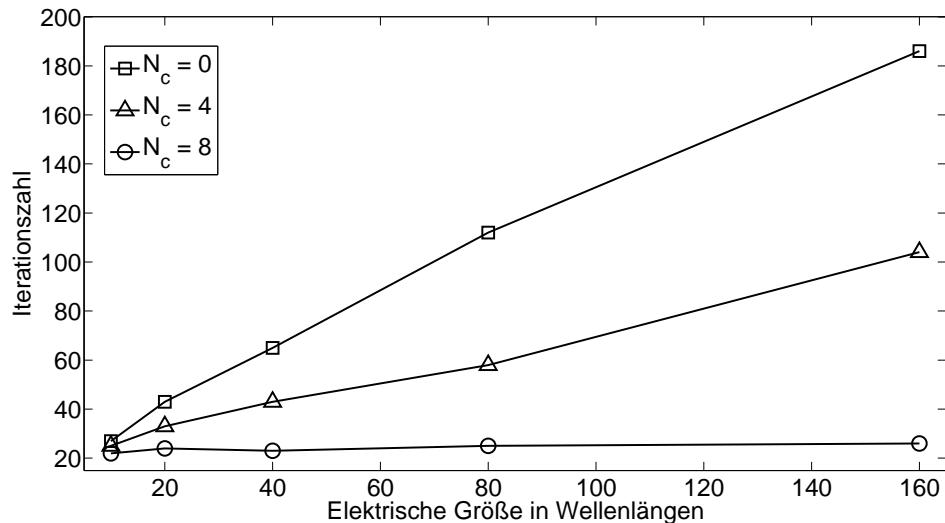


Abbildung 5.19: Benötigte Iterationszahl zum Erreichen eines relativen Residuums von $\|r\|_2 = 10^{-8}$ in Abhängigkeit der Dimension N_c des Grobraums sowie der elektrischen Größe der Struktur bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz.

5.10 Numerisches Beispiel

Die bisherigen Betrachtungen zeigen den Einfluss unterschiedlicher Parameter auf das Spektrum des vorkonditionierten FE-DD-Systems und dem damit verbundenen Konvergenzverhalten des GMRES-Lösers. Im nächsten Schritt soll anhand eines praxisrelevanten numerischen Beispiels die Eignung des Gebietszerlegungsverfahrens zur Simulation elektrisch großer Strukturen demonstriert werden. Betrachtet wird ein aus N_A Patch-Antennen bestehender quadratischer Gruppenstrahler. Die Geometrie eines einzelnen Antennenelementes ist in Abbildung 5.20a dargestellt. Die zugrundeliegende Gebietszerlegung ist so gewählt, dass die in Abbildung 5.20a dargestellte Geometrie einem Teilgebiet entspricht. Der Rand der betrachteten Struktur trägt eine ABC erster Ordnung gemäß (2.34d). Die äußeren Teilgebieten beinhalten nach Abbildung 5.20b keine Antennenelemente und definieren den Abstand der inneren Teilgebiete zum absorbierenden Rand. Die Zerlegung des Gebiets resultiert somit in $N_D = (N_A + 1) \times (N_A + 1)$ Teilgebieten. Die Anregung der Antennen geschieht gleichphasig und mit einer konstanten Amplitude. Sie wird mittels einer inhomogenen Neumannrandbedingung entsprechend (2.34c) bei einer Frequenz von $f = 8$ GHz modelliert. Zur Lösung des Problems wird die in Abschnitt 5.5 vorgeschlagene Strategie herangezogen, wobei eine Block-Gauss-Seidel-Vorkonditionierung entsprechend (5.85) im Rahmen eines GMRES(30)-Lösers zu Lösung genutzt wird. Das Abbruchkriterium des Lösers wird durch das relative Residuum von $\|r\| = 10^{-4}$ bestimmt. Im Rahmen der FE-DD-Formulierung wird eine TC $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_C$ gemäß (5.71) angewandt. Die Parameter α , β und γ sind gemäß (5.82) mit $k_{tm} = 710,5$ rad/m und $k_{te} = 523,2$ rad/m definiert. Tabelle 5.10 fasst die wesentlichen numerischen Daten zusammen:

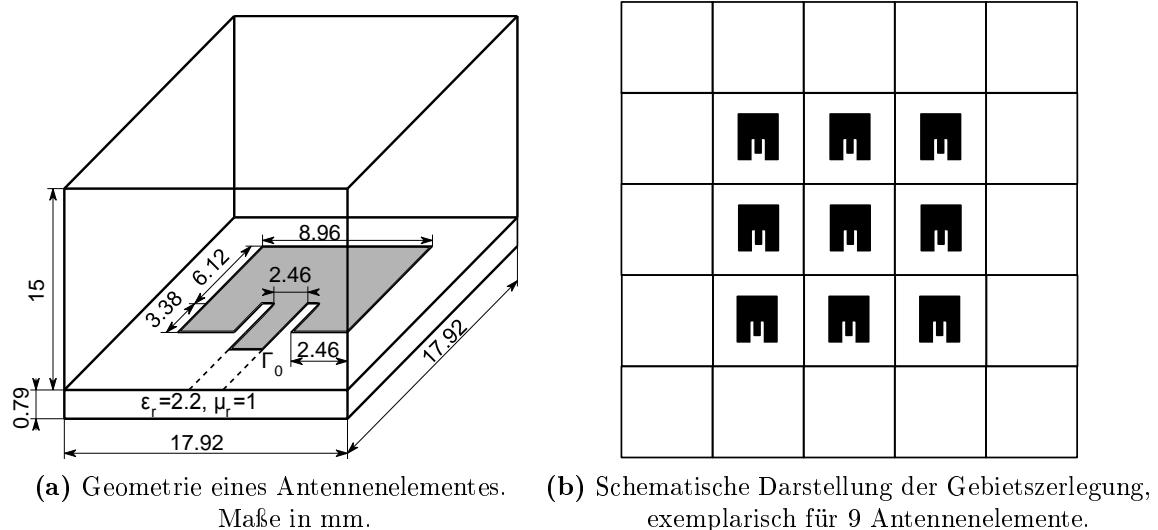


Abbildung 5.20: Geometrie und Anordnung der Teilgebiete

Insbesondere zeigt sich eine deutliche Reduktion der Dimension des resultierenden FE-DD-Systems bedingt durch die Kondensation auf Grenzflächen-Freiheitsgrade. Dies ermöglicht die Berechnung eines Gruppenstrahlers bestehend aus 14000 Antennenelementen in einer Zeit von 1,5 h. Wie zu erwarten zeigt sich jedoch eine deutliche Skalierung der Iterationszahl mit der Größe des Gruppenstrahlers da im Rahmen dieses Beispiels keine Grobraumkorrektur zum Einsatz kommt. Weiterhin zeigt Abbildung 5.21 die Richtcharakteristik der betrachteten Gruppenstrahlers.

Anzahl Antennen N_A	Dimension N	Dimension N^Γ	Iterationen	Lösungszeit
$120 \times 120 = 14400$	$383,3 \cdot 10^6$	$38,1 \cdot 10^6$	65	90 min
$50 \times 50 = 2500$	$69,6 \cdot 10^6$	$6,8 \cdot 10^6$	47	40 min
$15 \times 15 = 225$	$7,4 \cdot 10^6$	$0,7 \cdot 10^6$	35	7 min
$7 \times 7 = 49$	$2,1 \cdot 10^6$	$0,19 \cdot 10^6$	28	3 min

Tabelle 5.2: Numerische Daten zur Simulation des Patch-Antennen-Gruppenstrahlers Matlab R2014a Prototype-Implementierung @ Intel Core i5-4570 CPU @ 3.2 GHz.

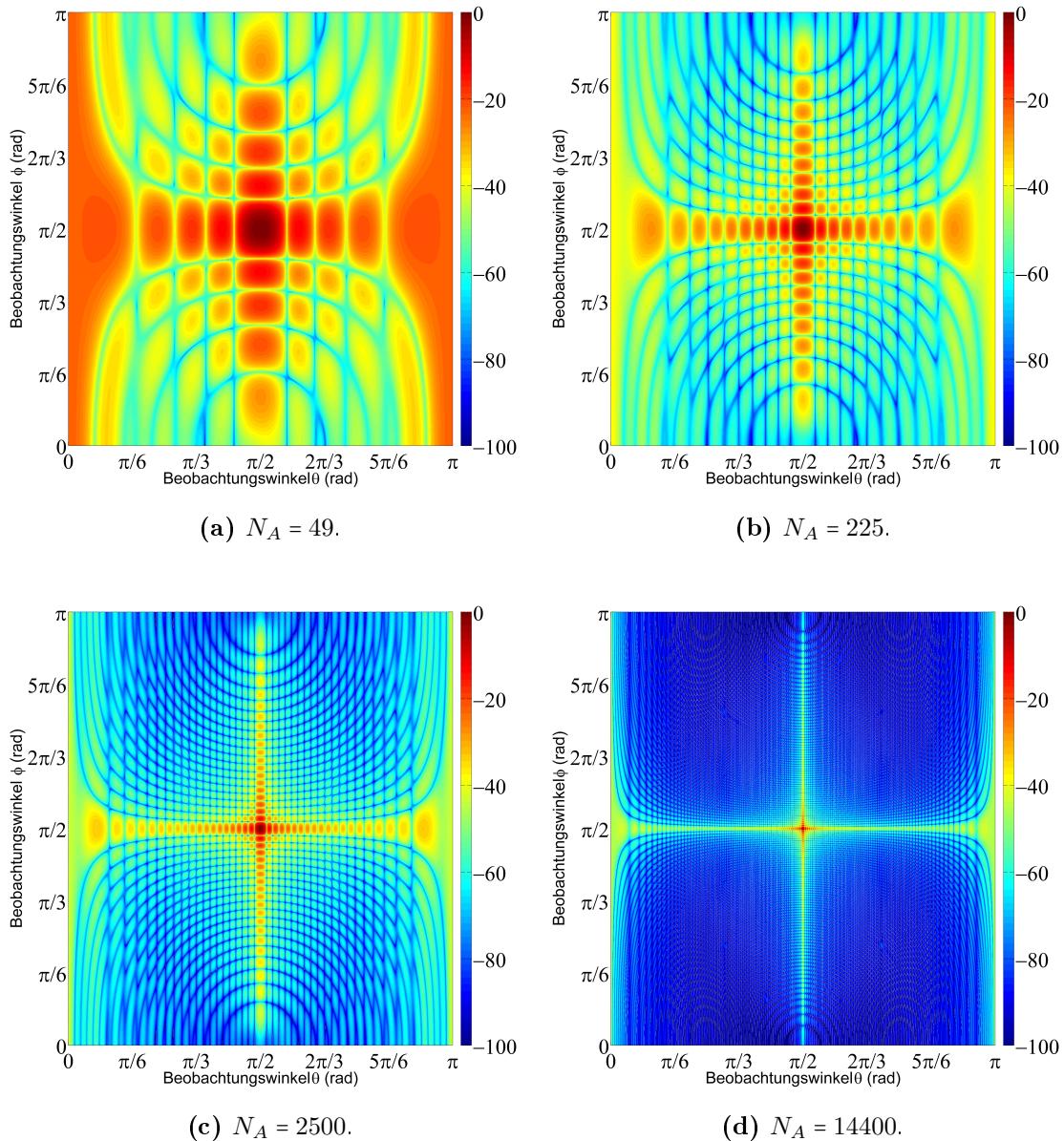


Abbildung 5.21: Richtcharakteristik des Gruppenstrahlers für unterschiedliche Anzahl an Antennenelementen N_A bei einer Betriebsfrequenz von $f = 8$ GHz.

5.11 Zusammenfassung

Innerhalb dieses Kapitels wurde eine FE-DD-Formulierung entsprechend dem Randwertproblem (5.1) unter Berücksichtigung der Kopplungsoperatoren $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{TE}, \mathcal{B}_{TM}$ und \mathcal{B}_C vorgestellt. Aufbauend auf den resultierenden FE-DD-Formulierungen konnte in Abschnitt 5.1.2 anschließend eine algebraische Form des iterativen DD-Verfahrens dargestellt und im Rahmen eines numerischen Experiments auf seine Konvergenzeigenschaften untersucht werden. Hierbei wurde insbesondere der Einfluss der TCs (6.10) auf das Spektrum der vorkonditionierten FE-DD-Systemmatrix untersucht, so dass ein Zusammenhang zu den analytischen Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.5 hergestellt werden konnte. Abschnitt 5.5 zeigte Möglichkeiten zur Vorkonditionierung des FE-DD-Systems im Rahmen eines GMRES-Verfahrens und die Kondensation des FE-DD-Systems auf Grenzflächen-Unbekannte. Der Vorteil einer TC zweiter Ordnung entsprechend (5.71) zeigte sich insbesondere im Rahmen der numerischen Skalierungsuntersuchungen aus Abschnitt 5.8: Es konnte durch Berücksichtigung dieser TC ein deutlicher Anstieg der Konvergenzgeschwindigkeit erreicht werden, welcher sich unabhängig von der Netzfeinheit h darstellte. Als Einschränkung des DD-Verfahrens ist jedoch die Skalierung der Konvergenzgeschwindigkeit mit der Anzahl an Teilgebieten zu nennen, welche jedoch durch die Hinzunahme einer Grobraumkorrektur gemäß Abschnitt 5.9 beseitigt werden konnte. Es sei jedoch bemerkt, dass die aufgezeigte Grobraumkorrektur ausschließlich im Rahmen des numerischen Experimentes umgesetzt wurde. Eine geeignete Grobraumkorrektur zur Lösung praxisrelevanter Beispiele stellt sich weiterhin als offenes Problem dar. Ein abschließendes praxisrelevantes numerisches Beispiel demonstrierte in Abschnitt 5.10 die Eignung der vorgestellten Methodik.

Kapitel 6

Absorbierende Randbedingungen höherer Ordnung

Die Grundlage der FE-Methode stellt das zugrundeliegende Randwertproblem dar, welches aus einer mathematischen Modellierung der gegebenen physikalischen Gesetzmäßigkeiten resultiert. Weist dieses ein unbeschränktes Feldgebiet auf, wie es bei der Beschreibung von Abstrahlungs- oder Streuproblemen der Fall ist, erfordert dessen Diskretisierung mittels der FE-Methode eine künstliche Beschränkung des Feldgebiets. Mögliche Ansätze zur Umsetzung einer solchen Beschränkung sind unter anderem InfiniteElemente (IE) [DP98], Perfectly-Matched-Layers (PML) [Ber94] sowie ABCs [Mur81]. Eine ABC stellt eine Randbedingung dar, die einen möglichst großen Anteil der einfallenden elektromagnetischen Wellen absorbiert und somit die Abstrahlung in den Freiraum modelliert. Sie lässt sich durch die Einführung eines fiktiven Randes Γ_A welcher eine Randbedingung der Gestalt

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \mathcal{T}_A(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_A \quad (6.1)$$

trägt, beschreiben. Der Operator \mathcal{T}_A beschreibt einen im weiteren Verlauf näher zu bestimmenden tangentialen Differentialoperator. Dieser sollte jedoch möglichst so gewählt werden, dass der absorbierende Rand Γ_A minimale Reflexionen erzeugt. Eine möglichst einfache Gestalt gemäß $\mathcal{T}_A = -jk\mathcal{I}$ wurde im Rahmen der ABC erster Ordnung, (2.34d) bereits eingeführt. Innerhalb dieses Kapitels sollen zum einen die Schwächen einer ABC erster Ordnung aufgezeigt und zum anderen entsprechende Erweiterungen auf ABCs höherer Ordnung vorgestellt werden. Wesentlich hierbei ist es, eine Verbindung zwischen den Kopplungsoperatoren nach (4.77) und den ABCs herzustellen und somit lokale Approximationen des DtN-Operators im Rahmen von ABCs zu motivieren [Mur81], [BT80], [EM77], [GZL06]. Die Umsetzung der resultierenden ABCs höherer Ordnung im Rahmen der FE-Methode ist ebenfalls Gegenstand dieses Kapitels.

6.1 Reflexion am Halbraum

Zur Beurteilung der Güte einer ABC der Form (6.1), wird die damit verbundene Reflexion einer einfallenden Welle auf den Halbraum untersucht. Speziell wird eine sich in der x - z -Ebene ausbreitende TE- bzw. TM-Welle betrachtet, welche unter dem Einfallswinkel ϕ auf den Rand $\Gamma_A = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ auftrifft. Ein normaler Einfall wird durch $\phi = \frac{\pi}{2}$ beschrieben, während ein Einfallswinkel entsprechend $\phi = 0$ einen tangentialen Einfall darstellt. Eine weitere Möglichkeit zur analytischen Untersuchung lässt sich unter Zuhilfenahme von Kugelflächenfunktionen im Rahmen eines sphärischen Koordinatensystems erreichen. Dies stellt jedoch keinen Gegenstand dieser Arbeit dar. Der interessierte Leser sei beispielsweise auf die Arbeit [WK89] verwiesen.

6.1.1 Reflexion einer TE-Welle am Halbraum

Analog zu Untersuchungen in Abschnitt 4.1.3 erweist es sich im Folgenden als zweckmäßig, eine separate Analyse für TE- und TM-Wellen durchzuführen um somit auf bereits vorhandene Ergebnisse aus Abschnitt 4.1.3 zurückgreifen zu können. Die elektrische Feldstärke \mathbf{E}_E^{TE} der einfallenden Welle sowie jene der reflektierten Welle \mathbf{E}_R^{TE} sei von der Gestalt

$$\mathbf{E}_E^{TE} = a_E^{TE} \mathbf{e}_y e^{-j\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r}} = a_E^{TE} \mathbf{E}_{E0}^{TE}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{E}_R^{TE} = a_R^{TE} \mathbf{e}_y e^{-j\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}} = a_R^{TE} \mathbf{E}_{R0}^{TE}. \quad (6.3)$$

Mithilfe des Reflektionsfaktors definiert durch

$$\rho^{TE} := \frac{a_R^{TE}}{a_E^{TE}} \in \mathbb{C}, \quad (6.4)$$

folgt das Gesamtfeld \mathbf{E}^{TE} durch Superposition der einfallenden und reflektierten Welle zu

$$\mathbf{E}_{TE} = a_E^{TE} \mathbf{E}_{E0}^{TE} + \rho^{TE} a_E^{TE} \mathbf{E}_{R0}^{TE}. \quad (6.5)$$

Durch Einsetzen von (6.5) in die ABCs (6.1) folgt für das Gesamtfeld die Darstellung

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{TE}) + \mathcal{T}_A(\mathbf{E}_{TE}) = 0, \quad \text{auf } \Gamma_A, \quad (6.6)$$

und somit aus (6.5) aufgrund der Linearität der beteiligten Operatoren

$$\rho^{TE} \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{R0}^{TE}) + \rho^{TE} \mathcal{T}_A(\mathbf{E}_{R0}^{TE}) = -\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{E0}^{TE}) + \mathcal{T}_A(\mathbf{E}_{E0}^{TE}). \quad (6.7)$$

Somit folgt aus (6.7) der Reflektionsfaktor entsprechend der Darstellung

$$\rho^{TE} = \frac{-\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{E0}^{TE}) + \mathcal{B}_A(\mathbf{E}_{E0}^{TE})}{\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{R0}^{TE}) + \mathcal{B}_A(\mathbf{E}_{R0}^{TE})}. \quad (6.8)$$

Um nun einen expliziten Ausdruck für den Reflexionsfaktor ρ^{TE} angeben zu können, muss die Wirkung der Kopplungsoperatoren $T_A(\mathbf{E}_{E0}^{TE})$ und $T_A(\mathbf{E}_{R0}^{TE})$ sowie die Wirkung des Operators $\gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_{E0}^{TE})$ bzw. $\gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_{R0}^{TE})$ berechnet werden. Bereits in Kapitel 4.1.1 wurde in Satz 4.4 die Wirkung der besagten Operatoren für den Halbraumfall in Abhängigkeit der fouriertransformierten Tangentialspuren angegeben. Unter Ausnutzung der Resultate aus Satz 4.2 folgt für den Reflexionsfaktor (6.8) die Darstellung

$$\rho^{TE} = \frac{-\mathbf{R} + \sigma_{T_A}}{\mathbf{R} + \sigma_{T_A}}. \quad (6.9)$$

Analog zu den iterativen DD-Verfahren würde auch im Rahmen einer ABC das Symbol des DtN-Operators gemäß $\sigma_{T_A} = \mathbf{R}$ in einem optimalen Operator entsprechend einem Reflexionsfaktor $\rho^{TE} = 0$ resultieren. Dies motiviert die bereits im Rahmen von DD-Verfahren eingeführten lokalen Approximationen des DtN-Operators gemäß

$$\mathcal{T}_1(\mathbf{E}) = \alpha\pi_T(\mathbf{E}), \quad (6.10a)$$

$$\mathcal{T}_{TE}(\mathbf{E}) = \alpha\pi_T(\mathbf{E}) + \beta\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}), \quad (6.10b)$$

$$\mathcal{T}_{TM}(\mathbf{E}) = \alpha\pi_T(\mathbf{E}) + \gamma\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}), \quad (6.10c)$$

$$\mathcal{T}_C(\mathbf{E}) = \alpha\pi_T(\mathbf{E}) + \beta\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}) + \gamma\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) \quad (6.10d)$$

als Erweiterung der ABC heranzuziehen. Da der Reflexionsfaktor (6.8) und der Konvergenzfaktor nach (4.115) gleiche Gestalt aufweisen, lassen sich die Darstellungen der Konvergenzfaktoren (4.116) und (4.117) zur Bestimmung des Reflexionsfaktors wiederverwenden. Mithilfe der Aufspaltung der Wellenvektoren \mathbf{k}_E und \mathbf{k}_R in transversale und longitudinale Komponenten gemäß

$$\mathbf{k}_E = \mathbf{k}_T + k_z \mathbf{e}_z = k_x \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{k}_R = \mathbf{k}_T - k_z \mathbf{e}_z = k_x \mathbf{e}_y - k_z \mathbf{e}_z \quad (6.12)$$

folgt die Darstellung

$$\mathbf{E}_{E0}^{TE} = \mathbf{e}_y e^{-j\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{e}_y e^{-j\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}} e^{jk_z z}, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{E}_{R0}^{TE} = \mathbf{e}_y e^{-j\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{e}_y e^{-j\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}} e^{-jk_z z}, \quad (6.14)$$

so dass der von den transversalen Koordinaten abhängige Term $\mathbf{e}_y e^{-j\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}}$ eine sich in der durch Γ_A definierten Ebene ausbreitende ebene Welle darstellt, und somit die Ergebnisse aus Satz 4.4 mit der Substitutionen $\lambda \mapsto k_z$ und $\mathbf{k}_T = k_y$ genutzt werden können. Mit der Abhängigkeit der longitudinalen Wellenzahl k_z vom Einfallswinkel ϕ entsprechend

$$k_z = k \sin \phi \quad (6.15)$$

sowie der Dispersionsrelation

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 \quad (6.16)$$

ergeben sich durch Substitution von (6.15) und (6.16) in die entsprechenden Gleichungen (4.116) die Reflektionsfaktoren im TE-Fall unter Berücksichtigung der Operatoren (6.10) zu

$$\rho_{T_1}^{TE} = \frac{jk \sin \phi + \alpha}{-jk \sin \phi + \alpha}, \quad (6.17a)$$

$$\rho_{T_{TE}}^{TE} = \frac{jk \sin \phi + \alpha + \beta k^2 \cos^2 \phi}{-jk \sin \phi + \alpha + \beta k^2 \cos^2 \phi}, \quad (6.17b)$$

$$\rho_{T_{TM}}^{TE} = \frac{jk \sin \phi + \alpha}{-jk \sin \phi + \alpha}, \quad (6.17c)$$

$$\rho_{T_C}^{TE} = \frac{jk \sin \phi + \alpha + \beta k^2 \cos^2 \phi}{-jk \sin \phi + \alpha + \beta k^2 \cos^2 \phi}. \quad (6.17d)$$

6.1.2 Reflexion einer TM-Welle am Halbraum

Bevor die erhaltenen Reflexionsfaktoren näher analysiert werden, soll ein äquivalentes Ergebnis für den TM-Fall angegeben werden. Angenommen wird eine TM-Welle, charakterisiert durch die magnetische Erregung der unter dem Winkel ϕ auf den Rand Γ_A einfallenden Welle der Form

$$\mathbf{H}_E^{TM} = a_E^{TM} \mathbf{e}_y e^{-jk_E \cdot \mathbf{r}} = a_E^{TM} \mathbf{H}_{E0}^{TM}, \quad (6.18)$$

sowie der reflektierten Welle gegeben durch

$$\mathbf{H}_R^{TM} = a_R^{TM} \mathbf{e}_y e^{-jk_R \cdot \mathbf{r}} = a_R^{TM} \mathbf{H}_{R0}^{TM}. \quad (6.19)$$

Die zugehörigen elektrischen Feldstärken folgen aus (6.18) und (6.19) mithilfe der Wellenimpedanz η zu

$$\mathbf{E}_E^{TM} = \frac{jk}{\eta} \nabla \times \mathbf{H}_E^{TM} = a_E^{TM} \frac{jk}{\eta} \nabla \times \mathbf{e}_y e^{-jk_E \cdot \mathbf{r}} = a_E^{TM} \mathbf{E}_{E0}^{TM}, \quad (6.20)$$

$$\mathbf{E}_R^{TM} = \frac{jk}{\eta} \nabla \times \mathbf{H}_R^{TM} = a_R^{TM} \frac{jk}{\eta} \nabla \times \mathbf{e}_y e^{-jk_R \cdot \mathbf{r}} = a_R^{TM} \mathbf{E}_{R0}^{TM}. \quad (6.21)$$

Analog zu dem TE-Fall lässt sich durch Superposition der einfallenden Welle \mathbf{E}_E^{TM} sowie der reflektierten Welle \mathbf{E}_R^{TM} nach (6.20) bzw. (6.21) unter Verwendung des Reflexionsfaktors gegeben durch

$$\rho^{TM} := \frac{a_R^{TM}}{a_E^{TM}} \quad (6.22)$$

das Gesamtfeld gemäß

$$\mathbf{E}^{TM} = \mathbf{E}_E^{TM} + \mathbf{E}_R^{TM} = a_E^{TM} \mathbf{E}_{E0}^{TM} + \rho^{TM} a_E^{TM} \mathbf{E}_{E0}^{TM} \quad (6.23)$$

berechnen. Einsetzen von (6.23) in die Randbedingung (6.1) liefert den gesuchten Reflexionsfaktor entsprechend

$$\rho^{TM} = \frac{-\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{E0}^{TM}) + \mathcal{T}_A(\mathbf{E}_{E0}^{TM})}{\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{R0}^{TM}) + \mathcal{T}_A(\mathbf{E}_{R0}^{TM})}. \quad (6.24)$$

Durch Substitution von (6.15) und (6.16) in (4.117) folgen auch im TM-Fall die Reflexionsfaktoren entsprechend den Darstellungen

$$\rho_{\mathcal{T}_1}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha jk \sin \phi}{k^2 + \alpha jk \sin \phi}, \quad (6.25a)$$

$$\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha jk \sin \phi}{k^2 + \alpha jk \sin \phi}, \quad (6.25b)$$

$$\rho_{\mathcal{T}_{TM}}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha jk \sin \phi - \gamma \cos^2 \phi k^4}{k^2 + \alpha jk \sin \phi - \gamma \cos^2 \phi k^4}, \quad (6.25c)$$

$$\rho_{\mathcal{T}_C}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha jk \sin \phi - \gamma \cos^2 \phi k^4}{k^2 + \alpha jk \sin \phi - \gamma \cos^2 \phi k^4}. \quad (6.25d)$$

6.1.3 Diskussion der Reflexionsfaktoren

Die Darstellungen der Reflexionsfaktoren (6.17) und (6.25) unter Berücksichtigung der unterschiedlichen absorbierenden Operatoren $\mathcal{T}_X, X \in \{1, TE, TM, C\}$ erlauben eine detaillierte Analyse der Reflexionseigenschaften. Von besonderem Interesse ist hierbei die Abhängigkeit des Reflexionsfaktors $\rho_{\mathcal{T}_X}^Y, X \in \{1, TE, TM, C\}, Y \in \{TE, TM\}$ vom Einfallswinkel $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Um die Vor- und Nachteile der einzelnen absorbierenden Operatoren nach (6.10) darzustellen, werden im Folgenden separate Analysen der Reflexionseigenschaften aufgezeigt.

Absorbierende Randbedingung \mathcal{T}_1

Dieser Fall entspricht einer von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ abhängigen ABC erster Ordnung der Gestalt

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_A. \quad (6.26)$$

Die Reflektionsfaktoren folgen nach (6.17a) und (6.25a) zu

$$\rho_{\mathcal{T}_1}^{TE} = \frac{jk \sin \phi + \alpha}{-jk \sin \phi + \alpha}, \quad (6.27)$$

$$\rho_{\mathcal{T}_1}^{TM} = \frac{k^2 - \alpha jk \sin \phi}{k^2 + \alpha jk \sin \phi}, \quad (6.28)$$

und sind dementsprechend im Allgemeinen für TE- und TM-Wellen unterschiedlich. Mit $\alpha = -jk$, gemäß einer ABC erster Ordnung, ergeben sich jedoch identische Reflexionsfaktoren der Form

$$\rho_{T_1} = \rho_{T_1}^{TE} = \rho_{T_1}^{TM} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (6.29)$$

In Abbildung 6.1a ist der Betrag des Reflexionsfaktors ρ_{T_1} nach (6.29) in Abhängigkeit des Einfallwinkels $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ aufgetragen. Entsprechend der Nullstelle von ρ_{T_1} bei einem Einfallwinkel von

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad (6.30)$$

ist diese ABC für normal einfallende TE- und TM-Wellen perfekt transparent, während sich für Einfallwinkel von $\phi = \frac{\pi}{6}$ bereits ein Reflexionsfaktor von ungefähr 40 % erkennen lässt. Eine Parametrierung des Einfallwinkels, unter dem die betrachtete ABC perfekt transparent erscheint, lässt sich durch die Einführung des Parameters $c^\phi \in \mathbb{R}$ und die Wahl von α entsprechend

$$\alpha = -c^\phi jk, \quad c^\phi \in \mathbb{R} \quad (6.31)$$

erreichen. In Analogie zur Beschreibung des Verhaltens ebener Wellen an den Grenzflächen zweier Medien wird dieser Einfallwinkel im Folgenden mit dem numerischen Brewster-Winkel bezeichnet. Speziell folgt unter Berücksichtigung von (6.31) aus (6.27) und (6.28) die nun ungleiche Form der Reflektionsfaktoren für TE- und TM-Wellen gegeben durch

$$\rho_{T_1}^{TE} = \frac{c^\phi - \sin \phi}{c^\phi + \sin \phi}, \quad (6.32)$$

$$\rho_{T_1}^{TM} = \frac{1 - c^\phi \sin \phi}{1 + c^\phi \sin \phi}, \quad (6.33)$$

so dass sich die entsprechenden Nullstellen im TE-Fall bzw. im TM-Fall durch

$$\phi^{TE} = \sin^{-1} c^\phi, \quad (6.34)$$

$$\phi^{TM} = \sin^{-1} \frac{1}{c^\phi}, \quad (6.35)$$

ergeben. Es ist somit möglich, auch im Fall einer ABC erster Ordnung einen verschwindenden Reflexionsfaktor $\rho_{T_1}^X(\phi^X) = 0$, $X \in \{TE, TM\}$ für einen gegebenen numerischen Brewster-Winkel $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zu erzwingen. Dies lässt sich jedoch nicht unabhängig für TE-Wellen und TM-Wellen erreichen: In Abbildung 6.1b und 6.1c sind die entsprechenden Reflexionsfaktoren für den Fall $\phi^{TE} = \frac{\pi}{6}$ und $\phi^{TE} = \frac{\pi}{3}$ aufgetragen. Insbesondere Abbildung 6.1b zeigt, dass das Verschieben des numerischen Brewster-Winkels ϕ^{TE} eine Verschlechterung des Reflexionsfaktors $\rho_{T_1}^{TM}$ über den gesamten Winkelbereich $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zur Folge hat. Zusätzlich zeigt sich ein Anstieg

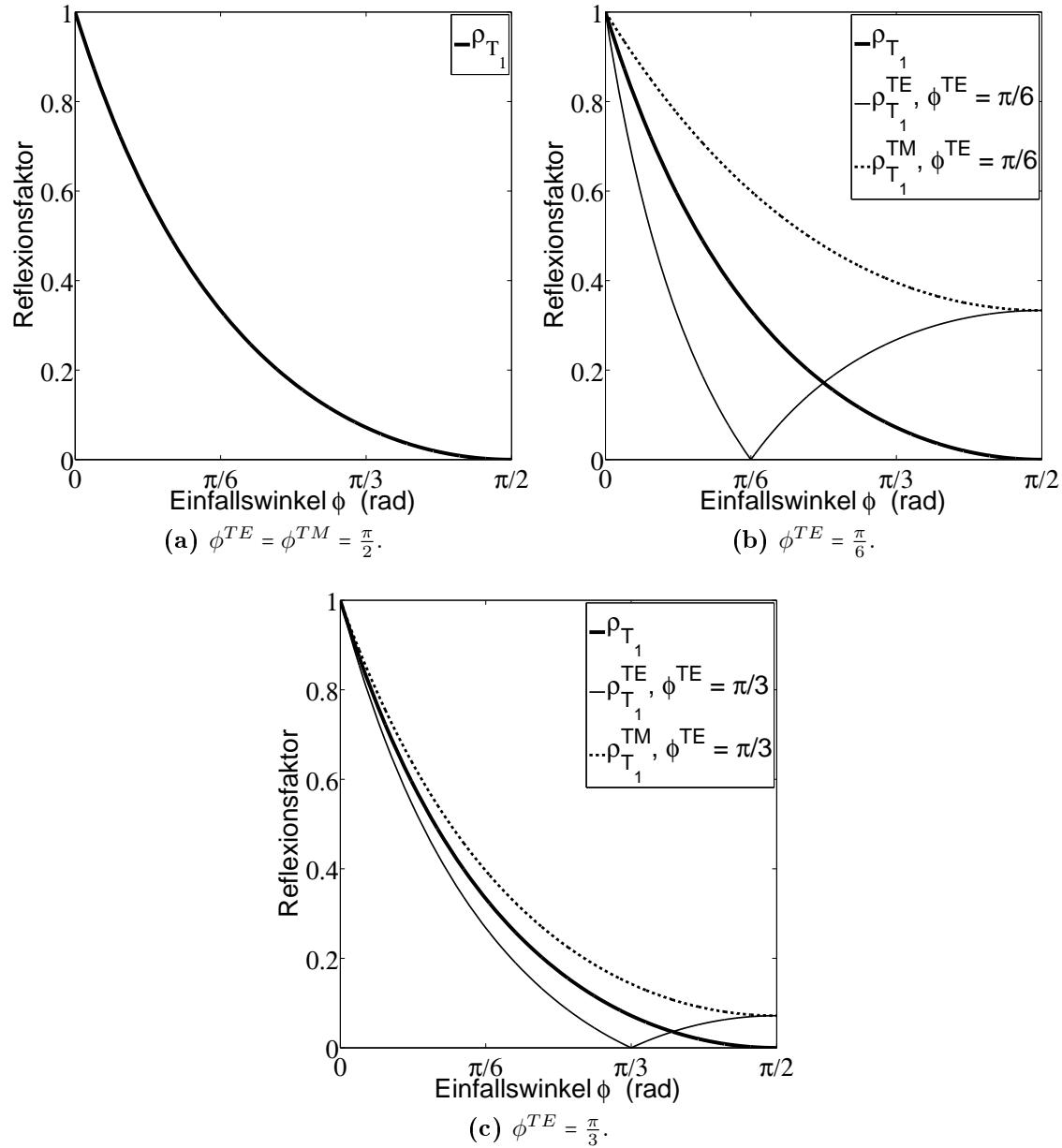


Abbildung 6.1: Betrag des Reflexionsfaktors $\rho_{T_1}^{TE}$ bzw. $\rho_{T_1}^{TM}$ in Abhängigkeit des Einfalls winkels ϕ .

des Reflexionsfaktors $\rho_{T_1}^{TE}$ für Winkel von ungefähr $\phi > \frac{\pi}{4}$ im Vergleich zu den Reflexionsfaktor ρ_{T_1} entsprechend einer klassischen ABC erster Ordnung (6.29). Eine Parametrierung der beiden numerischen Brewster-Winkel ϕ^{TE} und ϕ^{TM} ist also unter Berücksichtigung einer Randbedingung der Form (6.26) nicht unabhängig für TE- bzw. TM-Wellen möglich. Ein vertretbarer Kompromiss folgt durch die Wahl $\alpha = -jk$, so dass $\rho_{T_1}^{TE} = \rho_{T_1}^{TM} = \rho_{T_1}$, welcher im weiteren Verlauf der Untersuchungen vorausgesetzt wird.

Absorbierende Randbedingung \mathcal{T}_{TE}

Eine Erweiterung der ABC auf die Form

$$\gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) + \alpha\pi_T(\mathbf{E}) + \beta\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_A \quad (6.36)$$

resultiert mit $\alpha = -jk$ nach (6.17b) und (6.25b) in den Reflexionsfaktoren der Form

$$\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TE} = \frac{1 - \sin \phi + j\beta k \cos^2 \phi}{1 + \sin \phi + j\beta k \cos^2 \phi}, \quad (6.37)$$

$$\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TM} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (6.38)$$

Ein Vergleich der erhaltenen Reflexionsfaktoren mit jenem aus (6.29) zeigt, dass eine Erweiterung der ABC gemäß (6.36) die Reflexionseigenschaften in Bezug auf TM-Wellen unbeeinflusst lässt. Diese Beobachtung lässt sich analog zur Analyse der TCs durch die Eigenschaften des Nullraums $\ker(\nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\cdot))$ entsprechend Satz 4.4 erklären. Mit Hinblick auf (6.37) zieht die Erweiterung jedoch eine Änderung des Reflexionsverhaltens für TE-Wellen nach sich. Insbesondere resultiert eine Wahl des zusätzlichen Freiheitsgrads $\gamma \in \mathbb{C}$ gemäß

$$\beta = \frac{j}{k} c^{TE}, \quad c^{TE} \in \mathbb{R} \quad (6.39)$$

$$(6.40)$$

in einem Reflexionsfaktor $\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TE}$ entsprechend

$$\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TE} = \frac{1 - \sin \phi - c^{TE} \cos^2 \phi}{1 + \sin \phi - c^{TE} \cos^2 \phi}, \quad (6.41)$$

dessen Nullstellen ϕ^{TE} durch

$$\phi^{TE} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \sin^{-1} \frac{1 - c^{TE}}{c^{TE}} \right\}, \quad (6.42)$$

gegeben sind. Im Vergleich zu dem Reflexionsfaktor (6.29), resultierend aus einer ABC erster Ordnung zeigt sich eine zusätzliche Nullstelle bei ϕ^{TE} , welche durch entsprechende Wahl von c^{TE} in (6.41) parametrierbar ist. Abbildung 6.2 zeigt exemplarisch die Beträge der Reflexionsfaktoren $\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TE}$ und $\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TM}$ für eine zusätzliche Nullstelle an der Stelle $\phi^{TE} = \frac{\pi}{3}$ bzw. $\phi^{TE} = \frac{\pi}{6}$: Ein Vergleich der Reflexionsfaktoren $\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TE}$ und $\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TM} = \rho_{\mathcal{T}_1}$ zeigt ein deutlich verbessertes Reflexionsverhalten für TE-Wellen gegenüber einer ABC erster Ordnung. Mit Hinblick auf die logarithmische Darstellung in Abbildung 6.2b zeigt sich exemplarisch für einen Einfallswinkel von $\phi = \frac{\pi}{4}$ eine Reduktion des Reflexionsfaktors von ungefähr 35 dB. Weiterhin zeigt sich im Gegensatz zur ABC erster Ordnung ein von der Wahl des numerischen Brewster-Winkels ϕ^{TE} unabhängiger Reflexionsfaktor $\rho_{\mathcal{T}_{TE}}^{TM} = \rho_{\mathcal{T}_1}$.

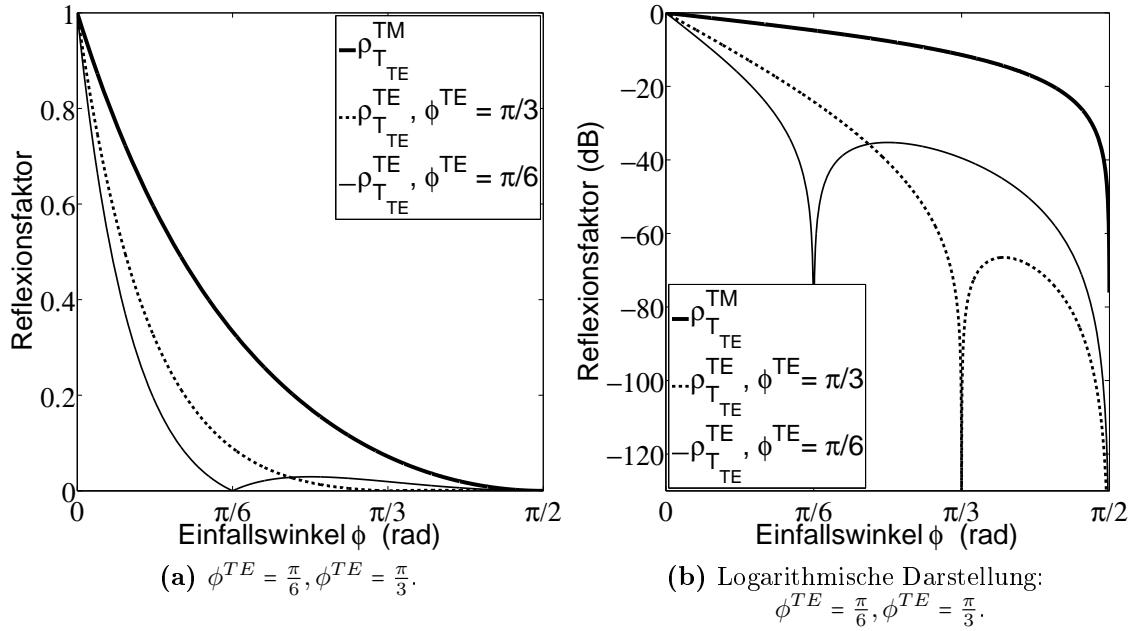


Abbildung 6.2: Betrag des Reflexionsfaktors $\rho_{T_{TE}}^{TE}$ bzw. $\rho_{T_{TE}}^{TM}$ in Abhängigkeit des Einfallsinkels ϕ .

Absorbierende Randbedingung \mathcal{T}_{TM}

Eine ABC der Form

$$\gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) + \alpha\pi_T(\mathbf{E}) + \gamma\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_A \quad (6.43)$$

resultiert unter der Voraussetzung $\alpha = -jk$ in den von der Größe γ abhängigen Reflexionsfaktoren entsprechend (6.17c) und (6.25c) der Gestalt

$$\rho_{T_{TM}}^{TM} = \frac{1 - \sin \phi - \gamma \cos^2 \phi k^2}{1 + \sin \phi - \gamma \cos^2 \phi k^2}, \quad (6.44)$$

$$\rho_{T_{TM}}^{TE} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (6.45)$$

Auch in diesem Fall äußert sich der Nullraum des in (6.43) enthaltenen Operators $\nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1}\nabla \times \cdot)$ nach Satz 4.4 dadurch, dass das Reflexionsverhalten für TE-Wellen entsprechend dem Reflexionsfaktor $\rho_{T_{TM}}^{TE} = \rho_{T_1}$ unbeeinflusst bleibt. Die Wahl des Parameters γ gemäß

$$\gamma = \frac{c^{TM}}{k^2} \quad (6.46)$$

resultiert in dem Reflexionsfaktor $\rho_{T_{TM}}^{TE}$ der Form

$$\rho_{T_{TM}}^{TM} = \frac{1 - \sin \phi - c^{TM} \cos^2 \phi}{1 + \sin \phi - c^{TM} \cos^2 \phi}, \quad (6.47)$$

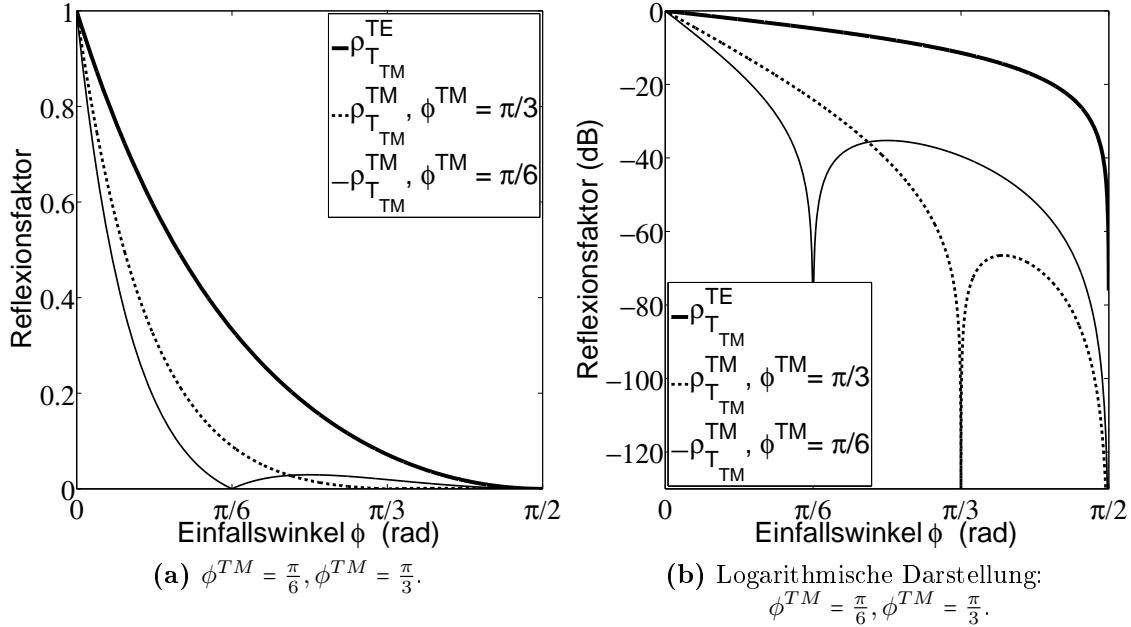


Abbildung 6.3: Betrag des Reflexionsfaktors $\rho_{T_{TM}}^{TE}$ bzw. $\rho_{T_{TM}}^{TM}$ in Abhängigkeit des Einfallsinkels ϕ .

dessen von dem Parameter c^{tm} abhängigen Nullstellen durch

$$\phi^{TM} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \sin^{-1} \frac{1 - c^{TM}}{c^{TM}} \right\} \quad (6.48)$$

gegeben sind. Abbildung 6.4 zeigt exemplarisch die Beträge der Reflexionsfaktoren $\rho_{T_{TM}}^{TE} = \rho_{T_1}$ und $\rho_{T_{TM}}^{TM}$ für einen zusätzlichen numerischen Brewster-Winkel von $\phi^{TM} = \frac{\pi}{3}$ bzw. $\phi^{TM} = \frac{\pi}{6}$. Neben der deutlichen Reduktion des Reflexionsfaktors $\rho_{T_{TM}}^{TM}$ im Vergleich zu einer ABC erster Ordnung zeigt sich ein von der Parametrierung des numerischen Brewster-Winkels ϕ^{TM} unabhängiger Verlauf des Reflexionsfaktors $\rho_{T_{TM}}^{TE} = \rho_{T_1}$

Absorbierende Randbedingung \mathcal{T}_C

Eine Kombination der untersuchten ABCs resultiert in einem absorbierenden Operator der Form

$$\begin{aligned} \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \alpha \pi_T(\mathbf{E}) + \beta \nabla_T \times \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}) + \\ \gamma \nabla_T \nabla_T \cdot \gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = 0, \quad \text{auf } \Gamma_A. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Die resultierenden Reflexionsfaktoren folgen nach (6.25d) und (6.17d) unter Berücksichtigung der Parameter α, β und γ entsprechend

$$\alpha = jk, \quad (6.50)$$

$$\beta = \frac{j}{k} c^{TE}, \quad (6.51)$$

$$\gamma = \frac{c^{TM}}{k^2}, \quad (6.52)$$

in der Form

$$\rho_{\mathcal{T}_C}^{TE} = \frac{1 - \sin \phi - c^{TE} \cos^2 \phi}{1 + \sin \phi - c^{TE} \cos^2 \phi}, \quad (6.53)$$

$$\rho_{\mathcal{T}_C}^{TM} = \frac{1 - \sin \phi - c^{TM} \cos^2 \phi}{1 + \sin \phi - c^{TM} \cos^2 \phi}. \quad (6.54)$$

Die Nullstellen der Reflexionsfaktoren $\rho_{\mathcal{T}_C}^{TE}$ und $\rho_{\mathcal{T}_C}^{TM}$ nach (6.53) und (6.54) sind gegeben durch

$$\phi^{TE} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \sin^{-1} \frac{1 - c^{TE}}{c^{TE}} \right\}, \quad (6.55)$$

$$\phi^{TM} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \sin^{-1} \frac{1 - c^{TM}}{c^{TM}} \right\}, \quad (6.56)$$

so dass im Rahmen dieser ABC sowohl $\rho_{\mathcal{T}_C}^{TE}$ als auch $\rho_{\mathcal{T}_C}^{TM}$ unabhängig voneinander durch die Vorgabe der zusätzlichen numerischen Brewster-Winkel ϕ^{TE} und ϕ^{TM} beeinflusst werden können. Die Abbildungen 6.4a und 6.4b zeigen die Beträge der Reflexionsfaktoren $\rho_{\mathcal{T}_C}^{TE}$ und $\rho_{\mathcal{T}_C}^{TM}$ exemplarisch für die numerischen Brewster-Winkel $\phi^{TE} = \frac{\pi}{6}$ und $\phi^{TM} = \frac{\pi}{3}$. Eine Erweiterung der ABC in der Form (6.49) ermöglicht es somit, die Reflexionseigenschaften für TE- und TM-Wellen durch Vorgabe der numerischen Brewster-Winkel ϕ^{TM} und ϕ^{TE} unabhängig voneinander zu beeinflussen, was zu einer deutlichen Verbesserung der Reflexionseigenschaften im Vergleich zur herkömmlichen ABC erster Ordnung führt. Da jedoch in der Praxis häufig keine konkreten Kenntnisse über die Form der zu erwartenden Feldgrößen existieren liegt es nahe identische numerische Brewster-Winkel $\phi^{TM} = \phi^{TE} = \phi_0$ vorzugeben, resultierend in identischen Reflexionsfaktoren $\rho_{\mathcal{T}_C}^{TM} = \rho_{\mathcal{T}_C}^{TE} = \rho_{\mathcal{T}_C}$. Um abschließend die verbesserten Reflexionseigenschaften gegenüber einer ABC erster Ordnung herausstellen zu können wird ein geeignetes Maß zu Bewertung der Güte benötigt. Mit Hinblick auf Abbildung 6.5a zeigt sich ein von dem numerischen Brewster-Winkel ϕ_0 abhängiges lokales Maximum im Reflexionsfaktor definiert durch

$$\rho^{\max}(\phi_0) = \max_{\phi \in [\phi_0, \frac{\pi}{2}]} \rho_{\mathcal{T}_C}(\phi). \quad (6.57)$$

Auf Basis der analytischen Darstellung des Reflexionsfaktors $\rho_{\mathcal{T}_C}$ nach (6.53) bzw. (6.54) folgt das lokale Maximum $\rho^{\max}(\phi_0)$ an der Stelle

$$\phi^{\max}(\phi_0) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin \phi_0}}{\sqrt{1 - \sin \phi_0}} \right). \quad (6.58)$$

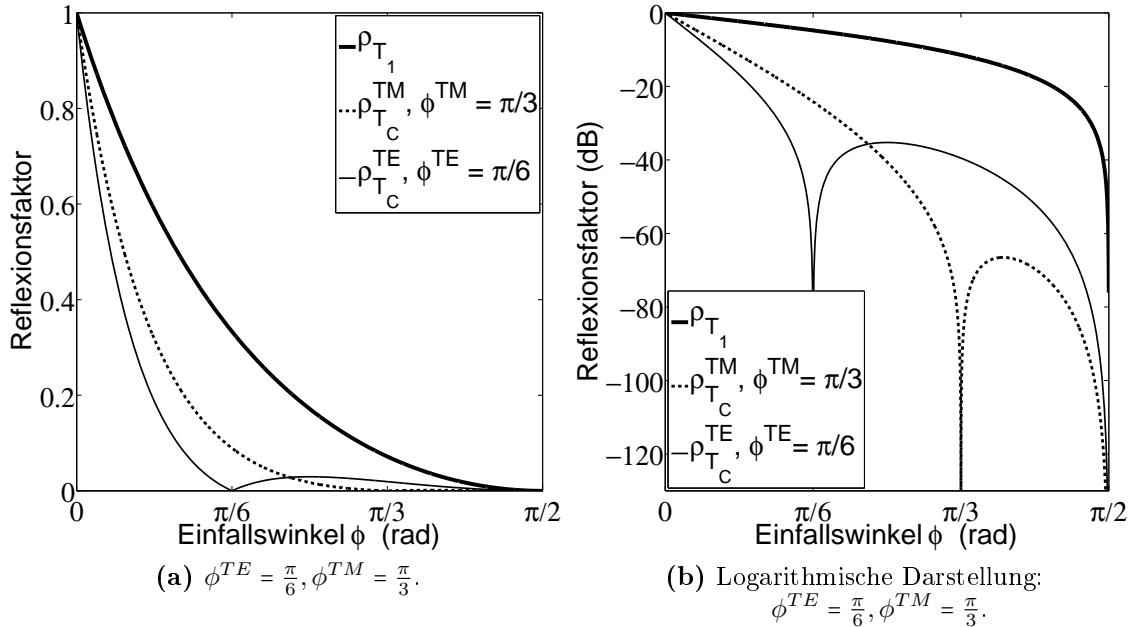


Abbildung 6.4: Betrag des Reflexionsfaktors $\rho_{T_C}^{TE}$ bzw. $\rho_{T_C}^{TM}$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϕ .

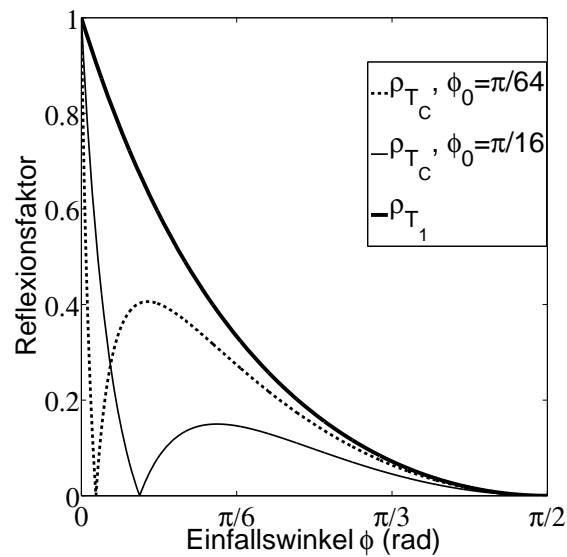
Abbildung 6.5b zeigt, dass das lokale Maximum umso stärker ausgeprägt ist je kleiner der Brewster-Winkel gewählt wird. Der auf Basis von (6.57) definierte Winkelbereich der Form

$$B_{T_C}(\phi) := \left\{ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \mid \rho_{T_C} \leq \rho^{\max}(\phi) \right\} \quad (6.59)$$

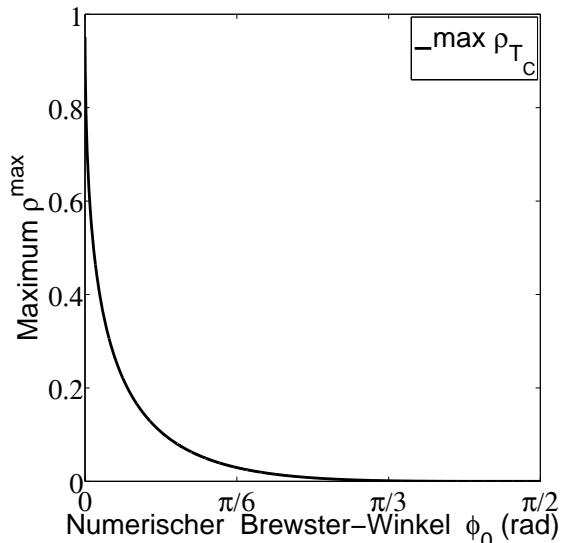
stellt im Folgenden ein geeignetes Maß für die Güte des Reflexionsfaktors dar. Bei vorgegebenem maximal zulässigen Reflexionsfaktor ρ^{\max} hat eine ABC also eine umso höherer Güte je breiter der Winkelbereich $B_{T_C}(\phi)$ ist. Abbildung 6.5c zeigt einen Vergleich zwischen den beiden Winkelbereichen $B_{T_C}(\phi)$ und B_{T_1} resultierend aus einer ABC erster und zweiter Ordnung. Der Winkelbereich B^1 ist hierbei wie folgt definiert:

$$B_{T_1} := \left\{ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \mid \rho_{T_1} \leq \rho^{\max}(\phi) \right\}. \quad (6.60)$$

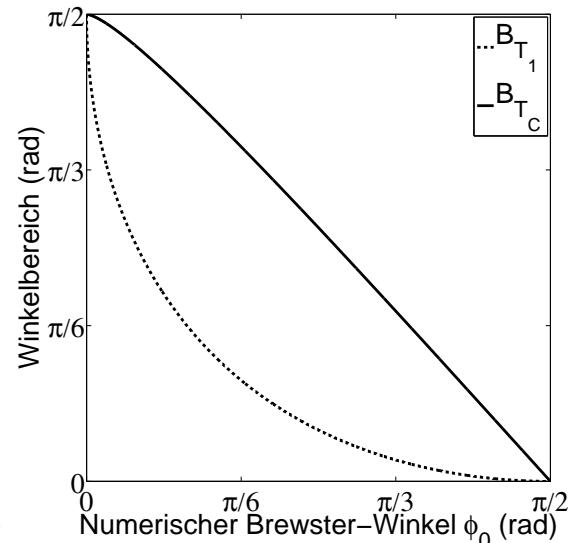
Es zeigt sich, dass ein vorgegebener maximaler Reflexionsfaktor ρ^{\max} unter Berücksichtigung einer ABC höherer Ordnung über einen wesentlich größeren Winkelbereich garantiert werden kann.



(a) Reflexionsfaktoren für unterschiedliche Einfallsinkel $\phi^{TM} = \phi^{TE} = \phi$.



(b) Lokales Maximum des Reflexionsfaktors für unterschiedliche numerische Brewster-Winkel $\phi^{TM} = \phi^{TE} = \phi$.



(c) Winkelbereich B_{T_C} bzw. B_{T_1} in Abhängigkeit des numerischen Brewster-Winkels ϕ_0 .

Abbildung 6.5: Reflexionsfaktor sowie daraus abgeleitete Größen in Abhängigkeit des numerischen Brewster-Winkels ϕ_0 .

6.1.4 Finite-Elemente-Diskretisierung

Nachdem in Abschnitt 6.1 die wesentlichen Vorteile der ABC der Form (6.49) aufgezeigt wurden, soll im Folgenden deren Diskretisierung im Rahmen einer FE-Formulierung aufgezeigt werden. Ausgangspunkt für die gesuchte FE-Formulierung stellt das folgende Randwertproblem dar:

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (6.61a)$$

$$\pi_T(\mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (6.61b)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = j k_0 \eta_0 \mathbf{h}_T \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (6.61c)$$

$$\gamma_T(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \mathcal{T}_C(\mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_A. \quad (6.61d)$$

Der absorbierende Operator \mathcal{T}_C sei entsprechend einer ABC gemäß (6.10d) definiert. Weiterhin sind die Parameter α, β und γ entsprechend den Definitionen aus (6.50) gewählt. Die FE-Formulierung folgt aus der schwachen Formulierung des Randwertproblems (6.61), welche im folgenden Satz aufgezeigt wird.

Satz 6.1. Eine schwache Formulierung von Randwertproblem (6.61) lautet:

Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega)$, $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{grad}, \Gamma_A)$ und $\mathbf{j} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_A)$ so dass

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{w})_{\Omega} - k_0^2 (\epsilon_r \mathbf{E}, \mathbf{w})_{\Omega} + \langle \mathbf{j}, \pi_T(\mathbf{w}) \rangle_{\Gamma_A} = j k_0 \eta_0 (\mathbf{h}_t, \pi_T(\mathbf{w}))_{\Gamma_H}, \quad (6.62)$$

$$\langle \mathbf{j}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_A} + \langle \alpha \pi_T(\mathbf{E}), \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_A} + \langle \beta \nabla_T \times \pi_T(\mathbf{E}), \nabla_T \times \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_A} + \langle \gamma \nabla_t p, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_A} = 0, \quad (6.63)$$

$$\langle p, w \rangle_{\Gamma_A} = - \langle \mathbf{j}, \nabla_t p \rangle_{\Gamma_A}, \quad (6.64)$$

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_E(\text{rot}, \Omega), w \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{grad}, \Gamma_A) \text{ und } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_A).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zur jenem der Formulierung aus Abschnitt 5.4. \square

Auf Basis der schwachen Formulierung nach Satz 6.1 lässt sich eine FE-Formulierung angeben. Unter Berücksichtigung der FE-Räume der Form

$$\mathcal{V}_{\Omega}^{\text{rot}} \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{ \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{N_E} \} = \mathcal{V}_{\Omega}^{\text{rot}}, \quad (6.65a)$$

$$\mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}} \subset \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma_A), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{ \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{N_J} \} = \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}}, \quad (6.65b)$$

$$\mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{grad}} \subset H^{-\frac{1}{2}}(\text{grad}, \Gamma_A), \quad \text{mit} \quad \text{span} \{ w^1, \dots, w^{N_P} \} = \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{grad}}, \quad (6.65c)$$

lassen sich die approximierten Größen $\mathbf{E}^h, \mathbf{j}^h$ und p^h in den entsprechenden Basen gemäß

$$\mathbf{E}^h = \sum_{i=1}^{N_E} [\mathbf{x}^E]_i \mathbf{v}^i, \quad \mathbf{v}^i \in \mathcal{V}_{\Omega}^{\text{rot}}, \quad (6.66)$$

$$\mathbf{j}^h = \sum_{i=1}^{N_J} [\mathbf{x}^J]_i \mathbf{u}^i, \quad \mathbf{u}^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}}, \quad (6.67)$$

$$p^h = \sum_{i=1}^{N_P} [\mathbf{x}^P]_i w^i, \quad w^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{grad}} \quad (6.68)$$

darstellen und somit ein Gleichungssystem der Form

$$A^{\mathcal{T}_C} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.69)$$

gewinnen. Die Systemmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, die rechte Seite $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^N$ sowie der Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sind gegeben durch

$$\mathbf{A}^{\mathcal{T}_C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - k_0^2 \mathbf{S} & \mathbf{T}^{JE} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}^{EJ} + \mathbf{S}^{EJ} & \mathbf{T}^{JJ} & \mathbf{D}^{PJ} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{JP} & \mathbf{T}^{PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (6.70)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^E \\ \mathbf{x}_1^J \\ \mathbf{x}_1^P \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times 1}, \quad (6.71)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_I \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times 1}, \quad (6.72)$$

wobei die Dimension durch $N = N_E + N_J + N_P$ gegeben ist. Die in (6.70) und (6.72) enthaltenen Blockgrößen sind gegeben durch

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \left(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{v}^i, \nabla \times \mathbf{v}^j \right)_{\Omega}, \quad \mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^{\Omega}, \quad (6.73a)$$

$$[\mathbf{S}]_{ij} = \left(\epsilon_r \mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j \right)_{\Omega}, \quad \mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^{\Omega}, \quad (6.73b)$$

$$[\mathbf{T}^{EJ}]_{ij} = \left\langle \pi_t(\mathbf{v}^i), \mathbf{u}^j \right\rangle_{\Gamma_A}, \quad \mathbf{v}^i \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^{\Omega}, \quad \mathbf{u}^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}}, \quad (6.73c)$$

$$[\mathbf{T}^{JE}]_{ij} = \left\langle \mathbf{u}^i, \pi_T(\mathbf{v}^j) \right\rangle_{\Gamma_A}, \quad \mathbf{u}^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}}, \quad \mathbf{v}^j \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^{\Omega}, \quad (6.73d)$$

$$[\mathbf{T}^{JJ}]_{ij} = \left\langle \alpha \mathbf{u}^i, \mathbf{u}^j \right\rangle_{\Gamma_A}, \quad \mathbf{u}^i, \mathbf{u}^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}}, \quad (6.73e)$$

$$[\mathbf{b}_I]_i = j k_0 \eta_0 \left(\mathbf{h}_t, \pi_T(\mathbf{v}) \right)_{\Gamma_H}, \quad \mathbf{v}^i \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^{\Omega}, \quad (6.73f)$$

$$[\mathbf{D}^{PJ}]_{ij} = \left\langle \gamma \nabla w^j, \mathbf{u}^i \right\rangle_{\Gamma_A}, \quad \mathbf{u}^i \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}}, \quad w^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{grad}}, \quad (6.73g)$$

$$[\mathbf{T}^{PP}]_{ij} = \left\langle w^i, w^j \right\rangle_{\Gamma_A}, \quad w^i, w^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{grad}}, \quad (6.73h)$$

$$[\mathbf{F}^{JP}]_{ij} = \left\langle \mathbf{u}^j, \nabla w^i \right\rangle_{\Gamma_A}, \quad w^i, w^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{grad}}, \quad \mathbf{u}^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}}, \quad (6.73i)$$

$$[\mathbf{S}^{EJ}]_{ij} = \left\langle \beta \nabla \times \pi_T(\mathbf{v}^i), \nabla \times \mathbf{u}^j \right\rangle_{\Gamma_A}, \quad \mathbf{v}^i \in \mathcal{V}_{\Omega}^{\text{rot}}, \quad \mathbf{u}^j \in \mathcal{V}_{\Gamma_A}^{\text{rot}}. \quad (6.73j)$$

6.1.5 Numerisches Experiment

Zur Validierung der FE-Formulierung wird im weiteren Verlauf die Reflexion einer TE- bzw. TM-Welle am Halbraum entsprechend den analytischen Vorbetrachtungen nach Abschnitt 6.1.3 betrachtet. Hierzu wird das Randwertproblem (6.61) wie zuvor beschrieben mithilfe der FE-Methode diskretisiert. Der Rand Γ_A trägt somit eine ABC zweiter Ordnung entsprechend (6.10d). Die Polynomordnung der beteiligten FE-Räume beträgt $p = 2$, und der Netzparameter entspricht $h = \lambda/32$, so dass sich der FE-Approximationsfehler im Rahmen dieser Untersuchungen vernachlässigen lässt. Abbildung 6.6a zeigt sowohl den analytischen als auch den numerisch berechneten Verlauf des Reflexionsfaktors unter Berücksichtigung der Parameter $\alpha = -jk$, $\beta = 0$ und $\gamma = 0$, entsprechend einer ABC erster Ordnung. Abbildung 6.6b zeigt darüber hinaus einen Vergleich zwischen dem numerisch und analytisch berechneten Reflexionsfaktor für die Parameterwahl $\alpha = jk$, $\beta = \frac{j}{k}c^{TE}$ und $\gamma = \frac{c^{TM}}{k^2}$. Hierbei sind die Größen c^{TE} und c^{TM} derart gewählt, dass numerischen Brewster-Winkel an den Stellen $\phi^{TE} = \frac{\pi}{6}$ und $\phi^{TM} = \frac{\pi}{3}$ resultieren. In beiden Fällen ist eine deutliche Übereinstimmung zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen zu erkennen.

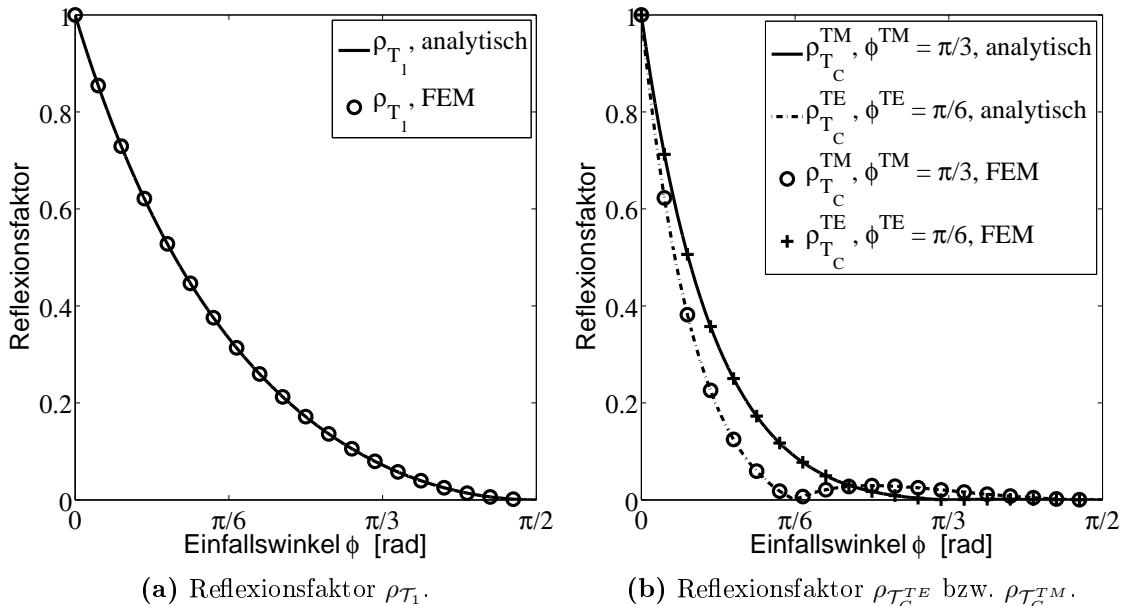


Abbildung 6.6: Vergleich des numerisch und analytisch berechneten Reflexionsfaktors in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϕ für $p = 2$ und $\frac{h}{\lambda} = \frac{1}{32}$.

6.2 Zusammenfassung

Ziel dieses Abschnitts war die Entwicklung geeigneter Erweiterungen der ABC erster Ordnung gemäß (6.26). Analog zu den Überlegungen aus Abschnitt 4.1 zeigte sich, dass eine optimale ABC durch den DtN-Operator gegeben ist, so dass auf die bereits eingeführten lokalen Approximationen gemäß Abschnitt 4.1.2 zurückgegriffen werden konnte. Durch die Berücksichtigung der resultierenden ABCs höherer Ordnung konnte eine deutliche Reduktion des Reflexionsfaktors für TE- und TM-Wellen erreicht werden. Darauf hinaus ermöglicht der Einsatz eines erweiterten transparenten Operators eine voneinander unabhängige Parametrierung der numerischen Brewster-Winkels sowohl für TE- als auch für TM-Wellen.

Kapitel 7

Ein Ordnungsreduktionsverfahren

Zur Diskretisierung elektromagnetischer Strukturen von elektrisch großer Dimension hat sich das vorgestellte nicht-überlappende DD-Verfahren als eine effiziente Möglichkeit zur Vorkonditionierung im Rahmen eines iterativen Lösers herausgestellt. Ist jedoch eine breitbandige Charakterisierung der zugrundeliegenden Struktur erforderlich, so erfordert dies die Lösung des FE-DD-Systems an einer Vielzahl von Frequenzpunkten. Dies lässt sich auf Basis des hochdimensionalen FE-Systems nur unter hohem numerischen Aufwand erreichen. Eine effiziente Klasse von Methoden zur breitbandigen Charakterisierung elektromagnetischer Strukturen stellen die MOR-Verfahren dar. Das Ziel dieser Methoden ist die Generierung eines ROMs, das im betrachteten Frequenzbereich das Systemverhalten des ursprünglichen Modells approximiert. Da das ROM von wesentlich geringerer Dimension als das ursprüngliche Modell ist, lässt es sich um ein Vielfaches schneller auswerten. Projektionsbasierte MOR-Verfahren erreichen die Ordnungsreduktion durch Projektion des Ausgangsmodells in einen niedrigdimensionalen Unterraum. Die resultierenden ROMs weisen hierbei dieselbe parametrische Struktur wie das Originalmodell auf. Ein etabliertes Verfahren dieser Klasse ist die RBM [PR06], die den Projektionsraum aus Lösungen des Originalmodells in unterschiedlichen Frequenzpunkten konstruiert. Zudem stehen für diese Methode adaptive Abtaststrategien [FHMS11] [HSZ14] sowie effizient auswertbare a-posteriori-Fehlerschranken zur Verfügung [CHMR09]. Im weiteren Verlauf wird ein projektionsbasiertes MOR-Verfahren auf Basis des FE-DD-Systems (5.73) aufgezeigt und umgesetzt.

7.1 Projektionsbasiertes Ordnungsreduktionsverfahren

Voraussetzung für die effiziente Umsetzung eines projektionsbasierten MOR-Verfahrens ist die affine Abhängigkeit des betrachteten FE-DD-Systems (5.73) von der Wellenzahl k_0 .

Satz 7.1 (Affin-parametrisiertes FE-DD-System). *Gegeben seien die von der Wellenzahl abhängigen Parameter $\alpha(k_0)$, $\beta(k_0)$ und $\gamma(k_0)$ innerhalb des Kopplungsoperators \mathcal{B}_C nach (4.77d). Das von der Wellenzahl k_0 abhängige FE-DD-System (5.73) besitzt die bezüglich k_0 affin-parametrische Gestalt der Form*

$$\left(\sum_{l=1}^5 f_l(k_0) \mathbf{A}_l \right) \mathbf{x}(k_0) = g(k_0) \mathbf{b}. \quad (7.1)$$

Die Funktionen $f_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sind gegeben durch

$$f_1 = 1, \quad (7.2)$$

$$f_2 = k_0^2, \quad (7.3)$$

$$f_3 = \alpha(k_0), \quad (7.4)$$

$$f_4 = \beta(k_0), \quad (7.5)$$

$$f_5 = \gamma(k_0), \quad (7.6)$$

$$g = -jk_0\eta_0 \quad (7.7)$$

und beschreiben von der Wellenzahl k_0 abhängige Funktionen, während die von der Wellenzahl unabhängigen Größen \mathbf{A}_l und \mathbf{b} durch

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^l & \mathbf{C}_{12}^l \\ \mathbf{C}_{21}^l & \mathbf{A}_2^l \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1+N_2 \times N_1+N_2}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2} \quad (7.8)$$

definiert sind. Die enthaltenen Blockmatrizen bzw. Blockvektoren sind gegeben durch

$$\mathbf{A}_m^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m^{II} & \mathbf{A}_m^{I\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_m^{\Gamma I} & \mathbf{A}_m^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{T}_{mm}^{EJ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{mm}^{JJ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{mm}^{PJ} & \mathbf{T}_{mm}^{PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m}, \quad \mathbf{C}_{mn}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{mn}^{JJ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_n}, \quad (7.9)$$

$$\mathbf{A}_m^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_m^{II} & \mathbf{S}_m^{I\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_m^{\Gamma I} & \mathbf{S}_m^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m}, \quad \mathbf{C}_{mn}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_n}, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{A}_m^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{mm}^{EJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m}, \quad \mathbf{C}_{mn}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{T}_{mn}^{JE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_n}, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{A}_m^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{mm}^{EJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m}, \quad \mathbf{C}_{mn}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{S}_{mn}^{JE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_n}, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{A}_m^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{mm}^{PJ} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m}, \quad \mathbf{C}_{mn}^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{mn}^{JP} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_n}, \quad (7.13)$$

entsprechend den Definitionen (5.21), (5.47) und (5.68), wobei $m, n \in \{1, 2\}$.

Beweis. Folgt direkt aus der Wellenzahlabhängigkeit der beteiligten Größen nach (5.21), (5.47), (5.68) sowie (4.139), (4.140) und (4.119). \square

7.1.1 Ein adaptives Mehrpunktverfahren

Ausgehend von dem bezüglich k_0 affin parametrierten System (7.1) lässt sich wie folgt beschrieben ein projektionsbasiertes MOR-Verfahren angeben.

Definition 7.1 (Projektionsbasiertes MOR-Verfahren). *Es bezeichne \mathcal{V}^n den Projektionsraum der Dimension $\dim \mathcal{V}^n = n$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{(N_1+N_2) \times n}$ die entsprechend Projektionsmatrix, so dass $\text{range}(\mathbf{V}) = \mathcal{V}^n$. Das orthogonale Projektionsverfahren der Form*

$$\text{Finde} \quad \tilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{V}^n, \quad (7.14a)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{r}(k_0) = g(k_0)\mathbf{b} - \left(\sum_{l=1}^5 f_l(k_0) \mathbf{A}_l \right) \tilde{\mathbf{y}} \in (V^n)^\perp, \quad (7.14b)$$

resultiert mit der Darstellung $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}$ in dem zugehörigen ROM der Form

$$\left(\sum_{l=1}^5 f_l(k_0) \tilde{\mathbf{A}}_l \right) \tilde{\mathbf{x}}(k_0) = g(k_0) \tilde{\mathbf{b}}. \quad (7.15)$$

Die reduzierten Größen $\tilde{\mathbf{A}}_l$ und $\tilde{\mathbf{b}}$ sind definiert durch

$$\tilde{\mathbf{A}}_l = \mathbf{V}^* \mathbf{A}_l \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad (7.16)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{V}^* \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n. \quad (7.17)$$

Das nach (7.15) erzeugte ROM lässt sich unter der Annahme $n \ll N_1 + N_2$ aufgrund der entsprechend niedrigen Dimension effizient für beliebige Wellenzahlen k_0 auswerten. Es lassen sich somit zwei wesentliche Prozesse im Rahmen des MOR-Verfahrens herausstellen:

1. Konstruktion der Projektionsmatrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{(N_1+N_2) \times n}$ und der reduzierten Größen $\tilde{\mathbf{A}}_l$ und $\tilde{\mathbf{b}}$ entsprechend (7.16) und (7.17).
2. Assemblierung und Lösung des ROMs (7.15) im gewünschten Parameterpunkt k_0 .

Hierbei wird der erste Schritt häufig als Offline-Teil bezeichnet, während der Zweite Online-Teil genannt wird. Die nachfolgenden Betrachtungen beschreiben die Konstruktion der Projektionsmatrix \mathbf{V} und somit den Offline-Teil des MOR-Verfahrens. Der Projektionsraum \mathcal{V}^n bzw. die zugehörige Projektionsmatrix \mathbf{V} wird innerhalb dieser Arbeit im Rahmen eines Mehrpunktverfahrens konstruiert [PR06].

Definition 7.2 (Mehrpunktverfahren). *Das Mehrpunktverfahren konstruiert den Projektionsraum \mathcal{V}^n bzw. die Projektionsmatrix \mathbf{V} entsprechend*

$$\mathcal{V}^n = \text{range}(\mathbf{V}) = \text{span} \{ \mathbf{x}(k_0^i); k_0^i \in \Xi, \forall i \in \{1 \dots n\} \}. \quad (7.18)$$

Hierbei bezeichnet $\Xi \subset P$ eine dichte, zur Parametermenge P gehörige Trainingsmenge und $\mathbf{x}(k_0^i)$ die Lösung des FE-DD-Systems (7.1) an der Stützstelle $k_0^i \in \Xi$.

Die Wahl der Stützstellen $k_0^i \in \Xi$ und damit verbunden die Konstruktion der Projektionsbasis \mathbf{V} geschieht hierbei adaptiv im Rahmen eines Greedy-Verfahrens nach Algorithmus 7.1. Der zugehörige Fehlerindikator entspricht in dieser Arbeit der 2-Norm des relativen Residuums gemäß

$$\rho(k_0, \mathcal{V}^n) := \frac{\left\| g(k_0) \mathbf{b} - \left(\sum_{l=1}^5 f_l(k_0) \mathbf{A}_l \right) \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(k_0) \right\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}, \quad (7.19)$$

welcher sich effizient auf Basis ausschließlich reduzierte Größen auswerten lässt [dlRRM09].

7.1.2 Grobraumkorrektur durch reduziertes Modell

Entsprechend dem Algorithmus 7.1 erfordert die Konstruktion der Projektionsbasis \mathbf{V} die Lösung des vollen FE-DD-Systems (7.1). Dies geschieht mit Hilfe des iterativen Lösungsverfahrens nach Abschnitt 5.5, so dass der verbundene Zeitaufwand zur ROM Generierung insbesondere durch die Konvergenzgeschwindigkeit des

Algorithmus 7.1 Adaptives Mehrpunktverfahren

Eingang: FE-Modell (7.1), Trainingsmenge $\Xi \subset P$, Toleranz $\rho_\epsilon > 0$.

Ausgang: Projektionsbasis \mathbf{V} , ROM Σ .

Initialisierung:

Wähle $k_0^1 \in \Xi$ beliebig, löse FE-DD-System (7.1), setze $\mathcal{V}^1 = \text{span} \{ \mathbf{x}(k_0^1) \}$ und entsprechend $\mathbf{V}^1 = [\mathbf{x}(k_0^1)]$ sowie $N = 1$.

Initialisiere ROM Σ entsprechend (7.16) und (7.17).

repeat

Berechne Fehlerindikator $\rho(k_0, \mathcal{V}^N)$ für alle $k_0 \in \Xi$

Wähle $k_0^{N+1} = \arg \max_{k_0 \in \Xi} \rho(k_0, \mathcal{V}^N)$

Setze $\mathcal{S}^{N+1} = \mathcal{S}^N \cup \{k_0^{N+1}\}$

Löse FE-DD-System (7.1) und setze $\mathcal{V}^{N+1} = \mathcal{V}^N \oplus \text{span} \{ \mathbf{x}(k_0^{N+1}) \}$

und entsprechend $\mathbf{V}^{N+1} = [\mathbf{V}^N, \mathbf{x}(k_0^{N+1})]$

Konstruiere ROM Σ entsprechend (7.16) und (7.17).

until $\rho \leq \rho_\epsilon$ für alle $k_0 \in \Xi$.

Lösers bestimmt wird. Um diese zu verbessern, wird eine Grobraumkorrektur basierend auf dem in der aktuellen Iteration des Algorithmus 7.1 vorhandenen ROMs vorgeschlagen. Die Umsetzung einer Grobraumkorrektur im Rahmen eines iterativen Lösers wurde bereits in Abschnitt 5.9 erläutert. Der Unterschied zu den dort dargestellten Vorgehen ist jedoch die Tatsache, dass das ROM ausgehend von dem nicht kondensierten FE-DD-Systems (5.73) erzeugt wird und somit im Gegensatz zu dem kondensierten Gleichungssystem (5.98) bzw. (5.102) die Wirkung des DD-Vorkonditionierers (5.84) bzw. (5.85) noch nicht beinhaltet. Dies erfordert eine Vorkonditionierung, welche sowohl die Wirkung des DD-Vorkonditionierers als auch die Grobraumkorrektur berücksichtigt. Diese lässt sich mit dem in der Arbeit [EN08] vorgeschlagenen additiven Vorkonditionierer der Form

$$\mathbf{P}_{AD} = \mathbf{Q}_D \mathbf{M}_X^{-1} \mathbf{P}_D + \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^*, \quad X \in \{J, G\} \quad (7.20)$$

erreichen. Die beteiligten Matrizen \mathbf{Q}_D und \mathbf{P}_D sind gegeben durch

$$\mathbf{P}_D := \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^* \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{Q}_D := \mathbf{I} - \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^* \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (7.22)$$

wobei $N = N_1 + N_2$ und $\mathbf{E}^{-1} = (\mathbf{Z}^* \mathbf{A} \mathbf{Z})^{-1}$ sowie $\mathbf{A} = \left(\sum_{l=1}^5 f_l(k_0) \mathbf{A}_l \right)$. Zur Verdeutlichung des Vorgehens ist in Algorithmus 7.2 der den Lösungsschritt beinhaltende Teil aus Algorithmus 7.1 separat aufgeführt: Bezeichnet \mathbf{V}^N die Projektionsmatrix und Σ das zugehörige ROM innerhalb des N -ten Iterationschrittes von Algorithmus 7.1, so folgt die Lösung von (7.1) mithilfe des adaptiven Vorkonditionierers gemäß (7.20). Der Grobraum \mathbf{Z} wird entsprechend der bereits erzeugten Projektionsmatrix \mathbf{V}^N im Sinne von

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}^N \quad (7.23)$$

Algorithmus 7.2 Grobraumkorrektur durch ROM

Eingang: Stützstelle k_0^N , ROM Σ und Projektionsbasis \mathbf{V}^N im N -ten Iterations-
schritt, .

Ausgang: Lösung $\mathbf{x}(k_0^{N+1})$ des FE-Systems (7.1) .

```

if  $N = 1$  then
  Löse FE-DD-System (7.1) iterativ mit Vorkonditionierer  $\mathbf{M}$  nach (5.85)
else
  Löse FE-DD-System (7.1) iterativ mit Vorkonditionierer  $\mathbf{P}_{AD}$  definiert
  durch  $\mathbf{P}_{AD} = \mathbf{Q}_D \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}_D + \mathbf{V}^N \mathbf{E}^{-1} (\mathbf{V}^N)^*$ , mit  $\mathbf{E}^{-1} = (\mathbf{V}^N)^* \mathbf{A} \mathbf{V}^N$ ,  $\mathbf{A} =$ 
   $\left( \sum_{l=1}^5 f_l(k_0) \mathbf{A}_l \right)$ 
end if

```

gewählt. Die Berechnung der Wirkung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{P}_{AD}\mathbf{x}$ des adaptiven Vorkonditionierers \mathbf{P}_{AD} benötigt zusätzlich zur Wirkung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ die Wirkung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{E}^{-1}\mathbf{x}$ im Rahmen des zweiten Summanden in (7.20). Dies erfordert die Lösung eines Gleichungssystems der Form

$$\mathbf{E}\mathbf{u} = (\mathbf{V}^N)^* \mathbf{A} \mathbf{V}^N \mathbf{u} = \mathbf{v}. \quad (7.24)$$

Die in (7.24) enthaltene Matrix $(\mathbf{V}^N)^* \mathbf{A} \mathbf{V}^N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ entspricht genau der reduzierten Matrix, so dass sich diese Wirkung auf Basis reduzierte Größen effizient berechnen lässt.

7.1.3 Numerisches Beispiel - Vivaldi-Antenne

Als numerisches Beispiel dient eine lineare Antennengruppe bestehend aus $N_A = 50$ Antennenelementen. Die Geometrie eines einzelnen Antennenelementes ist in Abbildung 7.1a dargestellt. Der Rand des Feldgebiets trägt einer ABC erster Ordnung entsprechend (2.34d) deren Abstand zu den Antennenelementen der Abbildung 7.1b zu entnehmen ist. Die Ansteuerung der Antennenelemente erfolgt mit konstanter Amplitude und gleicher Phasenlage. Im Rahmen des MOR-Verfahrens entsprechend Algorithmus 7.2 wird zur Lösung des FE-DD-Systems (7.1) ein iteratives GMRES(30)-Verfahren mit dem relativen Residuum von $\rho_{FE} = 10^{-6}$ als Abbruchkriterium herangezogen. Die Parameter α , β und γ sind gemäß (5.82) mit $k_{tm} = 710,5$ rad/m und $k_{te} = 523,2$ rad/m definiert. Als Abbruchkriterium des Algorithmus 7.2 ist $\rho_\epsilon = 10^{-6}$ gewählt. Die numerischen Daten sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst.

Die Grobraumkorrektur im Rahmen der ROM-Konstruktion bewirkt eine Reduktion der ROM-Generierungszeit von 6,2 h auf 2,1 h im Vergleich zu einem herkömmlichen Ansatz. Abbildung 7.2 zeigt, dass die benötigte Iterationszahl des GMRES-Lösers

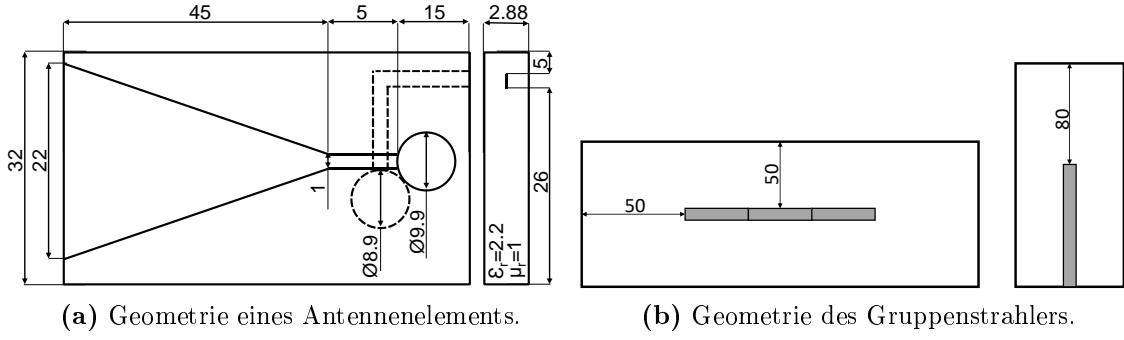


Abbildung 7.1: Vivaldi-Antenne: Geometrie der Antennengruppe. Alle Maße in mm.

Tabelle 7.1: Vivaldi-Antenne: Numerische Daten*

Modell	ROM	FE-DD	FE-DD
Vorkonditionierer	-	\mathbf{M}^{-1}	\mathbf{P}_{AD}
Dimension	42	$8 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$
FE-DD-System Auswertung (s)	-	$4.8 \cdot 10^2$	-
ROM Konstruktion (h)	-	6.2	2.1
ROM Auswertung (s)	$9.3 \cdot 10^{-3}$	-	-

* Matlab R2014a Prototype-Implementierung @ Intel Core i5-4570 CPU @ 3.2 GHz.

zum Erreichen des Abbruchkriteriums mit steigender ROM-Dimension deutlich reduziert wird. Dargestellt ist hierbei die benötigte Iterationszahl des GMRES(30)-Lösers zum Erreichen des Abbruchkriteriums $\rho_{FE} = 10^{-6}$ in Abhängigkeit der ROM-Dimension N . Darüber hinaus zeigen die Abbildungen 7.3a und 7.3b die beiden auf Basis des ROMs berechneten Größen, Betrag und Phase der reflektierten Welle für ein Antennenelement am Rand sowie im Zentrum des Gruppenstrahlers. Sowohl der Betrag als auch die Phase des aktiven Reflexionskoeffizienten zeigen eine deutliche Sensitivität gegenüber der Lokalisierung innerhalb des Gruppenstrahlers, was durch die TC der einzelnen Antennenelemente untereinander begründet ist. Darüber hinaus zeigt Abbildung 7.4 das Strahlungsdiagramm des Gruppenstrahlers bei einer Frequenz von $f = 4$ GHz und $f = 1$ GHz in der Ebene definiert durch $\phi = \frac{\pi}{2}$, welches ebenfalls auf Basis reduzierter Größen berechnet wird [SFDE15].

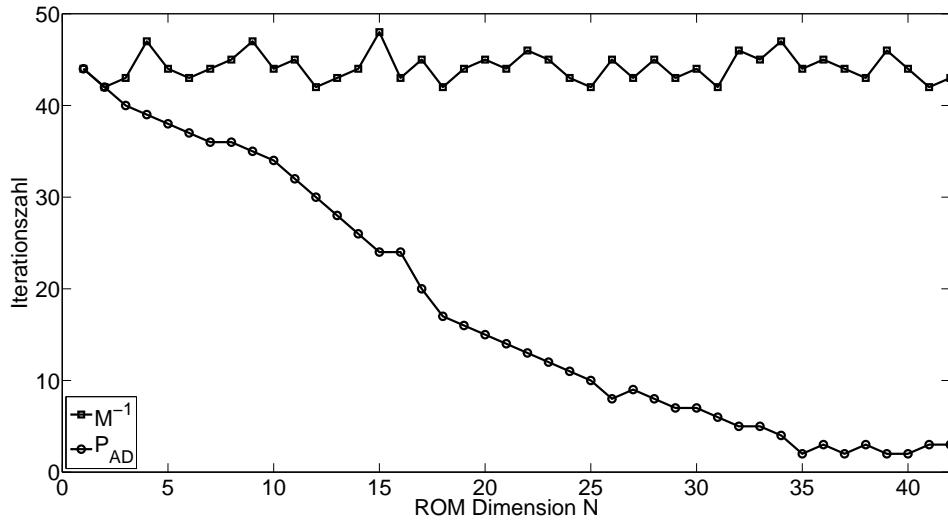
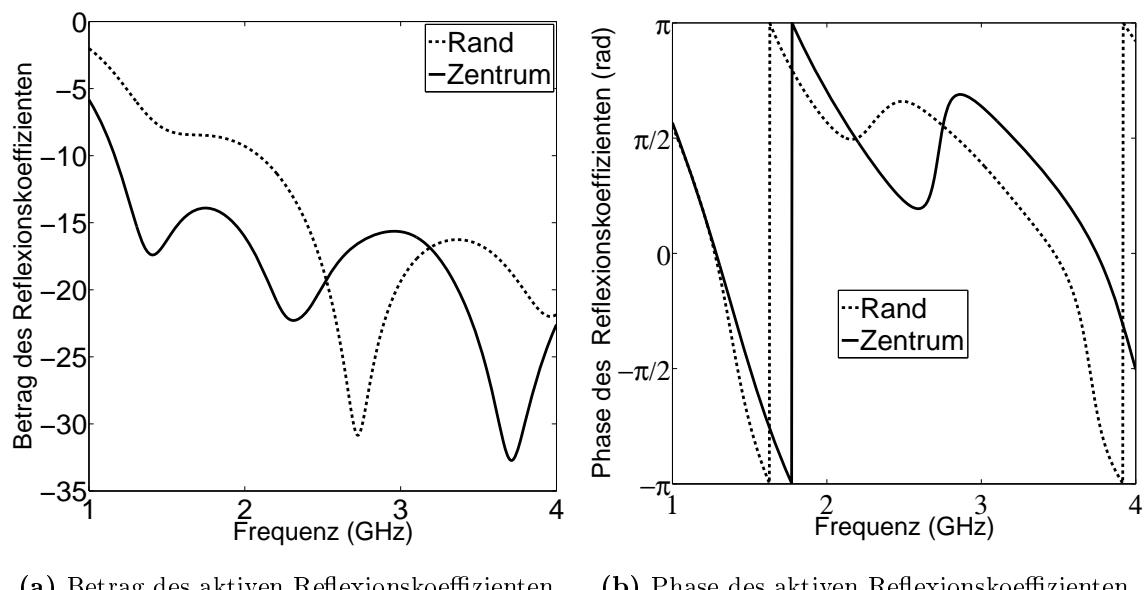


Abbildung 7.2: Vivaldi-Antenne: Benötigte Iterationszahl des GMRES(30)-Lösers zum Erreichen des Abbruchkriteriums $\rho_{FE} = 10^{-6}$ in Abhängigkeit der ROM-Dimension N .



(a) Betrag des aktiven Reflexionskoeffizienten in Abhängigkeit der Frequenz f . (b) Phase des aktiven Reflexionskoeffizienten in Abhängigkeit der Frequenz f .

Abbildung 7.3: Vivaldi-Antenne: Frequenzgang der reflektierten Welle für unterschiedlich lokalisierte Antennenelemente.

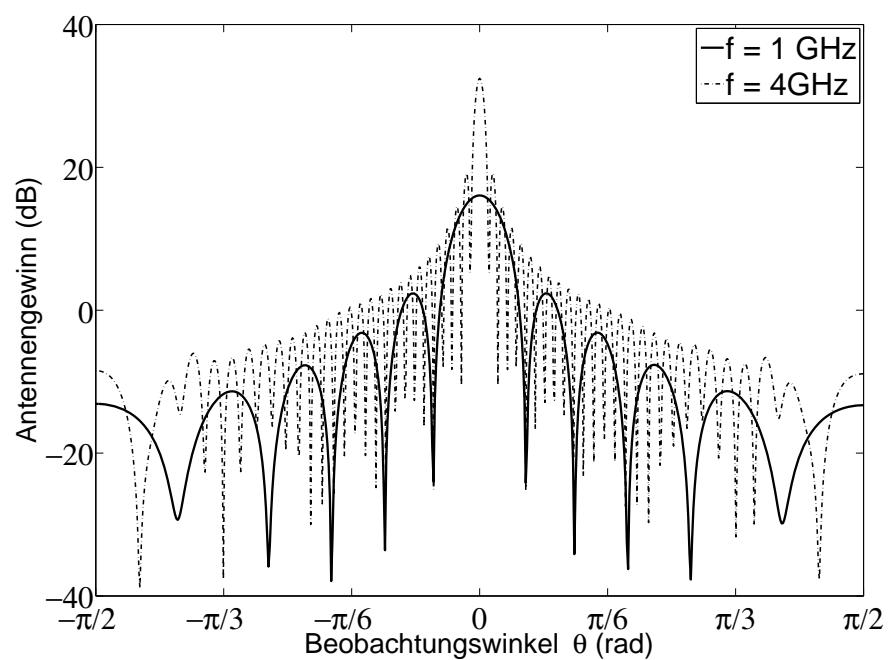


Abbildung 7.4: Vivaldi-Antenne: Antennengewinn in der Ebene $\phi = \frac{\pi}{2}$ für unterschiedliche Betriebsfrequenzen f .

7.1.4 Numerisches Beispiel - Patch-Antenne

Als zweites numerisches Beispiel dient ein quadratischer Gruppenstrahler der Dimension 20×20 bestehend aus Patch-Antennen entsprechend der Geometrie aus Abbildung 7.5a. Der Rand des Feldgebiets trägt einer ABC erster Ordnung entsprechend (2.34d) dessen Abstand zu den Antennenelementen der Abbildung 7.5b zu entnehmen ist. Die Ansteuerung der Antennenelemente erfolgt mit konstanter Amplitude und gleicher Phasenlage. Die Abbruchkriterien für den GMRES(30)-Löser sowie den Algorithmus 7.2 zur ROM Generierung sind analog zu dem vorherigen Beispiel entsprechend $\rho_{FE} = 10^{-6}$ und $\rho_\epsilon = 10^{-6}$ gewählt. Die Parameter α , β und γ sind gemäß (5.82) mit $k_{tm} = 710,5$ rad/m und $k_{te} = 523,2$ rad/m definiert. Die benötigte Iterationszahl des GMRES(30)-Lösers zum Erreichen des Abbruchkriteriums zeigt Abbildung 7.6: Sie reduziert sich durch die Anwendung des additiven Vorkonditionierers von ungefähr 28 auf ca. 5 Iterationen. Somit lässt sich eine Reduktion des Zeitaufwands zur ROM-Generierung von 8.6 h auf 2.8 h erreichen. Abschließend zeigen die Abbildungen 7.8 und 7.7 das auf Basis des ROM berechnete Strahlungsdiagramm sowie Betrag und Phase des aktiven Reflexionskoeffizienten.

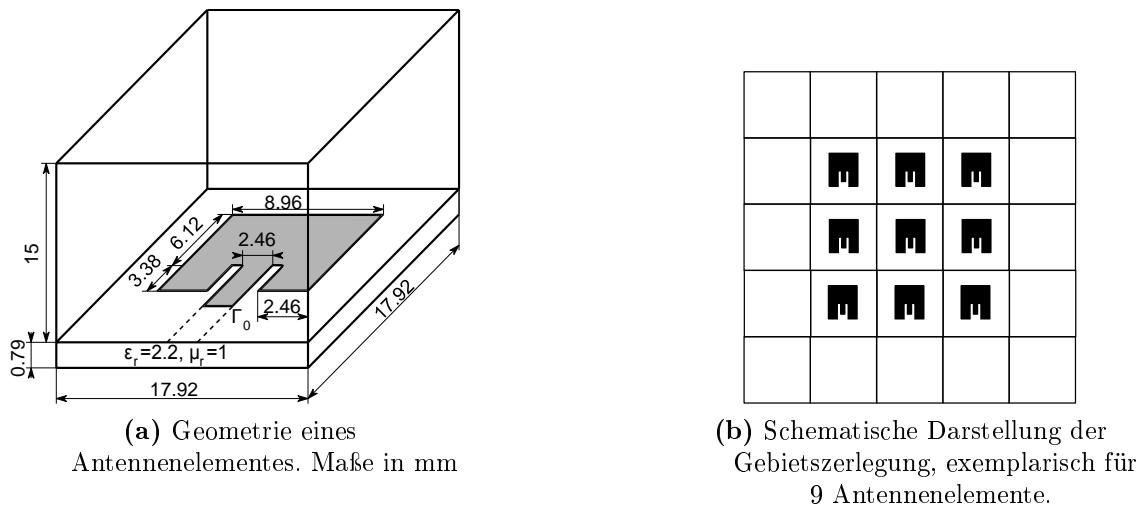


Abbildung 7.5: Patch Antenne: Geometrie und Anordnung der Teilgebiete

Tabelle 7.2: Patch-Antenne: Numerische Daten*

Modell	ROM	FE-DD	FE-DD
Vorkonditionierer	-	\mathbf{M}^{-1}	\mathbf{P}_{AD}
Dimension	42	$17 \cdot 10^6$	$17 \cdot 10^6$
FE-DD-System Auswertung (s)	-	$8 \cdot 10^2$	-
ROM Konstruktion (h)	-	8.6	2.8
ROM Auswertung (s)	$5.1 \cdot 10^{-3}$	-	-

* Matlab R2014a Prototyp-Implementierung @ Intel Core i5-4570 CPU @ 3.2 GHz.

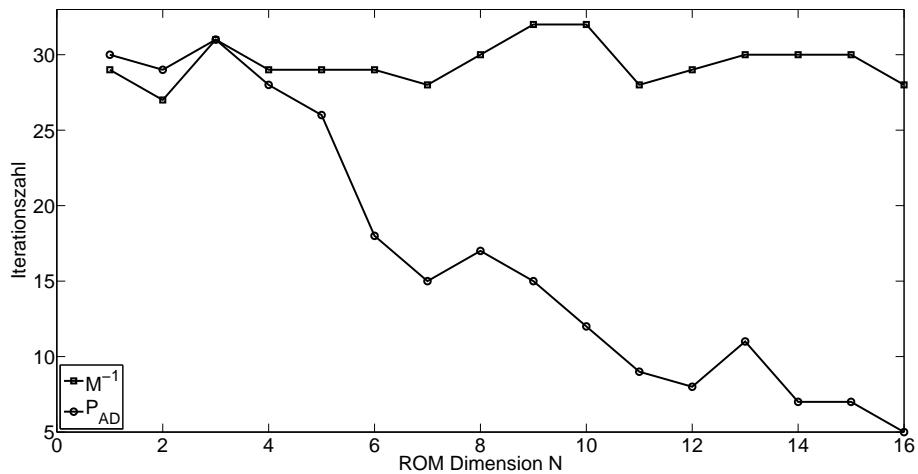


Abbildung 7.6: Patch Antenne: Benötigte Iterationszahl des GMRES(30)-Lösers zum Erreichen des Abbruchkriteriums $\rho_{FE} = 10^{-6}$ in Abhängigkeit der ROM-Dimension N .

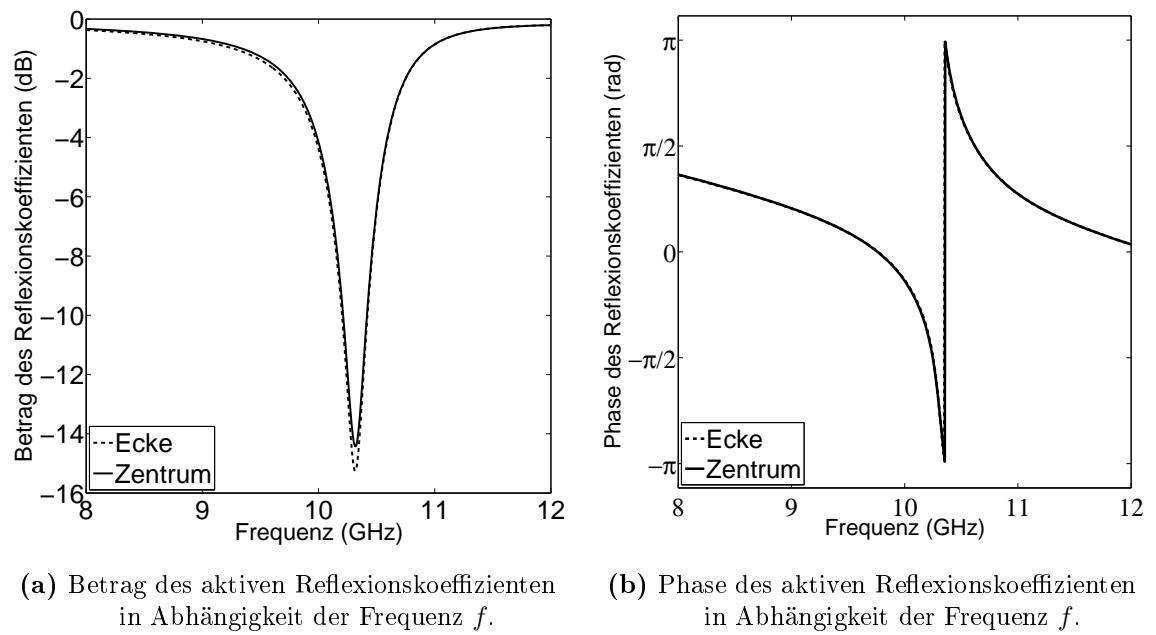


Abbildung 7.7: Patch Antenne: Frequenzgang der reflektierten Welle für unterschiedlich lokalisierte Antennenelemente.

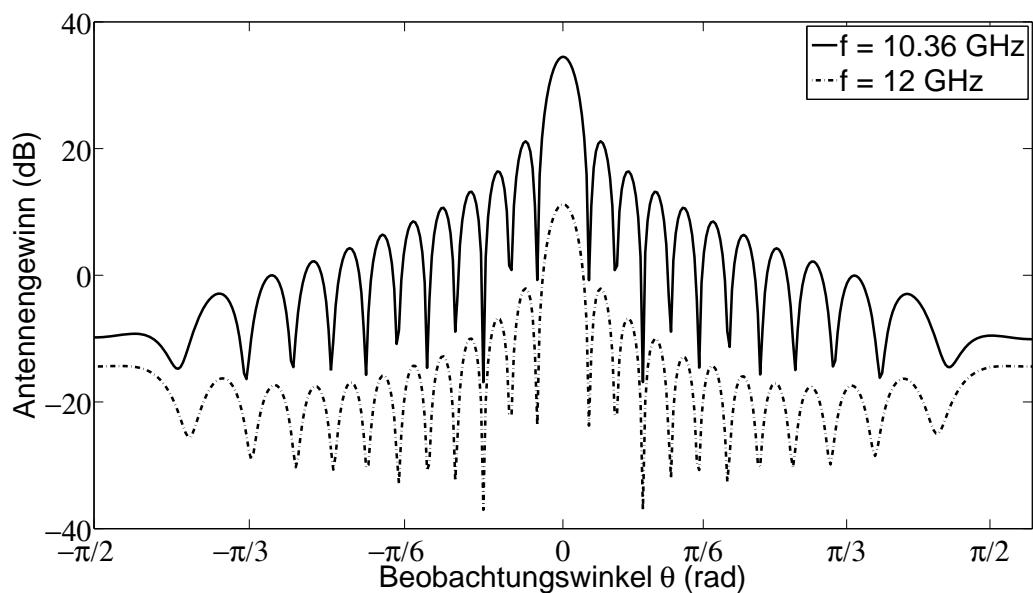


Abbildung 7.8: Patch Antenne: Antennengewinn in der Ebene $\phi = \frac{\pi}{2}$ für unterschiedliche Betriebsfrequenzen f .

7.2 Zusammenfassung

Ausgehend von dem FE-Formulierung des nicht-überlappenden-DD-Verfahrens nach Kapitel 5.4 wurde ein projektionsbasiertes MOR-Verfahren zur breitbandigen Charakterisierung elektrisch großer Strukturen vorgestellt. Insbesondere konnte aufbauend auf den Ergebnissen aus Kapitel 5.9 eine Grobraumkorrektur auf Basis des ROMs aufgezeigt werden, welche eine deutliche Reduktion der Offlinezeit ermöglicht.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein nicht-überlappendes DD-Verfahren zur Lösung der indefiniten vektoriellen Helmholtz-Gleichung aufgezeigt und mit MOR-Verfahren kombiniert, so dass eine breitbandige Charakterisierung elektrisch großer Strukturen ermöglicht wird. Des weiteren werden ABCs höherer Ordnung vorgestellt und im Rahmen der FE-Methode umgesetzt, was zu einer deutlichen Verbesserung der Reflexionseigenschaften gegenüber herkömmlicher ABCs erster Ordnung führt.

Kapitel 2 stellt die wesentlichen mathematischen und physikalischen Grundlagen zur Verfügung, auf deren Basis das zu untersuchende Randwertproblem formuliert wird. Weiterhin wird auf Aspekte der FE-Methode zur Diskretisierung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung eingegangen.

Die Eigenschaften der entsprechenden FE-Formulierung zeigen, dass insbesondere im Fall elektrisch großer Strukturen eine Lösung des FE-Gleichungssystems mittels direkter Lösungsverfahren nur unter sehr hohem numerischem Aufwand möglich ist. Somit ist der Übergang zu iterativen Lösungsverfahren unumgänglich. Kapitel 3 vermittelte einen Überblick über iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Aufgrund der höheren Robustheit gegenüber stationären Verfahren liegt der Fokus hierbei insbesondere auf der Klasse der Krylovunterraumverfahren, wobei das GMRES-Verfahren in diesem Kontext im Vordergrund steht. Allen gemeinsam ist die Forderung nach einer geeigneten Vorkonditionierung, welche durch die indefinite Struktur des aus der FE-Formulierung resultierenden Gleichungssystems erschwert wird.

Eine geeignete Methodik stellen nicht-überlappende DD-Verfahren dar. Diese basieren auf einer Zerlegung des Feldgebiets in beliebig viele, nicht-überlappende Teilgebiete. Auf den durch die Zerlegung entstehenden Grenzflächen werden in Kapitel 4 TCs aufgezeigt, welche die Äquivalenz zum ursprünglichen Randwertproblem gewährleisten. Weiterhin zeigt sich eine Abhängigkeit der spektralen Eigenschaften des resultierenden vorkonditionierten Gleichungssystems von der konkreten Form der

TCs. Aufbauend auf TCs erster Ordnung werden diese auf TCs höherer Ordnung erweitert und mittels analytischer Betrachtungen auf ihre Konvergenzeigenschaften im Rahmen eines iterativen DD-Verfahrens untersucht. Als Feldgebiet wird im Rahmen dieser Untersuchungen der Halbraum gewählt, so dass sich das zu untersuchende Randwertproblem unter Zuhilfenahme der Fouriertransformation vereinfachend darstellen lässt. Somit kann ein bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit optimaler Kopplungsoperator aufgezeigt und mit dem DtN-Operator identifiziert werden, dessen nicht-lokale Gestalt die Herleitung lokaler Approximationen motiviert.

Kapitel 5 zeigt die dem resultierenden Randwertproblem zugehörigen FE-Formulierungen unter Berücksichtigung der aufgezeigten Kopplungsoperatoren höherer Ordnung. Auf Basis der erhaltenen FE-Formulierungen wird eine geeignete Strategie zur Vorkonditionierung aufgezeigt. Desweitern wird eine effiziente Strategie zur Lösung des resultierenden vorkonditionierten Gleichungssystems mittels Kondensierung der Freiheitsgrade auf Grenzflächen-Unbekannte dargestellt. Um den Einfluss der TCs auf die Qualität des Vorkonditionierers zu untersuchen, erfolgt eine detaillierte numerische Analyse der spektralen Eigenschaften der resultierenden vorkonditionierten Systemmatrizen. Mit Hilfe dieser Analyse lässt sich ein Zusammenhang zu den analytischen Betrachtungen herstellen. Die dargestellten FE-DD-Formulierungen zeigen unter Berücksichtigung der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Kopplungsoperatoren eine Übereinstimmung mit der aus der herkömmlichen FE-Diskretisierung resultierenden Approximationsordnung. Durch den Einsatz einer vollständigen TC zweiter Ordnung wird eine von der FE-Netzfeinheit unabhängige Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit erreicht. Es zeigt sich jedoch auch eine deutliche Abhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit von der Anzahl an Teilgebieten resultierend aus der Gebietszerlegung. Diese Skalierung lässt sich mit der dargestellten Grobraumkorrektur auf Basis ebener Wellen zumindest im Rahmen eines einfachen numerischen Beispiels beseitigen. Der Einfluss der Grobraumkorrektur wird zudem anhand des Spektrums des vorkonditionierten Systems demonstriert. Generell ist die Frage nach einem effizienten Grobraum ein noch offenes Problem und Thema aktueller Forschung. Ein numerisches Beispiel demonstriert die Effizienz des vorgestellten Verfahrens anhand einer praxisrelevanten Struktur.

Zur Simulation von Abstrahlungsproblemen im Rahmen der FE-Methode werden aufgrund ihrer einfachen Umsetzung häufig sogenannte ABCs niedrigster Ordnung genutzt. In Kapitel 6 dieser Arbeit wird eine Verallgemeinerung der ABCs vorgestellt und eine Analogie zu den zuvor aufgezeigten Kopplungsoperatoren im Rahmen eines DD-Verfahrens hergestellt. Dies ermöglicht die Konstruktion ABCs höherer Ordnung. Es folgt eine detaillierte analytische Analyse der Reflexionseigenschaften der betrachteten ABCs höherer Ordnung. Weiterhin wird eine zugehörige FE-Diskretisierung vorgestellt und mit Hilfe der analytischen Voruntersuchungen verifiziert.

Die breitbandige Charakterisierung elektromagnetischer Strukturen stellt insbesondere für den Fall elektrisch großer Feldgebiete aufgrund beschränkter Rechnerressourcen eine Herausforderung dar. Methoden der MOR haben sich in diesem Kontext

etabliert. Kapitel 7 stellt auf Basis der FE-DD-Formulierung ein projektionsbasiertes MOR-Verfahren vor. Des weiteren wird eine Grobraumkorrektur auf Basis der reduzierten Modells vorgestellt, mit Hilfe derer eine deutliche Reduktion des Zeitaufwands bei der ROM-Generierung erzielt wird. Zwei numerische Beispiele demonstrieren letztendlich die Effektivität des vorgestellten Verfahrens.

Die wesentlichen Beiträge, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit entstanden sind lauten zusammengefasst:

- Detaillierte Untersuchung des Einflusses von TCs höherer Ordnung auf das Konvergenzverhalten nicht-überlappender DD-Verfahren auf Basis analytischer, sowie numerischer Analysen.
- Herleitung und Analyse von ABCs höherer Ordnung auf Basis analytischer, sowie numerischer Betrachtungen.
- Kopplung von nicht-überlappenden DD-Verfahren und Methoden der Ordnungsreduktion zur Beschleunigung der ROM-Generierung mittels einer Grobraumkorrektur.

Eigene Publikationen

Begutachtete Journal-Artikel

- [A1] O. Floch, A. Sommer, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger, Is Model-Order Reduction Viable for the Broadband Finite-Element Analysis of Electrically Large Antenna Arrays?, *Advances in Radio Science*, vol. 13, pp. 31 – 39, 2015.
- [A2] O. Floch, A. Sommer, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger, An Adaptive Deflation Domain-Decomposition Preconditioner for Fast Frequency Sweeps, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 3, March 2016.

Begutachtete Konferenzbeiträge

- [B1] O. Floch, A. Sommer, D. Klis, und R. Dyczij-Edlinger, Adaptive Preconditioning of Fast Frequency Sweeps by ROMs, Poster P1-2, *MoRePaS 2015 - Model Reduction of Parametrized Systems III*, Trieste, Italy, Oct. 13 – 16, 2015.
- [B2] A. Sommer, O. Floch, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger, Parametric Near-Field-to-Far-Field Transformation by Precomputed Empirical-Interpolation Patches, *Proceedings of the 36th Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2015)*, pp. 386 – 393, Prague, Czech Republic, July 06 – 09, 2015.
- [B3] O. Floch, A. Sommer, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger, Broadband Analysis Including Beam Steering of Phased Array Antennas by Order Reduction, *Proceedings of the 36th Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2015)*, pp. 381 – 385, Prague, Czech Republic, July 06 – 09, 2015.
- [B4] A. Sommer, O. Floch, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger, Certified Parametric Far-Field Computation of Antenna Arrays, Paper 13.3, *The 12th International Workshop on Finite Elements for Microwave Engineering - FEM 2012*, Chengdu, China, May 14 – 17, 2014.

- [B5] A. Sommer, O. Floch, O. Farle, R. Baltes, und R. Dyczij-Edlinger, An Efficient Parametric Near-Field-to-Far-Field Transformation Technique, *Proceedings of the IEEE International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 13)*, Torino, Italy, pp. 332 – 335, Sep. 9 – 13, 2013.
- [B6] O. Farle, D. Klis, M. Jochum, O. Floch, und R. Dyczij-Edlinger A Port-Hamiltonian Finite-Element Formulation for the Maxwell Equations, *Proceedings of the IEEE International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 13)*, Torino, Italy, pp. 324 – 327, Sep. 9 – 13, 2013.
- [B7] O. Floch, A. Sommer, und R. Dyczij-Edlinger, Ein Ordnungsreduktionsverfahren zur materialparameterabhängigen Charakterisierung resonanter elektromagnetischer Strukturen, *Paper KHT2015-B-01, Kleinheubacher Tagung 2015*, Miltenberg, Germany, Sept. 28 - Oct. 30, 2015.
- [B8] A. Sommer, O. Floch, D. Klis, und R. Dyczij-Edlinger, Effiziente numerische Optimierung der Richtcharakteristik von Antennengruppen mittels Ordnungsreduktion, *Paper KHT2015-B-02, Kleinheubacher Tagung 2015*, Miltenberg, Germany, Sept. 28 - Oct. 30, 2015.
- [B9] O. Floch, A. Sommer, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger Kopplung von Gebietszerlegungsverfahren mit Ordnungsreduktionsmethoden zur effizienten parametrischen Finite-Elemente-Simulation elektromagnetischer Strukturen, *Paper KHT2014-B-05, Kleinheubacher Tagung 2014*, Miltenberg, Germany, Sept. 29 - Oct. 01, 2014.
- [B10] O. Floch, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger, Ein Gebietszerlegungsverfahren für die indefinite Helmholtzgleichung, *Paper KHT2012-B.2-2, Kleinheubacher Tagung 2012*, Miltenberg, Germany, Sept. 24-26, 2012.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung des Gebiets Ω	10
4.1	Zerlegung des Gebiets Ω in die beiden Teilgebiete Ω_1 und Ω_2	24
4.2	Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m in Abhängigkeit der Wellenzahl k_T	45
4.3	Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_1}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m und $\alpha = (-j\mu_r^{-1}k + 0.2)$ in Abhängigkeit von k_T	46
4.4	Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_{TM}}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m, $\alpha = -j\mu_r^{-1}k$ und $\gamma = \frac{1}{k^2+k\sqrt{k^2-k_{tm}^2}}$, $k_{tm} = 2,5$ rad/m in Abhängigkeit von k_T . .	47
4.5	Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_{TE}}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m, $\alpha = -j\mu_r^{-1}k$ und $\beta = \frac{j}{k+\sqrt{k^2-k_{te}^2}}$, $k_{te} = 2,8$ rad/m in Abhängigkeit von k_T . .	48
4.6	Betrag des Konvergenzfaktors $\rho_{\mathcal{B}_C}^{TE}$ bzw. $\rho_{\mathcal{B}_C}^{TM}$ für $k = 2$ rad/m, $\alpha = -j\mu_r^{-1}k$, $\beta = \frac{j}{k+\sqrt{k^2-k_{te}^2}}$, $\gamma = \frac{1}{k^2+k\sqrt{k^2-k_{tm}^2}}$, $k_{te} = 2,8$ rad/m und $k_{tm} = 2,5$ rad/m.	49
5.1	Geometrie des WR-90 Rechteckwellenleiters.	57
5.2	Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_1})$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems (5.34) für unterschiedliche Betriebsfrequenzen f.	59
5.3	Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TE}})$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz.	63
5.4	Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_{TM}})$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei einer Frequenz $f = 10$ GHz.	67

5.5	Spektrum des vorkonditionierten FE-DD-Systems $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_C})$ bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz.	71
5.6	Fehler $ S_{12} - S_{12}^{ref} $ im Transmissionsparameter in Abhängigkeit des Netzparameters h bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz.	76
5.7	Relatives Residuum $\ r\ _2$ des GMRES-Lösers in Abhängigkeit des Kopplungoperators $\mathcal{B}_X, X \in \{1, TE, TM, C\}$	78
5.8	Relatives Residuum $\ r\ _2$ des GMRES-Lösers in Abhängigkeit der Iterationszahl für unterschiedliche Netzfeinheiten h bei $f = 10$ GHz sowie $p = 2$	79
5.9	Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_X}), X \in \{1, TE, TM, C\}$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei $f = 10$ GHz.	80
5.10	Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_X}), X \in \{1, TE, TM, C\}$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei $f = 10$ GHz.	81
5.11	Benötigte Iterationszahl zum Erreichen eines relativen Residuum von $\ r\ _2 = 10^{-8}$ in Abhängigkeit der Netzfeinheit h	82
5.12	Betrag des relativen Residuums $\ r\ _2$ in Abhängigkeit der Iterationszahl bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz, $N_D = 40$ und $h = \frac{\lambda}{16}$	84
5.13	Benötigte Iterationszahl zum Erreichen eines relativen Residuum von $\ r\ _2 = 10^{-8}$ in Abhängigkeit der elektrischen Größe der Struktur bei $f = 10$ GHz und $h = \frac{\lambda}{16}$	84
5.14	Betrag des relativen Residuums $\ r\ _2$ in Abhängigkeit der Iterationszahl für $f = 10$ GHz und $h = \frac{\lambda}{16}$	85
5.15	Spektrum $\sigma(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathcal{B}_X}), X \in \{1, TE, TM, C\}$ des vorkonditionierten FE-DD-Systems bei $f = 10$ GHz für eine unterschiedliche Anzahl N_D an Teilgebieten.	86
5.16	Geometrie der Grobraumzerlegung bestehend aus ebenen Wellen.	89
5.17	Betrag des relativen Residuums in Abhängigkeit der Iterationszahl für eine unterschiedliche Anzahl N^ϕ an ebenen Wellen bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz und $N_D = 160$ Teilgebieten.	91
5.18	Spektrum $\sigma(\mathbf{P}_D \mathbf{A}_J^\Gamma)$ des vorkonditionierten FE-DD Systems bei $f = 10$ GHz für $N_D = 4$ Teilgebiete unter Berücksichtigung einer Grobraumkorrektur auf Basis ebener Wellen.	92

5.19 Benötigte Iterationszahl zum Erreichen eines relativen Residuums von $\ r\ _2 = 10^{-8}$ in Abhängigkeit der Dimension N_c des Grobraums sowie der elektrischen Größe der Struktur bei einer Frequenz von $f = 10$ GHz.	93
5.20 Geometrie und Anordnung der Teilgebiete	94
5.21 Richtcharakteristik des Gruppenstrahlers für unterschiedliche Anzahl an Antennenelementen N_A bei einer Betriebsfrequenz von $f = 8$ GHz.	95
6.1 Betrag des Reflexionsfaktors $\rho_{T_1}^{TE}$ bzw. $\rho_{T_1}^{TM}$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϕ	103
6.2 Betrag des Reflexionsfaktors $\rho_{T_{TE}}^{TE}$ bzw. $\rho_{T_{TE}}^{TM}$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϕ	105
6.3 Betrag des Reflexionsfaktors $\rho_{T_{TM}}^{TE}$ bzw. $\rho_{T_{TM}}^{TM}$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϕ	106
6.4 Betrag des Reflexionsfaktors $\rho_{T_C}^{TE}$ bzw. $\rho_{T_C}^{TM}$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϕ	108
6.5 Reflexionsfaktor sowie daraus abgeleitete Größen in Abhängigkeit des numerischen Brewster-Winkels ϕ_0	109
6.6 Vergleich des numerisch und analytisch berechneten Reflexionsfaktors in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϕ für $p = 2$ und $\frac{h}{\lambda} = \frac{1}{32}$	112
7.1 Vivaldi-Antenne: Geometrie der Antennengruppe. Alle Maße in mm. . .	121
7.2 Vivaldi-Antenne: Benötigte Iterationszahl des GMRES(30)-Lösers zum Erreichen des Abbruchkriteriums $\rho_{FE} = 10^{-6}$ in Abhängigkeit der ROM-Dimension N	122
7.3 Vivaldi-Antenne: Frequenzgang der reflektierten Welle für unterschiedlich lokalisierte Antennenelemente.	122
7.4 Vivaldi-Antenne: Antennengewinn in der Ebene $\phi = \frac{\pi}{2}$ für unterschiedliche Betriebsfrequenzen f	123
7.5 Patch Antenne: Geometrie und Anordnung der Teilgebiete	124
7.6 Patch Antenne: Benötigte Iterationszahl des GMRES(30)-Lösers zum Erreichen des Abbruchkriteriums $\rho_{FE} = 10^{-6}$ in Abhängigkeit der ROM-Dimension N	125

7.7 Patch Antenne: Frequenzgang der reflektierten Welle für unterschiedlich lokalisierte Antennenelemente.	125
7.8 Patch Antenne: Antennengewinn in der Ebene $\phi = \frac{\pi}{2}$ für unterschiedliche Betriebsfrequenzen f	126

Tabellenverzeichnis

5.1	Grenzfrequenzen eines WR-90 Rechteckwellenleiters.	58
5.2	Numerische Daten zur Simulation des Patch-Antennen-Gruppenstrahlers Matlab R2014a Prototype-Implementierung @ Intel Core i5-4570 CPU @ 3.2 GHz.	94
7.1	Vivaldi-Antenne: Numerische Daten*	121
7.2	Patch-Antenne: Numerische Daten*	124

Literaturverzeichnis

- [Ain04] M. Ainsworth. Dispersive properties of high-order nédélec/edge element approximation of the time-harmonic maxwell equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 362(1816):471–491, 2004.
- [BAG14] M. E. Bouajaji, X. Antoine, und C. Geuzaine. Approximate local magnetic-to-electric surface operators for time-harmonic maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 279:241 – 260, 2014.
- [BC01a] A. Buffa und P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to maxwell's equations part i: An integration by parts formula in lipschitz polyhedra. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(1):9–30, 2001.
- [BC01b] A. Buffa und P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to maxwell's equations part ii: Hodge decompositions on the boundary of lipschitz polyhedra and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(1):31–48, 2001.
- [Ber94] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2):185 – 200, 1994.
- [Bra02] D. Braess. Finite elements: Theory, fast solvers and applications in solid mechanics, 2nd edn. *Measurement Science and Technology*, 13(9):1500, 2002.
- [BS02] S. C. Brenner und L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Texts in applied mathematics. Springer, New York, Berlin, Paris, 2002.
- [BS08] S. C. Brenner und L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Band 15. Springer New York, New York, NY, 2008.
- [BT80] A. Bayliss und E. Turkel. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33(6):707–725, 1980.

- [CDJP97] P. Collino, G. Delbue, P. Joly, und A. Piacentini. A new interface condition in the non-overlapping domain decomposition method for the maxwell equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(1):195 – 207, 1997.
- [CHMR09] Chen, Yanlai, Hesthaven, Jan S., Maday, Yvon, und Rodríguez, Jerónimo. Improved successive constraint method based a posteriori error estimate for reduced basis approximation of 2d maxwell's problem. *ESAIM: M2AN*, 43(6):1099–1116, 2009.
- [DEPL00] R. Dyczij-Edlinger, G. Peng, und J.-F. Lee. Stability conditions for using tvfems to solve maxwell equations in the frequency domain. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 13(2-3):245–260, 2000.
- [Des91] B. Després. *Méthodes de décomposition de domaines pour les problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1991.
- [DGL⁺15] V. Dolean, M. J. Gander, S. Lanteri, J.-F. Lee, und Z. Peng. Effective transmission conditions for domain decomposition methods applied to the time-harmonic curl–curl maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 280(Supplement C):232 – 247, 2015.
- [DJER92] B. Despres, P. Joly, und J. E. Roberts. A domain decomposition method for the harmonic maxwell equations. 01 1992.
- [DJR92] B. Després, P. Joly, und J. E. Roberts. A domain decomposition method for the harmonic Maxwell equations. In *Iterative methods in linear algebra (Brussels, 1991)*, S. 475–484, Amsterdam, 1992. North-Holland.
- [dlRRM09] V. de la Rubia, U. Razafison, und Y. Maday. Reliable fast frequency sweep for microwave devices via the reduced-basis method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 57(12):2923–2937, Dec 2009.
- [DP98] L. Demkowicz und M. Pal. An infinite element for maxwell's equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164(1):77 – 94, 1998. Exterior Problems of Wave Propagation.
- [EG04] A. Ern und J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, 2004.
- [EM77] B. Engquist und A. Majda. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5):1765–1766, 1977.

- [EN08] Y. A. Erlangga und R. Nabben. Deflation and balancing preconditioners for krylov subspace methods applied to nonsymmetric matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 30(2):684–699, 2008.
- [FHMS11] M. Fares, J. S. Hesthaven, Y. Maday, und B. Stamm. The reduced basis method for the electric field integral equation. *J. Comput. Phys.*, 230(14):5532–5555, June 2011.
- [GZL06] F. Gundes, K. Zhao, und J.-F. Lee. Implementation of higher order absorbing boundary conditions in vector finite element methods. In *2006 12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, S. 400–400, 2006.
- [Hac85] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*, Band 4. 01 1985.
- [Har01a] R. Harrington. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. Wiley, 2001.
- [Har01b] R. F. Harrington. *Time-harmonic electromagnetic fields*. IEEE press series on electromagnetic wave theory. J. Wiley and sons New York Chichester Weinheim, Piscataway, NJ, 2001.
- [Hip02] R. Hiptmair. Finite elements in computational electromagnetism. 21:237–, 01 2002.
- [HSZ14] Hesthaven, Jan S., Stamm, Benjamin, und Zhang, Shun. Efficient greedy algorithms for high-dimensional parameter spaces with applications to empirical interpolation and reduced basis methods. *ESAIM: M2AN*, 48(1):259–283, 2014.
- [IB95] F. Ihlenburg und I. Babuška. Dispersion analysis and error estimation of galerkin finite element methods for the helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(22):3745–3774, 1995.
- [Ihl13] F. Ihlenburg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2013.
- [Ing06] P. Ingelström. A new set of $H(\text{curl})$ -conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 54:106–114, 2006.
- [Kik89] F. Kikuchi. On a discrete compactness property for the nedelec finite elements. 36, 01 1989.
- [LT04] J. Liesen und P. Tichý. Convergence analysis of krylov subspace methods. *GAMM-Mitteilungen*, 27(2):153–173, 2004.

- [LTV17] D. Lahaye, J. Tang, und C. Vuik. *Modern Solvers for Helmholtz Problems*. Geosystems Mathematics. Birkhauser, Basel, 2017.
- [MD01] P. Monk und L. Demkowicz. Discrete compactness and the approximation of maxwell's equations in three dimension. *Mathematics of Computation*, 70(234):507–523, 2001.
- [Mon03] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [MP94] P. B. Monk und A. K. Parrott. A dispersion analysis of finite element methods for maxwell's equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(4):916–937, 1994.
- [MP96] M. MALHOTRA und P. M. PINSKY. A matrix-free interpretation of the non-local dirichlet-to-neumann radiation boundary condition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(21):3705–3713, 1996.
- [Mur81] G. Mur. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, EMC-23(4):377–382, Nov 1981.
- [MvdV77] J. A. Meijerink und H. A. van der Vorst. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric m -matrix. *Mathematics of Computation*, 31(137):148–162, 1977.
- [Né01] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, 2001.
- [PL12] Z. Peng und J.-F. Lee. A scalable nonoverlapping and nonconformal domain decomposition method for solving time-harmonic maxwell equations in three dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(3):A1266–A1295, 2012.
- [PR06] A. T. Patera und G. Rozza. *Reduced Basis Approximation and A Posteriori Error Estimation for Parametrized Partial Differential Equations*. Version 1.0, Copyright MIT 2006-2007. 2006. to appear in (tentative rubric) MIT Pappalardo Graduate Monographs in Mechanical Engineering.
- [PRL10] Z. Peng, V. Rawat, und J.-F. Lee. One way domain decomposition method with second order transmission conditions for solving electromagnetic wave problems. *Journal of Computational Physics*, 229(4):1181 – 1197, 2010.

- [QV99] A. Quarteroni und A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Numerical mathematics and scientific computation. Clarendon Press, 1999.
- [RGG06] A. A. Rodriguez und L. Gerardo-Giorda. New nonoverlapping domain decomposition methods for the harmonic maxwell system. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(1):102–122, 2006.
- [RL07] V. Rawat und J.-F. Lee. Treatment of cement variables in the domain decomposition method for maxwell's equations. In *2007 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, S. 5937–5940, June 2007.
- [RL10] V. Rawat und J.-F. Lee. Nonoverlapping domain decomposition with second order transmission condition for the time-harmonic maxwell's equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(6):3584–3603, 2010.
- [Saa03] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2nd, 2003.
- [SBG96] B. F. Smith, P. E. Bjørstad, und W. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996.
- [SFDE15] A. Sommer, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Certified dual-corrected radiation patterns of phased antenna arrays by offline–online order reduction of finite-element models. *Journal of Computational Physics*, 299(Supplement C):22 – 44, 2015.
- [SLC01] D.-K. Sun, J.-F. Lee, und Z. Cendes. Construction of nearly orthogonal nedelec bases for rapid convergence with multilevel preconditioned solvers. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(4):1053–1076, 2001.
- [SS86] Y. Saad und M. H. Schultz. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3):856–869, 1986.
- [TB97] L. N. Trefethen und D. Bau. *Numerical linear algebra*. SIAM, 1997.
- [TS01] U. Trottenberg und A. Schuller. *Multigrid*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 2001.
- [TW05] A. Toselli und O. B. Widlund. *Domain decomposition methods: algorithms and theory*, Band 34. Springer, 2005.
- [Wat15] A. J. Wathen. Preconditioning. *Acta Numerica*, 24:329–376, 2015.

- [Wer07] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [Wid09] O. B. Widlund. The development of coarse spaces for domain decomposition algorithms. *Domain Decomposition methods in science and engineering XVIII*, S. 241–248, 2009.
- [WK89] J. P. Webb und V. N. Kanellopoulos. Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2(10):370–372, 1989.