
**Identifikation der Verzerrungsenergiedichte
hyperelastischer Materialien aus zeitabhängigen
Randmessungen**

Dissertation

zur Erlangung des Grades des
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät Mathematik und Informatik
der Universität des Saarlandes

eingereicht im April 2017
in Saarbrücken

von

Julia Seydel

Tag des Kolloquiums: 14.07.2017

Mitglieder des Prüfungsausschusses:

Vorsitzender: Professor Dr. Mark Groves

1. Berichterstatter: Professor Dr. Thomas Schuster

2. Berichterstatter: Professor Dr. Sergej Rjasanow

Protokollführer: Dr. Steffen Weißer

Dekan: Professor Dr. Frank-Olaf Schreyer

Zusammenfassung

Das Thema dieser Arbeit ist die Rekonstruktion der räumlich variablen Verzerrungsenergiedichte eines hyperelastischen Materials aus zeitabhängigen Randmessungen. Dies ist auch im Zusammenhang mit der Schadensdetektion bei Strukturen aus derartigen Materialien sehr interessant, da die Verzerrungsenergiedichte alle mechanischen Eigenschaften des Materials enthält. Mathematisch handelt es sich um eine Parameteridentifikation bei einem System von zeitabhängigen, nichtlinearen Differentialgleichungen und damit um ein nichtlineares, dynamisches, inverses Problem.

Das finale Ziel dieser Arbeit ist es ein Verfahren auf Grundlage des Landweber-Verfahrens zu entwickeln, um dieses Problem numerisch zu lösen. Dazu wird gezeigt, dass der entsprechende Vorwärtsoperator Fréchet-differenzierbar ist und die Fréchet-Ableitung die eindeutige Lösung eines linearen Anfangs-Randwertproblems darstellt. Außerdem wird eine Darstellung der Adjungierten der Fréchet-Ableitung angegeben. Unter der Annahme der Darstellbarkeit der Verzerrungsenergiedichte als konische Kombination endlich vieler Funktionen eines Dictionaries ist das Aufstellen eines geeigneten, derartigen Dictionaries ebenso Bestandteil dieser Arbeit. Anschließend wird gezeigt, dass das betrachtete Identifikationsproblem die lokale Kegelbedingung erfüllt und somit das gedämpfte Landweber-Verfahren zur Lösung dieses Problems lokal konvergiert. Schließlich wird das entwickelte Verfahren an diversen Beispielen getestet.

Abstract

The topic of this thesis is the reconstruction of the spatially variable stored energy function of hyperelastic materials from time-dependent boundary measurements. In connection with the detection of damages in structures consisting of such materials this problem is really interesting because all mechanical properties are hidden in the stored energy function. The mathematical model is a parameter identification for a system of time-dependent, nonlinear differential equations. That means it belongs to the class of nonlinear, dynamic, inverse problems. The major objective of this thesis is the development of an algorithm based on the damped Landweber method to solve the problem numerically. Therefore, it will be proven that the appropriate forward operator is Fréchet differentiable and that the Fréchet derivative represents the unique solution of a linear initial boundary value problem. In addition, a representation for the adjoint of the Fréchet derivative will be given. Under the assumption that we have a dictionary at hand so as to the stored energy function is given as a conic combination of the dictionary's elements the specific choice of such functions is another emphasis of this thesis. Afterwards it will be proven that the considered identification problem fulfills the local tangential cone condition and therefore the damped Landweber method for solving the problem converges locally. Finally, the algorithm is tested with several examples.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit während meiner Zeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Numerische Mathematik der Universität des Saarlandes tatkräftig unterstützt haben:

Ganz besonders möchte ich mich bei Prof. Dr. Thomas Schuster bedanken. Er gab mir nicht nur die Möglichkeit mich mit diesem sehr interessanten Forschungsthema auseinanderzusetzen, sondern hat durch die fachliche Betreuung und vielseitige Unterstützung maßgeblich zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Prof. Dr. Sergej Rjasanow danke ich für die Erstellung des Zweitgutachtens.

Des Weiteren möchte ich auch der gesamten Arbeitsgruppe und deren ehemaligen Mitgliedern ein großes Dankeschön aussprechen. Jeder von ihnen hat mit sowohl fachlichen, als auch privaten Gesprächen dafür gesorgt, dass das Arbeitsumfeld stets angenehm und freundschaftlich war. Abgesehen davon gab es auch viele schöne Momente, die wir gemeinsam erlebt haben und die ich gerne im Zusammenhang mit meiner Promotionszeit in Erinnerung behalten werde. Insbesondere danke ich M.Sc. Dipl.-Phys. Anne Wald, Dr. Udo Schröder und Dr. Frederik Heber für das Korrekturlesen.

Schließlich möchte ich meinen Eltern für ihre Unterstützung und ihren Glauben an mich nicht nur während der Promotion, sondern auch während des Studiums, ganz herzlich danken. Abschließend gilt ein besonderer Dank meinem Mann Christoph für seine kontinuierliche Unterstützung und Geduld, aber auch dafür, dass er mir damals bei der Suche nach einer Doktorandenstelle die Möglichkeit gab den Radius zu vergrößern und mich auf diesem Weg begleitet hat.

Julia Seydel

Saarbrücken, 28. April 2017

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	i
Abstract	ii
1 Einführung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Zielsetzung	3
1.3 Gliederung der Arbeit	5
2 Hyperelastizität in der Kontinuumsmechanik	7
2.1 Grundbegriffe	7
2.2 Erhaltungssätze	9
2.3 Das Theorem von Cauchy	14
2.4 Elastische Materialien	28
2.4.1 Objektivität	29
2.4.2 Hyperelastische Materialien	31
3 Mathematische Modellierung des inversen Problems	38
4 Fréchet-Ableitung des Vorwärtsoperators	41
4.1 Voraussetzungen und Hilfsresultate	41
4.1.1 Voraussetzungen	41
4.1.2 Hilfsresultate	43
4.2 Die Fréchet-Ableitung des Lösungsoperators	49
4.3 Die Adjungierte der Fréchet-Ableitung	73
4.4 Die Kegelbedingung	78
5 Bestimmung eines geeigneten Dictionaries für die Verzerrungsenergiedichte	87
5.1 Konvexität der Verzerrungsenergiedichte	88

5.2	Alternative Konvexitätsbegriffe	90
5.3	Polykonvexe Verzerrungsenergiedichten	98
5.4	Isotrope Materialien	100
5.4.1	Inkompressible, isotrope, hyperelastische Materialien	104
5.4.2	Kompressible, isotrope, hyperelastische Materialien	109
6	Numerische Realisierung und Ergebnisse	116
6.1	Das Materialmodell	116
6.1.1	Der Messaufbau	117
6.1.2	Wahl der ortsabhängigen Funktionen	118
6.1.3	Ableitungen der Verzerrungsenergiedichte	121
6.1.4	Zusammenfassung: Die konische Kombination für die Verzerrungs- energiedichte	123
6.2	Das Verfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems	125
6.2.1	Die Herleitung des Verfahrens	125
6.2.2	Das vollständige Verfahren für das Vorwärtsproblem	136
6.3	Das Verfahren zur Lösung des adjungierten Problems	137
6.3.1	Die Herleitung des Verfahrens	137
6.3.2	Das vollständige Verfahren für das adjungierte Problem	140
6.4	Der Beobachtungsoperator	141
6.5	Das Verfahren zur Lösung des Identifikationsproblems	143
6.5.1	Nichtlineares (gedämpftes) Landweber-Verfahren	143
6.5.2	Konvergenz des gedämpften Landweber-Verfahren	145
6.5.3	Das vollständige Verfahren für das Identifikationsproblem	148
6.6	Numerische Ergebnisse	151
6.6.1	Numerische Umsetzung	152
6.6.2	Numerische Experimente	156
7	Fazit und Ausblick	162
	Anhang	164
A.1	Differentialrechnung	165
A.2	Geometrie	168
A.3	Lineare Algebra	169
	Literaturverzeichnis	170

Abbildungsverzeichnis

2.1	Skizze des Simplex	19
6.1	Skizze der Platte mit den beiden Schichten	117
6.2	Faktorfunktionen für die Anregung der Platte	154
6.3	Die drei Schadensszenarien	155
6.4	Skizze der Platte in der x_2 - x_3 -Darstellung	155
6.5	Die Ergebnisse aus Experiment 1	157
6.6	Die Ergebnisse aus Experiment 2	158
6.7	Der Einfluss des Rauschens auf das Verschiebungsfeld	159
6.8	Die Ergebnisse aus Experiment 3	160
6.9	Die Ergebnisse aus Experiment 4	161
A.1	Simplex S	168

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation

In den letzten Jahrzehnten ist der Bedarf an alternativen Leichtbaumaterialien beispielsweise im Bereich der Luft- und Raumfahrttechnik aber auch des Bauingenieurwesens und Maschinenbaus stark angestiegen, um in Zukunft den Herausforderungen der Energie- und Materialeffizienz entgegenzutreten und gleichzeitig die Leistungsfähigkeit und Produktivität der aus dem entsprechenden Material bestehenden Komponenten beziehungsweise Systemen zu erhöhen. Zu den Leichtbaumaterialien gehört unter anderem die Klasse der sogenannten Faserverbundwerkstoffe, die zum Beispiel kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe (CFK) und glasfaserverstärkte Kunststoffe (GFK) beinhaltet. Das Buch [Ehr06] gibt einen guten Überblick über diese Klasse von Materialien. Des Weiteren zählen beispielsweise [Sch05] und [FZR96] zu den Standardwerken, wenn es um die Konstruktion mit Faserverbundwerkstoffen geht.

Der Name legt bereits nahe, dass das hauptsächliche Ziel der Leichtbauweise die Konstruktion eines Bauteils mit maximal möglicher Gewichtseinsparung ist. Allerdings ist es mithilfe von Leichtbaumaterialien auch unter anderem möglich mehrere Bauteilfunktionen in ein Bauteil zu integrieren und die Dynamik und Steifigkeit von Komponenten oder auch Systemen zu verbessern. Somit stellt die Leichtbauweise für die Industrie neben der Möglichkeit zur Gewichtseinsparung und den damit verbundenen Folgen, wie Reduzierung von Rohstoffen, Kosten und Energie bei der Nutzung des Systems, auch eine Chance zur Realisierung von neuen Anwendungen sowie neuartigen Eigenschaften von Systemen dar. Darüber hinaus können Leichtbaumaterialien sich widersprechende Anforderungen erfüllen. Beispielsweise lässt sich durch die Leichtbauweise der Kraftstoffverbrauch bei Fahrzeugen reduzieren, sodass es heutzutage Autos gibt, die trotz höherer Fahrzeugsicherheit

mit einem Kraftstoffverbrauch von nur 3l/100km fahren können. Somit beschränkt sich das große Ziel der Leichtbauweise nicht nur auf einen einzelnen Faktor, wie der Gewichtsreduktion, sondern man ist vielmehr interessiert an einem Gesamtoptimum sowohl im technologischen, als auch im ökonomischen und ökologischen Sinn.

Allerdings bringt die Leichtbauweise auch Nachteile mit sich. Zum Beispiel haben die eingesetzten Bauteile von vornherein eine begrenzte Lebensdauer. Diese hängt davon ab, welchen Belastungen die Struktur beziehungsweise das System im Laufe der Zeit ausgesetzt wird. So können äußere Einflüsse, wie Vogelschlag, Materialermüdung, Korrosion und viele weitere, zu Schädigungen in den Leichtbauteilen führen. Diese Schäden treten häufig innerhalb der Struktur auf und sind somit von außen nicht sichtbar. Dies spielt vor allem dann eine Rolle, wenn man speziell Lamine betrachtet. Lamine bestehen meistens aus mehreren Schichten von Faserhalbzeugen, welche eine Zusammenfassung von mehreren Fasern in Form von beispielsweise Geweben, Geflechtes oder Vliesstoffen darstellen. Im Fall eines Laminats kann es dann durch kurzzeitige Einwirkung einer äußeren Kraft, wie zum Beispiel einer Schlagbelastung, dazu kommen, dass sich einzelne Schichten voneinander lösen. Dies nennt man dann Delamination. Eine ausführlichere Einführung in die Leichtbauweise findet man unter anderem in [Kle07].

Da das Versagen eines Bauteils während des Betriebs verheerende Folgen für das gesamte System haben kann, ist es essentiell wichtig für die Leichtbauweise, dass zuverlässige und kostengünstige Methoden zur Lokalisierung von Schadstellen zur Verfügung stehen. Eine Möglichkeit zur Überprüfung einer Struktur, wie beispielsweise einer Laminatkonstruktion, auf Schäden ist die Ortung einer Schädigung durch Ultraschallwellen mithilfe eines in die Struktur integrierten Netzwerks aus Piezoaktuatoren und -sensoren. In plattenähnlichen Strukturen, die neben schalenähnlichen Strukturen oft den Hauptbestandteil von Leichtbaukonstruktionen darstellen, werden dabei üblicherweise sogenannte geführte Wellen eingesetzt. Geführte Wellen sind elastische Wellen, welche durch die Ränder der Struktur entlang dieser geführt werden. Somit sind sie Wellen, die der Bewegungsgleichung für elastische Materialien genügen. Sie erhalten ihren speziellen Charakter durch die Begrenzung des betrachteten Gebiets und der Randbedingung, welches meistens Spannungsfreiheit am Rand ist. Ein wichtiges Beispiel für geführte Wellen sind Lamb-Wellen. Insgesamt stellt ein in die Struktur integrierte Netzwerk aus Piezoaktuatoren und -sensoren ein sogenanntes Structural Health Monitoring (SHM)-System dar, da damit eine kontinuierliche und automatisierte Überwachung des Zustands der Struktur möglich ist. Ausführliche Erläuterungen über geführte Wellen und insbesondere Structural Health Monitoring findet man in [Giu08].

1.2 Zielsetzung

Die wesentliche Aufgabe der Schadenslokalisierung besteht darin die mechanischen Eigenschaften des Materials zu identifizieren. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir dazu sogenannte hyperelastische Materialien. Die Klasse der hyperelastischen Materialien beinhaltet neben beispielsweise isotropen Materialien, Mooney-Rivlin-Materialien oder Neo Hookesche Materialien auch die für die Leichtbauweise interessanten, kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffe. In der sogenannten Verzerrungsenergiedichte eines hyperelastischen Materials sind alle mechanischen Eigenschaften dieses Materials enthalten. Aus diesem Grund und unter der Annahme, dass die Verzerrungsenergiedichte räumlich variabel ist, sollte ihre Identifizierung hervorragend geeignet sein für die Schadensdetektion bei Strukturen, die aus solchen Materialien bestehen. Die Aufgabenstellung der Identifikation der Verzerrungsenergiedichte und somit der Rekonstruktion der Materialeigenschaften aus piezokeramischen Messungen, die auf dem Rand der Struktur vorgenommen werden, lässt sich dann der Theorie der inversen Probleme zuordnen. Die piezokeramischen Sensoren können dabei durch geeignete Randintegrale modelliert werden.

Mittlerweile gibt es zahllose Arbeiten, die sich mit den verschiedensten inversen Problemen in elastischen Medien auseinandersetzen. Dabei variieren diese teilweise oft sehr stark aufgrund der Annahme unterschiedlicher Randbedingungen, Messdaten und Materialmodelle. Eine umfassende Übersicht über verschiedene inverse Probleme im Bereich der Elastizitätstheorie bietet der Artikel [BC05].

Die Grundlage unseres Modells bildet die Cauchysche Bewegungsgleichung der Kontinuumsmechanik für hyperelastische Materialien, ausgestattet mit geeigneten Anfangs- und Randwerten. Dabei treffen wir für dieses nichtlineare Modell der Wellenausbreitung die Annahme, dass wir die Verzerrungsenergiedichte als eine konische Kombination endlich vieler, fest vorgegebener Funktionen schreiben können. Für diesen Fall wird in [SW14] gezeigt, dass dann das inverse Problem der Rekonstruktion der Verzerrungsenergiedichte aus piezokeramischen Ultraschallmessungen unter gewissen Bedingungen eindeutig lösbar ist und die Lösung stetig sowohl von den Messdaten als auch von den Anfangswerten der Struktur abhängig ist. Diese Ergebnisse basieren auf dem Artikel [KL07], wobei das dort behandelte Modell entscheidend erweitert wurde. Unter anderem wird zugelassen, dass die Verzerrungsenergiedichte räumlich variabel ist und somit inhomogene Körper durch das Modell erfasst werden können. Dies ist auch zwingend erforderlich, um Schadstellen im Material, die wir uns als örtliche Änderung der Verzerrungsenergiedichte vorstellen wollen, modellieren zu können. Des Weiteren wird in [WS15] gezeigt, dass unter den

bereits genannten Annahmen und begründeten Glattheitsbedingungen für das Verschiebungsfeld und den Rand des betrachteten Gebiets das Vorwärtsproblem, ein nichtlineares Anfangs-Randwertproblem, eindeutig lösbar ist und die Lösung stetig von den Anfangswerten abhängt. Das sogenannte Verschiebungsfeld stellt dabei gerade eine Lösung der Cauchyschen Bewegungsgleichung dar.

Aufbauend auf den Artikeln [SW14] und [WS15] wollen wir in dieser Arbeit das inverse Problem der Identifikation der Verzerrungsenergiedichte, die räumlich variabel sei, aus zeitabhängigen Randwerten zunächst weiter analysieren. Dazu nehmen wir an, dass wir einen Dictionary an Verzerrungsenergiedichten gegeben haben, sodass wir die Verzerrungsenergiedichte darstellen können als eine konische Kombination von Elementen dieses Dictionaries. In diesem Fall können wir den Lösungsoperator des Vorwärtsproblems, auch Vorwärtsoperator genannt, auffassen als den nichtlinearen Operator, der den Vektor der Koeffizienten der konischen Kombination für die Verzerrungsenergiedichte abbildet auf die Lösung der Cauchyschen Bewegungsgleichung für hyperelastische Materialien. Eine Hauptaufgabe dieser Arbeit besteht darin die Fréchet-Ableitung dieses Lösungsoperators und die Adjungierte dieser Ableitung zu bestimmen, beziehungsweise zu zeigen, dass der Lösungsoperator des Vorwärtsproblems überhaupt Fréchet-differenzierbar ist. Der Artikel [KR14] kann dabei in gewissem Sinne gesehen werden als ein Analogon für die akustische Wellengleichung.

Die Kenntnis der Fréchet-Ableitung und ihrer Adjungierten spielt unter anderem dann eine entscheidende Rolle, wenn man das inverse Problem der Identifikation der Verzerrungsenergiedichte iterativ beispielsweise mithilfe des Landweber-Verfahrens lösen möchte. Unter der Annahme der Darstellbarkeit der Verzerrungsenergiedichte als konische Kombination müssen wir dazu allerdings vorher noch ein geeignetes Dictionary aus physikalisch sinnvollen Funktionen für die Elemente in der konischen Kombination erstellen, was ebenso Bestandteil dieser Arbeit ist. Eine weitere Hauptaufgabe dieser Arbeit liegt dann darin, aufbauend auf den Ergebnissen in [BSS15] ein Verfahren zur Lösung des inversen Problems zu entwickeln. Im Unterschied zu unserem Problem ist das in [BSS15] vorgestellte inverse Problem allerdings ein lineares Problem, genauer gesagt bildet dort die inhomogene, linearisierte Cauchysche Bewegungsgleichung für ein anisotropes Material die Grundlage des Modells. Dabei stellt die Inhomogenität die externe (zeitlich und räumlich variable) Volumenkraftdichte dar. Die Idee in dem genannten Artikel ist dann Schädigungen der Struktur als Einwirkung externer Volumenkräfte zu deuten und somit das inverse Problem der Rekonstruktion der externen Volumenkraftdichte aus den gegebenen Randmessungen zu betrachten.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wurden auch in den beiden Artikeln [SS16] und [SS17] veröffentlicht.

1.3 Gliederung der Arbeit

Um die im letzten Abschnitt genannten Ziele zu erreichen, wollen wir in dieser Arbeit folgendermaßen vorgehen:

In Kapitel 2 stellen wir die benötigten Grundlagen der Kontinuumsmechanik vor. Dabei wollen wir insbesondere auf den Begriff der Hyperelastizität eingehen, um schließlich die Cauchy'sche Bewegungsgleichung für hyperelastische Materialien herzuleiten. Diese wird anschließend in Kapitel 3 dazu verwendet unser inverses Problem der Rekonstruktion der Verzerrungsenergiedichte aus Randmessungen mathematisch zu modellieren.

In Kapitel 4 wird danach die Fréchet-Ableitung des Vorwärtsoperators und deren Adjungierte behandelt. Dabei wird dieses Kapitel von dem Beweis der Aussage, dass der Vorwärtsoperator tatsächlich Fréchet-differenzierbar ist, dominiert.

Die Aufgabe von Kapitel 5 besteht im Wesentlichen darin ein geeignetes Dictionary für die Verzerrungsenergiedichte zu bestimmen. Zunächst wird gezeigt, dass die Forderung nach Konvexität der Verzerrungsenergiedichte physikalisch nicht sinnvoll ist. Aus diesem Grund werden anschließend alternative Konvexitätsbegriffe vorgestellt insbesondere der der Polykonvexität. Darauf aufbauend werden verschiedene polykonvexe Verzerrungsenergiedichten angegeben, da sich diese Einschränkung als geeignet zeigt. Schließlich werden im zweiten Teil des Kapitels einige Verzerrungsenergiedichten von isotropen, hyperelastischen Materialien vorgestellt und auf Polykonvexität untersucht.

Somit haben wir dann alles zusammen, um in Kapitel 6 ein Verfahren zur Lösung unseres Identifikationsproblems vorzustellen. Als Grundlage dafür dient das (gedämpfte) Landweber-Verfahren. Bevor darauf allerdings eingegangen wird, müssen noch jeweils ein Verfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems und des adjungierten Problems hergeleitet werden. Der Unterschied ist dabei neben der Zeitrichtung, dass wir beim Vorwärtsproblem im Gegensatz zum adjungierten Problem ein nichtlineares, partielles Differentialgleichungssystem lösen müssen. Am Ende des Kapitels werden schließlich die daraus resultierenden numerischen Ergebnisse für ein spezielles Materialmodell präsentiert, wobei ein Neo Hooksches Material betrachtet wird.

Abschließend werden in Kapitel 7 noch die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Außerdem weisen wir auf mögliche Schwerpunkte und interessante Fragestellungen für

die weiteren Forschungstätigkeiten hin.

Kapitel 2

Hyperelastizität in der Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik stellt die Grundlage unseres Modells dar. In diesem Kapitel wollen wir die daraus stammenden und benötigten Begriffe einführen und erläutern, um schließlich das in dieser Arbeit betrachtete Modell zur Ausbreitung von Wellen in hyperelastischen Materialien herzuleiten. Die Begrifflichkeiten entstammen dabei hauptsächlich [Hol00] und [Cia88], die auch darüber hinaus sehr umfangreiche Werke über Kontinuumsmechanik darstellen.

2.1 Grundbegriffe

In dieser Arbeit betrachten wir ausschließlich den Raum \mathbb{R}^3 mit einer fest gewählten Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$, da uns dieser auch in Hinblick auf Anwendungen am interessantesten erscheint. Wir nehmen an, dass eine beschränkte, offene, zusammenhängende Teilmenge Ω des \mathbb{R}^3 mit einem hinreichend glatten Rand existiert. Außerdem sei die Menge Ω die Darstellung eines nicht deformierten Körpers. In diesem Fall wird die Menge Ω Referenzkonfiguration genannt und wir treffen die Annahme, dass der Körper gerade zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Referenzkonfiguration vorliegt. Dann lässt sich eine Bewegung des Körpers folgendermaßen definieren.

Definition 2.1. Eine *Bewegung* eines Körpers Ω ist eine invertierbare, stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, die orientierungserhaltend ist, das heißt, es gilt

$$\det(\nabla\varphi(t, X)) > 0 \quad \forall (t, X) \in [0, T] \times \Omega,$$

wobei

$$F(t, X) := \nabla \varphi(t, X) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(t, X) \right)_{i,j=1,2,3} = (\partial_{X_j} \varphi_i(t, X))_{i,j=1,2,3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

die Funktionalmatrix ist. Eine Bewegung eines Körpers, die unabhängig von der Zeit ist, nennt man eine *Deformation* eines Körpers. Die Matrix $F(t, X) = \nabla \varphi(t, X) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $(t, X) \in [0, T] \times \Omega$, wird auch oft *Deformationsgradient* genannt.

Aufgrund dieser Definition einer Bewegung ist gewährleistet, dass der Körper nicht zerrissen wird und infolge der Invertierbarkeit der Abbildung φ lassen sich die Punkte zu jedem Zeitpunkt unterscheiden. Die Forderung, dass die Determinante der Funktionalmatrix positiv ist, stellt sicher, dass das Vorzeichen positiver Volumen unter einer Deformation gleich bleibt und sich damit die Materie nicht selbst durchdringt. Falls eine Referenzkonfiguration Ω und eine Bewegung $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben sind, so nennt man die Menge $\Omega(t) := \varphi(t, \Omega)$ Momentankonfiguration zu einem Zeitpunkt $t > 0$. Dann bezeichnen wir die Punkte in der Momentankonfiguration mit $x \in \Omega(t)$ und es gilt $x = \varphi(t, X)$. Dabei werden die Komponenten des Vektors $x = (x_1, x_2, x_3)$ auch als Eulersche oder aktuelle Koordinaten bezeichnet im Gegensatz zu den Komponenten des Vektors $X = (X_1, X_2, X_3)$, die man Lagrangesche Koordinaten oder Materialkoordinaten nennt. Außerdem verwenden wir im Folgenden jeweils für den Abschluss von Ω , $\Omega(t)$ beziehungsweise einer Teilmenge $B(t) \subset \Omega(t)$ die Bezeichnungen $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}(t)$ und $\bar{B}(t)$.

Mithilfe der Definition 2.1 kann man auch das Verschiebungsfeld $U : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren, welches ebenfalls eine Charakterisierung zur Beschreibung des aktuellen Zustands des Körpers darstellt.

Definition 2.2. Sei $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Bewegung. Dann ist $U : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$U(t, X) = \varphi(t, X) - X$$

das *Verschiebungsfeld in der materiellen Beschreibung* (Lagrangeschen Form).

Mit anderen Worten stellt das Verschiebungsfeld die Differenz zwischen der aktuellen Position eines materiellen Punktes und dessen Position in der Referenzkonfiguration dar. Analog dazu kann man aber auch das Verschiebungsfeld in Abhängigkeit von der Position eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration definieren.

Definition 2.3. Sei $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Bewegung. Dann stellt $u : [0, T] \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$

mit

$$u(t, x) = x - \varphi^{-1}(t, x)$$

das *Verschiebungsfeld in der räumlichen Beschreibung* (Eulersche Form) dar.

Aufgrund des Zusammenhangs $x = \varphi(t, X)$ kann man leicht sehen, dass $U(t, X) = u(t, x)$ gilt. Somit haben die Funktionen u beziehungsweise U für die beiden Beschreibungen eines Verschiebungsfeldes zwar unterschiedliche Definitionsbereiche, aber sie liefern die gleichen Werte. Das Verschiebungsfeld kann man, wie wir das auch schon für die Bewegung gesehen haben, nach den Ortskoordinaten differenzieren.

Definition 2.4. Sei $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Bewegung und U das zugehörige Verschiebungsfeld in der materiellen Beschreibung. Dann heißt

$$\nabla U(t, X) := (\partial_{X_j} U_i(t, X))_{i,j=1,2,3} = F(t, X) - I$$

der *Verschiebungsgradient in materieller Darstellung*, wobei I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist.

Oftmals betrachtet man auch den Tensor $C := F^\top F$ beziehungsweise den Green- Lagrangeschen Verzerrungstensor $E := \frac{1}{2}(F^\top F - I)$, da eine Deformation, für die $F^\top F = I$ gilt, gerade eine Starrkörperbewegung beschreibt. Diese Definitionen und weitere Erläuterungen dazu findet man beispielsweise in [Hol00] und [Cia88]. Bevor wir zu den Erhaltungsgleichungen für verschiedene Größen, wie dem Impuls, kommen, die notwendig sind zur Herleitung unseres Modells, wollen wir das Geschwindigkeitsfeld im Zusammenhang mit einer Bewegung φ definieren.

Definition 2.5. Sei $\varphi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Bewegung. Dann heißt die zeitliche Ableitung $V(t, X) := \partial_t \varphi(t, X)$ der Bewegung für festes $X \in \Omega$ *materielle Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes*. Die vektorwertige Funktion $v(t, x) := V(t, \varphi^{-1}(t, x)) = V(t, X)$ nennt man *räumliche Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes*.

2.2 Erhaltungssätze

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik erläutern. Dabei versteht man unter den Erhaltungssätzen keine Sätze im mathematischen Sinn, sondern vielmehr physikalische Axiome, aus denen Vorhersagen über die

Verhaltensweise des entsprechenden Körpers beziehungsweise Materials abgeleitet werden können. Die für uns relevanten Erhaltungssätze sind die der Masse, des Impulses und des Drehimpulses. Diese Erhaltungsgrößen wollen wir zunächst definieren, wobei $\rho(t, \cdot) : \Omega(t) \rightarrow (0, \infty)$ die Massendichte sei.

Definition 2.6. Sei $\rho : [0, T] \times \Omega(t) \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar und $B(t) \subset \Omega(t)$ ein Teilvolumen. Dann heißt

(i)

$$m(t, B(t)) := \int_{B(t)} \rho(t, x) dx$$

Masse (von $B(t)$),

(ii)

$$I(t, B(t)) := \int_{B(t)} \rho(t, x)v(t, x) dx$$

Impuls und

(iii)

$$\Delta(t, B(t)) := \int_{B(t)} x \times \rho(t, x)v(t, x) dx$$

Drehimpuls um den Nullpunkt.

Das Axiom der Massenerhaltung lässt sich dann folgendermaßen definieren.

Axiom 1. (Massenerhaltung) Die Masse jedes Teilvolumens $B(t) \subset \Omega(t)$ ist unabhängig von der Zeit. Es gilt somit

$$\frac{d}{dt}m(t, B(t)) = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho(t, x) dx = 0$$

für alle $t \in [0, T]$.

Sei nun $B \subset \Omega$ und $B(t) := \varphi(t, B)$. Dann gilt mit

$$\varrho(t, X) := \rho(t, \varphi(t, X)) \det(F(t, X))$$

für alle $X \in B$

$$\int_{B(t)} \rho(t, x) dx = \int_B \rho(t, \varphi(t, X)) \det(F(t, X)) dX = \int_B \varrho(t, X) dX.$$

Aufgrund von Axiom 1 erhalten wir damit für alle $B \subset \Omega$

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho(t, x) dx = \int_B \partial_t \varrho(t, X) dX.$$

Da $B \subset \Omega$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus $\partial_t \varrho(t, X) = 0$ für alle $(t, X) \in [0, T] \times \Omega$ und somit hängt ϱ nicht von t ab. Dies führt auf die folgende Definition der Dichtefunktion in der Referenzkonfiguration Ω .

Definition 2.7. Die Größe

$$\varrho(X) := \rho(t, \varphi(t, X)) \det(F(t, X))$$

für alle $X \in \Omega$ heißt *Referenzdichte*.

Da wir diese später benötigen, wollen wir zunächst eine Aussage über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration bei Parameterintegralen einer speziellen Form zeigen. Allerdings wollen wir vorher noch zwei Ableitungsbegriffe definieren, die im weiteren Verlauf des Kapitels eine Rolle spielen.

Definition 2.8. Die Funktion $f = f(t, x) = f(t, \varphi(t, X))$ sei partiell differenzierbar nach t und x . Dann heißt die partielle Ableitung

$$\partial_t f(t, x) := \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$

lokale Ableitung nach der Zeit. Die totale Zeitableitung

$$\begin{aligned} d_t f(t, x) &:= \frac{df(t, \varphi(t, X))}{dt} = \partial_t f(t, x) + \nabla f(t, x) \partial_t \varphi(t, X) \\ &= \partial_t f(t, x) + \nabla f(t, x) v(t, x) \end{aligned}$$

wird als *materielle Ableitung nach der Zeit* bezeichnet.

Lemma 2.1. Sei eine glatte Funktion $\Phi : [0, T] \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Für jedes Teilvolumen $B \subset \Omega$ und $B(t) = \varphi(t, B)$ gilt dann

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho(t, x) \Phi(t, x) dx = \int_{B(t)} \rho(t, x) d_t \Phi(t, x) dx.$$

Beweis. Mithilfe von mehrfacher Anwendung des Transformationssatzes und der Definition 2.7 erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho(t, x) \Phi(t, x) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_B \rho(t, \varphi(t, X)) \Phi(t, \varphi(t, X)) \det(\nabla \varphi(t, X)) dX \\ &= \frac{d}{dt} \int_B \varrho(X) \Phi(t, \varphi(t, X)) dX \\ &= \int_B \varrho(X) d_t \Phi(t, \varphi(t, X)) dX \\ &= \int_B \rho(t, \varphi(t, X)) \det(\nabla \varphi(t, X)) d_t \Phi(t, \varphi(t, X)) dX \\ &= \int_{B(t)} \rho(t, x) d_t \Phi(t, x) dx. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1. Man kann sogar zeigen, dass die Aussage von Lemma 2.1 äquivalent zu Axiom 1 ist.

Beweis. Der Beweis von Lemma 2.1 und die Erläuterungen zur Definition 2.7 liefern, dass aus Axiom 1 die Aussage des Lemmas 2.1 folgt. Andererseits folgt, wenn man in Lemma 2.1 $\Phi \equiv 1$ wählt, das Axiom 1. □

Zur Formulierung der Impuls- und Drehimpulserhaltung müssen wir zunächst noch die auf einen Körper einwirkende Kräfte definieren. Diese beschreiben die Wirkung der Außenwelt auf den Körper. Dabei unterscheidet man prinzipiell zwei Arten von Kräften:

- (i) *Körperkräfte* (oder auch Volumenkräfte genannt), die durch eine massenbezogene Kraftdichte

$$f : [0, T] \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

der sogenannten *Volumenkraftdichte*, definiert werden. In diesem Fall heißt dann

$$F(t, B(t)) := \int_{B(t)} f(t, x) dx$$

Volumenkraft für $B(t) \subset \Omega(t)$. Beispiele hierfür sind die Gravitationskraft, aber auch Kräfte aus elektrischen oder magnetischen Feldern.

(ii) *Oberflächenkräfte*, die durch eine flächenbezogene Kraftdichte

$$g : [0, T] \times \partial\Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

der sogenannten *Oberflächenkraftdichte*, definiert werden. Dann nennt man

$$G(t, \omega(t)) := \int_{\omega(t)} g(t, x) d\sigma(x)$$

Oberflächenkraft, wobei $\omega(t) := \bar{B}(t) \cap \partial\Omega(t)$ gilt. Beispiele für Oberflächenkräfte sind Reibungs- oder Kontaktkräfte.

Nun haben wir alle Begrifflichkeiten, um die Erhaltungssätze für den Impuls und den Drehimpuls anzugeben. Diese werden im folgenden Axiom zusammengefasst.

Axiom 2. (Spannungsprinzip von Cauchy und Euler) Auf den Körper $\Omega(t)$ mögen Kräfte wirken mit den Dichten $f : [0, T] \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : [0, T] \times \Gamma^1(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Gamma^1(t) \subset \partial\Omega(t)$. Dann existiert ein Vektorfeld $\tau : [0, T] \times \bar{\Omega}(t) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei

$$S^1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$$

die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 sei, sodass:

(i) Für jedes Teilgebiet $B(t) \subset \bar{\Omega}(t)$ und $x \in \Gamma^1(t) \cap \partial B(t)$, in dem der äußere Normaleinheitsvektor ν an $\Gamma^1(t) \cap \partial B(t)$ existiert, gilt

$$\tau(t, x, \nu) = g(t, x).$$

(ii) Es gilt die Impulserhaltung

$$\frac{d}{dt}I(t, B(t)) = \int_{B(t)} f(t, x) dx + \int_{\partial B(t)} \tau(t, \xi, \nu) d\sigma(\xi)$$

für jedes Teilgebiet $B(t) \subset \Omega(t)$.

(iii) Es gilt die Drehimpulserhaltung

$$\frac{d}{dt}\Delta(t, B(t)) = \int_{B(t)} x \times f(t, x) dx + \int_{\partial B(t)} \xi \times \tau(t, \xi, \nu) d\sigma(\xi)$$

für alle $B(t) \subset \Omega(t)$.

Bemerkung 2.2. (i) Das Axiom 2 geht davon aus, dass elementare Oberflächenkräfte $\tau(t, \xi, \nu)d\sigma(\xi)$, die nur über ν in $\xi \in \partial B(t)$ von $B(t)$ abhängen, existieren.

(ii) In Axiom 2 wird die intuitive Vorstellung formuliert, dass das Momentengleichgewicht auf jedem Teilgebiet $B(t) \subset \bar{\Omega}(t)$, in dem Volumenkräfte $F(t, B(t))$ und Oberflächenkräfte $G(t, \omega(t))$ wirken, durch die zusätzliche Wirkung elementarer Oberflächenkräfte $\tau(t, \xi, \nu)d\sigma(\xi)$ auf $\partial\Omega$ erreicht wird.

(iii) Außerdem wird in dem Axiom 2 angenommen, dass sich sowohl der Impuls als auch der Drehimpuls nur durch die Einwirkung von Volumen- und Oberflächenkräften ändern. Falls keine Volumen- und Oberflächenkräfte auf den Körper einwirken, so sind offenbar Impuls und Drehimpuls konstant in der Zeit und bleiben somit erhalten.

2.3 Das Theorem von Cauchy

Wir wollen nun die Ergebnisse der letzten Abschnitte nutzen, um ein wichtiges Resultat der Kontinuumsmechanik zu formulieren.

Satz 2.1. (*Theorem von Cauchy*) Das Axiom 1 der Massenerhaltung und das Axiom 2 der Impuls- und Drehimpulserhaltung seien erfüllt. Außerdem sei für jedes $t \in [0, T]$ die Oberflächenkraftdichte $\tau(t, \cdot, \nu) : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar für alle $\nu \in S^1$ und für festes $x \in \Omega(t)$ sei $\tau(t, x, \cdot) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig. Dann existiert ein stetig differenzierbares Tensorfeld $\sigma : [0, T] \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ derart, dass

(i) $\tau(t, x, \nu) = \sigma(t, x)\nu$ für alle $(t, x, \nu) \in [0, T] \times \Omega(t) \times S^1$ gilt. Mit anderen Worten hängt τ linear von ν ab.

(ii) $\sigma(t, x)^\top = \sigma(t, x)$ auf $[0, T] \times \Omega(t)$ gilt und somit σ symmetrisch ist.

(iii) die Cauchysche Bewegungsgleichung

$$\rho(t, x)d_t v(t, x) - \nabla \cdot \sigma(t, x) = f(t, x) \quad (2.1)$$

für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega(t)$ erfüllt ist.

Das Tensorfeld σ heißt dabei Cauchyscher Spannungstensor. Für den Beweis des Theorems von Cauchy müssen wir noch den folgenden Satz formulieren und beweisen.

Satz 2.2. (Reynoldscher Transportsatz) Sei $\varphi = \varphi(t, X)$ eine in $t \in [0, T]$ und $X \in \Omega$ stetig differenzierbare Bewegung. Außerdem sei die vektorwertige Funktion $f = f(t, x)$ definiert über $[0, T] \times \Omega(t)$ mit $\Omega(t) = \varphi(t, \Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(t, x) dx \\ &= \int_{\Omega(t)} \partial_t f(t, x) + \nabla \cdot (f \otimes v)(t, x) dx \\ &= \int_{\Omega(t)} d_t f(t, x) + f(t, x) \nabla \cdot v(t, x) dx \\ &= \int_{\Omega(t)} \partial_t f(t, x) dx + \int_{\partial\Omega(t)} (f \otimes v)(t, \xi) \nu(t, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

wobei v das Geschwindigkeitsfeld von φ darstellt und ν den äußeren Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega(t)$. Schließlich sei \otimes das Tensorprodukt, welches allgemein für $a \in \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^n$ definiert ist durch $a \otimes b := (a_i b_j)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$.

Im Folgenden werden wir immer wieder die Notation $\cdot : \cdot$ für das Skalarprodukt von Matrizen verwenden. Dabei definieren wir für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A : B := \text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}.$$

Dieses Skalarprodukt induziert die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_{Fr}$. Für den Beweis des Reynold-schen Transportsatzes benötigen wir allerdings auch noch das folgende Lemma.

Lemma 2.2. *Es sei φ eine stetig differenzierbare Bewegung mit Geschwindigkeitsfeld $V \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \bar{\Omega})$. Dann gilt*

$$\partial_t(\det(\nabla\varphi(t, X))) = \det(\nabla\varphi(t, X))\nabla \cdot V(t, X).$$

Beweis. Mithilfe der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} & \partial_t(\det(\nabla\varphi(t, X))) \\ &= \nabla_A \det(A)|_{A=\nabla\varphi(t, X)} : \partial_t(\nabla\varphi(t, X)) \\ &= \nabla_A \det(A)|_{A=\nabla\varphi(t, X)} : \nabla(\partial_t\varphi(t, X)). \end{aligned}$$

Nun gilt nach Lemma A.1 für ein invertierbares $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, dass

$$\nabla_A \det(A) : H = \operatorname{tr}(A^{-1}H) \det(A)$$

für alle $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist. Mit $A = \nabla\varphi(t, X)$ und $H = \nabla(\partial_t\varphi(t, X))$ erhalten wir daraus

$$\partial_t(\det(\nabla\varphi(t, X))) = \operatorname{tr}(\nabla(\partial_t\varphi(t, X))(\nabla\varphi(t, X))^{-1}) \det(\nabla\varphi(t, X)).$$

Dabei haben wir $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ausgenutzt. Andererseits gilt mit $V(t, X) = \partial_t\varphi(t, X)$ und dem Satz von der Umkehrfunktion

$$\nabla V(t, X) = \nabla[V(t, \varphi^{-1}(t, x))] = \nabla(\partial_t\varphi(t, X))\nabla\varphi^{-1}(t, x) = \nabla(\partial_t\varphi(t, X))(\nabla\varphi(t, X))^{-1}.$$

Damit folgt wegen $\nabla \cdot V(t, X) = \operatorname{tr}(\nabla V(t, X))$ die Behauptung. \square

Nun können wir den Reynoldschen Transportsatz beweisen.

Beweis von Satz 2.2: Mithilfe des Transformationssatzes und Lemma 2.2 gilt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(t, x) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(t, \varphi(t, X)) \det(\nabla\varphi(t, X)) dX \\ &= \int_{\Omega} d_t f \det(\nabla\varphi(t, X)) dX + \int_{\Omega} f \nabla \cdot V(t, X) \det(\nabla\varphi(t, X)) dX \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega(t)} d_t f(t, x) + f(t, x) \nabla \cdot v(t, x) dx.$$

Unter Verwendung der Definition der materiellen Ableitung nach der Zeit gilt

$$d_t f + f(\nabla \cdot v) = \partial_t f + (\nabla f)v + f(\nabla \cdot v) = \partial_t f + \nabla \cdot (f \otimes v),$$

wobei die Gleichheit aus Lemma A.2 folgt. Damit erhalten wir insgesamt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(t, x) dx = \int_{\Omega(t)} \partial_t f(t, x) + \nabla \cdot (f \otimes v)(t, x) dx.$$

Schließlich kann der Satz von Gauß-Ostrogradski (siehe Satz A.1) in jeder Komponente angewendet werden aufgrund der Darstellung

$$\nabla \cdot (f \otimes v) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (f_1 v) \\ \nabla \cdot (f_2 v) \\ \nabla \cdot (f_3 v) \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\int_{\Omega(t)} \nabla \cdot (f \otimes v) dx = \int_{\partial\Omega(t)} \begin{pmatrix} f_1 v \cdot \nu \\ f_2 v \cdot \nu \\ f_3 v \cdot \nu \end{pmatrix} d\sigma(\xi) = \int_{\partial\Omega(t)} (f \otimes v) \cdot \nu d\sigma(\xi).$$

Damit ist alles bewiesen. □

Bei dem Beweis von Satz 2.1 halten wir uns an die Vorgehensweise in [Cia88]. Allerdings wird dort das Theorem von Cauchy für den stationären Fall bewiesen.

Beweis von Satz 2.1: Nach Satz 2.2 und der Definition des Impulses gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t, B(t)) &= \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho(t, x) v(t, x) dx = \int_{B(t)} d_t(\rho v) + \rho v \nabla \cdot v dx \\ &= \int_{B(t)} (d_t \rho) v + \rho d_t v + \rho v \nabla \cdot v dx = \int_{B(t)} v(d_t \rho + \rho \nabla \cdot v) + \rho d_t v dx. \end{aligned}$$

Mit Axiom 1 und erneuter Anwendung des Reynoldsschen Transportsatzes gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho(t, x) dx = \int_{B(t)} d_t \rho + \rho \nabla \cdot v dx \quad (2.2)$$

für $B(t) \subset \Omega(t)$ beliebig. Damit folgt direkt

$$0 = d_t \rho + \rho \nabla \cdot v, \quad (2.3)$$

da (2.2) für alle $B(t) \subset \Omega(t)$ gilt. Somit ergibt sich insgesamt

$$\frac{d}{dt} I(t, B(t)) = \int_{B(t)} \rho d_t v dx.$$

Zusammen mit der Impulserhaltung aus Axiom 2 liefert dies

$$\int_{B(t)} \rho(t, x) d_t v(t, x) dx = \int_{B(t)} f(t, x) dx + \int_{\partial B(t)} \tau(t, \xi, \nu) d\sigma(\xi)$$

und damit die äquivalente Formulierung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B(t)} f(t, x) - \rho(t, x) d_t v(t, x) dx + \int_{\partial B(t)} \tau(t, \xi, \nu) d\sigma(\xi) \\ &= \int_{B(t)} b(t, x) dx + \int_{\partial B(t)} \tau(t, \xi, \nu) d\sigma(\xi) \end{aligned}$$

mit

$$b(t, x) := f(t, x) - \rho(t, x) d_t v(t, x).$$

Wir betrachten im Folgenden einen fest gewählten Zeitpunkt $t \in [0, T]$ und setzen zur Vereinfachung $b(x) := b(t, x)$ für alle $x \in B(t)$ und $\tau(\xi, \nu) := \tau(t, \xi, \nu)$ für alle $\xi \in \partial B(t)$ und $\nu \in S^1$. Dann haben wir bisher die Gleichung

$$0 = \int_{B(t)} b(x) dx + \int_{\partial B(t)} \tau(\xi, \nu) d\sigma(\xi) \quad (2.4)$$

für alle Teilgebiete $B(t) \subset \Omega(t)$ gezeigt.

Wir wollen nun im nächsten Schritt die Aussage (i) beweisen. Sei dazu $x \in \Omega(t)$ fest

gewählt. Da wir angenommen haben, dass $\Omega(t)$ offen ist, existiert ein Simplex $S \subset \Omega(t)$, das x als Eckpunkt hat und dessen Seitenflächen, die wir mit F_1 , F_2 und F_3 bezeichnen, die äußeren Normaleneinheitsvektoren $\nu_1 = -e_1$, $\nu_2 = -e_2$ beziehungsweise $\nu_3 = -e_3$ haben. In Abbildung 2.1 haben wir diesen Simplex mit den zugehörigen Bezeichnungen dargestellt. Die vierte Seite F_4 hat die äußere Normale $\nu_4 = \sum_{i=1}^3 n_i e_i$ mit $n_i > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Dann gilt nach Lemma A.5 der Zusammenhang $\text{vol}(F_i) = n_i \text{vol}(F_4)$ für alle

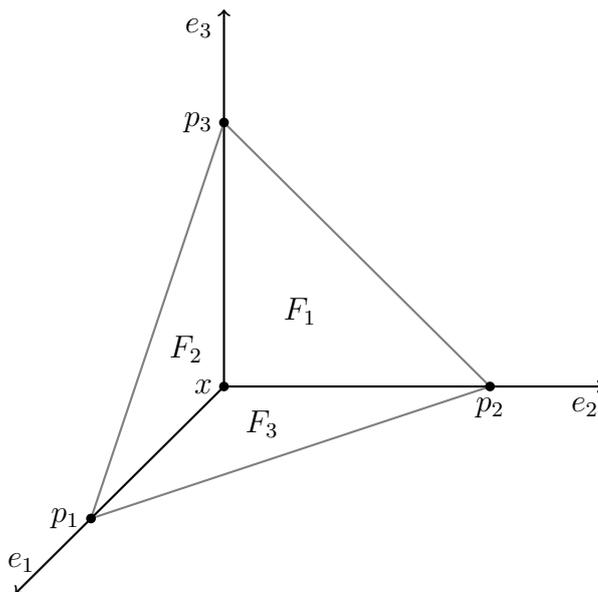


Abbildung 2.1: Skizze des Simplex

$i = 1, 2, 3$. Da mit $B(t) = S$ in (2.4)

$$0 = \int_S b(x) dx + \int_{\partial S} \tau(\xi, \nu) d\sigma(\xi)$$

gilt, folgt somit daraus

$$\int_S b(x) dx = - \int_{\partial S} \tau(\xi, \nu) d\sigma(\xi) = - \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} \tau(\xi, -e_i) d\sigma(\xi) - \int_{F_4} \tau(\xi, \nu_4) d\sigma(\xi).$$

Nun kann in jeder Komponenten auf der rechten Seite der letzten Gleichung der Mittelwertsatz der Integralrechnung angewendet werden, da alle Integranden nach Voraussetzung stetig sind. Dann existieren $a_{ij} \in F_i$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ und $j = 1, 2, 3$ so, dass

$$\sup_{y \in S} |b_j(y)| \text{vol}(S)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left| \sum_{i=1}^3 \tau_j(a_{ij}, -e_i) \text{vol}(F_i) + \tau_j(a_{4j}, \nu_4) \text{vol}(F_4) \right| \\
&= \text{vol}(F_4) \left| \sum_{i=1}^3 \tau_j(a_{ij}, -e_i) n_i + \tau_j(a_{4j}, \nu_4) \right|
\end{aligned}$$

für alle $j = 1, 2, 3$ gilt. Unter der Annahme, dass die anderen Eckpunkte des Simplex, die wir mit p_1, p_2 und p_3 bezeichnen, gleichmäßig gegen x streben, das heißt, dass die Entfernungen $|p_i - x|$ für $i = 1, 2, 3$ gleichmäßig abnehmen, so bleiben die Normalenvektoren von S erhalten. Lemma A.5 liefert dann für alle $j = 1, 2, 3$

$$0 = \sup_{y \in S} |b_j(y)| \lim_{(p_1, p_2, p_3) \rightarrow x} \frac{\text{vol}(S)}{\text{vol}(F_4)} = \left| \sum_{i=1}^3 \tau_j(x, -e_i) n_i + \tau_j(x, \nu_4) \right|$$

und wir erhalten

$$\sum_{i=1}^3 -\tau(x, -e_i) n_i = \tau(x, \nu_4).$$

Durch eine geeignete Wahl von p_1, p_2 und p_3 kann man analog zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^3 -\tau(x, -e_i) n_i = \tau(x, \nu)$$

für alle $\nu \in S^1$ und $x \in \Omega(t)$ gilt.

Es sei nun $j \in \{1, 2, 3\}$ fest gewählt und wir betrachten den Grenzübergang $\nu \rightarrow e_j$. Mithilfe der Stetigkeit von τ in $\nu \in S^1$ gilt $-\tau(x, -e_j) = \tau(x, e_j)$ für alle $x \in \Omega(t)$ und $j \in \{1, 2, 3\}$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^3 \tau(x, e_i) n_i = \tau(x, \nu)$$

für alle $x \in \Omega(t)$ und $\nu = (n_1, n_2, n_3)^\top \in S^1$. Mit der Definition $\sigma_{ij}(x) := \tau_i(x, e_j)$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ erhalten wir schließlich

$$\sigma(x)\nu = \tau(x, \nu)$$

für alle $\nu \in S^1$. Damit ist die Aussage (i) gezeigt, da dies für alle $x \in \Omega(t)$ und $t \in [0, T]$ gilt.

Als Nächstes wollen wir die Aussage (iii) zeigen. Dazu halten wir wieder einen Zeitpunkt

$t \in [0, T]$ fest. Wenn wir die Aussage (i) in die Gleichung (2.4) einsetzen, erhalten wir

$$0 = \int_{B(t)} b(x) dx + \int_{\partial B(t)} \sigma(\xi) \nu d\sigma(\xi) = \int_{B(t)} b(x) + \nabla \cdot \sigma(x) dx$$

unter der Verwendung des Gauß-Ostrogradski-Theorems für alle $B(t) \subset \Omega(t)$. Dies liefert für $t \in [0, T]$ und $x \in \Omega(t)$

$$0 = b(t, x) + \nabla \cdot \sigma(t, x) = f(t, x) - \rho(t, x) d_t v(t, x) + \nabla \cdot \sigma(t, x)$$

und damit die behauptete Bewegungsgleichung aus (iii).

Es bleibt noch die Aussage (ii) zu zeigen, wobei für den Beweis die Drehimpulserhaltung aus Axiom 2 eine wesentliche Rolle spielt. Unter Verwendung von Satz 2.2 gilt zunächst für den Drehimpuls

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \Delta(t, B(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{B(t)} x \times \rho(t, x) v(t, x) dx \\ &= \int_{B(t)} d_t(x \times \rho v) + (x \times \rho v) \nabla \cdot v dx \\ &= \int_{B(t)} (d_t x) \times \rho v + x \times d_t(\rho v) + (x \times \rho v) \nabla \cdot v dx. \end{aligned}$$

Mit $d_t x = v$ erhalten wir $d_t x \times \rho v = \rho(v \times v) = 0$ und somit

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \Delta(t, B(t)) \\ &= \int_{B(t)} x \times d_t(\rho v) + (x \times \rho v) \nabla \cdot v dx \\ &= \int_{B(t)} x \times (d_t \rho) v + x \times \rho d_t v + (x \times \rho v) \nabla \cdot v dx \\ &= \int_{B(t)} x \times \rho d_t v + x \times v (d_t \rho + \rho \nabla \cdot v) dx \end{aligned}$$

$$= \int_{B(t)} x \times \rho d_t v \, dx,$$

wobei bei der letzten Gleichung (2.3) verwendet wurde. Dies liefert zusammen mit der Drehimpulserhaltung

$$\int_{B(t)} x \times \rho d_t v \, dx = \int_{B(t)} x \times f(t, x) \, dx + \int_{\partial B(t)} \xi \times \tau(t, \xi, \nu) \, d\sigma(\xi).$$

Diese Gleichung lässt sich mit der bereits definierten Funktion b schreiben als

$$- \int_{B(t)} x \times b(t, x) \, dx = \int_{\partial B(t)} \xi \times \tau(t, \xi, \nu) \, d\sigma(\xi)$$

und somit erhalten wir unter Verwendung von (i)

$$- \int_{B(t)} x \times b(t, x) \, dx = \int_{\partial B(t)} \xi \times \sigma(t, \xi) \nu \, d\sigma(\xi).$$

Nun gilt für den Integranden auf der rechten Seite

$$\xi \times \sigma \nu = \begin{pmatrix} \xi_2 e_3^\top \sigma \nu - \xi_3 e_2^\top \sigma \nu \\ \xi_3 e_1^\top \sigma \nu - \xi_1 e_3^\top \sigma \nu \\ \xi_1 e_2^\top \sigma \nu - \xi_2 e_1^\top \sigma \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi_2 e_3^\top - \xi_3 e_2^\top) \sigma \nu \\ (\xi_3 e_1^\top - \xi_1 e_3^\top) \sigma \nu \\ (\xi_1 e_2^\top - \xi_2 e_1^\top) \sigma \nu \end{pmatrix}$$

und wir können in jeder Komponente von $\xi \times \sigma \nu$ das Gauß-Ostrogradski-Theorem anwenden. Dazu müssen wir zunächst die Divergenzen berechnen. Es gilt für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot [(\xi_i e_j^\top - \xi_j e_i^\top) \sigma] \\ &= \sum_{k=1}^3 \partial_{\xi_k} [(\xi_i e_j^\top - \xi_j e_i^\top) \sigma e_k] \\ &= \sum_{k=1}^3 \partial_{\xi_k} [\xi_i \sigma_{jk} - \xi_j \sigma_{ik}] \\ &= \sigma_{ji} + \xi_i \sum_{k=1}^3 \partial_{\xi_k} \sigma_{jk} - \sigma_{ij} - \xi_j \sum_{k=1}^3 \partial_{\xi_k} \sigma_{ik} \\ &= \sigma_{ji} - \sigma_{ij} + \xi_i \nabla \cdot (e_j^\top \sigma) - \xi_j \nabla \cdot (e_i^\top \sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_{ji} - \sigma_{ij} + \xi_i e_j^\top \nabla \cdot \sigma - \xi_j e_i^\top \nabla \cdot \sigma \\
&= \sigma_{ji} - \sigma_{ij} + e_l^\top (\xi \times \nabla \cdot \sigma)
\end{aligned}$$

mit $l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$. Dann folgt insgesamt

$$-\int_{B(t)} x \times b(t, x) dx = \int_{\partial B(t)} \xi \times \sigma(t, \xi) \nu d\sigma(\xi) = \int_{B(t)} \begin{pmatrix} \sigma_{32} - \sigma_{23} \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} \end{pmatrix} dx + \int_{B(t)} x \times \nabla \cdot \sigma dx.$$

Dies führt mithilfe von (iii) auf

$$\int_{B(t)} \begin{pmatrix} \sigma_{32} - \sigma_{23} \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} \end{pmatrix} dx = 0$$

für alle $B(t) \subset \Omega(t)$ und somit auf die Symmetrie von σ . Damit ist auch die Aussage (ii), die noch gefehlt hat, gezeigt. \square

In Satz 2.1 haben wir gesehen, dass man mithilfe des Cauchyschen Spannungstensors die Oberflächenkraftdichte und den äußeren Normaleneinheitsvektor in der Momentankonfiguration zueinander in Beziehung setzen kann. Es liegt nahe, dass man diese Beziehung auch in die Referenzkonfiguration übertragen möchte. Um Tensorfelder auf den beiden Konfigurationen in Beziehung zu setzen, definieren wir die Piola-Transformation.

Definition 2.9. Es sei φ eine Bewegung, so dass $\varphi(t, \cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}(t)$ für alle $t \in [0, T]$ injektiv ist. Außerdem seien $s : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $x \mapsto s(x)$, ein über der Momentankonfiguration definiertes Tensorfeld und $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $X \mapsto S(X)$, das dazu assoziierte Tensorfeld über der Referenzkonfiguration. Die Transformation $\mathcal{P} : s \mapsto S$ gemäß

$$S(X) := \det(\nabla \varphi(t, X)) s(\varphi(t, X)) \nabla \varphi(t, X)^{-\top}$$

heißt *Piola-Transformation*. In diesem Fall nennt man $S = \mathcal{P}(s)$ *Piola-Transformierte* von s .

Mithilfe dieser Definition können wir nun die genannte Beziehung aus Satz 2.1 in die Referenzkonfiguration übertragen. Dazu wenden wir die Piola-Transformation zunächst auf den Cauchyschen Spannungstensor an und erhalten damit die folgende Definition.

Definition 2.10. Es sei σ der Cauchysche Spannungstensor. Dann heißt

$$P := \mathcal{P}(\sigma)$$

erster Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor.

Dieser erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor ist allerdings im Allgemeinen nicht mehr symmetrisch. Man kann aber dennoch auch in der Referenzkonfiguration eine lineare Abhängigkeit von dem äußeren Normaleneinheitsvektor zeigen. Dabei wird die Rolle des Cauchyschen Spannungstensors vom ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor übernommen. Bevor wir darauf genauer eingehen, wollen wir noch die Piola-Transformation mithilfe des folgenden Satzes näher untersuchen.

Satz 2.3. Es seien $S : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $s : \bar{\Omega}(t) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $S = \mathcal{P}(s)$. Dann gilt:

(i)

$$\nabla \cdot S(X) = \det(\nabla \varphi(t, X)) \nabla \cdot s(x)$$

für alle $x = \varphi(t, X)$ und $X \in \bar{\Omega}$,

(ii)

$$\int_{\partial B} S(X) N \, dA = \int_{\partial \varphi(t, B)} s(x) \nu \, da$$

für ein beliebiges Teilgebiet $B \subset \bar{\Omega}$,

(iii)

$$\det(\nabla \varphi(t, X)) \|\nabla \varphi(t, X)^{-\top} N\|_2 \, dA = da.$$

Dabei ist dA das Flächenelement im Punkt $X \in \partial \Omega$ mit äußerem Normaleneinheitsvektor N und da das Flächenelement im Punkt $x = \varphi(t, X) \in \partial \Omega(t)$ mit äußerem Normaleneinheitsvektor ν .

Für den Beweis von Satz 2.3 benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 2.3. Es gilt die Piola-Identität:

$$\nabla \cdot (\det(\nabla \varphi(t, X)) \nabla \varphi(t, X)^{-\top}) = 0$$

für alle $(t, X) \in [0, T] \times \Omega$.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Dann entsteht $A'_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte. Damit lässt sich die Kofaktor-Matrix von A definieren durch

$$\text{Cof}(A) := (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{mit} \quad d_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A'_{ij})$$

für $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes gilt die Gleichheit von $\det(A) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} d_{ij} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} d_{ij}$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und damit folgt

$$A(\text{Cof}(A))^\top = (\text{Cof}(A))^\top A = (\det(A))I.$$

Ist A invertierbar, so gilt $\text{Cof}(A) = (\det(A))A^{-\top}$. Wenn wir nun $A = \nabla\varphi(t, X)$ setzen, erhalten wir

$$\det(\nabla\varphi(t, X))\nabla\varphi(t, X)^{-\top} = \text{Cof}(\nabla\varphi(t, X))$$

mit

$$(\text{Cof}(\nabla\varphi))_{ij} = \partial_{j+1}\varphi_{i+1}\partial_{j+2}\varphi_{i+2} - \partial_{j+2}\varphi_{i+1}\partial_{j+1}\varphi_{i+2},$$

wobei die Indizes modulo 3 betrachtet werden. Dann folgt schließlich

$$\nabla \cdot (\text{Cof}(\nabla\varphi)) = \left(\sum_{j=1}^3 \partial_j (\text{Cof}(\nabla\varphi))_{ij} \right)_{i=1,2,3} = 0$$

durch direktes Nachrechnen. □

Beweis von Satz 2.3: Es gilt zunächst unter Verwendung von Lemma 2.3 und der Kettenregel für die i -te Komponente der Divergenz von S

$$\begin{aligned} & [\nabla \cdot S(X)]_i \\ &= \sum_{j=1}^3 \partial_{X_j} S_{ij}(X) \\ &= \sum_{j=1}^3 \partial_{X_j} \left([s(\varphi(t, X)) \det(\nabla\varphi(t, X)) \nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \partial_{X_j} \left(\sum_{k=1}^3 s_{ik}(\varphi(t, X)) [\det(\nabla\varphi(t, X)) \nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{kj} \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_{X_j} s_{ik}(\varphi(t, X))) [\det(\nabla\varphi(t, X)) \nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{kj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 s_{ik}(\varphi(t, X)) \partial_{X_j} [\det(\nabla\varphi(t, X)) \nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{kj} \\
= & \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_{X_j} s_{ik}(\varphi(t, X))) [\nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{kj} \det(\nabla\varphi(t, X)) \\
& + \sum_{k=1}^3 s_{ik}(\varphi(t, X)) [\nabla \cdot (\det(\nabla\varphi(t, X)) \nabla\varphi(t, X)^{-\top})]_k \\
= & \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_{X_j} s_{ik}(\varphi(t, X))) [\nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{kj} \det(\nabla\varphi(t, X)) \\
= & \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\partial_{x_l} s_{ik}(x) \partial_{X_j} \varphi_l(t, X)) [\nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{kj} \det(\nabla\varphi(t, X)) \\
= & \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \partial_{x_l} s_{ik}(x) \sum_{j=1}^3 [\nabla\varphi(t, X)]_{lj} [\nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{kj} \det(\nabla\varphi(t, X)).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass mit dem Kronecker-Symbol

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 [\nabla\varphi(t, X)]_{lj} [\nabla\varphi(t, X)^{-\top}]_{kj} = \sum_{j=1}^3 [\nabla\varphi(t, X)]_{lj} [\nabla\varphi(t, X)^{-1}]_{jk} \\
= & [\nabla\varphi(t, X) \nabla\varphi(t, X)^{-1}]_{lk} = \delta_{lk}
\end{aligned}$$

für $k, l \in \{1, 2, 3\}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
[\nabla \cdot S(X)]_i & = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \partial_{x_l} s_{ik}(x) \delta_{lk} \det(\nabla\varphi(t, X)) \\
= & \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} s_{ik}(x) \det(\nabla\varphi(t, X)) = [\det(\nabla\varphi(t, X)) \nabla \cdot s(x)]_i
\end{aligned}$$

und somit die Aussage (i).

Es sei nun $B \subset \bar{\Omega}$ offen und beschränkt. Dann gilt mithilfe des Divergenzsatzes von Gauß, der Aussage (i) und dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial B} S(X) N \, dA = \int_B \nabla \cdot S(X) \, dX = \int_B \nabla_{x=\varphi(t, X)} \cdot s(\varphi(t, X)) \det(\nabla\varphi(t, X)) \, dX \\
= & \int_{\varphi(t, B)} \nabla \cdot s(x) \, dx = \int_{\partial\varphi(t, B)} s(x) \nu \, da.
\end{aligned}$$

Damit ist auch die Aussage (ii) bewiesen und es bleibt (iii) zu zeigen. Dazu wählen wir speziell $s(x) := I = (\delta_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Dann gilt $S(X) = \det(\nabla\varphi(t, X))\nabla\varphi(t, X)^{-\top}$ und mit (ii) erhalten wir

$$\int_{\partial B} \det(\nabla\varphi(t, X))\nabla\varphi(t, X)^{-\top} N \, dA = \int_{\partial\varphi(t, B)} \nu \, da$$

für alle $B \subset \bar{\Omega}$. Da wir $B \subset \bar{\Omega}$ beliebig gewählt haben und mit $\|\nu\|_2 = 1$ folgt schließlich

$$\det(\nabla\varphi(t, X))\|\nabla\varphi(t, X)^{-\top} N\|_2 \, dA = da.$$

Somit ist auch (iii) und damit alles bewiesen. \square

Wir definieren nun die Oberflächenkraftdichte $T = T(t, X, N)$ in der Referenzkonfiguration über die Beziehung

$$T(t, X, N)dA = \tau(t, x, \nu)da,$$

wobei τ die Oberflächenkraftdichte aus Axiom 2 ist. Diese Definition ist eine geeignete Wahl, da mit Satz 2.1 und Satz 2.3 der Zusammenhang

$$T(t, X, N) = \tau(t, x, \nu) = \sigma(t, x)\nu = \mathcal{P}(\sigma)(t, X)N = P(t, X)N$$

gilt und somit auch in der Referenzkonfiguration die Oberflächenkraftdichte linear abhängig ist von dem äußeren Normaleneinheitsvektor.

Damit haben wir alles zusammen, um die Bewegungsgleichung aus Satz 2.1 auch in der Referenzkonfiguration zu formulieren.

Korollar 2.1. *Für alle $(t, X) \in [0, T] \times \Omega$ gilt*

$$\varrho(X)d_t V(t, X) - \nabla \cdot P(t, X) = F(t, X).$$

Dabei bezeichnet ϱ die Referenzdichte aus Definition 2.7.

Beweis. Es seien $F(t, X) := \det(\nabla\varphi(t, X))f(t, x)$ und $\varrho(X) = \det(\nabla\varphi(t, X))\rho(t, \varphi(t, X))$, wobei wir erneut auf das Axiom 1 der Massenerhaltung verweisen. Dann liefert die Multiplikation der Gleichung (2.1) mit $\det(\nabla\varphi(t, X)) > 0$ und Satz 2.3, dass die Gleichung

$$\varrho(X)d_t V(t, X) - \nabla \cdot P(t, X) = F(t, X)$$

erfüllt ist. Dabei gilt die Beziehung $d_t v(t, x) = d_t V(t, X)$ entsprechend Definition 2.5. \square

2.4 Elastische Materialien

Wir betrachten die im Satz 2.1 hergeleitete Bewegungsgleichung

$$\rho(t, x) d_t v(t, x) - \nabla \cdot \sigma(t, x) = f(t, x)$$

für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega(t)$ und die Symmetrie $\sigma^\top = \sigma$ des Cauchyschen Spannungstensors. Dann fällt auf, dass dieses System unterbestimmt ist derart, dass wir nur drei Gleichungen zur Verfügung haben, aber neun Variablen darin auftreten. Dies sind zum einen die drei Komponenten des Verschiebungsfeldes und zum anderen die sechs Komponenten des Spannungstensors. Die restlichen Bedingungen müssen somit aus den Eigenschaften des Materials, das verwendet wird, hergeleitet werden. Aus diesem Grund müssen wir die Klasse der betrachteten Materialien einschränken. In dieser Arbeit wollen wir dafür die sogenannten elastischen Materialien betrachten.

Definition 2.11. Ein Material heißt *elastisch*, falls eine Abbildung

$$\tilde{\sigma} : \bar{\Omega} \times \text{GL}_+(3) \rightarrow \text{Sym}(3), (X, M) \mapsto \tilde{\sigma}(X, M),$$

existiert, sodass

$$\sigma(t, x) = \tilde{\sigma}(X, \nabla \varphi(t, X)) \tag{2.5}$$

für jede Bewegung φ gilt. Dabei ist

$$\text{GL}_+(3) := \{M \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det(M) > 0\}$$

die Menge der 3×3 -Matrizen mit positiver Determinante und $\text{Sym}(3)$ die Menge der symmetrischen 3×3 -Matrizen. Die Funktion $\tilde{\sigma}$ wird *Antwortfunktion für den Cauchyschen Spannungstensor* σ genannt. Die Gleichung (2.5) nennt man *konstitutive Gleichung des Materials*.

Falls $\tilde{\sigma}$ eine Funktion, die nur von φ abhängt, wäre, so würde sich σ bei einer starren Bewegung der Momentankonfiguration verändern, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Aus diesem Grund wählt man für $\tilde{\sigma}$ eine Funktion in Abhängigkeit von $\nabla \varphi$.

Bemerkung 2.3. Aus der Existenz einer Antwortfunktion $\tilde{\sigma}$ für den Cauchyschen Spannungstensor σ eines elastischen Materials folgt nach Definition 2.10 die Existenz einer

Funktion \tilde{P} , für die gilt

$$P(t, X) = \tilde{P}(X, \nabla\varphi(t, X))$$

mit

$$\begin{aligned} & P(t, X) \\ &= \det(\nabla\varphi(t, X))\sigma(t, x)\nabla\varphi(t, X)^{-\top} \\ &= \det(\nabla\varphi(t, X))\tilde{\sigma}(X, \nabla\varphi(t, X))\nabla\varphi(t, X)^{-\top} \\ &=: \tilde{P}(X, \nabla\varphi(t, X)). \end{aligned}$$

Die Funktion \tilde{P} nennt man dann *Antwortfunktion für den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor*.

Definition 2.12. Falls die Antwortfunktion nicht von der Ortskoordinate X abhängig ist, so heißt das Material *homogen*. Ansonsten wird es *heterogen* genannt.

Man kann allerdings die Antwortfunktionen nicht beliebig wählen, sondern muss sie mithilfe physikalisch sinnvoller Axiome einschränken. In den beiden folgenden Unterabschnitten werden zwei solche Axiome und deren Auswirkungen auf die Antwortfunktion behandelt.

2.4.1 Objektivität

Ein grundlegendes Axiom der Physik geht davon aus, dass jede Observable unabhängig vom gewählten Bezugssystem sein muss. Im Zusammenhang mit elastischen Materialien ist diese Observable die Oberflächenkraftdichte τ aus dem Satz 2.1. Um dies mathematisch zu formulieren, sei $\text{SO}(3)$ die Menge der orthogonalen 3×3 -Matrizen mit Determinante 1. Das entsprechende Axiom lautet dann:

Axiom 3. (Objektivität) Es werde ein Zeitpunkt $t \in [0, T]$ festgehalten und die Momentankonfiguration $\bar{\Omega}(t)$ werde in eine andere deformierte Konfiguration $\hat{\Omega}(t)$ rotiert, das heißt, es sei $\hat{\Omega}(t) = Q\bar{\Omega}(t)$ für ein $Q \in \text{SO}(3)$. Dann gilt

$$\hat{\tau}(t, \hat{x}, Q\nu) = Q\tau(t, x, \nu)$$

für alle $x = \varphi(t, X)$, $\hat{x} = Q\varphi(t, X)$, $X \in \bar{\Omega}$ und $\nu \in S^1$. Wir bezeichnen dabei mit $\hat{\tau} : [0, T] \times \hat{\Omega}(t) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sowie $\tau : [0, T] \times \bar{\Omega}(t) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Oberflächenkraftdichten in der rotierten Momentankonfiguration $\hat{\Omega}(t)$ beziehungsweise der ursprünglichen Momentankonfiguration $\bar{\Omega}(t)$.

Dies schränkt die Klasse der möglichen Antwortfunktionen in der folgenden Art und Weise ein.

Satz 2.4. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es gilt das Axiom 3 der Objektivität.*

(ii) *Für jedes $X \in \bar{\Omega}$ gilt*

$$\tilde{\sigma}(X, QF) = Q\tilde{\sigma}(X, F)Q^\top$$

für alle $F \in GL_+(3)$ und $Q \in SO(3)$, wobei $\tilde{\sigma} : \bar{\Omega} \times GL_+(3) \rightarrow \text{Sym}(3)$ die Antwortfunktion für den Cauchyschen Spannungstensor ist.

(iii) *Es gilt der Satz von Richter: Für jedes $X \in \bar{\Omega}$ ist*

$$\tilde{\sigma}(X, F) = R\tilde{\sigma}(X, U)R^\top$$

für alle $F = RU \in GL_+(3)$ erfüllt. Dabei ist $F = RU$ die Polarzerlegung der Matrix F mit $R \in SO(3)$ und $U \in \text{Sym}_+(3)$ und wir bezeichnen mit $\text{Sym}_+(3)$ die Menge der symmetrischen, positiv definiten 3×3 -Matrizen.

Beweis. Um die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen, gelte zunächst (i) und damit das Axiom 3. Dann sei ein Zeitpunkt $t \in [0, T]$ fest gewählt, $\hat{\sigma}(t, \hat{x})$ der Cauchysche Spannungstensor in der rotierten Momentankonfiguration im Punkt $\hat{x} \in \hat{\Omega}(t)$ und $\sigma(t, x)$ der Cauchysche Spannungstensor in der nicht rotierten Momentankonfiguration im Punkt $x \in \bar{\Omega}(t)$. Nach Satz 2.1 und mit Axiom 3 gilt

$$\hat{\sigma}(t, \hat{x})Q\nu = \hat{\tau}(t, \hat{x}, Q\nu) = Q\tau(t, x, \nu) = Q\sigma(t, x)\nu$$

für alle $\nu \in S^1$ und $Q \in SO(3)$. Da dies für alle Einheitsvektoren ν gilt und Q nach Voraussetzung orthogonal ist, ist dies sogar äquivalent zu

$$\hat{\sigma}(t, \hat{x}) = Q\sigma(t, x)Q^\top.$$

Dies ist wiederum mit $\nabla[Q\varphi](t, X) = Q\nabla\varphi(t, X)$ und (2.5) äquivalent zu

$$\tilde{\sigma}(X, Q\nabla\varphi(t, X)) = \tilde{\sigma}(X, \nabla[Q\varphi](t, X)) = \hat{\sigma}(t, \hat{x}) = Q\sigma(t, x)Q^\top = Q\tilde{\sigma}(X, \nabla\varphi(t, X))Q^\top.$$

Da zu jedem $F \in GL_+(3)$ ein φ existiert mit $\nabla\varphi = F$, ist dies äquivalent zu (ii).

Damit kommen wir zum Beweis der Äquivalenz von (ii) und (iii). Dazu sei $F = RU$ die

Polarzerlegung der Matrix $F \in \text{GL}_+(3)$ mit $R \in \text{SO}(3)$ und $U \in \text{Sym}_+(3) \subset \text{GL}_+(3)$. Aus der Aussage (ii) folgt dann mit $Q = R^\top$

$$R\tilde{\sigma}(X, U)R^\top = R\tilde{\sigma}(X, R^\top RU)R^\top = R\tilde{\sigma}(X, R^\top F)R^\top = RR^\top\tilde{\sigma}(X, F)RR^\top = \tilde{\sigma}(X, F)$$

und damit (iii). Umgekehrt sei nun (iii) erfüllt. Da die Polarzerlegung nach Korollar A.1 eindeutig ist, ist die Polarzerlegung der Matrix QF gerade $QF = (QR)U$ und aus (iii) folgt

$$\begin{aligned} & \tilde{\sigma}(X, QF) \\ &= \tilde{\sigma}(X, (QR)U) = (QR)\tilde{\sigma}(X, U)(QR)^\top = QR\tilde{\sigma}(X, U)R^\top Q^\top \\ &= Q\tilde{\sigma}(X, RU)Q^\top = Q\tilde{\sigma}(X, F)Q^\top. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Aussage von (ii) und damit das Ende des Beweises. \square

2.4.2 Hyperelastische Materialien

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass wir die Klasse der zulässigen Antwortfunktionen für ein elastisches Material einschränken können durch das Axiom der Objektivität. Diese Klasse lässt sich auch noch weiter beschränken durch das folgende Axiom. Dieses ist eine Folgerung aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik. In diesem Abschnitt halten wir uns an die Vorgehensweise in [Gur81]. Allerdings benötigen wir zum Aufstellen des Axioms noch einige Begriffe.

Definition 2.13. Es sei ein Zeitintervall $[t_0, t_1] \subset [0, T]$ und $p := \varphi|_{[t_0, t_1] \times \bar{\Omega}}$ mit einer Bewegung $\varphi : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben. Dann heißt p *Prozess*. Des Weiteren nennt man einen Prozess p *geschlossen*, falls $p(t_0, X) = p(t_1, X)$ und $\dot{p}(t_0, X) = \dot{p}(t_1, X)$ für alle $X \in \bar{\Omega}$ gilt.

Definition 2.14. Es sei $p := \varphi|_{[t_0, t_1] \times \bar{\Omega}}$ ein Prozess und $B \subset \Omega$. Dann ist

$$\begin{aligned} & A(t_0, t_1; B) \\ &:= \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\partial p(t, B)} \langle \sigma(t, x)\nu(t, x), v(t, x) \rangle da + \int_{p(t, B)} \langle f(t, x), v(t, x) \rangle dx \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\partial B} \langle P(t, X)N(x), V(t, X) \rangle dA + \int_B \langle F(t, X), V(t, X) \rangle dX \right) dt \end{aligned}$$

die auf B während $[t_0, t_1]$ geleistete Arbeit. Dabei ist σ wieder der Cauchysche Spannungstensor und P der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor, ν und f beziehungsweise N und F der Normaleneinheitsvektor und die Volumenkraftdichte in der Momentan- beziehungsweise Referenzkonfiguration.

Hier und in der gesamten Arbeit bezeichnen wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 .

Unter der zusätzlichen Annahme, dass der Prozess geschlossen ist, erhalten wir die folgende Darstellung für die geleistete Arbeit.

Lemma 2.4. *Es sei $p := \varphi|_{[t_0, t_1] \times \bar{\Omega}}$ ein geschlossener Prozess und $B \subset \Omega$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} A(t_0, t_1; B) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t, B)} \sigma(t, x) : \nabla v(t, x) \, dx \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_B P(t, X) : \nabla V(t, X) \, dX \, dt. \end{aligned}$$

Beweis. Mithilfe des Gauß-Ostrogradski-Theorems, der Symmetrie von σ und Lemma A.3 folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\partial p(t, B)} \langle \sigma(t, x) \nu(t, x), v(t, x) \rangle \, da \\ &= \int_{\partial p(t, B)} \langle \sigma(t, x)^\top v(t, x), \nu(t, x) \rangle \, da \\ &= \int_{p(t, B)} \nabla \cdot (\sigma(t, x) v(t, x)) \, dx \\ &= \int_{p(t, B)} \langle \nabla \cdot \sigma(t, x), v(t, x) \rangle \, dx + \int_{p(t, B)} \sigma(t, x) : \nabla v(t, x) \, dx \end{aligned}$$

und damit

$$A(t_0, t_1; B)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\partial p(t,B)} \langle \sigma(t,x) \nu(t,x), v(t,x) \rangle da + \int_{p(t,B)} \langle f(t,x), v(t,x) \rangle dx \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \langle \nabla \cdot \sigma + f(t,x), v(t,x) \rangle dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \sigma(t,x) : \nabla v(t,x) dx dt.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Satz 2.1 erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
&A(t_0, t_1; B) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \langle \rho(t,x) d_t v(t,x), v(t,x) \rangle dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \sigma(t,x) : \nabla v(t,x) dx dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \rho(t,x) \langle d_t v(t,x), v(t,x) \rangle dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \sigma(t,x) : \nabla v(t,x) dx dt. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
&\langle d_t v(t,x), v(t,x) \rangle \\
&= \langle \partial_t v(t,x), v(t,x) \rangle + \langle \nabla v(t,x) \cdot v(t,x), v(t,x) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^3 (\partial_t v_i(t,x)) v_i(t,x) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i(t,x) (\partial_j v_i(t,x)) v_j(t,x) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \partial_t (v_i(t,x)^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \partial_j (v_i(t,x)^2) v_j(t,x) \\
&= \frac{1}{2} \partial_t \left(\sum_{i=1}^3 v_i(t,x)^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \partial_j \left(\sum_{i=1}^3 v_i(t,x)^2 \right) v_j(t,x) \\
&= \frac{1}{2} \partial_t \|v(t,x)\|_2^2 + \frac{1}{2} \nabla \|v(t,x)\|_2^2 \cdot v(t,x) \\
&= \frac{1}{2} d_t \|v(t,x)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Mithilfe von Lemma 2.1 und dem Transformationssatz folgt daraus

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \rho(t,x) \langle d_t v(t,x), v(t,x) \rangle dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \rho(t,x) d_t \|v(t,x)\|_2^2 dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \int_{p(t,B)} \rho(t,x) \|v(t,x)\|_2^2 dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \int_B \rho(t, \varphi(t, X)) \|v(t, \varphi(t, X))\|_2^2 \det(\nabla \varphi(t, X)) dX dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \int_B \varrho(X) \|V(t, X)\|_2^2 dX dt \\
&= \frac{1}{2} \int_B \varrho(X) (\|V(t_1, X)\|_2^2 - \|V(t_0, X)\|_2^2) dX.
\end{aligned}$$

Da der Prozess p nach Voraussetzung geschlossen ist, gilt $V(t_0, X) = V(t_1, X)$ für alle $X \in \bar{\Omega}$ und somit erhalten wir schließlich

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \rho(t,x) \langle d_t v(t,x), v(t,x) \rangle dx dt = 0.$$

Wenn wir dies in die Darstellung (2.6) einsetzen, liefert das gerade die erste Behauptung. Diese wollen wir nun verwenden, um die zweite Gleichung zu zeigen. Mithilfe der Kettenregel erhalten wir zunächst $\nabla_x v(t,x)|_{x=\varphi(t,X)} = \nabla_X v(t, \varphi(t, X)) \nabla_X \varphi(t, X)^{-1}$. Unter Verwendung dieser Gleichheit, der eben gezeigten Behauptung und des Transformationsatzes gilt

$$\begin{aligned}
&A(t_0, t_1; B) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \sigma(t,x) : \nabla v(t,x) dx dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_{p(t,B)} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(t,x) [\nabla v(t,x)]_{ij} dx dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_B \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(t, \varphi(t, X)) [\nabla v(t, \varphi(t, X)) \nabla \varphi(t, X)^{-1}]_{ij} \det(\nabla \varphi(t, X)) dX dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_B \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(t, \varphi(t, X)) \sum_{k=1}^3 [\nabla v(t, \varphi(t, X))]_{ik} [\nabla \varphi(t, X)^{-1}]_{kj} \det(\nabla \varphi(t, X)) dX dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_B \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\nabla v(t, \varphi(t, X))]_{ik} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(t, \varphi(t, X)) [\nabla \varphi(t, X)^{-1}]_{kj} \det(\nabla \varphi(t, X)) dX dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_B \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\nabla v(t, \varphi(t, X))]_{ik} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(t, \varphi(t, X)) [\nabla \varphi(t, X)^{-\top}]_{jk} \det(\nabla \varphi(t, X)) dX dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_B \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\nabla v(t, \varphi(t, X))]_{ik} [\sigma(t, \varphi(t, X)) \nabla \varphi(t, X)^{-\top}]_{ik} \det(\nabla \varphi(t, X)) dX dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_B \nabla v(t, \varphi(t, X)) : \left(\sigma(t, \varphi(t, X)) \nabla \varphi(t, X)^{-\top} \det(\nabla \varphi(t, X)) \right) dX dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \int_B \nabla V(t, X) : P(t, X) dX dt.
\end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt symmetrisch ist, folgt daraus die zweite Behauptung und wir haben alles gezeigt. \square

Nun haben wir alle benötigten Begrifflichkeiten und Aussagen zusammen, um das bereits erwähnte Axiom anzugeben.

Axiom 4. In geschlossenen Prozessen wird eine nichtnegative Arbeit verrichtet.

Bemerkung 2.4. Das Axiom 4 ist äquivalent zu

$$A(t_0, t_1; B) = \int_{t_0}^{t_1} \int_B P(t, X) : \nabla V(t, X) dX dt \geq 0$$

für alle $B \subset \Omega$, $[t_0, t_1] \subset [0, T]$ und geschlossene Prozesse $p := \varphi|_{[t_0, t_1] \times \bar{\Omega}}$. Des Weiteren sieht man leicht, dass durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge diese Aussage und damit das Axiom 4 ebenso äquivalent ist zu der Aussage, dass

$$\int_{t_0}^{t_1} P(t, X) : \nabla V(t, X) dt \geq 0$$

für alle $X \in B$ gilt.

Damit können wir nun die Klasse der elastischen Materialien weiter einschränken, derart, dass wir elastische Materialien betrachten wollen, die gerade das Axiom 4 erfüllen. In Satz 2.5 werden wir sehen, dass dies genau die sogenannten hyperelastischen Materialien sind. Bevor wir allerdings zu diesem Resultat kommen, müssen wir noch definieren, was überhaupt ein hyperelastisches Material ist.

Definition 2.15. Ein elastischer Körper heißt *hyperelastisch*, falls

$$\tilde{P}(X, Y) = \nabla_Y \hat{C}(X, Y)$$

für alle $(X, Y) \in \Omega \times \text{GL}_+(3)$ und eine Funktion $\hat{C} : \Omega \times \text{GL}_+(3) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Diese Funktion \hat{C} wird *Verzerrungsenergiedichte* genannt.

Die in Definition 2.15 verwendete Ableitung ist dabei folgendermaßen zu verstehen:

Bemerkung 2.5. Sei $f : M \subset \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ in $Y \in M$ differenzierbar. Dann sind die Einträge von $(\nabla_Y f)(Y) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gegeben durch

$$[(\nabla_Y f)(Y)]_{ij} = \partial_{Y_{ij}} f(Y), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Analog gilt für eine Funktion $f : \Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \times M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\nabla_Y f(X, Y) = [\partial_{Y_{ij}} f(X, Y)]_{1 \leq i, j \leq 3}$$

für alle $X \in \Omega$ und $Y \in M$.

Der Zusammenhang zwischen der Antwortfunktion \tilde{P} und der Verzerrungsenergiedichte \hat{C} in der Definition 2.15 zeigt, dass die Verzerrungsenergiedichte, falls sie existiert, nur bis auf eine beliebige Funktion, die lediglich von X abhängt, durch die Antwortfunktion bestimmt wird. Damit kommen wir nun zu dem bereits erwähnten Satz, der die Klasse der hyperelastischen Materialien charakterisiert.

Satz 2.5. *Ein elastischer Körper ist genau dann hyperelastisch, wenn die in geschlossenen Prozessen geleistete Arbeit nichtnegativ ist.*

Wir wollen an dieser Stelle auf den etwas längeren Beweis verzichten. Diesen findet man beispielsweise in [Gur81].

Damit haben wir unser Material soweit eingeschränkt, dass wir nun eine Gleichung angeben können, die eine wesentliche Rolle in unserem Modell (siehe Kapitel 3) spielt und somit für die gesamte Arbeit essentiell ist.

Lemma 2.5. *Der Körper bestehe aus einem hyperelastischen Material. Dann gilt*

$$\varrho(X)d_t V(t, X) - \nabla \cdot \nabla_Y \hat{C}(X, \nabla \varphi(t, X)) = F(t, X)$$

für alle $(t, X) \in [0, T] \times \Omega$. Dabei seien wieder \hat{C} die Verzerrungsenergiedichte, ϱ die Referenzdichte, V das Geschwindigkeitsfeld der Bewegung φ und F die Volumenkraftdichte.

Beweis. Die Aussage des Lemmas folgt direkt aus Korollar 2.1 unter Zuhilfenahme von Bemerkung 2.3 und Definition 2.15. \square

Damit haben wir die Grundlagen geschaffen, um im nächsten Kapitel unser Modell aufzustellen.

Kapitel 3

Mathematische Modellierung des inversen Problems

Als Grundlage für unser Modell dient uns nun die Differentialgleichung

$$\varrho(X)d_t V(t, X) - \nabla \cdot \nabla_Y \hat{C}(X, \nabla \varphi(t, X)) = F(t, X)$$

aus Lemma 2.5. Diese haben wir im vergangenen Kapitel aus dem Axiom 1 der Massenerhaltung, dem Axiom 2 der Impuls- und Drehimpulserhaltung, dem Axiom 3 der Objektivität und dem Axiom 4 hergeleitet. Dabei seien \hat{C} die Verzerrungsenergiedichte, ϱ die Referenzdichte, V das Geschwindigkeitsfeld der Bewegung φ und F die Volumenkraftdichte. Nach Definition 2.4 gilt der Zusammenhang $\nabla U(t, X) = \nabla \varphi(t, X) - I$ zwischen Deformations- und Verschiebungsgradient. Aus diesem Grund können wir die Verzerrungsenergiedichte auch als Funktion von X und $\nabla U(t, X)$ betrachten. Somit ist es möglich diese auch folgendermaßen zu schreiben:

$$C(X, \nabla U(t, X)) = \hat{C}(X, \nabla \varphi(t, X)) = \hat{C}(X, \nabla U(t, X) + I).$$

Außerdem setzen wir voraus, dass der Körper keine Vorspannungen besitzt. Mathematisch bedeutet dies

$$\tilde{P}(X, I) = \tilde{\sigma}(X, I) = 0.$$

Nach Definition 2.15 ist dies gleichbedeutend mit

$$\nabla_Y C(X, 0) = \nabla_Y \hat{C}(X, I) = 0.$$

Des Weiteren haben wir bereits im Zusammenhang mit Definition 2.15 festgestellt, dass die Verzerrungsenergie-dichte nur bis auf eine additive Funktion von X festgelegt ist. Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$C(X, 0) = 0$$

für alle $X \in \Omega$ gilt.

Die bisher verwendete Notation ist üblich in der Kontinuumsmechanik. Im Folgenden wollen wir aber übergehen zu der Notation, wie sie in der Mathematik gewöhnlich verwendet wird. Aus diesem Grund benutzen wir ab hier kleine, lateinische Buchstaben für die Bezeichnung von Ortsvariablen und Funktionen und schreiben ρ anstelle von ϱ , obwohl wir im Weiteren ausschließlich die Referenzkonfiguration Ω betrachten.

Ausgestattet mit geeigneten Anfangsbedingungen betrachten wir dementsprechend mit $d_t v(t, x) = \ddot{u}(t, x)$ das System

$$\rho(x)\ddot{u}(t, x) - \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \nabla u(t, x)) = f(t, x) \quad (3.1)$$

für $t \in [0, T]$ und $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit gegebenen Anfangswerten

$$u(0, \cdot) = u_0 \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad (3.2)$$

$$\dot{u}(0, \cdot) = u_1 \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad (3.3)$$

und homogenen Dirichlet-Randwerten

$$u(t, \xi) = 0, \quad t \in [0, T], \quad \xi \in \partial\Omega. \quad (3.4)$$

Ausführliche Einführungen und Herleitungen dieser Gleichungen findet man auch in der Standardliteratur, wie zum Beispiel in [Cia88], [Hol00] oder [MH83]. Dabei nehmen wir noch an, dass

$$0 < \inf_{x \in \Omega} \rho(x) =: \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq \rho_{\max} := \sup_{x \in \Omega} \rho(x) < \infty \quad (3.5)$$

gilt.

Das Ziel unserer Untersuchungen ist nun die inverse Bestimmung der Verzerrungsenergie-dichte C in einem hyperelastischen Material aus Daten, die Messungen von am Rand der Struktur angebrachten piezokeramischen Sensoren entsprechen. In dem Artikel [SW14] wurde aufbauend auf Ergebnissen aus [KL07] gezeigt, dass dieses inverse Problem unter

gewissen Bedingungen an die Eingangsdaten (f, u_0, u_1) und den Zeitpunkt T eindeutig lösbar ist, falls sich die Verzerrungsenergiedichte C als konische Kombination endlich vieler Funktionen C_1, \dots, C_N darstellen lässt,

$$C = \sum_{K=1}^N \alpha_K C_K. \quad (3.6)$$

Damit lässt sich (3.1) schreiben als

$$\rho(x)\ddot{u}(t, x) - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) = f(t, x) \quad (3.7)$$

für $t \in [0, T]$ und $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dabei ist $\alpha_K \geq 0$, $K = 1, \dots, N$, und $C_K : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Bedingungen $C_K(x, 0) = 0$ und $\nabla_Y C_K(x, 0) = 0$ für alle $K = 1, \dots, N$ und $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, da bereits insgesamt die Verzerrungsenergiedichte C diese letzten beiden Bedingungen erfüllen muss. Es sei dabei angemerkt, dass mindestens ein $\bar{K} \in \{1, \dots, N\}$ mit $\alpha_{\bar{K}} \neq 0$ existieren muss, da es ansonsten im Folgenden zu Widersprüchen beziehungsweise zur Division durch Null kommt. Unter der Annahme, dass ein geeignetes Dictionary $\{C_1, \dots, C_N\}$ gegeben ist, reduziert sich die Rekonstruktion der Verzerrungsenergiedichte C schließlich auf ein endlichdimensionales (nichtlineares) Identifikationsproblem für den Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^\top \in \mathbb{R}_+^N$. Mathematisch lässt sich somit unser Problem der Bestimmung der Verzerrungsenergiedichte C eines hyperelastischen Materials aus Messdaten als das folgende inverse Problem formulieren:

Gegeben (f, u_0, u_1) und das Verschiebungsfeld $u(t, x)$ für $t \in [0, T]$ und $x \in \Omega$, bestimme die Koeffizienten $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_+^N$, sodass u das Anfangs-Randwertproblem (3.7) mit (3.2) bis (3.4) erfüllt. Für die weiteren Untersuchungen dieses Problems definieren wir durch \mathcal{T} den sogenannten *Vorwärtsoperator* (oder auch Lösungsoperator des Vorwärtsproblems), welcher einen Vektor $\alpha \in D(\mathcal{T})$ abbildet auf die eindeutige Lösung von (3.7), (3.2)–(3.4) für feste Daten (f, u_0, u_1) . Dann ist unser inverses Problem gegeben durch die nichtlineare Operatorgleichung

$$\mathcal{T}(\alpha) = \tilde{u}. \quad (3.8)$$

Dabei bezeichnen wir mit $D(\mathcal{T})$ den Definitionsbereich von \mathcal{T} , der später noch spezifiziert wird.

Kapitel 4

Fréchet-Ableitung des Vorwärtsoperators

Für die Linearisierung, aber auch für die iterative Lösung des im letzten Kapitel hergeleiteten inversen Problems ist es notwendig die Fréchet-Ableitung des Vorwärtsoperators \mathcal{T} beziehungsweise dessen adjungierten Operator zu bestimmen. Dies ist Gegenstand dieses Kapitels.

4.1 Voraussetzungen und Hilfsresultate

4.1.1 Voraussetzungen

Im Folgenden müssen wir einige Annahmen treffen, die für die weiteren Beweise zum einen nötig sind und zum anderen notwendig sind, um die Resultate aus [SW14] und [WS15] verwenden zu können. Zunächst schränken wir die Nichtlinearität der Funktionen C_K und damit von C ein. Aus diesem Grund nehmen wir an, dass positive Konstanten $\kappa_K^{[0]}$, $\kappa_K^{[1]}$, $\mu_K^{[0]}$, $\mu_K^{[1]}$ für $K = 1, \dots, N$ existieren, sodass

$$\kappa_K^{[0]} \|Y\|_{Fr}^2 \leq C_K(x, Y) \leq \mu_K^{[0]} \|Y\|_{Fr}^2 \quad (4.1)$$

und

$$\kappa_K^{[1]} \|H\|_{Fr}^2 \leq H : \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y) H \leq \mu_K^{[1]} \|H\|_{Fr}^2 \quad (4.2)$$

für alle $H, Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und fast alle $x \in \Omega$ erfüllt wird. Des Weiteren müssen noch verschiedene höhere Ableitungen der C_K nach den Komponenten von Y wesentlich beschränkt sein. Dazu nehmen wir an, dass weitere Konstanten $\mu_K^{[2]}, \dots, \mu_K^{[7]}$ für $K = 1, \dots, N$ existieren

mit

$$\|\partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3})} \leq \mu_K^{[2]} \quad (4.3)$$

$$\|\partial_{Y_{ab}} \partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3})} \leq \mu_K^{[3]} \quad (4.4)$$

$$\|\partial_l \partial_{Y_{kl}} C_K\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3})} \leq \mu_K^{[4]} \quad (4.5)$$

$$\|\partial_{Y_{ij}} \partial_l \partial_{Y_{kl}} C_K\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3})} \leq \mu_K^{[5]} \quad (4.6)$$

$$\|\partial_l \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3})} \leq \mu_K^{[6]} \quad (4.7)$$

$$\|\partial_{Y_{pq}} \partial_l \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3})} \leq \mu_K^{[7]} \quad (4.8)$$

für $a, b, i, j, k, l, p, q = 1, 2, 3$ und $K = 1, \dots, N$. Außerdem gelte noch

$$\partial_{Y_{ij}} \partial_l \partial_{Y_{kl}} C(x, Y) = \partial_l \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C(x, Y) \quad (4.9)$$

für alle $i, j, k, l = 1, 2, 3$, was zum Beispiel erfüllt ist für $C \in \mathcal{C}^4(\Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$. Schließlich fordern wir, dass die Abbildung $Y \mapsto C_K(x, Y)$ dreimal stetig differenzierbar für fast alle $x \in \Omega$ ist.

Als Nächstes wollen wir die Menge der zulässigen Koeffizientenvektoren $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^\top$, welche die konische Kombination (3.6) spezifizieren, einschränken auf

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}((\kappa^{[a]})_{a=0,1}, (\mu^{[b]})_{b=0,\dots,7}) \\ := & \left\{ \alpha \in [0, \infty)^N : \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[a]} \geq \kappa^{[a]}, \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[b]} \leq \mu^{[b]} \right. \\ & \left. \text{für alle } a = 0, 1 \text{ und } b = 0, \dots, 7 \right\}. \end{aligned}$$

Diese Menge ist direkt verbunden mit den Einschränkungen der Nichtlinearität von C_K (siehe (4.1) bis (4.8)). Schließlich definieren wir noch die Menge der zulässigen Lösungen u des Vorwärtsproblems (3.1). Diese sei für gegebene Konstanten M_i , $i = 0, \dots, 4$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} & := \mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4) \\ := & \left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty((0, T) \times \Omega, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,\infty}((0, T), H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)) : \\ \|\partial_l \partial_j u\|_{L^\infty((0, T), L^2(\Omega, \mathbb{R}^3))} \leq M_0, \|\partial_l \dot{u}_k\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)} \leq M_1, \\ \|\partial_l \partial_j \dot{u}_k\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)} \leq M_2, \|\partial_l \partial_j u_k\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)} \leq M_3, \\ \|\partial_l u_k\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)} \leq M_4 \\ \text{für alle } i, j, k, l = 1, 2, 3 \end{array} \right\}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Damit man $u \in \mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ annehmen kann, sollten $\partial\Omega$, f , u_0 , u_1 und C_K hinreichend glatt sein.

Es sei darauf hingewiesen, dass diese Menge $\mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ im Vergleich zu der Menge $\mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3)$ in dem Artikel [WS15] und der Dissertation [Wös13] lediglich eine Erweiterung um die zusätzliche Bedingung $\|\partial_l u_k\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq M_4$ für $k, l = 1, 2, 3$ und ein $M_4 > 0$ darstellt.

4.1.2 Hilfsresultate

Für die Untersuchungen und Beweise im nächsten Abschnitt benötigen wir noch einige Resultate, die wir in diesem Abschnitt zusammenfassen wollen. Dazu definieren wir zunächst für $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

für $u \in H_0^1(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) : y = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \subset H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=1} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

und für $u \in H^2(\Omega)$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Weitere Erläuterungen dazu findet man beispielsweise in [Trö09]. Aus der Poincaré-Ungleichung folgt, dass es eine Konstante $C_\Omega > 0$ gibt, sodass

$$\|u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{1 + C_\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \quad (4.11)$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gilt. Dies liefert für $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3))$

$$\|w\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega, \mathbb{R}^3))} \leq \sqrt{1 + C_\Omega} \|w\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3))}. \quad (4.12)$$

Außerdem folgt direkt aus der Definition der H^1 -Norm und der L^2 -Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \quad (4.13)$$

für alle $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \quad (4.14)$$

für alle $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Der Sobolevsche Einbettungssatz liefert für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dass eine Konstante $C_{SE} > 0$ existiert mit

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_{SE} \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (4.15)$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$.

Lemma 4.1. *Für alle $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gilt*

$$\left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |\partial_j u_i(x)| \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 27(1 + C_{\Omega}) C_{SE}^2 \|u\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2. \quad (4.16)$$

Beweis. Sei $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Dann folgt mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, (4.11), (4.15) und einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |\partial_j u_i(x)| \right)^4 dx \\ & \leq 9^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_j u_i(x)|^4 dx \\ & = 9^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \|\partial_j u_i\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ & \leq 9^3 C_{SE}^4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \|\partial_j u_i\|_{H^1(\Omega)}^4 \\ & \leq 9^3 (1 + C_{\Omega})^2 C_{SE}^4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{|\alpha|=1} \|\partial_{\alpha} \partial_j u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^2 \\ & \leq 9^3 (1 + C_{\Omega})^2 C_{SE}^4 \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{|\alpha|=1} \|\partial_{\alpha} \partial_j u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^2 \\ & \leq 9^3 (1 + C_{\Omega})^2 C_{SE}^4 \|u\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^4. \end{aligned}$$

Dies liefert die Aussage des Lemmas. □

Die Beweise im nächsten Abschnitt basieren in der Regel auf dem folgenden Lemma von Gronwall:

Lemma 4.2. (*Lemma von Gronwall*) Seien $\psi \in C(0, T)$ und $b, k \in L^1(0, T)$ nichtnegative Funktionen. Wenn ψ die Ungleichung

$$\psi(\tau) \leq a + \int_0^\tau b(t)\psi(t) dt + \int_0^\tau k(t)\psi(t)^p dt$$

für alle $\tau \in [0, T]$ mit Konstanten $p \in (0, 1)$ und $a \geq 0$ erfüllt, so gilt

$$\psi(\tau) \leq \exp\left(\int_0^\tau b(t) dt\right) \left[a^{1-p} + (1-p) \int_0^\tau k(t) \exp\left((p-1) \int_0^t b(\sigma) d\sigma\right) dt \right]^{1/(1-p)} \quad (4.17)$$

für alle $\tau \in [0, T]$.

Einen Beweis dieser Version des Lemmas kann man beispielsweise in [BS92] finden. Allerdings benötigen wir in der Regel das Lemma von Gronwall nur für den Fall, dass a, b, k konstant sind und $p = \frac{1}{2}$ gilt. Dann erhält man als Ergebnis dieses Lemmas für (4.17) die folgende vereinfachte Ungleichung

$$\psi(\tau) \leq \left[\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) a^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{b} \left(\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) - 1 \right) \right]^2 \quad (4.18)$$

für alle $\tau \in [0, T]$.

Einen Beweis des folgenden Lemmas, welches wir für einige Abschätzungen in den Beweisen im nächsten Abschnitt benötigen, findet man in der Dissertation [Wös13].

Lemma 4.3. *Eine Implikation von (4.2) ist die Gültigkeit von*

$$|\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y)| \leq \mu_K^{[1]} \quad (4.19)$$

für alle $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, fast alle $x \in \Omega$ und alle $i, j, k, l = 1, 2, 3$ sowie für alle $K = 1, \dots, N$.

Als Nächstes zitieren wir eine Eindeutigkeitsaussage für das Vorwärtsproblem und somit für die Lösung des Anfangs-Randwertproblems (3.1)-(3.4). Dieses wichtige Resultat wird in [WS15] bewiesen.

Satz 4.1. (*Theorem 2.1 in [WS15]*) Seien u, \bar{u} zwei Lösungen des Problems (3.1) bis (3.4) zu den Parametern und Anfangswerten (α, u_0, u_1, f) beziehungsweise $(\bar{\alpha}, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{f})$.

Außerdem nehmen wir $u, \bar{u} \in \mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ an. Wenn für

$$\kappa := \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \quad \text{und} \quad \mu := \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[1]} \quad (4.20)$$

die Bedingung

$$\frac{7}{8}\mu < \kappa < \frac{9}{8}\mu \quad (4.21)$$

erfüllt ist und es Konstanten $\kappa(\alpha)$ und $\mu(\alpha)$ gibt mit

$$\kappa \geq \kappa(\alpha) > 0 \quad \text{und} \quad \mu \leq \mu(\alpha), \quad (4.22)$$

dann existieren Konstanten \bar{C}_0, \bar{C}_1 und \bar{C}_2 , sodass die Stabilitätsabschätzung

$$\begin{aligned} & \left[\rho \|(\dot{u} - \dot{\bar{u}})(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \kappa(\alpha) \|(\nabla u - \nabla \bar{u})(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \right. \\ & + \rho \|(\ddot{u} - \ddot{\bar{u}})(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \kappa(\alpha) \|(\nabla \dot{u} - \nabla \dot{\bar{u}})(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \\ & \left. + \|(u - \bar{u})(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \bar{C}_0 \left[\mu(\alpha) \|u_0 - \bar{u}_0\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \|u_1 - \bar{u}_1\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & + \bar{C}_1 \|f - \bar{f}\|_{W^{1,1}((0,T), L^2(\Omega, \mathbb{R}^3))} + \bar{C}_2 \|\alpha - \bar{\alpha}\|_\infty \end{aligned}$$

für alle $t \in (0, T)$ gilt. Dabei hängen die Konstanten \bar{C}_0, \bar{C}_1 und \bar{C}_2 nur ab von T, M_0, M_1, M_2, M_3 ,

$$\bar{C}(\alpha) := \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \left(\sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \right)^{-1} \quad (4.23)$$

und

$$\hat{C}(\alpha) := \frac{\hat{K}}{1 - \sqrt{1 - \epsilon}} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[1]} \left(\sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \right)^{-2}, \quad (4.24)$$

wobei $\epsilon > 0$ eine Konstante ist, deren Existenz aus (4.21) folgt. Die Konstante $\hat{K} > 0$ ist definiert durch die folgende Stetigkeit der Einbettung

$$\begin{aligned} H_0^{2,1}(\Omega, \mathbb{R}^3) & := H^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \hookrightarrow H^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \\ \|g\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} & \leq \hat{K} \|g\|_{H_0^{2,1}(\Omega, \mathbb{R}^3)} = \hat{K} \left(\sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\partial_i \partial_j g_k(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

für alle $g \in H_0^{2,1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Außerdem sind die Konstanten \bar{C}_0 , \bar{C}_1 und \bar{C}_2 gleichmäßig beschränkt, wenn $(M_0, M_1, M_2, M_3, \bar{C}(\alpha), \hat{C}(\alpha), T) \in \mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \subset (0, \infty)^7$ beschränkt ist.

Die Funktion \bar{C} ist aufgrund der Nichtnegativität der Koeffizienten α_K positiv und beschränkt,

$$0 < \zeta := \frac{\min_{1 \leq K \leq N} \mu_K^{[2]}}{\max_{1 \leq K \leq N} \kappa_K^{[1]}} \leq \bar{C}(\alpha) \leq \frac{\max_{1 \leq K \leq N} \mu_K^{[2]}}{\min_{1 \leq K \leq N} \kappa_K^{[1]}} =: \eta < \infty. \quad (4.25)$$

Als Nächstes zeigen wir ein Korollar, welches wir für den Beweis von Satz 4.7 benötigen und unmittelbar aus Satz 4.1 folgt.

Korollar 4.1. *Seien $u, \bar{u} \in \mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ zwei Lösungen des Problems (3.1)-(3.4). Dann folgt für $\tilde{u} = u - \bar{u}$ und alle $t \in (0, T)$*

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_j \tilde{u}_i(t, x)|^4 dx \leq (2M_4)^2 \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2. \quad (4.26)$$

Beweis. Aus der Bedingung $u, \bar{u} \in \mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ folgt direkt mithilfe der Dreiecksungleichung

$$\|\partial_j \tilde{u}_i\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)} = \|\partial_j u_i - \partial_j \bar{u}_i\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)} \leq \|\partial_j u_i\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)} + \|\partial_j \bar{u}_i\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)} \leq 2M_4$$

für alle $i, j = 1, 2, 3$. Daraus ergibt sich

$$\frac{|\partial_j \tilde{u}_i(t, x)|}{2M_4} \leq 1$$

und somit

$$\left(\frac{|\partial_j \tilde{u}_i(t, x)|}{2M_4} \right)^4 \leq \left(\frac{|\partial_j \tilde{u}_i(t, x)|}{2M_4} \right)^2$$

für alle $i, j = 1, 2, 3$ und $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$. Dies führt schließlich auf die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_j \tilde{u}_i(t, x)|^4 dx \\ &= \sum_{i,j=1}^3 (2M_4)^4 \int_{\Omega} \left(\frac{|\partial_j \tilde{u}_i(t, x)|}{2M_4} \right)^4 dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 (2M_4)^4 \int_{\Omega} \left(\frac{|\partial_j \tilde{u}_i(t, x)|}{2M_4} \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2M_4)^2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_j \tilde{u}_i(t, x)|^2 dx \\
&= (2M_4)^2 \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2
\end{aligned}$$

und somit die Aussage des Korollars. \square

Wir definieren für die gesamte Arbeit

$$V := H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \text{und} \quad H := L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

und identifizieren H nach dem Satz von Riesz mit seinem Dualraum H' . Dann erhalten wir das Gelfandsche Tripel

$$V \subset H = H' \subset V'$$

mit dichten, stetigen Einbettungen. Des Weiteren betrachten wir

$$U := H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

und damit gilt

$$U \subset V \subset H = H' \subset V' \subset U'$$

mit dichten, stetigen Einbettungen. Außerdem benötigen wir im nächsten Abschnitt den folgenden Satz, der von Lions [Lio71] stammt, über die Lösbarkeit linearer Anfangswertprobleme einer speziellen Form.

Satz 4.2. (Lions) Seien $\mathcal{A}(t)$, $t \in [0, T]$, eine Familie von Operatoren, die von U nach U' abbilden, und $a(t; v_1, v_2) := \langle \mathcal{A}(t)v_1, v_2 \rangle_{U' \times U}$ zugehörige Bilinearformen in U , die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) $a(t; v_1, v_2)$ ist differenzierbar in $t \forall v_1, v_2 \in U$, $t \in [0, T]$.
- (ii) $a(t; v_1, v_2) = a(t; v_2, v_1) \forall v_1, v_2 \in U$, $t \in [0, T]$.
- (iii) Es existieren Konstanten $\alpha > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$a(t; v, v) + \lambda \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_U^2 \quad \forall v \in U, t \in [0, T].$$

Dann existiert für jedes $f \in L^2(0, T; H)$, $v_0 \in U$ und $v_1 \in H$ ein eindeutiges, schwaches

$v \in L^2(0, T; U)$ mit $v' \in L^2(0, T; H)$, welches

$$\begin{aligned} v'' + \mathcal{A}(t)v &= f \quad \text{auf } (0, T), \\ v(0) &= v_0, \\ v'(0) &= v_1 \end{aligned} \tag{4.27}$$

erfüllt. Weiterhin ist die Abbildung

$$\{f, v_0, v_1\} \mapsto \{v, v'\}$$

stetig als eine Abbildung von $L^2(0, T; H) \times U \times H$ nach $L^2(0, T; U) \times L^2(0, T; H)$.

Bemerkung 4.1. In [LMK72] zeigen Lions und Magenes, dass die Lösung v auch stetig ist von $[0, T]$ nach U und v' stetig ist von $[0, T]$ nach H .

Das folgende Lemma resultiert direkt aus einer Anwendung von Theorem 30.4 in [Wlo87] (siehe [BSS15]).

Lemma 4.4. *Angenommen, es gilt $f \in H^1(0, T; H)$, $v_0 \in H_0^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \subset U$ und $v_1 \in U$. Dann erfüllt die eindeutige Lösung v von (4.27)*

$$v \in \left(H^1(0, T; U) \cap H^2(0, T; H) \right)$$

sowie

$$v \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega, \mathbb{R}^3)).$$

Damit haben wir nun alle Hilfsresultate zusammen und können zur Fréchet-Ableitung unseres Lösungsoperators kommen.

4.2 Die Fréchet-Ableitung des Lösungsoperators

Sei der Definitionsbereich $D(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}_+^N$ von \mathcal{T} gegeben durch

$$D(\mathcal{T}) := \{ \alpha \in \mathbb{R}_+^N : (3.7), (3.2)–(3.4) \text{ hat eine eindeutige Lösung } u \in \mathcal{A} \} \tag{4.28}$$

und wir nehmen an, dass $\text{int}(D(\mathcal{T})) \neq \emptyset$ gilt. Im Folgenden wollen wir nun zunächst einmal die Gâteaux-Ableitung von \mathcal{T} charakterisieren.

Lemma 4.5. Die Gâteaux-Ableitung $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$ des Lösungsoperators \mathcal{T} erfüllt für $h \in \mathbb{R}_+^N$ das folgende lineare Differentialgleichungssystem mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen

$$\rho \ddot{v}(t, x) - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u(t, x)) : \nabla v(t, x)] = \nabla \cdot \nabla_Y C_h(x, \nabla u(t, x)) \quad (4.29)$$

für $t \in [0, T]$ und $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$v(0, x) = \dot{v}(0, x) = 0 \quad (4.30)$$

für $x \in \Omega$ und

$$v(t, \xi) = 0 \quad (4.31)$$

für alle $t \in [0, T]$ und $\xi \in \partial\Omega$.

Dabei haben wir $u_0(x) = u_1(x) = 0$ für $x \in \Omega$ und die Randbedingungen (3.4) angenommen. Wir setzen

$$C_\alpha := \sum_{K=1}^N \alpha_K C_K \quad \text{beziehungsweise} \quad C_h := \sum_{K=1}^N h_K C_K.$$

Beweis von Lemma 4.5: Es seien $\alpha, h \in \mathbb{R}_+^N$ und $s \in \mathbb{R}_+$ hinreichend klein. Dann betrachten wir $u(\alpha + sh)$ als Lösung von (3.1) bezüglich $\alpha + sh$ und f mit den Anfangswerten $u_0(\alpha + sh) = u_1(\alpha + sh) = 0$. Analog sei $u(\alpha)$ eine Lösung von (3.1) bezüglich α und f , die die Anfangsbedingungen $u_0(\alpha) = u_1(\alpha) = 0$ erfüllt. Folglich gilt

$$\rho(\ddot{u}(\alpha + sh) - \ddot{u}(\alpha)) - \nabla \cdot [\nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha + sh)) - \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha))] = 0. \quad (4.32)$$

Wir nehmen an, dass der folgende Grenzwert existiert:

$$v := \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{u(\alpha + sh) - u(\alpha)}{s}. \quad (4.33)$$

Demzufolge stellt $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$ die Gâteaux-Ableitung an der Stelle α in Richtung h dar. An dieser Stelle wollen wir darauf hinweisen, dass die Bildung des Grenzwertes wohldefiniert ist, da wir angenommen haben, dass $\alpha \in D(\mathcal{T})$ nicht isoliert ist. Das Ziel ist es nun eine partielle Differentialgleichung zu bestimmen, welche v als Lösung hat. Dazu ist es

notwendig die Gleichung (4.32) umzuformulieren.

$$\begin{aligned}
& \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha + sh)) - \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha)) \\
= & \sum_{j=1}^N (\alpha_j + sh_j) \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha + sh)) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha)) \\
= & \sum_{j=1}^N (\alpha_j + sh_j) \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha + sh)) - \sum_{j=1}^N (\alpha_j + sh_j) \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha)) \\
& + \sum_{j=1}^N (\alpha_j + sh_j) \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha)) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha)) \\
= & \sum_{j=1}^N (\alpha_j + sh_j) [\nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha + sh)) - \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha))] \\
& + \sum_{j=1}^N sh_j \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha)) \\
= & \sum_{j=1}^N (\alpha_j + sh_j) [\nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha + sh)) - \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha))] \\
& + s \nabla_Y C_h(x, \nabla u(\alpha))
\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit

$$F(r) := \nabla_Y C_j(x, r \nabla u(\alpha + sh) + (1-r) \nabla u(\alpha))$$

für $r \in [0, 1]$ die folgende Gleichungskette

$$\begin{aligned}
& \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha + sh)) - \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha)) \\
= & F(1) - F(0) \\
= & \int_0^1 F'(r) dr \\
= & \int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y C_j(x, r \nabla u(\alpha + sh) + (1-r) \nabla u(\alpha)) : (\nabla u(\alpha + sh) - \nabla u(\alpha)) dr.
\end{aligned}$$

Für

$$Y_r := \nabla_Y \nabla_Y C_j(x, r \nabla u(\alpha + sh) + (1-r) \nabla u(\alpha))$$

gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} Y_r = \nabla_Y \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha))$$

aufgrund der Stetigkeit von $\alpha \mapsto u(\alpha)$ (siehe Satz 4.1) und wir erhalten damit

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} [\nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha + sh)) - \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha))] \\ = & \lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^N (\alpha_j + sh_j) \int_0^1 Y_r : \frac{1}{s} (\nabla u(\alpha + sh) - \nabla u(\alpha)) dr \\ & + \nabla_Y C_h(x, \nabla u(\alpha)) \\ = & \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y C_j(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla v dr + \nabla_Y C_h(x, \nabla u(\alpha)) \\ = & \nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla v + \nabla_Y C_h(x, \nabla u(\alpha)). \end{aligned}$$

Wenn wir das unter Verwendung der Definition von v in die Gleichung (4.32) einsetzen, liefert dies die Differentialgleichung für v . Außerdem folgt direkt aus der Definition von v und (3.4) die Randbedingung für v . Die Anfangsbedingungen für v ergeben sich unmittelbar aus den Voraussetzungen $u_0(\alpha + sh) = u_1(\alpha + sh) = 0$ und $u_0(\alpha) = u_1(\alpha) = 0$. Die Existenz des Grenzwertes in (4.33) wird später durch Satz 4.5 begründet, wo wir sogar zeigen, dass der Lösungsoperator Fréchet-differenzierbar ist. \square

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass eine eindeutige Lösung von (4.29)-(4.31) existiert. Dies liefert der folgende Satz.

Satz 4.3. *Das Anfangs-Randwertproblem (4.29)-(4.31) besitzt in $L^2(0, T; V)$ eine eindeutige, schwache Lösung $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$.*

Beweis. Die Differentialgleichung (4.29) ist linear in v . Deswegen können wir den Satz 4.2 anwenden. Dazu definieren wir zunächst für $v \in U$

$$\mathcal{A}(t)v := -\nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla v] \quad (4.34)$$

und

$$f_1 := \nabla \cdot \nabla_Y C_h(x, \nabla u(\alpha)). \quad (4.35)$$

Damit können wir (4.29) schreiben in der Form

$$\rho \ddot{v} + \mathcal{A}(t)v = f_1. \quad (4.36)$$

Nach Voraussetzung gilt $\rho > 0$ mit (3.5), sodass wir mit $\bar{\mathcal{A}}(t) = \frac{1}{\rho}\mathcal{A}(t)$ und $\bar{f}_1 = \frac{1}{\rho}f_1$ die Gleichung (4.29) schreiben können als

$$\ddot{v} + \bar{\mathcal{A}}(t)v = \bar{f}_1 \quad \text{auf } (0, T) \quad (4.37)$$

mit $v(0, x) = \dot{v}(0, x) = 0$ für $x \in \Omega$ und $v(t, \xi) = 0$ für $t \in [0, T]$ und $\xi \in \partial\Omega$. Um nun Satz 4.2 auf (4.37) anwenden zu können, müssen wir als Erstes zeigen, dass die Abbildung $\bar{\mathcal{A}}(t) : U \rightarrow U'$ linear und stetig auf U ist, das heißt, dass $\bar{\mathcal{A}}(t)v \in U'$ für alle $v \in U$ gilt. Dazu definieren wir

$$a(t; w, v) := \langle \bar{\mathcal{A}}(t)w, v \rangle_{U' \times U} \quad \text{für } w, v \in U$$

und formulieren dies mithilfe von Lemma A.4 zunächst um. Dabei gelte $w, v \in U$.

$$\begin{aligned} a(t; w, v) &:= \langle \bar{\mathcal{A}}(t)w, v \rangle_{U' \times U} \\ &= \langle -\nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla w], v \rangle_{U' \times U} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla w) : \nabla v \, dx \end{aligned} \quad (4.38)$$

An dieser Darstellung kann man sehen, dass $a(t; w, v)$ für festes $t \in [0, T]$ linear in $w \in U$ und $v \in U$ ist und damit tatsächlich eine Bilinearform auf U definiert. Außerdem erhalten wir mit Lemma 4.3 und mehrfacher Anwendung der Hölder-Ungleichung für $w, v \in U$:

$$\begin{aligned} & \left| a(t; w, v) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla w) : \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j,k,l=1}^3 \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} |\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, \nabla u(\alpha))| |\partial_l w_k| |\partial_j v_i| \, dx \\ &\leq \sum_{i,j,k,l=1}^3 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[1]} \int_{\Omega} |\partial_l w_k| |\partial_j v_i| \, dx \\ &\leq \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[1]} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l w_k| \right)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j v_i| \right)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 9 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[1]} \left(\int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 |\partial_l w_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\partial_j v_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 9 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[1]} \|w\|_U \|v\|_U
\end{aligned}$$

und somit

$$|a(t; w, v)| \leq 9 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[1]} \|w\|_U \|v\|_U,$$

wobei $9 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[1]} > 0$ gilt. Dies liefert die Stetigkeit von $a(t; w, v)$ in $w, v \in U$.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $\bar{A}(t)$ abbildet von U nach U' . Als Nächstes gilt es die Bedingungen von Satz 4.2 zu zeigen. Die Differenzierbarkeit von $a(t; w, v)$ für $w, v \in U$ folgt aus den Annahmen, dass die Abbildung $Y \mapsto C_K(x, Y)$ dreimal stetig differenzierbar ist und $u \in \mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ gilt.

Die Symmetrie erhalten wir mithilfe der Bedingung

$$\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y) = \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{ij}} C_K(x, Y) \quad (4.39)$$

für alle $i, j, k, l = 1, 2, 3$ und $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und (4.38) folgendermaßen. Es seien $w, v \in U$, dann folgt

$$\begin{aligned}
&a(t; w, v) \\
&= \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla w) : \nabla v dx \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^3 \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, \nabla u(\alpha)) \partial_l w_k \partial_j v_i dx \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^3 \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{ij}} C_K(x, \nabla u(\alpha)) \partial_j v_i \partial_l w_k dx \\
&= \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla v) : \nabla w dx \\
&= a(t; v, w).
\end{aligned}$$

Schließlich müssen wir noch die dritte Bedingung zeigen. Dazu seien $v \in U$ und $t \in [0, T]$.

Dann gilt mit (4.2)

$$\begin{aligned}
& a(t; v, v) \\
&= \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla v) : \nabla v \, dx \\
&\geq \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \int_{\Omega} \|\nabla v\|_{Fr}^2 \, dx \\
&= \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_j v_i|^2 \, dx = \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \|v\|_U^2
\end{aligned}$$

und damit

$$a(t; v, v) \geq \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \|v\|_U^2. \quad (4.40)$$

Sei $\gamma := \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} > 0$. Dies liefert zusammen mit der Definition der Räume U , V und H

$$a(t; v, v) + \gamma \|v\|_H^2 \geq \gamma \|v\|_U^2 + \gamma \|v\|_H^2 = \gamma \|v\|_V^2 \geq \gamma \|v\|_U^2$$

für alle $v \in U$ und wir erhalten mit $\lambda := \gamma$ und $\alpha := \gamma$ die dritte Bedingung aus Satz 4.2. Abschließend müssen wir noch zeigen, dass $\bar{f}_1 \in L^2(0, T; H)$ gilt. Aufgrund der Definition $\bar{f}_1 = \frac{1}{\rho} f_1$ mit $\rho > 0$ folgt dies unmittelbar aus $f_1 \in L^2(0, T; H)$. Dies bedeutet, dass wir die Bedingung $\|f_1\|_{L^2(0, T; H)} < \infty$ beweisen müssen. Mithilfe der Definition von f_1 und Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \|f_1\|_{L^2(0, T; H)}^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^3 \partial_j (\partial_{Y_{ij}} C_h(x, \nabla u(\alpha))) \right|^2 \, dx \, dt \\
&\leq 3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} |\partial_j (\partial_{Y_{ij}} C_h(x, \nabla u(\alpha)))|^2 \, dx \, dt \\
&\leq 3N \|h\|_{\infty}^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{K=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} |\partial_j (\partial_{Y_{ij}} C_K(x, \nabla u(\alpha)))|^2 \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Mit (4.2), (4.5) und (4.10) führt dies zu

$$\|f_1\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq 27NT \operatorname{vol}(\Omega) \|h\|_\infty^2 \sum_{K=1}^N \left(\mu_K^{[4]} + 9M_0 \mu_K^{[1]} \right)^2$$

und mit $\mu_K^{[4]} + 9M_0 \mu_K^{[1]} > 0$ für alle $K = 1, \dots, N$ schließlich zu

$$\|f_1\|_{L^2(0,T;H)} \leq \sqrt{27NT \operatorname{vol}(\Omega)} \sum_{K=1}^N \left(\mu_K^{[4]} + 9M_0 \mu_K^{[1]} \right) \|h\|_\infty < \infty.$$

Somit sind alle Voraussetzungen für Satz 4.2 erfüllt, was beweist, dass für

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla_Y C_h(x, \nabla u(\alpha)) \in L^2(0, T; H)$$

eine eindeutige Lösung $v \in L^2(0, T; U)$ von (4.37) mit $\dot{v} \in L^2(0, T; H)$ existiert und damit besitzt auch (4.29) eine eindeutige Lösung $v \in L^2(0, T; U)$. Mithilfe von (4.12), der stetigen Einbettung von U in V , folgt damit aber auch, dass $v \in L^2(0, T; V)$ gilt. \square

Bemerkung 4.2. Nach Satz 4.3 existiert eine eindeutige Lösung v des Anfangs-Randwertproblems (4.29) bis (4.31) für alle $h \in \mathbb{R}^N$ und damit ist $\mathcal{T}'(\alpha)h$ wohldefiniert auf \mathbb{R}^N für alle nicht-isolierten $\alpha \in D(\mathcal{T})$. Dies spielt eine wichtige Rolle in Hinblick auf den Beweis, dass $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$ die Fréchet-Ableitung darstellt.

Damit \mathcal{T} tatsächlich auch Gâteaux- beziehungsweise Fréchet-differenzierbar ist, muss außerdem $\mathcal{T}'(\alpha) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^N, L^2(0, T; V))$ gelten, das heißt, dass der Operator $\mathcal{T}'(\alpha)$ angewendet auf $h \in \mathbb{R}_+^N$ linear und stetig ist. Die Linearität folgt direkt aus der Tatsache, dass die Differentialgleichung (4.29) für $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$ linear in v ist. Die Stetigkeit zeigen wir in dem folgenden Satz.

Satz 4.4. Die Gâteaux-Ableitung $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$ ist stetig in h für alle $h \in \mathbb{R}_+^N$, das heißt, es gibt eine Konstante $L_1 > 0$, sodass $\|v\|_{L^2(0,T;V)} \leq L_1 \|h\|_\infty$ gilt.

Bemerkung 4.3. Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, dass die Gâteaux-Ableitung $h \mapsto \mathcal{T}'(\alpha)h$ als endlichdimensionale, lineare Abbildung automatisch stetig auf \mathbb{R}_+^N ist. Allerdings benötigen wir die Stetigkeitskonstante für den Beweis von Satz 4.5. Aus diesem Grund ist der Beweis von Satz 4.4 im Folgenden gegeben.

Beweis. Multiplikation der Gleichung (4.29) mit $2\dot{v}$ und Integration über Ω liefert

$$2\langle \rho \ddot{v}(t, \cdot), \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} - 2\langle \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u(t, x)) : \nabla v(t, \cdot)], \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}$$

$$= 2\langle \nabla \cdot [\nabla_Y C_h(x, \nabla u(t, x))], \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}$$

für $t \in [0, T]$. Mithilfe partieller Integration unter Verwendung von $v \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega, \mathbb{R}^3))$ (siehe Lemma 4.4) folgt

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) : \nabla v(t, x)) : \nabla \dot{v}(t, x) dx + \\ & \quad + 2\langle \rho \ddot{v}(t, \cdot), \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\ & = 2\langle \nabla \cdot [\nabla_Y C_h(x, \nabla u(t, x))], \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Wir betrachten wieder

$$a(t; v, \dot{v}) = \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) : \nabla v(t, x)) : \nabla \dot{v}(t, x) dx \quad (4.42)$$

und

$$f_1 = \nabla \cdot \nabla_Y C_h(x, \nabla u(t, x)).$$

Die Bilinearform $a(t; \cdot, \cdot)$ ist für alle $t \in [0, T]$ symmetrisch auf V , da

$$\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y) = \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{ij}} C_K(x, Y)$$

für alle $i, j, k, l = 1, 2, 3$ und $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt (siehe Beweis von Satz 4.3). Damit erhalten wir

$$2a(t; v, \dot{v}) + \rho \partial_t \|\dot{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 = 2\langle f_1(t, \cdot), \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}$$

und damit

$$\partial_t [a(t; v, v) + \rho \|\dot{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2] = a'(t; v, v) + 2\langle f_1(t, \cdot), \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}.$$

Integration dieser Gleichung über $[0, \tau]$ mit $0 \leq \tau \leq T$ liefert mithilfe der Anfangsbedingungen $v(0, x) = \dot{v}(0, x) = 0$

$$a(\tau; v, v) + \rho \|\dot{v}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 = \int_0^\tau a'(t; v, v) dt + 2 \int_0^\tau \langle f_1(t, \cdot), \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt. \quad (4.43)$$

Im Folgenden wollen wir nun die einzelnen Bestandteile dieser Gleichung geeignet ab-

schätzen. Als Erstes folgt mit (4.2)

$$\begin{aligned} & a(\tau; v, v) \\ &= \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u(\tau, x)) : \nabla v(\tau, x)) : \nabla v(\tau, x) dx \\ &\geq \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_j v_i(\tau, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Dies liefert

$$a(\tau; v, v) \geq \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \|\nabla v(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2.$$

Mit den Voraussetzungen von Satz 4.1 kann man dies weiter abschätzen und erhält

$$a(\tau; v, v) \geq \kappa(\alpha) \|\nabla v(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2. \quad (4.44)$$

Des Weiteren ergibt sich mit (4.3) und (4.10)

$$\begin{aligned} & a'(t; v, v) \\ &= \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} \left([\nabla_Y \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) : \nabla \dot{u}(\alpha)] : \nabla v(t, x) \right) : \nabla v(t, x) dx \\ &\leq \sum_{K=1}^N \alpha_K \sum_{\substack{i,j,k, \\ l,p,q=1}}^3 \int_{\Omega} |\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C_K(x, \nabla u(\alpha))| |\partial_q \dot{u}_p(\alpha)| |\partial_j v_i| |\partial_l v_k| dx \\ &\leq 9 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} M_1 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |\partial_j v_i| \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit erneuter Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$a'(t; v, v) \leq 81 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} M_1 \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2$$

und daraus ergibt sich mit Satz 4.1 und (4.25)

$$a'(t; v, v) \leq \frac{729}{8} \eta \mu(\alpha) M_1 \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2. \quad (4.45)$$

Unter Verwendung von (4.5), (4.2) und (4.3) lässt sich der noch fehlende Teil der Gleichung

(4.43) folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned}
& \langle f_1(t, \cdot), \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\
&= \langle \nabla \cdot \nabla_Y C_h(x, \nabla u(t, x)), \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\
&= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \partial_l [\partial_{Y_{kl}} C_h(x, \nabla u(\alpha))] \dot{v}_k(t, x) dx \\
&\leq \sum_{K=1}^N h_K \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_l \partial_{Y_{kl}} C_K(x, \nabla u(\alpha))| |\dot{v}_k(t, x)| dx \\
&\quad + \sum_{K=1}^N h_K \sum_{i,j,k,l=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, \nabla u(\alpha))| |\partial_l \partial_j u_i(\alpha)| |\dot{v}_k(t, x)| dx \\
&\leq 3 \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[4]} \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} |\dot{v}_k(t, x)| dx \\
&\quad + \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[1]} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \int_{\Omega} |\dot{v}_k(t, x)| |\partial_l \partial_j u_i(\alpha)| dx \\
&\leq 3\sqrt{3\text{vol}(\Omega)} \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[4]} \|\dot{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} + 27M_0 \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[1]} \|\dot{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der letzten Abschätzung mehrfach die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung angewendet und (4.10) ausgenutzt. Somit erhalten wir mithilfe von (3.5)

$$\langle f_1(t, \cdot), \dot{v}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq 3\rho_{\min}^{-\frac{1}{2}} \sum_{K=1}^N h_K \left(\sqrt{3\text{vol}(\Omega)} \mu_K^{[4]} + 9M_0 \mu_K^{[1]} \right) \rho^{\frac{1}{2}} \|\dot{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}. \quad (4.46)$$

Damit folgt aus (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) und (4.25) mit

$$S_1 := \rho_{\min}^{-\frac{1}{2}} \sum_{K=1}^N \left(\sqrt{3\text{vol}(\Omega)} \mu_K^{[4]} + 9M_0 \mu_K^{[1]} \right)$$

schließlich

$$\begin{aligned}
& \kappa(\alpha) \|\nabla v(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{v}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \\
&\leq \frac{729\mu(\alpha)}{8\kappa(\alpha)} \eta M_1 \int_0^{\tau} \kappa(\alpha) \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 dt
\end{aligned}$$

$$+6\|h\|_\infty S_1 \int_0^\tau \left(\kappa(\alpha) \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{v}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Wir wollen nun (4.18) auf diese Ungleichung anwenden mit $a = 0$, $p = \frac{1}{2}$,

$$\psi(\tau) = \kappa(\alpha) \|\nabla v(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{v}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2,$$

$$b = \frac{729\mu(\alpha)}{8\kappa(\alpha)} \eta M_1$$

und

$$k = 6\|h\|_\infty S_1.$$

Dies liefert dann für $\tau \in [0, T]$

$$\kappa(\alpha) \|\nabla v(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{v}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \leq \frac{k^2}{b^2} \left(\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) - 1 \right)^2$$

und schließlich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v(\tau, \cdot)\|_U &= \|\nabla v(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \\ &\leq \frac{16S_1\sqrt{\kappa(\alpha)}}{243\mu(\alpha)\eta M_1} \left(\exp\left(\frac{729\mu(\alpha)}{16\kappa(\alpha)}\eta M_1\tau\right) - 1 \right) \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Wir erhalten also mit

$$\bar{L}_1 := \frac{16S_1\sqrt{\kappa(\alpha)}}{243\mu(\alpha)\eta M_1}$$

und

$$S(\tau) := \exp\left(\frac{729\mu(\alpha)}{16\kappa(\alpha)}\eta M_1\tau\right) - 1 \quad (4.47)$$

die Abschätzung

$$\|v(\tau, \cdot)\|_U \leq \bar{L}_1 S(\tau) \|h\|_\infty. \quad (4.48)$$

Die Funktion $S : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ aus (4.47) ist nichtnegativ und stetig für $\tau \in [0, T]$, da $729\mu(\alpha)\eta M_1/(16\kappa(\alpha)) > 0$ aufgrund der gemachten Annahmen gilt. Außerdem ist die Funktion S monoton wachsend in $\tau \in [0, T]$, da

$$S'(\tau) = \frac{729\mu(\alpha)}{16\kappa(\alpha)}\eta M_1 \exp\left(\frac{729\mu(\alpha)}{16\kappa(\alpha)}\eta M_1\tau\right) > 0$$

für alle $\tau \in [0, T]$ gilt. Damit folgt $S(\tau) \leq S(T)$ für alle $\tau \in [0, T]$ und wir erhalten

$$\|v(\tau, \cdot)\|_U \leq \bar{L}_1 S(T) \|h\|_\infty. \quad (4.49)$$

Ebenso ist $P(\tau) := (S(\tau))^2$ nichtnegativ und stetig. Damit liefert der Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_0^T P(\tau) d\tau = P(\xi)T$$

für ein $\xi \in [0, T]$. Da P auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, T]$ monoton wachsend ist, gilt $P(\xi) \leq P(T)$ für alle $\xi \in [0, T]$ und schließlich

$$\int_0^T P(\tau) d\tau \leq P(T)T.$$

Somit folgt mit (4.48)

$$\begin{aligned} & \|v\|_{L^2(0,T;U)}^2 \\ &= \int_0^T \|v(\tau, \cdot)\|_U^2 d\tau \\ &\leq \bar{L}_1^2 \|h\|_\infty^2 \int_0^T P(\tau) d\tau \\ &\leq \bar{L}_1^2 P(T)T^2 \|h\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Dies liefert

$$\|v\|_{L^2(0,T;U)} \leq \bar{L}_1 S(T)T \|h\|_\infty$$

und mithilfe von (4.12)

$$\|v\|_{L^2(0,T;V)} \leq L_1 \|h\|_\infty \quad (4.51)$$

mit

$$L_1 := \sqrt{1 + C_\Omega \bar{L}_1} \left(\exp \left(\frac{729\mu(\alpha)}{16\kappa(\alpha)} \eta M_1 T \right) - 1 \right) T > 0,$$

was zu zeigen war. \square

Bemerkung 4.4. Es sei angemerkt, dass genau genommen die Multiplikation der Gleichung (4.29) mit $2\dot{v}$ nicht zulässig ist, da dies nicht in $L^2(0, T; U)$ liegt. Anstelle dessen

müsste man übergehen zur Galerkin-Approximation und dann schwache Grenzwerte betrachten. Da dies allerdings unnötig technisch ist, verzichten wir darauf und nehmen die kleine Unsauberkeit hinsichtlich der Notation an dieser Stelle in Kauf.

Um schließlich zu zeigen, dass der Lösungsoperator \mathcal{T} nicht nur Gâteaux-differenzierbar, sondern auch Fréchet-differenzierbar ist, müssen wir noch die folgende Konvergenz für $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$ zeigen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|u(\alpha + h) - u(\alpha) - v\|_{L^2(0,T;V)}}{\|h\|_\infty} = 0. \quad (4.52)$$

Dies zeigen wir im nächsten Satz.

Satz 4.5. *Es existiert $L_2 > 0$ mit*

$$\|u(\alpha + h) - u(\alpha) - v\|_{L^2(0,T;V)} \leq L_2 \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \quad (4.53)$$

für $\|h\|_\infty \rightarrow 0$.

Für den Beweis dieses Satzes müssen wir zunächst den Satz 4.1 anpassen an unsere Problemstellung. Dazu betrachten wir $f = \bar{f}$, $u_0 = \bar{u}_0$, $u_1 = \bar{u}_1$, $u = u(\alpha + h)$, $\bar{u} = u(\alpha)$ und $\tilde{u} = u(\alpha + h) - u(\alpha)$. Außerdem setzen wir α aus Satz 4.1 auf $\alpha + h$ und $\bar{\alpha}$ auf α . Dann löst $\tilde{u} = u(\alpha + h) - u(\alpha)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{\tilde{u}}(t, x) - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot [\nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha + h)) - \nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha))] \\ &= \nabla \cdot \nabla_Y C_h(x, \nabla u(\alpha + h)) \end{aligned} \quad (4.54)$$

für $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$,

$$\tilde{u}(0, x) = \dot{\tilde{u}}(0, x) = 0 \quad (4.55)$$

für $x \in \Omega$ beziehungsweise

$$\tilde{u}(t, \xi) = 0 \quad (4.56)$$

für $(t, \xi) \in [0, T] \times \partial\Omega$ und wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left[\rho \|\dot{\tilde{u}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \kappa(\alpha) \|\nabla \tilde{u}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\ddot{\tilde{u}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \kappa(\alpha) \|\nabla \dot{\tilde{u}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \bar{C}_2 \|h\|_\infty \end{aligned} \quad (4.57)$$

für $\tilde{u} = u(\alpha + h) - u(\alpha)$. Schließlich benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 4.6. Für $t \in [0, T]$ erfüllt $\tilde{u} = u(\alpha + h) - u(\alpha)$ mit

$$u(\alpha + h), u(\alpha) \in \mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$$

die Abschätzung

$$\left(\sum_{k,l=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \leq \sqrt{2M_1} \|\nabla \dot{\tilde{u}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.58)$$

Beweis. Es gilt nach der Dreiecksungleichung und (4.10) für alle $k, l = 1, 2, 3$

$$|\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)| = |\partial_l \dot{u}_k(\alpha + h) - \partial_l \dot{u}_k(\alpha)| \leq |\partial_l \dot{u}_k(\alpha + h)| + |\partial_l \dot{u}_k(\alpha)| \leq 2M_1$$

mit $M_1 > 0$ (siehe Satz 4.1). Dementsprechend gilt

$$\frac{|\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)|}{2M_1} \leq 1$$

und daraus folgt

$$\left(\frac{|\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)|}{2M_1} \right)^4 \leq \left(\frac{|\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)|}{2M_1} \right)^2 \quad (4.59)$$

für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. Somit erhalten wir mit (4.59)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k,l=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left((2M_1)^4 \sum_{k,l=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{|\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)|}{2M_1} \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \left((2M_1)^4 \sum_{k,l=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{|\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)|}{2M_1} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left((2M_1)^2 \sum_{k,l=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_l \dot{\tilde{u}}_k(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{2M_1} \|\nabla \dot{\tilde{u}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Beweis von Satz 4.5: Es sei $d := u(\alpha + h) - u(\alpha) - v$. Dann löst d aufgrund von (4.29) und (4.54) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{d}(t, \cdot) - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla d(t, \cdot)] \\ = & \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot [\nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha + h)) - \nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha)) \\ & \quad - \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla \tilde{u}(t, \cdot)] \\ & + \sum_{K=1}^N h_K \nabla \cdot [\nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha + h)) - \nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha))]. \end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichung mit $2\dot{d}$ und Integration über Ω liefert mithilfe von Lemma A.4, wobei die Randterme wegen (4.31) und (4.56) verschwinden, und

$$Y_p := p \nabla u(\alpha + h) + (1 - p) \nabla u(\alpha), \quad p \in [0, 1],$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} & 2 \langle \rho \ddot{d}(t, \cdot), \dot{d}(t, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\ & + 2 \underbrace{\sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u(\alpha)) : \nabla d(t, \cdot)) : \nabla \dot{d}(t, \cdot) \, dx}_{=: a(t; d, \dot{d})} \\ = & \underbrace{-2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 s ([\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_{rs}) : \nabla \tilde{u}(t, \cdot)] : \nabla \tilde{u}(t, \cdot)) : \nabla \dot{d}(t, \cdot) \, dr \, ds \, dx}_{=: (A)} \\ & \underbrace{-2 \sum_{K=1}^N h_K \int_{\Omega} \int_0^1 (\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_s) : \nabla \tilde{u}(t, \cdot)) : \nabla \dot{d}(t, \cdot) \, ds \, dx}_{=: (B)}. \end{aligned}$$

Die Bilinearform $a(t; \cdot, \cdot)$, $t \in [0, T]$, haben wir bereits im Beweis von Satz 4.4 betrachtet. Somit gilt die Symmetrie von $a(t; \cdot, \cdot)$ gemäß der Voraussetzung (4.39). Die Differentialgleichung für d weicht von der Form her im Vergleich mit (4.41) nur bezüglich der rechten

Seite ab. Aus diesem Grund folgt (vgl. Beweis von Satz 4.4) für $\tau \in [0, T]$

$$a(\tau; d, d) + \rho \|\dot{d}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 = \int_0^\tau a'(t; d, d) dt + 2 \int_0^\tau [-(A) - (B)] dt. \quad (4.60)$$

Einsetzen von (4.44) und (4.45) in diese Gleichung liefert

$$\begin{aligned} & \sum_{K=1}^N \alpha_K \kappa_K^{[1]} \|\nabla d(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{d}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \\ & \leq \int_0^\tau \frac{729}{8} \eta \mu(\alpha) M_1 \|\nabla d(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 dt + 2 \int_0^\tau [-(A) - (B)] dt. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Somit müssen wir nur $2 \int_0^\tau [-(A) - (B)] dt$ abschätzen. Dabei gilt

$$\int_0^\tau [-(A) - (B)] dt = - \int_0^\tau (A) dt - \int_0^\tau (B) dt \leq \left| \int_0^\tau (A) dt \right| + \left| \int_0^\tau (B) dt \right|.$$

Wir schätzen nun die beiden Summanden auf der rechten Seite ab. Dabei lassen wir aus Platzgründen jeweils (t, \cdot) weg und verwenden $\alpha_K, h_K \geq 0$, $K = 1, \dots, N$. Für den Ersten gilt mit (4.3), (4.4) und (4.10)

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau (A) dt \right| \\ & = \left| \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s (\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_{rs}) : \nabla \tilde{u} : \nabla \tilde{u}) : \nabla \dot{d} dr ds dx dt \right| \\ & = \left| \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s \sum_{\substack{p,q,k, \\ l,i,j=1}}^3 \partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y_{rs}) \partial_q \tilde{u}_p \partial_l \tilde{u}_k \partial_j \dot{d}_i dr ds dx dt \right| \\ & \leq \left| \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_0^\tau \partial_t \left[\int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s \sum_{\substack{p,q,k, \\ l,i,j=1}}^3 \partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y_{rs}) \partial_q \tilde{u}_p \partial_l \tilde{u}_k \partial_j \dot{d}_i dr ds dx \right] dt \right| \\ & \quad + \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s \sum_{\substack{a,b,p,q, \\ k,l,i,j=1}}^3 |\partial_{Y_{ab}} \partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y_{rs})| \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times |rs\partial_b\dot{u}_a(\alpha+h) + (1-rs)\partial_b\dot{u}_a(\alpha)| |\partial_q\tilde{u}_p| |\partial_l\tilde{u}_k| |\partial_j d_i| dr ds dx dt \\
& + \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s \sum_{\substack{p,q,k, \\ l,i,j=1}}^3 |\partial_{Y_{pq}}\partial_{Y_{ij}}\partial_{Y_{kl}}C_K(x, Y_{rs})| |\partial_q\dot{\tilde{u}}_p| |\partial_l\tilde{u}_k| |\partial_j d_i| dr ds dx dt \\
& + \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s \sum_{\substack{p,q,k, \\ l,i,j=1}}^3 |\partial_{Y_{pq}}\partial_{Y_{ij}}\partial_{Y_{kl}}C_K(x, Y_{rs})| |\partial_q\tilde{u}_p| |\partial_l\dot{\tilde{u}}_k| |\partial_j d_i| dr ds dx dt
\end{aligned}$$

und mithilfe der Anfangsbedingungen für \tilde{u} und erneuter Anwendung von (4.3) weiter

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{K=1}^N \alpha_K \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s \sum_{\substack{p,q,k, \\ l,i,j=1}}^3 |\partial_{Y_{pq}}\partial_{Y_{ij}}\partial_{Y_{kl}}C_K(x, Y_{rs})| |\partial_q\tilde{u}_p(\tau)| |\partial_l\tilde{u}_k(\tau)| |\partial_j d_i(\tau)| dr ds dx \\
& + \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} M_1 \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s \sum_{\substack{a,b,p,q, \\ k,l,i,j=1}}^3 |\partial_q\tilde{u}_p| |\partial_l\tilde{u}_k| |\partial_j d_i| dr ds dx dt \\
& + 2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 s \sum_{\substack{p,q,k, \\ l,i,j=1}}^3 |\partial_q\tilde{u}_p| |\partial_l\dot{\tilde{u}}_k| |\partial_j d_i| dr ds dx dt \\
& \leq \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_\Omega \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l\tilde{u}_k(\tau)| \right)^2 \sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i(\tau)| dx \\
& + \frac{9}{2} M_1 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} \int_0^\tau \int_\Omega \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l\tilde{u}_k| \right)^2 \sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i| dx dt \\
& + \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^\tau \int_\Omega \left(\sum_{p,q=1}^3 |\partial_q\tilde{u}_p| \right) \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l\dot{\tilde{u}}_k| \right) \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i| \right) dx dt
\end{aligned}$$

und mit mehrfacher Anwendung der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \left(\int_\Omega \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l\tilde{u}_k(\tau)| \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i(\tau)| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{9}{2} M_1 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} \int_0^\tau \left(\int_\Omega \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l\tilde{u}_k| \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^\tau \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{p,q=1}^3 |\partial_q \tilde{u}_p| \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l \dot{\tilde{u}}_k| \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\
& \quad \times \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
\leq & \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l \tilde{u}_k(\tau)| \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(9 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i(\tau)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{9}{2} M_1 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} \int_0^\tau \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l \tilde{u}_k| \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(9 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
& + \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^\tau \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{p,q=1}^3 |\partial_q \tilde{u}_p| \right)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(9 \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 |\partial_l \dot{\tilde{u}}_k|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\
& \quad \times \left(9 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\partial_j d_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt
\end{aligned}$$

sowie mit (4.16) und $\|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \|\tilde{u}(\tau, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} + \|v(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{81}{2} (1 + C_{\Omega}) C_{SE}^2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \|\tilde{u}(\tau, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\
& \quad + \frac{729}{2} (1 + C_{\Omega}) C_{SE}^2 M_1 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} \int_0^\tau \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt \\
& \quad + 81 \sqrt{1 + C_{\Omega}} C_{SE} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^\tau \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\
& \quad \times \left(\int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 |\partial_l \dot{\tilde{u}}_k|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} dt.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (4.58) kann man dies weiter abschätzen mit

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{81}{2} (1 + C_{\Omega}) C_{SE}^2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \|\tilde{u}(\tau, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \left(\|\tilde{u}(\tau, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} + \|v(\tau, \cdot)\|_U \right) \\
& \quad + \frac{729}{2} (1 + C_{\Omega}) C_{SE}^2 M_1 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} \int_0^\tau \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +81\sqrt{2M_1(1+C_\Omega)}C_{SE} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^\tau \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\
& \quad \times \|\nabla \dot{\tilde{u}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^{\frac{1}{2}} dt
\end{aligned}$$

und mithilfe von (4.48) und (4.57)

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{81}{2}(1+C_\Omega)C_{SE}^2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \bar{C}_2^2 \|h\|_\infty^2 (\bar{C}_2 + \bar{L}_1 S(T)) \|h\|_\infty \\
& \quad + \frac{729}{2}(1+C_\Omega)C_{SE}^2 M_1 \bar{C}_2^2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} \|h\|_\infty^2 \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt \\
& \quad + 81\sqrt{\frac{2M_1(1+C_\Omega)}{\sqrt{\kappa(\alpha)}}} C_{SE} \bar{C}_2^{\frac{3}{2}} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt \\
& = \tilde{B}_1 \|h\|_\infty^3 + \tilde{B}_2(h) \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt
\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{B}_1 := \frac{81}{2}(1+C_\Omega)C_{SE}^2 \bar{C}_2^2 (\bar{C}_2 + \bar{L}_1 S(T)) \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_2(h) & := 81\sqrt{\frac{2M_1(1+C_\Omega)}{\sqrt{\kappa(\alpha)}}} C_{SE} \bar{C}_2^{\frac{3}{2}} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \\
& \quad + \frac{729}{2}(1+C_\Omega)C_{SE}^2 M_1 \bar{C}_2^2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mithilfe der Voraussetzungen aus Abschnitt 4.1.1 und in Satz 4.1 können wir diese Konstanten abschätzen durch

$$\tilde{B}_1 \leq B_1 := \frac{729}{16}(1+C_\Omega)C_{SE}^2 \bar{C}_2^2 (\bar{C}_2 + \bar{L}_1 S(T)) \eta \mu(\alpha) \tag{4.62}$$

beziehungsweise

$$\tilde{B}_2(h) \leq B_2(h) := \frac{729}{8} \sqrt{\frac{2M_1(1+C_\Omega)}{\sqrt{\kappa(\alpha)}}} C_{SE} \bar{C}_2^{\frac{3}{2}} \eta \mu(\alpha)$$

$$+ \frac{729}{2} (1 + C_\Omega) C_{SE}^2 M_1 \bar{C}_2^2 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[3]} \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}}. \quad (4.63)$$

Die Konstante $B_2(h)$ konvergiert für $\|h\|_\infty \rightarrow 0$ und festes, endliches α gegen die Konstante

$$B_2 := \frac{729}{8} \sqrt{\frac{2M_1(1 + C_\Omega)}{\sqrt{\kappa(\alpha)}}} C_{SE} \bar{C}_2^{\frac{3}{2}} \eta \mu(\alpha),$$

die unabhängig von α und h ist. Damit erhalten wir

$$\left| \int_0^\tau (A) dt \right| \leq B_1 \|h\|_\infty^3 + B_2(h) \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt. \quad (4.64)$$

Nun wenden wir uns dem zweiten Integral zu und werden es abschätzen, wobei wir wieder aus Platzgründen (t, \cdot) weglassen werden.

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau (B) dt \right| \\ &= \left| \int_0^\tau \sum_{K=1}^N h_K \int_\Omega \int_0^1 (\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_s) : \nabla \tilde{u}) : \nabla \dot{d} ds dx dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^\tau \partial_t \left[\sum_{K=1}^N h_K \sum_{i,j,k,l=1}^N \int_\Omega \int_0^1 \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y_s) \partial_j \tilde{u}_i \partial_l d_k ds dx \right] dt \right| \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j,k, \\ l,p,q=1}}^3 \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \sum_{K=1}^N h_K |\partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y_s)| \\ &\quad \quad \times (s |\partial_q \dot{u}_p(\alpha + h)| + (1 - s) |\partial_q \dot{u}_p(\alpha)|) |\partial_j \tilde{u}_i| |\partial_l d_k| ds dx dt \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^3 \int_0^\tau \int_\Omega \int_0^1 \sum_{K=1}^N h_K |\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y_s)| |\partial_j \tilde{u}_i| |\partial_l d_k| ds dx dt \end{aligned}$$

Dies können wir mithilfe von (4.4), (4.2), (4.10), der Hölder-Ungleichung, der Abschätzung

$$\|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \|\tilde{u}(\tau, \cdot)\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} + \|v(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}$$

und der Anfangsbedingung für \tilde{u} folgendermaßen weiter abschätzen

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[1]} \int_{\Omega} \sum_{i,j,k,l=1}^3 |\partial_j \tilde{u}_i(\tau)| |\partial_l d_k(\tau)| dx \\
&\quad + 9M_1 \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[2]} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \sum_{i,j,k,l=1}^3 |\partial_j \tilde{u}_i| |\partial_l d_k| dx dt \\
&\quad + \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[1]} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \sum_{i,j,k,l=1}^3 |\partial_j \dot{\tilde{u}}_i| |\partial_l d_k| dx dt \\
&\leq 9 \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[1]} \|\nabla \tilde{u}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\
&\quad + 81M_1 \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[2]} \int_0^{\tau} \|\nabla \tilde{u}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt \\
&\quad + 9 \sum_{K=1}^N h_K \mu_K^{[1]} \int_0^{\tau} \|\nabla \dot{\tilde{u}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt
\end{aligned}$$

und mit (4.57)

$$\begin{aligned}
&\leq 9 \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} (\bar{C}_2 + \bar{L}_1 S(T)) \|h\|_{\infty}^3 \\
&\quad + 81M_1 \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} \|h\|_{\infty}^2 \int_0^{\tau} \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt \\
&\quad + 9 \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} \|h\|_{\infty}^2 \int_0^{\tau} \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt \\
&\leq 9 \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} (\bar{C}_2 + \bar{L}_1 S(T)) \|h\|_{\infty}^3 \\
&\quad + 9 \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} \left(9M_1 \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \right) \|h\|_{\infty}^2 \int_0^{\tau} \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt.
\end{aligned}$$

Mit

$$B_3 := 9 \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} (\bar{C}_2 + \bar{L}_1 S(T)) \quad (4.65)$$

und

$$B_4 := 9 \frac{\bar{C}_2}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} \left(9M_1 \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \right) \quad (4.66)$$

ergibt sich

$$\left| \int_0^\tau (B) dt \right| \leq B_3 \|h\|_\infty^3 + B_4 \|h\|_\infty^2 \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt. \quad (4.67)$$

Insgesamt erhalten wir aus (4.61) mit (4.64) und (4.67)

$$\begin{aligned} & \kappa(\alpha) \|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \rho \|\dot{d}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \\ & \leq \frac{729\mu(\alpha)}{8} \eta M_1 \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 dt \\ & \quad + 2B_1 \|h\|_\infty^3 + 2B_2(h) \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt \\ & \quad + 2B_3 \|h\|_\infty^3 + 2B_4 \|h\|_\infty^2 \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} dt \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \kappa(\alpha) \|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \rho \|\dot{d}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \\ & \leq \frac{729\mu(\alpha)}{8\kappa(\alpha)} \eta M_1 \int_0^\tau \kappa(\alpha) \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \rho \|\dot{d}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 dt \\ & \quad + 2(B_1 + B_3) \|h\|_\infty^3 + 2(B_2(h) + B_4 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}}) \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} \times \\ & \quad \times \int_0^\tau \left(\kappa(\alpha) \|d(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \rho \|\dot{d}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Darauf wenden wir jetzt (4.18) mit

$$\psi := \kappa(\alpha) \|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \rho \|\dot{d}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2,$$

$$a := 2(B_1 + B_3) \|h\|_\infty^3,$$

$$b := \frac{729\mu(\alpha)}{8\kappa(\alpha)} \eta M_1 > 0$$

und

$$k := 2 \left(B_2(h) + B_4 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} \right) \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\kappa(\alpha)}}$$

an. Dann erhalten wir für $\tau \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \kappa(\alpha) \|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \rho \|\dot{d}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \\ & \leq \left[\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) a^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{b} \left(\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) - 1 \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Dies führt schließlich mit den oben definierten Konstanten auf

$$\begin{aligned} & \|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\ & \leq \left(\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) \sqrt{2(B_1 + B_3)} + \left(\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) - 1 \right) \frac{2}{b\sqrt{\kappa(\alpha)}} \left(B_2(h) + B_4 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{\kappa(\alpha)}} \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Das Ziel ist es nun zunächst anstelle von $\|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}$ die Norm $\|d\|_{L^2(0, T; U)}$ abzuschätzen. Dazu quadrieren wir die letzte Ungleichung, verwenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und integrieren über $\tau \in [0, T]$ analog zum Beweis von Satz 4.4.

$$\begin{aligned} \|d\|_{L^2(0, T; U)}^2 &= \int_0^T \|d(\tau, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &\leq 2 \|h\|_\infty^3 \left(\frac{2(B_1 + B_3)}{\kappa(\alpha)} \int_0^T \exp(b\tau) d\tau \right. \\ & \quad \left. + \frac{4(B_2(h) + B_4 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}})^2}{b^2 \kappa(\alpha)^2} \int_0^T \left(\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) - 1 \right)^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Wie wir im Beweis von Satz 4.4 gesehen haben, gilt

$$\int_0^T \left(\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) - 1 \right)^2 d\tau = \int_0^T S(\tau)^2 d\tau \leq S(T)^2 T.$$

Analog dazu kann man zeigen, dass für die nichtnegative, stetige, monoton wachsende

Funktion $R(\tau) := \exp(b\tau)$ für alle $\tau \in [0, T]$ und $b > 0$ gilt

$$\int_0^T R(\tau) d\tau = \int_0^T \exp(b\tau) d\tau \leq R(T)T.$$

Damit erhalten wir aus (4.69)

$$\begin{aligned} & \|d\|_{L^2(0,T;U)}^2 \\ & \leq 2 \left(\frac{2(B_1 + B_3)}{\kappa(\alpha)} \exp(bT)T + \frac{4(B_2(h) + B_4\|h\|_\infty^{\frac{1}{2}})^2}{b^2\kappa(\alpha)^2} \left(\exp\left(\frac{1}{2}bT\right) - 1 \right)^2 T \right) \|h\|_\infty^3. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schließlich mit

$$\begin{aligned} \bar{L}_2 & := \sqrt{2} \left(\frac{2(B_1 + B_3)}{\kappa(\alpha)} \exp(bT)T + \frac{4(B_2(h) + B_4\|h\|_\infty^{\frac{1}{2}})^2}{b^2\kappa(\alpha)^2} \left(\exp\left(\frac{1}{2}bT\right) - 1 \right)^2 T \right)^{\frac{1}{2}} \\ & > 0 \end{aligned} \tag{4.70}$$

die Abschätzung

$$\|d\|_{L^2(0,T;U)} \leq \bar{L}_2 \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}}.$$

Dies liefert zusammen mit (4.11) die Ungleichung

$$\|d\|_{L^2(0,T;V)} \leq L_2 \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}}$$

mit $L_2 := \sqrt{1 + C_\Omega \bar{L}_2}$ und somit die Aussage des Satzes. \square

4.3 Die Adjungierte der Fréchet-Ableitung

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass der Lösungsoperator \mathcal{T} Fréchet-differenzierbar ist. Im Folgenden wollen wir nun den adjungierten Operator der Fréchet-Ableitung bestimmen. Dieser spielt zum Beispiel dann eine entscheidende Rolle, wenn man iterative Löser, wie etwa das Landweber-Verfahren oder Newton-ähnliche Methoden, auf das inverse Problem $\mathcal{T}(\alpha) = u^\delta$ mit Messdaten u^δ oder ähnliche Probleme anwenden möchte. Dies werden wir auch später in Abschnitt 6.5 sehen. Nach Lemma 4.5 löst $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$ das lineare Differentialgleichungssystem (4.29) mit homogenen Anfangs- und Randwerten (4.30) und (4.31). Wir wollen somit die hyperbolische Gleichung (4.29) mit beliebiger

rechter Seite $f \in L^2(0, T; H)$

$$\rho \ddot{v}(t, x) - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u(t, x)) : \nabla v(t, x)] = f \quad (4.71)$$

betrachten. Satz 4.3 besagt, dass dieses System zusammen mit (4.30) und (4.31) eine eindeutige Lösung $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$ in $L^2(0, T; V)$ besitzt. Es gilt sogar $v \in L^2(0, T; U)$. Wir nehmen an, dass die Anfangs- und Randwerte (4.30) und (4.31) fest seien. Dann definieren wir \mathcal{X} als den Raum, der alle Lösungen von (4.71) für $f \in L^2(0, T; H)$ enthält. Dies wollen wir zunächst mathematisch genauer erläutern. Wir definieren dazu die Abbildung

$$B : L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H) \rightarrow H^{-1}(0, T; U')$$

durch

$$Bv := \rho \ddot{v} - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u) : \nabla v] \quad (4.72)$$

in dem Sinne, dass für alle $v \in L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ und $\varphi \in H_0^1(0, T; U)$

$$\begin{aligned} & \langle Bv, \varphi \rangle_{H^{-1}(0, T; U') \times H_0^1(0, T; U)} \\ & := \int_0^T \int_\Omega \rho \dot{v}(t, x) \dot{\varphi}(t, x) - [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u(t, x)) : \nabla v(t, x)] : \nabla \varphi(t, x) \, dx \, dt \end{aligned}$$

gilt. Dabei ist $H^{-1}(0, T; U')$ der Dualraum von $H_0^1(0, T; U)$.

Dann erhalten wir $\mathcal{X} = B^{-1}(L^2(0, T; H)) \subset (L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H))$ und die Abbildung $B : \mathcal{X} \rightarrow L^2(0, T; H)$ ist bijektiv, da (4.71) mit (4.30) und (4.31) nach Satz 4.3 eindeutig lösbar ist. Aus diesem Grund existiert $B^{-1} : L^2(0, T; H) \rightarrow \mathcal{X}$, $f \mapsto v$, wobei v (4.71) mit (4.30) und (4.31) löst. Ausgestattet mit der Norm $\|v\|_{\mathcal{X}} = \|Bv\|_{L^2(0, T; H)}$ stellt \mathcal{X} einen Hilbertraum dar, der ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ ist. Die Einbettung $\mathcal{X} \hookrightarrow L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ ist sogar stetig, was Gegenstand des nächsten Lemmas ist, welches wir beweisen wollen.

Lemma 4.7. *Die Einbettung $\mathcal{X} \hookrightarrow L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ ist stetig, das heißt, es existiert eine Konstante $C > 0$, die nicht von v abhängt, sodass*

$$\|v\|_{L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)} \leq C \|v\|_{\mathcal{X}}, \quad v \in \mathcal{X},$$

gilt.

Beweis. Satz 4.2 besagt, dass die Abbildung $\bar{f} \mapsto v$ mit $\bar{f} = \frac{1}{\rho} f \in L^2(0, T; H)$ und $v \in \mathcal{X}$

mit $\mathcal{X} \subset L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ stetig ist als eine Abbildung von $L^2(0, T; H)$ nach $L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$. Damit existiert eine Konstante $\hat{C} > 0$, die unabhängig von v ist, sodass

$$\|v\|_{L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)} \leq \hat{C} \|\bar{f}\|_{L^2(0, T; H)} = \hat{C} \|BB^{-1}\bar{f}\|_{L^2(0, T; H)} = \frac{\hat{C}}{\rho} \|BB^{-1}f\|_{L^2(0, T; H)} = C \|v\|_{\mathcal{X}}$$

mit $C := \frac{\hat{C}}{\rho} > 0$ gilt. \square

Wir wollen nun den zu $\mathcal{T}'(\alpha) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{X}$ adjungierten Operator $\mathcal{T}'(\alpha)^* : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^N$ für festes $\alpha \in \mathbb{R}_+^N$ bestimmen. Dies formulieren wir in dem folgenden Satz.

Satz 4.6. *Sei $\alpha \in \text{int}(D(\mathcal{T})) \subset \mathbb{R}_+^N$ fest und $w \in \mathcal{X}$. Die Adjungierte $\mathcal{T}'(\alpha)^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{X}$ der Fréchet-Ableitung des Lösungsoperators ist gegeben durch*

$$\mathcal{T}'(\alpha)^* w = \left[- \int_0^T \int_{\Omega} \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) : \nabla(B^{-1})^* w(t, x) dx dt \right]_{K=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N, \quad (4.73)$$

wobei $p := (B^{-1})^* w$ die schwache Lösung des hyperbolischen Anfangs-Randwertproblems

$$\rho \dot{p}(t, x) - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u(t, x)) : \nabla p(t, x)] = w(t, x) \quad (4.74)$$

$$p(T, x) = \dot{p}(T, x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (4.75)$$

$$p(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in [0, T] \times \partial\Omega \quad (4.76)$$

ist.

Beweis. Sei $w \in \mathcal{X}$. Unter Verwendung des Gauß-Ostrogradski-Theorems erhalten wir

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{T}'(\alpha)h, w \rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \langle v(t, x), w(t, x) \rangle dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \langle B^{-1}(\nabla \cdot [\nabla_Y C_h(x, \nabla u(t, x))]), w(t, x) \rangle dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \langle \nabla \cdot [\nabla_Y C_h(x, \nabla u(t, x))], (B^{-1})^* w(t, x) \rangle dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_{\partial\Omega} \nabla_Y C_h(\xi, \nabla u(t, \xi)) (B^{-1})^* w(t, \xi) \cdot \nu(\xi) \, d\xi \, dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla_Y C_h(x, \nabla u(t, x)) : \nabla (B^{-1})^* w(t, x) \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sum_{K=1}^N h_K \nabla_Y C_K(\xi, \nabla u(t, \xi)) (B^{-1})^* w(t, \xi) \cdot \nu(\xi) \, d\xi \, dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{K=1}^N h_K \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) : \nabla (B^{-1})^* w(t, x) \, dx \, dt \\
&= \left\langle h, \left[\int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \nabla_Y C_K(\xi, \nabla u(t, \xi)) (B^{-1})^* w(t, \xi) \cdot \nu(\xi) \, d\xi \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \int_{\Omega} \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) : \nabla (B^{-1})^* w(t, x) \, dx \right) dt \right]_{K=1, \dots, N} \right\rangle_{\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

Dies liefert zunächst

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}'(\alpha)^* w &= \left[\int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \nabla_Y C_K(\xi, \nabla u(t, \xi)) (B^{-1})^* w(t, \xi) \cdot \nu(\xi) \, d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{\Omega} \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) : \nabla (B^{-1})^* w(t, x) \, dx \right) dt \right]_{K=1, \dots, N}. \quad (4.77)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun $p := (B^{-1})^* w$ näher untersuchen, um (4.77) umzuformulieren. Für $w \in \mathcal{X}$ und $p \in L^2(0, T; H)$ ist der adjungierte Operator $(B^{-1})^* : \mathcal{X} \rightarrow L^2(0, T; H)$ gegeben durch $w \mapsto p = (B^{-1})^* w$. Es sei außerdem $v \in \mathcal{X}$ eine Lösung von (4.29) mit (4.30) und (4.31). Dann gilt

$$\langle v, w \rangle_{\mathcal{X}} = \langle B^{-1} f, w \rangle_{\mathcal{X}} = \langle f, (B^{-1})^* w \rangle_{L^2(0, T; H)} = \langle Bv, p \rangle_{L^2(0, T; H)}.$$

Mit der Definition von B , partieller Integration und der Symmetrie von $\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u)$ lässt sich dies weiter umformen zu

$$\begin{aligned}
&\langle v, w \rangle_{\mathcal{X}} \\
&= \langle \rho \ddot{v} - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u) : \nabla v], p \rangle_{L^2(0, T; H)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle v, \rho \ddot{p} - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u) : \nabla p] \rangle_{L^2(0,T;H)} \\
&\quad + \left[\int_{\Omega} \langle v(t, x), \rho \dot{p}(t, x) \rangle dx \right]_{t=0}^T - \left[\int_{\Omega} \langle \dot{v}(t, x), \rho p(t, x) \rangle dx \right]_{t=0}^T \\
&\quad - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle p(t, \xi), \nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(\xi, \nabla u(t, \xi)) : \nabla v(t, \xi) \rangle \nu(\xi) d\xi dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle v(t, \xi), \nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(\xi, \nabla u(t, \xi)) : \nabla p(t, \xi) \rangle \nu(\xi) d\xi dt
\end{aligned}$$

und mit (4.30) und (4.31) für v

$$\begin{aligned}
&\langle v, w \rangle_{\mathcal{X}} \\
&= \langle v, \rho \ddot{p} - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u) : \nabla p] \rangle_{L^2(0,T;H)} \\
&\quad + \int_{\Omega} \langle v(T, x), \rho \dot{p}(T, x) \rangle dx - \int_{\Omega} \langle \dot{v}(T, x), \rho p(T, x) \rangle dx \\
&\quad - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle p(t, \xi), \nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(\xi, \nabla u(t, \xi)) : \nabla v(t, \xi) \rangle \nu(\xi) d\xi dt.
\end{aligned}$$

Mit den Endbedingungen

$$p(T, x) = \dot{p}(T, x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (4.78)$$

und der Randbedingung

$$p(t, \xi) = 0 \quad \forall (t, \xi) \in [0, T] \times \partial\Omega \quad (4.79)$$

erhalten wir schließlich

$$\langle v, w \rangle_{\mathcal{X}} = \langle v, \rho \ddot{p} - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u) : \nabla p] \rangle_{L^2(0,T;H)}.$$

Somit ist $p = (B^{-1})^* w$ die schwache Lösung von

$$\rho \ddot{p}(t, x) - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u(t, x)) : \nabla p(t, x)] = w(t, x) \quad (4.80)$$

$$p(T, x) = \dot{p}(T, x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (4.81)$$

$$p(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (4.82)$$

Damit vereinfacht sich die Darstellung (4.77) der Adjungierten der Fréchet-Ableitung mit $p = (B^{-1})^*w$ zu

$$\mathcal{T}'(\alpha)^*w = \left[- \int_0^T \int_{\Omega} \nabla_Y C_K(x, \nabla u(t, x)) : \nabla p(t, x) dx dt \right]_{K=1, \dots, N},$$

was den Beweis beendet. □

4.4 Die Kegelbedingung

In diesem Abschnitt wollen wir die sogenannte Kegelbedingung für unser Identifikationsproblem beweisen, da diese beispielsweise im Zusammenhang mit der Konvergenz des Landweber-Verfahrens eine große Rolle spielt. Dabei betrachten wir im Folgenden immer $u(\alpha), u(\bar{\alpha}) \in \mathcal{A}(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ zwei Lösungen des Problems (3.1) bis (3.4) zu den Parametern und Anfangswerten (α, u_0, u_1, f) beziehungsweise $(\bar{\alpha}, u_0, u_1, f)$. Einen interessanten Artikel im Zusammenhang mit dem Beweis der Kegelbedingung stellt [Han97] dar. Wir zeigen zunächst aufbauend auf den bisherigen Resultaten dieses Kapitels das folgende Lemma.

Lemma 4.8. *Für $d = u(\alpha) - u(\bar{\alpha}) - \mathcal{T}'(\alpha)h$ mit $h = \alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ gilt unter der Annahme $\|h\|_{\infty} \leq r$ für ein $r > 0$ die Bedingung*

$$d \in L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H).$$

Dabei sei

$$\|z\|_{L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)} := \|z\|_{L^2(0, T; U)} + \|z\|_{H^1(0, T; H)}$$

für alle $z \in L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$.

Beweis. Es seien im Folgenden $u = u(\alpha)$ und $\bar{u} = u(\bar{\alpha})$.

Mit der Definition der $L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ -Norm erhalten wir zunächst

$$\|d\|_{L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)} = \|d\|_{L^2(0, T; U)} + \|d\|_{H^1(0, T; H)}.$$

Im nächsten Schritt wollen wir die beiden Summanden auf der rechten Seite dieser Ungleichung einzeln abschätzen.

Für den ersten Summanden erhalten wir mithilfe des Beweises von Satz 4.5

$$\|d\|_{L^2(0,T;U)} \leq \bar{L}_2 \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \leq \bar{L}_2 r^{\frac{3}{2}} < \infty$$

mit $\bar{L}_2 < \infty$ aus (4.70).

Für den zweiten Summanden betrachten wir

$$\begin{aligned} & \|d\|_{H^1(0,T;H)}^2 \\ &= \int_0^T \left(\|d(t, \cdot)\|_H^2 + \|\dot{d}(t, \cdot)\|_H^2 \right) dt \\ &= \|d\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|\dot{d}\|_{L^2(0,T;H)}^2. \end{aligned}$$

Dabei gilt zunächst mit (4.13) und Satz 4.5

$$\|d\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq \|d\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq (1 + C_\Omega) \bar{L}_2^2 \|h\|_\infty^3 \leq (1 + C_\Omega) \bar{L}_2^2 r^3 < \infty.$$

Des Weiteren liefert (4.68) im Beweis von Satz 4.5 für $\tau \in [0, T]$ mit

$$\begin{aligned} a &:= 2(B_1 + B_3) \|h\|_\infty^3, \\ b &:= \frac{729\mu(\alpha)}{8\kappa(\alpha)} \eta M_1 > 0 \end{aligned}$$

und

$$k := 2 \left(B_2(h) + B_4 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} \right) \|h\|_\infty^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\kappa(\alpha)}}$$

die Abschätzung

$$\|\dot{d}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) a^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{b} \left(\exp\left(\frac{1}{2}b\tau\right) - 1 \right).$$

Analog zur weiteren Vorgehensweise im Beweis von Satz 4.5 erhalten wir damit

$$\|\dot{d}\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq \kappa(\alpha) \bar{L}_2^2 \|h\|_\infty^3 \leq \kappa(\alpha) \bar{L}_2^2 r^3 < \infty.$$

Somit folgt für den zweiten Summanden

$$\|d\|_{H^1(0,T;H)} < \infty$$

und schließlich die Aussage des Lemmas. \square

Der folgende Satz liefert nun das Hauptresultat dieses Abschnitts, welches die bereits erwähnte Kegelbedingung für unser Identifikationsproblem darstellt.

Satz 4.7. *Seien $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathcal{B}_{2\rho}(\tilde{\alpha}) \subset \mathbb{R}_+^N$ für ein festes $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}_+^N$ gegeben und $h = \alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^N$. Dann existiert eine Konstante $L > 0$, sodass für $d := u(\alpha) - u(\bar{\alpha}) - \mathcal{T}'(\alpha)h$ gilt*

$$\|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \leq L \|u(\alpha) - u(\bar{\alpha})\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)}. \quad (4.83)$$

Bevor wir zu dem Beweis von Satz 4.7 kommen, müssen wir allerdings noch das folgende Lemma beweisen.

Lemma 4.9. *Für $d = u(\alpha) - u(\bar{\alpha}) - \mathcal{T}'(\alpha)h \in L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)$ folgt, dass für die schwache Lösung $p = (B^{-1})^*d$ von*

$$\rho \ddot{p}(t, x) - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u(t, x)) : \nabla p(t, x)] = d(t, x) \quad (4.84)$$

$$p(T, x) = \dot{p}(T, x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (4.85)$$

$$p(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in [0, T] \times \partial\Omega \quad (4.86)$$

gilt:

$$p = (B^{-1})^*d \in L^2(0, T; U).$$

Beweis von Lemma 4.9: Nach Multiplikation der Gleichung (4.84) mit $2\dot{p}$ und anschließender Integration über Ω erhalten wir

$$2\langle \rho \ddot{p}(t, \cdot), \dot{p}(t, \cdot) \rangle_H - 2\langle \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(\cdot, \nabla u(t, \cdot)) : \nabla p(t, \cdot)], \dot{p}(t, \cdot) \rangle_H = 2\langle d(t, \cdot), \dot{p}(t, \cdot) \rangle_H$$

für $t \in [0, T]$. Eine analoge Vorgehensweise wie im Beweis von Satz 4.4 liefert für $\tau \in [0, T]$

$$a(\tau; p, p) + \rho \|\dot{p}(\tau, \cdot)\|_H^2 = \int_0^\tau a'(t; p, p) dt + 2 \int_0^\tau \langle d(t, \cdot), \dot{p}(t, \cdot) \rangle_H dt$$

mit der Funktion a aus (4.42) und ebenso

$$\begin{aligned} & \kappa(\alpha) \|\nabla p(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{p}(\tau, \cdot)\|_H^2 \\ & \leq \frac{729}{8} \eta \mu(\alpha) M_1 \int_0^\tau \|\nabla p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 dt + 2 \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_H \|\dot{p}(t, \cdot)\|_H dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{729}{8} \eta \mu(\alpha) \frac{M_1}{\kappa(\alpha)} \int_0^\tau \left(\kappa(\alpha) \|\nabla p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{p}(t, \cdot)\|_H^2 \right) dt \\ &\quad + 2 \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\rho}} \|d(t, \cdot)\|_H \left(\kappa(\alpha) \|\nabla p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{p}(t, \cdot)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall ergibt nun für $\psi(t) = \kappa(\alpha) \|\nabla p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \rho \|\dot{p}(t, \cdot)\|_H^2$, $a = 0$, $b(t) = b = 729\eta\mu(\alpha)M_1/(8\kappa(\alpha))$, $k(t) = 2\|d(t, \cdot)\|_H/\sqrt{\rho}$ und $p = 1/2$ für $\tau \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &\leq \exp(b\tau) \left[\frac{1}{2} \int_0^\tau k(t) \exp\left(-\frac{1}{2}bt\right) dt \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \exp(b\tau) \left[\int_0^\tau \frac{2}{\sqrt{\rho}} \|d(t, \cdot)\|_H \exp\left(-\frac{1}{2}bt\right) dt \right]^2. \end{aligned}$$

Dies führt mithilfe der Hölder-Ungleichung auf

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &\leq \frac{1}{\rho} \exp(b\tau) \int_0^\tau \|d(t, \cdot)\|_H^2 dt \int_0^\tau \exp(-bt) dt \\ &\leq \frac{1}{b\rho} (\exp(b\tau) - 1) \|d\|_{L^2(0, T; H)}^2. \end{aligned}$$

Des Weiteren erhalten wir damit unter Verwendung von (4.13) und Satz 4.5

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &\leq \frac{1}{b\rho} (\exp(b\tau) - 1) \|d\|_{L^2(0, T; H)}^2 \leq \frac{1}{b\rho} (\exp(b\tau) - 1) \|d\|_{L^2(0, T; V)}^2 \\ &\leq \frac{L_2^2}{b\rho} \|h\|_\infty^3 (\exp(b\tau) - 1). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|p(\tau, \cdot)\|_U^2 = \|\nabla p(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \leq \psi(\tau) \leq \frac{L_2^2}{b\kappa(\alpha)\rho} \|h\|_\infty^3 (\exp(b\tau) - 1)$$

für $\tau \in [0, T]$. Analog zur Argumentation im Beweis von Satz 4.4 erhalten wir für die Funktion $\tilde{S}(\tau) := \exp(b\tau) - 1$ für alle $\tau \in [0, T]$ mit $b > 0$, dass $\tilde{S}(\tau) \leq \tilde{S}(T)$ für alle

$\tau \in [0, T]$ gilt. Dies führt schließlich auf

$$\|p\|_{L^2(0,T;U)}^2 \leq \frac{TL_2^2}{b\kappa(\alpha)\rho} \|h\|_\infty^3 (\exp(bT) - 1) < \infty$$

und damit die Aussage des Lemmas. \square

Beweis von Satz 4.7: Nach Voraussetzung erfüllen $u = u(\alpha)$ und $\bar{u} = u(\bar{\alpha})$ die Differentialgleichungen

$$\rho\ddot{u} - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla u) = f$$

beziehungsweise

$$\rho\ddot{\bar{u}} - \sum_{K=1}^N \bar{\alpha}_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla \bar{u}) = f.$$

Außerdem gilt nach Abschnitt 4.3 beziehungsweise (4.29) für $v = \mathcal{T}'(\alpha)h$

$$Bv = \sum_{K=1}^N h_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla u).$$

Dann folgt daraus für $d = u - \bar{u} - v$ unter Zuhilfenahme der Definition und Linearität von B

$$\begin{aligned} Bd &= Bu - B\bar{u} - Bv \\ &= Bu - B\bar{u} - \sum_{K=1}^N h_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla u) \\ &= Bu - B\bar{u} - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla u) + \sum_{K=1}^N \bar{\alpha}_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla u) \\ &= Bu - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla u) - B\bar{u} + \sum_{K=1}^N \bar{\alpha}_K \nabla \cdot \nabla_Y C_K(x, \nabla \bar{u}) \\ &\quad + \sum_{K=1}^N \bar{\alpha}_K \nabla \cdot [\nabla_Y C_K(x, \nabla u) - \nabla_Y C_K(x, \nabla \bar{u})] \\ &= Bu + f - \rho\ddot{u} - B\bar{u} + \rho\ddot{\bar{u}} - f + \sum_{K=1}^N \bar{\alpha}_K \nabla \cdot [\nabla_Y C_K(x, \nabla u) - \nabla_Y C_K(x, \nabla \bar{u})] \\ &= \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_\alpha(x, \nabla u) : (\nabla \bar{u} - \nabla u)] \\ &\quad + \sum_{K=1}^N \bar{\alpha}_K \nabla \cdot [\nabla_Y C_K(x, \nabla u) - \nabla_Y C_K(x, \nabla \bar{u})]. \end{aligned}$$

Dies führt mit

$$Y_r := r\nabla u + (1-r)\nabla\bar{u}$$

für $r \in [0, 1]$ und

$$Y_{rs} := s\nabla u + (1-s)Y_r$$

für $s \in [0, 1]$ auf

$$\begin{aligned} Bd &= \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u) : (\nabla\bar{u} - \nabla u)] \\ &\quad + \sum_{K=1}^N \bar{\alpha}_K \nabla \cdot \left[\int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_r) : (\nabla u - \nabla\bar{u}) \, dr \right] \\ &= - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot \left[\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, \nabla u) : (\nabla u - \nabla\bar{u}) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_r) : (\nabla u - \nabla\bar{u}) \, dr \right] \\ &\quad - \sum_{K=1}^N h_K \nabla \cdot \left[\int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_r) : (\nabla u - \nabla\bar{u}) \, dr \right] \\ &= - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot \left[\int_0^1 \int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_{rs}) : (1-r)(\nabla u - \nabla\bar{u}) : (\nabla u - \nabla\bar{u}) \, dr \, ds \right] \\ &\quad - \sum_{K=1}^N h_K \nabla \cdot \left[\int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_r) : (\nabla u - \nabla\bar{u}) \, dr \right]. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} Bd &= - \sum_{K=1}^N \alpha_K \nabla \cdot \left[\int_0^1 \int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_{rs}) : (1-r)(\nabla u - \nabla\bar{u}) : (\nabla u - \nabla\bar{u}) \, dr \, ds \right] \\ &\quad - \sum_{K=1}^N h_K \nabla \cdot \left[\int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_r) : (\nabla u - \nabla\bar{u}) \, dr \right]. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Nach Lemma 4.8 gilt $d = u - \bar{u} - \mathcal{T}'(\alpha)h \in L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$. Außerdem sei ein

zunächst beliebiges $z \in L^2(0, T; U)$ gegeben. Dann folgt mit $\tilde{u} = u - \bar{u}$ aus (4.87)

$$\begin{aligned} & \langle Bd, z \rangle_{L^2(0, T; H)} \\ & \leq \left| - \sum_{K=1}^N \alpha_K \langle \nabla \cdot \left[\int_0^1 \int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_{rs}) : (1-r)(\nabla \tilde{u}) : (\nabla \tilde{u}) \, dr \, ds \right], z \rangle_{L^2(0, T; H)} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{K=1}^N h_K \langle \nabla \cdot \left[\int_0^1 \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_r) : (\nabla \tilde{u}) \, dr \right], z \rangle_{L^2(0, T; H)} \right| \end{aligned}$$

und mit partieller Integration, der Dreiecksungleichung und $\alpha_K \geq 0$ für alle $K = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} & \langle Bd, z \rangle_{L^2(0, T; H)} \\ & \leq \sum_{K=1}^N \alpha_K \left| \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 (\nabla_Y \nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_{rs}) : (1-r) \nabla \tilde{u} : \nabla \tilde{u}) : \nabla z \, dr \, ds \, dx \, dt \right| \\ & \quad + \sum_{K=1}^N |h_K| \left| \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 (\nabla_Y \nabla_Y C_K(x, Y_r) : (\nabla \tilde{u})) : \nabla z \, dr \, dx \, dt \right|. \end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter unter Verwendung von (4.2), (4.3), der Hölder-Ungleichung, der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Korollar 4.1 abschätzen durch

$$\begin{aligned} & \langle Bd, z \rangle_{L^2(0, T; H)} \\ & \leq \sum_{K=1}^N \alpha_K \sum_{i,j,k,l,p,q=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 (1-r) |\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C_K(x, Y_{rs})| |\partial_j \tilde{u}_i| |\partial_l \tilde{u}_k| |\partial_q z_p| \, dr \, ds \, dx \, dt \\ & \quad + \sum_{K=1}^N |h_K| \sum_{i,j,k,l=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 |\partial_{Y_{ij}} \partial_{Y_{kl}} C_K(x, Y_r)| |\partial_j \tilde{u}_i| |\partial_l z_k| \, dr \, dx \, dt \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j \tilde{u}_i| \right)^2 \left(\sum_{p,q=1}^3 |\partial_q z_p| \right) \, dx \, dt \\ & \quad + \sum_{K=1}^N |h_K| \mu_K^{[1]} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j \tilde{u}_i| \right) \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l z_k| \right) \, dx \, dt \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^T \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j \tilde{u}_i| \right)^4 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{p,q=1}^3 |\partial_q z_p| \right)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{K=1}^N |h_K| \mu_K^{[1]} \int_0^T \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j \tilde{u}_i| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k,l=1}^3 |\partial_l z_k| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
& \leq \frac{81}{2} M_4 \sum_{K=1}^N \alpha_K \mu_K^{[2]} \int_0^T \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_U \|z(t, \cdot)\|_U dt \\
& \quad + 9 \sum_{K=1}^N |h_K| \mu_K^{[1]} \int_0^T \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_U \|z(t, \cdot)\|_U dt \\
& \leq \left(\frac{81}{2} M_4 \|\alpha\|_{\infty} \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + 9 \|h\|_{\infty} \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \right) \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;U)} \|z\|_{L^2(0,T;U)} \\
& \leq \left(\frac{81}{2} M_4 (2\rho + \|\tilde{\alpha}\|_{\infty}) \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + 36\rho \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \right) \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;U)} \|z\|_{L^2(0,T;U)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit

$$\bar{L}_3 := \frac{81}{2} M_4 (2\rho + \|\tilde{\alpha}\|_{\infty}) \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + 36\rho \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} > 0 \quad (4.88)$$

die Ungleichung

$$\langle Bd, z \rangle_{L^2(0,T;H)} \leq \bar{L}_3 \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;U)} \|z\|_{L^2(0,T;U)} \quad (4.89)$$

für alle $z \in L^2(0, T; U)$.

Sei nun $z = (B^{-1})^* d$. In Lemma 4.9 haben wir dabei gesehen, dass dann $z \in L^2(0, T; U)$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}
& \langle Bd, z \rangle_{L^2(0,T;H)} \\
& = \int_0^T \langle Bd(t, \cdot), (B^{-1})^* d(t, \cdot) \rangle dt = \langle B^{-1} Bd, d \rangle_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \\
& = \|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)}^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\langle Bd, z \rangle_{L^2(0,T;H)} = \|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)}^2. \quad (4.90)$$

Außerdem gilt mit (4.11) und entsprechend dem Beweis von Lemma 4.7

$$\begin{aligned}
\|z\|_{L^2(0,T;U)}^2 &= \int_0^T \langle (B^{-1})^* d(t, \cdot), z \rangle_U dt \\
&= \langle d, B^{-1}z \rangle_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \\
&\leq \|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \|B^{-1}z\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \\
&\leq C \|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \|z\|_{L^2(0,T;H)} \\
&\leq C\sqrt{1 + C_\Omega} \|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \|z\|_{L^2(0,T;U)}
\end{aligned}$$

und damit

$$\|z\|_{L^2(0,T;U)} \leq C\sqrt{1 + C_\Omega} \|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)}. \quad (4.91)$$

Schließlich erhalten wir aus (4.89), (4.90) und (4.91)

$$\|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)}^2 \leq \bar{L}_3 C\sqrt{1 + C_\Omega} \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;U)} \|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)}$$

und somit insgesamt

$$\|d\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \leq \bar{L}_3 C\sqrt{1 + C_\Omega} \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)}, \quad (4.92)$$

da $u(\alpha) - u(\bar{\alpha}) = u(\alpha) - u(\bar{\alpha}) - v + v = d + v \in L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ unmittelbar aus Lemma 4.8, $v = \mathcal{T}'(\alpha)h \in \mathcal{X}$ und Lemma 4.7 folgt. Dies liefert mit $L := \bar{L}_3 C\sqrt{1 + C_\Omega} > 0$ die Aussage des Satzes. \square

Bemerkung 4.5. Damit die Ungleichung aus Satz 4.7 tatsächlich die Kegelbedingung darstellt, muss in der Regel $L < \frac{1}{2}$ oder zumindest $L < 1$ gefordert werden (siehe beispielsweise [HNS95]). Dass dies unter gewissen Bedingungen an $\alpha \in \mathbb{R}^N$ und $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ gilt, wird im Beweis von Satz 6.7 gezeigt.

Kapitel 5

Bestimmung eines geeigneten Dictionaries für die Verzerrungsenergiedichte

In diesem Kapitel soll nun ein geeignetes Dictionary $\{C_1, \dots, C_N\}$ für die Verzerrungsenergiedichte $C = \sum_{K=1}^N \alpha_K C_K$ (siehe Kapitel 3), welches von dem betrachteten Material abhängt, gewählt werden. Natürliche Kandidaten sind Tensorprodukte der Form

$$C_{ij}(x, Y) = v_i(x)C_j(Y). \quad (5.1)$$

Dabei wollen wir für $v_i : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit kleinem Träger, wie beispielsweise B-Splines, Wavelets oder radiale Basisfunktionen, verwenden, da sich aufgrund des kleinen Trägers eine Änderung der Koeffizienten nur lokal auswirkt. Auf v_i wird allerdings auch noch genauer in Kapitel 6 eingegangen. Für $C_j : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ wählen wir materialabhängige Funktionen $C_j(Y) = C(Y)$ in $Y = \nabla u(t, x)$ mit $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$, die im Folgenden genauer analysiert werden. Wir können nun mit den Definitionen und Zusammenhängen aus Kapitel 2 die zu untersuchenden materialabhängigen Funktionen $C_j(Y)$ in Y folgendermaßen schreiben:

$$C_j(Y) = C_j(\nabla u(t, x)) = \hat{C}_j(F(t, x)) = \hat{C}_j(\nabla u(t, x) + I)$$

für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. Allerdings werden wir in diesem Kapitel oft die in der Literatur, wie beispielsweise in [Cia88], sehr häufig verwendete Notation von $W(F)$ anstelle von $\hat{C}_j(F(t, x))$ für die Verzerrungsenergiedichte in Abhängigkeit vom Deformationsgradienten benutzen.

5.1 Konvexität der Verzerrungsenergiedichte

In der Literatur, wie zum Beispiel in [Cia88] oder [Bal77], werden bei der Untersuchung von Verzerrungsenergiedichten für hyperelastische Materialien im Fall der nichtlinearen Elastizität hauptsächlich Vektorfelder $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gesucht, die Integrale der Form

$$I(u) = \int_{\Omega} C(x, \nabla u(x)) dx - \{F(u) + G(u)\} \quad (5.2)$$

minimieren. Darauf werden wir später noch genauer eingehen und zeigen, dass dies äquivalent ist zur Lösung der stationären Cauchyschen Bewegungsgleichung mit geeigneten Randwerten und entsprechend definierten Funktionen F und G . Unabhängig von der Definition der Funktionen F und G , die im weiteren Verlauf des Kapitels auch folgen wird, lässt sich direkt erkennen, dass man gerne in Hinblick auf dieses Optimierungsproblem Konvexität von C in $Y = \nabla u(x)$, $x \in \Omega$, fordern würde. Aus diesem Grund wollen wir im Folgenden die Konvexität der Verzerrungsenergiedichte beziehungsweise der Funktion C_j in $Y = \nabla u(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$, näher untersuchen. Die Zeitabhängigkeit des Verschiebungsgradienten hat dabei keinen Einfluss auf die Konvexitätsbetrachtungen. Der folgende Satz liefert zunächst, dass die Konvexität von C_j in $Y = \nabla u(t, x)$ äquivalent zur Konvexität von \hat{C}_j in $F(t, x)$ ist, wenn für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ gilt $F(t, x) = \nabla u(t, x) + I$ mit $\det(F(t, x)) > 0$ (siehe Definition 2.1).

Satz 5.1. *Es sei $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ und $F(t, x) = \nabla u(t, x) + I$ mit $\det(F(t, x)) > 0$. Außerdem sei $C_j(\nabla u(t, x)) = \hat{C}_j(F(t, x))$. Dann gilt, dass $\hat{C}_j(F(t, x))$ genau dann konvex in $F(t, x)$ ist, wenn $C_j(\nabla u(t, x))$ konvex in $\nabla u(t, x)$ ist.*

Beweis. Sei zunächst $\hat{C}_j(\cdot)$ konvex, das heißt, für $\lambda \in [0, 1]$, $F, G \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\det(F) > 0$ und $\det(G) > 0$ gilt:

$$\hat{C}_j(\lambda F + (1 - \lambda)G) \leq \lambda \hat{C}_j(F) + (1 - \lambda) \hat{C}_j(G). \quad (5.3)$$

Wir setzen $\nabla u_1 := F - I$ und $\nabla u_2 := G - I$. Dann folgt mit (5.3)

$$\begin{aligned} & C_j(\lambda \nabla u_1 + (1 - \lambda) \nabla u_2) \\ &= C_j(\lambda(F - I) + (1 - \lambda)(G - I)) \\ &= C_j(\lambda F + (1 - \lambda)G - \lambda I - (1 - \lambda)I) \\ &= C_j(\lambda F + (1 - \lambda)G - I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{C}_j(\lambda F + (1 - \lambda)G) \\
&\leq \lambda \hat{C}_j(F) + (1 - \lambda) \hat{C}_j(G) \\
&= \lambda C_j(\nabla u_1) + (1 - \lambda) C_j(\nabla u_2)
\end{aligned}$$

Damit ist die eine Richtung gezeigt.

Sei nun $C_j(\cdot)$ konvex und somit gilt für $\lambda \in [0, 1]$, $\nabla u_1, \nabla u_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$C_j(\lambda \nabla u_1 + (1 - \lambda) \nabla u_2) \leq \lambda C_j(\nabla u_1) + (1 - \lambda) C_j(\nabla u_2). \quad (5.4)$$

Es gelte jetzt $F_1 := \nabla u_1 + I$ mit $\det(F_1) > 0$ und $F_2 := \nabla u_2 + I$ mit $\det(F_2) > 0$. Dann folgt mit (5.4)

$$\begin{aligned}
&\hat{C}_j(\lambda F_1 + (1 - \lambda) F_2) \\
&= \hat{C}_j(\lambda(\nabla u_1 + I) + (1 - \lambda)(\nabla u_2 + I)) \\
&= \hat{C}_j(\lambda \nabla u_1 + (1 - \lambda) \nabla u_2 + I) \\
&= C_j(\lambda \nabla u_1 + (1 - \lambda) \nabla u_2) \\
&\leq \lambda C_j(\nabla u_1) + (1 - \lambda) C_j(\nabla u_2) \\
&= \lambda \hat{C}_j(F_1) + (1 - \lambda) \hat{C}_j(F_2)
\end{aligned}$$

und damit ist der Beweis vollständig. \square

Die Konvexität einer Verzerrungsenergiedichte in Abhängigkeit vom Deformationsgradienten $F(t, x)$ steht allerdings im Widerspruch zu der physikalischen Annahme, dass man mit endlicher Energie das Volumen eines Körpers nicht gegen Null deformieren kann. Dies besagt der folgende Satz.

Satz 5.2. *Es sei $x \in \bar{\Omega}$, sodass die Funktion*

$$\hat{C}_{ij}(x, \cdot) : \mathbb{R}_+^{3 \times 3} := \{G \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det(G) > 0\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F \mapsto \hat{C}_{ij}(x, F),$$

konvex ist. Dann steht dies im Widerspruch zu der Eigenschaft $\hat{C}_{ij}(x, F) \rightarrow +\infty$, falls $\det(F) \rightarrow 0^+$ für $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ gilt.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [Cia88]. Für $\hat{C}_{ij}(x, F) = v_i(x) \hat{C}_j(F)$ ist dieser Satz auch übertragbar auf $\hat{C}_j(F)$, das heißt, dass die Konvexität von $\hat{C}_j(F)$ in F bereits

zu dem obigen physikalischen Widerspruch führt. Es folgt damit aber auch aufgrund von Satz 5.1, dass auch die Konvexität von C_j in Abhängigkeit vom Verschiebungsgradienten im Widerspruch zu der oben genannten physikalischen Annahme steht.

Die Frage ist, ob man die Anzahl der Argumente der Verzerrungsenergiedichte beispielsweise vergrößern sollte, um eine geeignete konvexe Funktion zu erhalten. Zumindest scheint es naheliegend die Konvexität der Verzerrungsenergiedichte in Abhängigkeit vom Deformations- beziehungsweise Verschiebungsgradienten durch schwächere Bedingungen zu ersetzen. Dies wollen wir im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

5.2 Alternative Konvexitätsbegriffe

Die Problematik die Konvexität der Verzerrungsenergiedichte bezüglich des Deformations- beziehungsweise Verschiebungsgradienten durch abgeschwächte Bedingungen zu ersetzen wird für spezielle Randwertprobleme der nichtlinearen Elastizität bereits seit vielen Jahren untersucht, siehe zum Beispiel [Bal77], [Mor52], [SN10] und [MH83]. Genauer gesagt, werden dabei Vektorfelder $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gesucht, die das Funktional $I(\varphi)$ mit I aus (5.2) minimieren. Für eine Deformation φ eines Körpers $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und \hat{C} eine Verzerrungsenergiedichte eines hyperelastischen Materials ist diese Aufgabenstellung äquivalent zur Lösung der stationären Cauchyschen Bewegungsgleichung mit geeigneten Randwerten. Dies besagen die nächsten beiden Sätze. Allerdings benötigen wir dafür noch die folgende Definition, welche man mit weiteren Erläuterungen in [Cia88] findet. Es wird dabei im Folgenden angenommen, dass angreifende Kräfte immer entweder Eigenlasten (*dead loads*) sind oder ihre Dichte von der Form $f(x) = \hat{f}(x, \varphi(x))$, $x \in \Omega$, beziehungsweise $g(\xi) = \hat{g}(\xi, \nabla\varphi(\xi))$, $\xi \in \Gamma_1 \subset \partial\Omega$, für gegebene Abbildungen $\hat{f} : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\hat{g} : \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist.

Definition 5.1. (i) Eine angreifende Körperkraft, auch Volumenkraft genannt, mit Dichte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *konservativ*, falls das Integral

$$\int_{\Omega} \langle f(x), \theta(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \langle \hat{f}(x, \varphi(x)), \theta(x) \rangle dx$$

geschrieben werden kann als Gâteaux-Ableitung

$$F'(\varphi)\theta = \int_{\Omega} \langle \hat{f}(x, \varphi(x)), \theta(x) \rangle dx$$

eines Funktionals F der Form

$$F : \psi \mapsto F(\psi) = \int_{\Omega} \hat{F}(x, \psi(x)) dx$$

für $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wenn dies der Fall ist, dann heißt die Funktion $\hat{F} : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ *Potential der angreifenden Körperkraft*.

- (ii) Eine angreifende Oberflächenkraft mit Dichte $g : \Gamma_1 \subset \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *konservativ*, falls das Integral

$$\int_{\Gamma_1} \langle g(\xi), \theta(\xi) \rangle d\sigma(\xi) = \int_{\Gamma_1} \langle \hat{g}(\xi, \nabla\varphi(\xi)), \theta(\xi) \rangle d\sigma(\xi)$$

geschrieben werden kann als Gâteaux-Ableitung

$$G'(\varphi)\theta = \int_{\Gamma_1} \langle \hat{g}(\xi, \nabla\varphi(\xi)), \theta(\xi) \rangle d\sigma(\xi)$$

eines Funktionals G der Form

$$G : \psi \rightarrow G(\psi) = \int_{\Gamma_1} \hat{G}(\xi, \psi(\xi), \nabla\psi(\xi)) d\sigma(\xi)$$

für $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wenn dies wiederum der Fall ist, dann nennt man die Funktion $\hat{G} : \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ *Potential der angreifenden Oberflächenkraft*.

Satz 5.3. *Sei ein hyperelastisches Material gegeben, auf das konservative Körper- und Oberflächenkräfte wirken. Dann sind die Gleichungen*

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \nabla_Y \hat{C}(x, \nabla\varphi(x)) &= \hat{f}(x, \varphi(x)), \quad x \in \Omega \\ \nabla_Y \hat{C}(x, \nabla\varphi(x))^\top \nu &= \hat{g}(x, \nabla\varphi(x)), \quad x \in \Gamma_1 \subset \partial\Omega \end{aligned}$$

äquivalent zu den Gleichungen

$$I'(\varphi)\theta = 0$$

für alle glatten Abbildungen $\theta : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, die auf $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ verschwinden. Dabei ist das

Funktional I für hinreichend glatte Abbildungen $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$I(\psi) = \int_{\Omega} \hat{C}(x, \nabla \psi(x)) dx - \{F(\psi) + G(\psi)\}. \quad (5.5)$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [Cia88].

Für hinreichend glatte Abbildungen ψ nennt man das durch $W(\psi) = \int_{\Omega} \hat{C}(x, \nabla \psi(x)) dx$ definierte Funktional *Verzerrungsenergie* und das Funktional I *Gesamtenergie*.

Als Folgerung aus Satz 5.3 erhält man die folgende Aussage, welche man ebenfalls mit Beweis beispielsweise in [Cia88] findet.

Satz 5.4. *Seien die Annahmen und Notationen wie in Satz 5.3 gegeben. Dann löst jede hinreichend glatte Abbildung φ , für die*

$$\varphi \in \Phi := \{\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \psi = \varphi_0 \text{ auf } \Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1\}$$

mit einer vorgegebenen Funktion φ_0 auf Γ_0 und

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi)$$

mit

$$I(\psi) = \int_{\Omega} \hat{C}(x, \nabla \psi(x)) dx - \{F(\psi) + G(\psi)\}$$

gilt, das folgende Randwertproblem

$$-\nabla \cdot \nabla_Y \hat{C}(x, \nabla \varphi(x)) = \hat{f}(x, \varphi(x)), \quad x \in \Omega \quad (5.6)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x), \quad x \in \Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \quad (5.7)$$

$$\nabla_Y \hat{C}(x, \nabla \varphi(x))^\top \nu = \hat{g}(x, \nabla \varphi(x)), \quad x \in \Gamma_1. \quad (5.8)$$

Um unter anderem Aussagen über die Existenz einer Lösung des betrachteten Minimierungsproblems machen zu können, benötigen wir noch die folgenden beiden Begriffe.

Definition 5.2. Sei X ein Banachraum und $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional auf X .

- (i) I heißt *schwach unterhalbstetig*, wenn für alle schwach konvergenten Folgen $u_k \rightharpoonup u$ in X gilt

$$I(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(u_k).$$

(ii) Wir nennen I *koerziv*, wenn für jede Folge u_k mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_X = \infty$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = \infty.$$

Dann wird mithilfe der von Tonelli eingeführten direkten Methode der Variationsrechnung unter anderem in [Dac89] folgender bekannter Satz bewiesen.

Satz 5.5. *Sei X ein reflexiver Banachraum, $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ schwach unterhalbstetig und koerziv, dann besitzt*

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in X} I(\psi)$$

mindestens eine Lösung $\varphi \in X$.

Bemerkung 5.1. Für X werden häufig in Anwendungen Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und offene Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ verwendet, da diese reflexiv sind und mit der jeweiligen Sobolev-Norm Banachräume darstellen.

Satz 5.5 wird sehr häufig verwendet, um Integrale der Form

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx \quad (5.9)$$

mit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offene Menge und $f : \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Caratheodory-Funktion zu minimieren. Beispielsweise werden in [Dac89], [Mor52], [Gan94] und [FFL⁺14] Integrale der Form (5.9) auf schwache Unterhalbstetigkeit untersucht, um Bedingungen für die Existenz einer Lösung des Minimierungsproblems angeben zu können. Dazu führte Morrey 1952 in seiner Arbeit [Mor52] den folgenden Begriff der Quasikonvexität ein.

Definition 5.3. (siehe [Dac89]) Eine Borel-messbare und lokal beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *quasikonvex*, wenn

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\xi + \nabla \varphi(x)) \, dx$$

für alle beschränkten, offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, für alle $\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gilt.

Außerdem hat Morrey in seiner Arbeit für (5.9) gezeigt, dass wenn f quasikonvex in ∇u ist, dies eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass I schwach unterhalbstetig ist. Einen Beweis dieser Äquivalenz findet man beispielsweise in [Mor52]

beziehungsweise [Dac89]. Dabei muss aber darauf hingewiesen werden, dass zusätzlich gewisse Wachstums- und Glattheitsbedingungen vorausgesetzt werden. Allerdings muss man feststellen, dass die Quasikonvexität zwar sehr interessant für die Theorie ist, aber die Bedingung dafür in Form einer Integral-Ungleichung in der Praxis schwer zu überprüfen ist. Hinzu kommt, dass die Wachstumsbedingungen sich bei praktischen Anwendungen als relativ unrealistisch herausgestellt haben. Aus diesem Grund wurde von Ball in [Bal77] 1977 der Begriff der Polykonvexität eingeführt, um die Lösbarkeit von Randwertproblemen in der nichtlinearen Elastizitätstheorie im 1-, 2- und 3-Dimensionalen zu untersuchen. Wir wollen nun den Begriff der Polykonvexität definieren. Da wir uns in dieser Arbeit auf den 3-dimensionalen Fall, welcher bei praktischen Anwendungen hauptsächlich eine Rolle spielt, konzentrieren, geben wir hier die Definition nur für diesen Fall an. Für die Definition im Fall einer beliebigen Dimension verweisen wir zum Beispiel auf [Dac89].

Definition 5.4. Eine Funktion $g : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *polykonvex* genau dann, wenn eine konvexe Funktion $G : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$g(F) = G(F, \text{Cof}(F), \det(F))$$

für alle $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Im Folgenden wollen wir nun einen von Ball ([Bal77]) stammenden Satz über die Existenz einer Lösung im Raum $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 2$, für das Problem aus Satz 5.3 und Satz 5.4 unter der Annahme, dass die Verzerrungsenergiedichte $\hat{C}(x, \nabla\psi(x))$ polykonvex in $\nabla\psi(x)$ ist, angeben. Einen Beweis des Satzes findet man beispielsweise in [Cia88].

Satz 5.6. Sei Ω ein Gebiet im \mathbb{R}^3 und $\hat{C} : \Omega \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Verzerrungsenergiedichte mit den folgenden Eigenschaften:

(i) *Polykonvexität:* Für fast alle $x \in \Omega$ existiert eine konvexe Funktion

$$\mathbb{C}(x, \cdot) : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

sodass für alle $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$

$$\mathbb{C}(x, F, \text{Cof}(F), \det(F)) = \hat{C}(x, F)$$

gilt. Die Funktion $\mathbb{C}(\cdot, F, H, \delta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist für alle $(F, H, \delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times (0, +\infty)$ messbar.

(ii) Verhalten für $\det(F) \rightarrow 0^+$: Für fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$\lim_{\det(F) \rightarrow 0^+} \hat{C}(x, F) = +\infty.$$

(iii) Koerzivität: Es gibt Konstanten α, β, p, q, r mit $\alpha > 0, p \geq 2, q \geq \frac{p}{p-1}, r > 1$ und

$$\hat{C}(x, F) \geq \alpha(\|F\|^p + \|Cof(F)\|^q + (\det(F))^r) + \beta$$

für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$.

Sei $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eine da-messbare Zerlegung des Randes $\Gamma = \partial\Omega$ von Ω , sodass Γ_0 ein positives Maß besitzt, und $\varphi_0 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine messbare Funktion, sodass die Menge

$$\Psi := \{\psi \in W^{1,p}(\Omega) : Cof(\nabla\psi) \in L^q(\Omega), \det(\nabla\psi) \in L^r(\Omega), \psi = \varphi_0 \text{ da-f. ü. auf } \Gamma_0, \\ \det(\nabla\psi) > 0 \text{ f. ü. auf } \Omega\}$$

nicht leer ist. Des Weiteren seien $f \in L^\rho(\Omega)$ und $g \in L^\sigma(\Gamma_1)$, sodass die Linearform

$$L : \psi \mapsto L(\psi) := \int_{\Omega} \langle f, \psi \rangle dx + \int_{\Gamma_1} \langle g, \psi \rangle d\sigma(\xi)$$

für alle $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ stetig ist. Außerdem sei

$$I(\psi) = \int_{\Omega} \hat{C}(x, \nabla\psi(x)) dx - L(\psi)$$

und es gelte $\inf_{\psi \in \Psi} I(\psi) < +\infty$. Dann existiert mindestens eine Funktion φ mit $\varphi \in \Psi$ und

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Psi} I(\psi).$$

Bemerkung 5.2. In [Cia88] wird erläutert, dass für alle $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ zum einen die Linearform $\psi \mapsto \int_{\Omega} \langle f, \psi \rangle dx$ wohldefiniert und stetig ist, wenn gilt $f \in L^\rho(\Omega)$ mit

$$\rho \begin{cases} = \frac{3p}{4p-3}, & \text{falls } p < 3 \\ > 1, & \text{falls } p = 3 \\ = 1, & \text{falls } p > 3 \end{cases}$$

und zum anderen die Linearform $\psi \mapsto \int_{\Gamma_1} \langle g, \psi \rangle d\sigma(\xi)$ ebenso wohldefiniert und stetig ist für den Fall $g \in L^\sigma(\Gamma_1)$ mit

$$\sigma \begin{cases} = \frac{2p}{3(p-1)}, & \text{falls } p < 3 \\ > 1, & \text{falls } p = 3 \\ = 1, & \text{falls } p > 3 \end{cases}$$

erfüllt ist.

Satz 5.6 zeigt auch, dass die Polykonvexität der Verzerrungsenergiedichte physikalisch sinnvoll ist und im Unterschied zur Konvexität nicht der physikalischen Annahme aus Satz 5.2 widerspricht. Aus diesem Grund wollen wir für die materialabhängigen Funktionen C_j in unserem Problem polykonvexe Funktionen wählen. Diese sollen im Weiteren näher betrachtet werden und wir wollen konkrete Beispiele für polykonvexe Verzerrungsenergiedichten angeben. Zunächst wollen wir aber erst noch den Zusammenhang zwischen den betrachteten Konvexitätsbegriffen darlegen. Dazu definieren wir zusätzlich noch einen weiteren Konvexitätsbegriff, welchen wir später noch benötigen werden.

Definition 5.5. (siehe [Dac89]) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt *Rang-1-konvex*, wenn

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$$

für alle $\lambda \in [0, 1]$ und $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\text{Rang}\{A - B\} \leq 1$ gilt.

Bemerkung 5.3. Mithilfe der Tensorschreibweise lässt sich die Definition von Rang-1-Konvexität auch folgendermaßen formulieren:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt *Rang-1-konvex*, wenn $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit

$$\varphi = \varphi(t) = f(A + ta \otimes b)$$

für $t \in \mathbb{R}$ konvex ist für alle $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$. In diesem Fall definiert $a \otimes b$ einen Tensor 2. Stufe.

Satz 5.7. Sei $f : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

$$f \text{ konvex} \Rightarrow f \text{ polykonvex} \Rightarrow f \text{ quasikonvex} \Rightarrow f \text{ Rang-1-konvex.}$$

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 5.1. *Es gilt für $T : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}$ mit $T(\xi) = (\xi, \text{Cof}(\xi), \det(\xi))$*

$$T(\xi) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} T(\xi + \nabla \varphi(x)) dx \quad (5.10)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Einen Beweis dieses Lemmas findet man in [Dac89].

Beweis von Satz 5.7: (i) f konvex $\Rightarrow f$ polykonvex:

Wir definieren $G : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G(\xi, \text{Cof}(\xi), \det(\xi)) := f(\xi)$. Dann ist G konvex und damit ist f polykonvex.

(ii) f polykonvex $\Rightarrow f$ quasikonvex:

Wir können annehmen, dass eine konvexe Funktion $G : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G(\xi, \text{Cof}(\xi), \det(\xi)) = f(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ existiert, da f nach Voraussetzung polykonvex ist. Dann erhalten wir $f(\xi) = G(T(\xi))$ mit der Definition von T im vorherigen Lemma. Außerdem folgt mithilfe der Jensenschen Ungleichung und (5.10)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\xi + \nabla \varphi(x)) dx \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} G(T(\xi + \nabla \varphi(x))) dx \\ &\geq G\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} T(\xi + \nabla \varphi(x)) dx\right) \\ &= G(T(\xi)) \\ &= f(\xi) \end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und somit die Quasikonvexität von f .

(iii) f quasikonvex $\Rightarrow f$ Rang-1-konvex:

Einen Beweis dieser Aussage findet man in [Dac89].

Damit ist alles gezeigt. □

5.3 Polykonvexe Verzerrungsenergiedichten

Wir wollen, wie bereits erwähnt, im Weiteren für die materialabhängigen Funktionen in unserem Problem polykonvexe Funktionen wählen. Dazu werden wir in diesem Abschnitt einige polykonvexe Funktionen vorstellen beziehungsweise Verzerrungsenergiedichten auf Polykonvexität untersuchen. Bei der Untersuchung von polykonvexen Verzerrungsenergiedichten hyperelastischer Materialien wird die Klasse der Verzerrungsenergiedichten häufig, wie beispielsweise in [HN03], folgendermaßen eingeschränkt:

Korollar 5.1. *Sei $W(F) = W_1(F) + W_2(\text{Cof}(F)) + W_3(\det(F))$. Wenn die Funktionen W_i , $i = 1, 2, 3$, konvex bezüglich ihres Arguments sind, dann ist W insgesamt polykonvex.*

Dieses Korollar dient dann als Werkzeug, um polykonvexe Verzerrungsenergiedichten zu konstruieren, indem man Funktionen als konvex im entsprechenden Argument identifiziert und dann eine konische Linearkombination dieser bildet. Allerdings gibt es auch neuere Artikel, die für die Konstruktion polykonvexer Verzerrungsenergiedichten keine additiven, sondern multiplikative Terme betrachten. Ein Beispiel dafür ist der Artikel [IK14]. Darin konstruieren Itskov und Khiêm polykonvexe freie Energiefunktionen für elektro- und magneto-empfindliche Elaste, welche nicht-additive Terme voraussetzen. Wir wollen uns hier aber auf Materialmodelle mit additiven Termen konzentrieren, da diese im Vergleich zu Materialmodellen, die multiplikative Terme enthalten, wesentlich besser erforscht sind. Für die Beweise der Polykonvexität der Verzerrungsenergiedichte von speziellen Materialmodellen benötigen wir noch einige Resultate bezüglich Konvexität. Diese und weitere findet man auch in dem Artikel [HN03], genauso wie den Beweis der Polykonvexität einiger interessanter Terme in Abhängigkeit von den Hauptinvarianten.

Satz 5.8. *Für $n, d \in \mathbb{N}$ sei $P : \mathbb{R}^{n \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex mit $P(Z) \geq 0$ für alle $Z \in \mathbb{R}^{n \times d}$. Dann ist die Funktion*

$$Z \mapsto E(Z) = [P(Z)]^p, \quad p \geq 1, \quad Z \in \mathbb{R}^{n \times d},$$

konvex.

Beweis. Seien $F, G \in \mathbb{R}^{n \times d}$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann gilt

$$E(\lambda F + (1 - \lambda)G) = [P(\lambda F + (1 - \lambda)G)]^p.$$

Die Funktion $f_1(x) := x^p$ ist für $x \geq 0$ und $p \geq 1$ monoton wachsend. Aus diesem Grund

folgt mithilfe der Konvexität von P und der Annahme $P(Z) \geq 0$ für alle $Z \in \mathbb{R}^{n \times d}$

$$E(\lambda F + (1 - \lambda)G) \leq [\lambda P(F) + (1 - \lambda)P(G)]^p.$$

Da $f_1(x) := x^p$ außerdem für $x \geq 0$ und $p \geq 1$ konvex ist, folgt schließlich mit der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned} & E(\lambda F + (1 - \lambda)G) \\ & \leq \lambda [P(F)]^p + (1 - \lambda) [P(G)]^p \\ & = \lambda E(F) + (1 - \lambda) E(G) \end{aligned}$$

und damit die Konvexität von E . □

Bemerkung 5.4. Aufgrund der Allgemeinheit von $n, d \in \mathbb{N}$ an dieser Stelle kann man den Satz 5.8 nicht nur für Matrizen im $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, sondern auch für Skalare in \mathbb{R} beziehungsweise Vektoren im \mathbb{R}^3 beispielsweise anwenden. Dies sind die drei Fälle des Satzes, die uns im Folgenden interessieren.

Damit wollen wir einige spezielle Terme auf Polykonvexität untersuchen, die wir später benötigen, um die Polykonvexität von Verzerrungsenergiedichten in konkreten Materialmodellen zu zeigen.

Lemma 5.2. *Sei die Verzerrungsenergiedichte von der Form*

$$W(F) = \frac{\|F\|_{Fr}^2}{(\det(F))^{\frac{2}{3}}}$$

für alle $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\det(F) > 0$. Dann ist $W(F)$ polykonvex.

Das Lemma 5.2 findet man als Lemma 2.1 in [HN03] inklusive Beweis. Auch den Beweis des folgenden Lemmas findet man in dem sehr hilfreichen Artikel [HN03], weshalb wir ihn hier auch weglassen.

Lemma 5.3. *Sei $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\det(F) > 0$. Dann sind die folgenden Terme polykonvex:*

(i)

$$F \mapsto \left(\frac{\|F\|_{Fr}^2}{(\det(F))^{\frac{2}{3}}} - 3 \right)^i, \quad i \geq 1,$$

(ii)

$$F \mapsto \left(\frac{\|Cof(F)\|_{Fr}^3}{(\det(F))^2} - 3\sqrt{3} \right)^j, \quad j \geq 1.$$

Wir wollen im nächsten Abschnitt hyperelastische Materialien noch weiter unterteilen, um am Ende dieses Kapitels polykonvexe Verzerrungsenergiedichten für einige spezielle, hyperelastische Materialien anzugeben.

5.4 Isotrope Materialien

Elastische Materialien und somit auch hyperelastische Materialien unterteilt man in isotrope und anisotrope Materialien. Da dies auch Einfluss auf die Verzerrungsenergiedichte eines hyperelastischen Materials hat, wollen wir, wie gesagt, diese Unterteilung ebenfalls bei der Betrachtung von polykonvexen Verzerrungsenergiedichten berücksichtigen. Im Folgenden wollen wir allerdings die Verzerrungsenergiedichten hyperelastischer Materialien darauf einschränken, dass das dazugehörige Material isotrop ist. Diese Eigenschaft basiert auf der physikalischen Idee, dass die Antwort des Materials in allen Richtungen gleich ist, das heißt, dass das Materialverhalten richtungsunabhängig ist. Ein Beispiel für ein (annähernd) isotropes Material mit vielen Anwendungen ist Gummi. Bevor wir allerdings spezielle Verzerrungsenergiedichten für isotrope, hyperelastische Materialien untersuchen, wollen wir uns mathematisch mit dem Begriff der Isotropie eines Materials auseinandersetzen.

Definition 5.6. Ein elastisches Material heißt *isotrop* im Punkt $x_0 \in \Omega$, wenn für die Antwortfunktion des Cauchyschen Spannungstensors gilt:

$$\hat{\sigma}(x_0, FQ) = \hat{\sigma}(x_0, F) \quad (5.11)$$

für alle $F \in GL_+(3)$ und alle $Q \in SO(3)$. Wenn die Gleichheit für alle $F \in GL_+(3)$ und $Q \in S_{x_0} \subsetneq SO(3)$ gilt, so heißt das Material *anisotrop* im Punkt $x_0 \in \Omega$. Ein Material heißt (an)isotrop, wenn es in jedem Punkt (an)isotrop ist.

Lemma 5.4. Sei $S_{x_0} \subseteq SO(3)$ und es gelte für ein $x_0 \in \Omega$ die Gleichheit

$$\hat{\sigma}(x_0, FQ) = \hat{\sigma}(x_0, F)$$

für alle $F \in GL_+(3)$ und $Q \in S_{x_0}$. Dann ist S_{x_0} eine Gruppe, die sogenannte *Symmetriegruppe* von x_0 .

Beweis. Offenbar ist $I \in S_{x_0}$. Seien nun $Q_1, Q_2 \in S_{x_0}$ und $F \in GL_+(3)$ beliebig. Dann ist $FQ_1^{-1} \in GL_+(3)$ und wir erhalten

$$\hat{\sigma}(x_0, F) = \hat{\sigma}(x_0, (FQ_1^{-1})Q_1) = \hat{\sigma}(x_0, FQ_1^{-1}).$$

Damit folgt $Q_1^{-1} \in S_{x_0}$. Aufgrund von $FQ_1 \in GL_+(3)$ und

$$\hat{\sigma}(x_0, F) = \hat{\sigma}(x_0, FQ_1) = \hat{\sigma}(x_0, FQ_1Q_2)$$

ist auch $Q_1Q_2 \in S_{x_0}$. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Wir können die Definition der Isotropie eines elastischen Materials auch mithilfe des folgenden Lemmas unter Zuhilfenahme des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors formulieren.

Lemma 5.5. *Ein Material ist isotrop im Punkt $x_0 \in \Omega$ genau dann, wenn*

$$\hat{P}(x_0, FQ) = \hat{P}(x_0, F)Q \tag{5.12}$$

gilt für alle $F \in GL_+(3)$ und $Q \in SO(3)$.

Beweis. Das Material sei zunächst isotrop. Dann folgt mithilfe von (5.11) und der Definition der Antwortfunktion des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors für $F \in GL_+(3)$ und $Q \in SO(3)$:

$$\begin{aligned} & \hat{P}(x_0, FQ) \\ &= \det(FQ)\hat{\sigma}(x_0, FQ)(FQ)^{-\top} \\ &= \det(F)\hat{\sigma}(x_0, FQ)F^{-\top}Q \\ &= \det(F)\hat{\sigma}(x_0, F)F^{-\top}Q \\ &= \hat{P}(x_0, F)Q. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir (5.12).

Für die andere Richtung gelte (5.12) für alle $F \in GL_+(3)$ und $Q \in SO(3)$. Dann folgt mit Definition 2.9

$$\det(F)\hat{\sigma}(x_0, FQ)F^{-\top}Q = \hat{P}(x_0, FQ) = \hat{P}(x_0, F)Q = \det(F)\hat{\sigma}(x_0, F)F^{-\top}Q$$

und somit

$$\det(F)\hat{\sigma}(x_0, FQ)F^{-\top}Q = \det(F)\hat{\sigma}(x_0, F)F^{-\top}Q.$$

Dies ist äquivalent zu (5.11), weshalb das Material isotrop im Punkt $x_0 \in \Omega$ ist. \square

In [Cia88] wird die Verzerrungsenergiedichte $C = C(x, Y)$ eines hyperelastischen Materials als *isotrop* in $x \in \Omega$ definiert, wenn die zugehörige Antwortfunktion des Cauchyschen Spannungstensors $\hat{\sigma}$ isotrop in $x \in \Omega$ ist, also wenn (5.11) gilt und somit das hyperelastische Material isotrop in $x \in \Omega$ ist. Eine äquivalente Definition liefert der folgende Satz.

Satz 5.9. *Die Verzerrungsenergiedichte $\hat{C} : \Omega \times GL_+(3) \rightarrow \mathbb{R}$ eines hyperelastischen Materials ist isotrop in $x \in \Omega$ genau dann, wenn gilt*

$$\hat{C}(x, F) = \hat{C}(x, FQ) \quad (5.13)$$

für alle $F \in GL_+(3)$ und $Q \in SO(3)$.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [Cia88]. Des Weiteren findet man in [Cia88] einen Beweis des nächsten Satzes. Dazu wird mit

$$J(A) = (I_1(A), I_2(A), I_3(A)) \in \mathbb{R}^3$$

der *Hauptinvariantenvektor* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bezeichnet. Dabei werden drei *Hauptinvarianten* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definiert durch

$$\begin{aligned} I_1(A) &= \operatorname{tr}(A) \\ I_2(A) &= \operatorname{tr}(\operatorname{Cof}(A)) = \frac{1}{2}\{(\operatorname{tr}(A))^2 - \operatorname{tr}(A^2)\} \\ I_3(A) &= \det(A) \end{aligned} \quad (5.14)$$

mit $I_k(A) \in \mathbb{R}$ für $k = 1, 2, 3$. Für den Fall, dass λ_i , $i = 1, 2, 3$, die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sind, kann man die drei Hauptinvarianten von A auch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} I_1(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2(A) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\ I_3(A) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Außerdem gilt $J(F^\top F) = J(FF^\top)$ für alle $F \in GL_+(3)$ und mit

$$\text{Sym}_+(3) = \{M \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid M \text{ ist symmetrisch und positiv definit}\}$$

ergibt sich

$$J(\text{Sym}_+(3)) = \{J(A) \in \mathbb{R}^3 : A \in \text{Sym}_+(3)\} \subset (0, +\infty)^3.$$

Für $A = F^\top F$ erhält man eine Darstellung der drei Hauptinvarianten, die wir im Folgenden hauptsächlich benutzen werden:

$$\begin{aligned} I_1 &:= I_1(F^\top F) &= \|F\|_{Fr}^2 \\ I_2 &:= I_2(F^\top F) &= \|\text{Cof}(F)\|_{Fr}^2 \\ I_3 &:= I_3(F^\top F) &= (\det(F))^2. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Satz 5.10. *Die Verzerrungsenergiedichte $\hat{C} : \Omega \times GL_+(3) \rightarrow \mathbb{R}$ eines hyperelastischen Materials erfülle das Axiom der Objektivität. Dann ist die Verzerrungsenergiedichte isotrop in $x \in \Omega$ genau dann, wenn eine Funktion $\tilde{C}(x, \cdot) : J(\text{Sym}_+(3)) \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\hat{C}(x, F) = \tilde{C}(x, J(F^\top F)) = \tilde{C}(x, J(FF^\top))$$

für alle $F \in GL_+(3)$ existiert.

Dieser Satz besagt somit, dass unter Annahme des Axioms 3 der Objektivität ein hyperelastisches Material isotrop ist genau dann, wenn sich die Verzerrungsenergiedichte darstellen lässt als eine Funktion, die nur von $x \in \Omega$ und den drei Hauptinvarianten abhängig ist.

Mithilfe dieser Äquivalenz wollen wir im Weiteren nun einige spezielle Modelle für isotrope, hyperelastische Materialien dahingehend untersuchen, ob die entsprechende Verzerrungsenergiedichte polykonvex ist. Wir betrachten also Verzerrungsenergiedichten, die von den drei Hauptinvarianten abhängen. Dabei spielt insbesondere die Hauptinvariante $I_3(F^\top F)$ eine wichtige Rolle. Man differenziert nämlich bei isotropen Materialien zwischen kompressiblen und inkompressiblen Materialien. *Inkompressibilität* bedeutet, dass das Material unter endlicher Deformation (Druck, Dehnung) sein Volumen nicht ändert. Mit anderen Worten lässt sich ein inkompressibles Material nicht komprimieren. In diesem Fall gilt

$$J := \det(F) = 1. \tag{5.17}$$

Auch wenn es einige Materialmodelle für inkompressible Materialien in der Theorie gibt, so existieren in der Realität keine vollkommen inkompressiblen Materialien. Somit sind alle Materialien in der Realität *kompressibel*, das heißt, ihr Volumen ändert sich unter Deformation, wenn auch teilweise nur in einem sehr geringen Maße. In diesem Fall spricht man von *nahezu inkompressibel* (*schwach kompressibel*). Die einzigen Materialien, die man als nahezu inkompressibel ansehen kann, sind auf der einen Seite Biomaterialien, wie biologisches Weichgewebe, und auf der anderen Seite Feststoffe aus Polymeren, wie gummiähnliche Materialien. Weitere Erläuterungen dazu findet man beispielsweise in [Hol00]. Im Folgenden wollen wir nun, wie bereits angekündigt, einige spezielle Verzerrungsenergiedichten von sowohl inkompressiblen, als auch kompressiblen, isotropen, hyperelastischen Materialien auf Polykonvexität untersuchen.

5.4.1 Inkompressible, isotrope, hyperelastische Materialien

Die Bedingung (5.17) für Inkompressibilität führt dazu, dass im Fall eines inkompressiblen, isotropen, hyperelastischen Materials die Verzerrungsenergiedichte nur von x , $I_1(F^\top F)$ und $I_2(F^\top F)$ abhängt. Interessante Artikel, die einen Überblick zur Theorie inkompressibler, isotroper Hyperelastizität geben, sind beispielsweise [Ogd72a] und [Ogd82]. Ogden hat sich in den genannten Arbeiten, aber auch in weiteren Publikationen, insbesondere mit inkompressiblen, gummiähnlichen Feststoffen auseinandergesetzt. In diesem Zusammenhang hat er in dem Artikel [Ogd72a] das folgende sogenannte *Ogden-Modell für inkompressible (gummiähnliche) Materialien* entwickelt. Dazu seien erneut λ_i , $i = 1, 2, 3$, die Eigenwerte von $F^\top F$. Dann hat die Verzerrungsenergiedichte im Ogden-Modell die Gestalt

$$W_O(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} (\lambda_1^{\frac{a_i}{2}} + \lambda_2^{\frac{a_i}{2}} + \lambda_3^{\frac{a_i}{2}} - 3) \quad (5.18)$$

mit Materialparametern γ_i und a_i , $i = 1, \dots, M$. In [Hol00] findet man zum Beispiel typische Werte für a_i beziehungsweise γ_i . Die Verzerrungsenergiedichte in (5.18) kann man (siehe [Cia88]) umschreiben in

$$W_O(F) = \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} ((\text{tr}(F^\top F))^{\frac{a_i}{2}} - 3) = \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} (\|F\|_{Fr}^{a_i} - 3). \quad (5.19)$$

Damit kann man gut erkennen, dass sich die Verzerrungsenergiedichte im Ogden-Modell für ein inkompressibles, isotropes, hyperelastisches Material nur in Abhängigkeit von der

ersten Hauptinvariante von $F^\top F$ darstellen lässt:

$$W_O(I_1) = \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} (I_1^{\frac{a_i}{2}} - 3). \quad (5.20)$$

Im folgenden Satz wollen wir nun zeigen, dass die Verzerrungsenergiedichte für inkompressible Ogden-Materialien polykonvex unter gewissen Annahmen ist.

Satz 5.11. *Die Verzerrungsenergiedichte eines inkompressiblen Ogden-Materials $W_O(F)$ aus (5.19) ist polykonvex für $\gamma_i > 0$ und $a_i \geq 1$ für alle $i = 1, \dots, M$.*

Beweis. Da die Funktion W_O nur von F und nicht von $\text{Cof}(F)$ beziehungsweise $\det(F)$ abhängig ist, müssen wir für die Polykonvexität der Funktion W_O nur zeigen, dass sie konvex in F ist. Dazu seien $F, G \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann gilt mithilfe der Konvexität der Frobenius-Norm $\|\cdot\|_{Fr}$, $\gamma_i > 0$ und $a_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, M$:

$$\begin{aligned} & W_O(\lambda F + (1 - \lambda)G) \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} (\|\lambda F + (1 - \lambda)G\|_{Fr}^{a_i} - 3) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} [(\lambda \|F\|_{Fr} + (1 - \lambda)\|G\|_{Fr})^{a_i} - 3]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Man kann leicht nachprüfen, dass die Funktion $r(x) = x^{a_i}$ konvex für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ ist für $a_i \geq 1$. Dann gilt

$$(\lambda \|F\|_{Fr} + (1 - \lambda)\|G\|_{Fr})^{a_i} \leq \lambda \|F\|_{Fr}^{a_i} + (1 - \lambda)\|G\|_{Fr}^{a_i}.$$

Somit können wir (5.21) weiter abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned} & W_O(\lambda F + (1 - \lambda)G) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} [\lambda \|F\|_{Fr}^{a_i} + (1 - \lambda)\|G\|_{Fr}^{a_i} - 3] \\ &= \lambda \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} (\|F\|_{Fr}^{a_i} - 3) + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} (\|G\|_{Fr}^{a_i} - 3) \\ &= \lambda W_O(F) + (1 - \lambda)W_O(G). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $W_O(F)$ konvex in F und damit polykonvex für $\gamma_i > 0$ und $a_i \geq 1$,

$i = 1, \dots, M$, ist. □

Weitere Materialmodelle für inkompressible, hyperelastische, isotrope Materialien, die oft verwendet werden, sind zum Beispiel das Mooney-Rivlin-Modell und das Neo Hookesche Modell. Ein recht interessanter Artikel, der das Ogden-Modell, das Mooney-Rivlin-Modell und das Neo Hookesche Modell für Polychloropren vergleicht, ist [KLL⁺12]. Polychloropren, welches auch Chloropren-Kautschuk genannt wird beziehungsweise als Neopren bekannt ist, stellt einen Synthetikautschuk dar, der beispielsweise im Automobilbau oder für wärmedämmende Sportbekleidung verwendet wird.

Das *Neo Hookesche Materialmodell* ist eines der einfachsten hyperelastischen Materialmodelle, da die Verzerrungsenergiedichte für dieses Modell im inkompressiblen Fall nur von einer Materialkonstanten und der ersten Hauptinvarianten von $F^\top F$ abhängig ist:

$$W_{NH}(F) = C_1(I_1 - 3) \quad (5.22)$$

mit einer Materialkonstanten C_1 . Wählt man in (5.19) oder (5.20) $M = 1$, $a_1 = 2$ und $\gamma_1 = 2C_1$, so erhält man das Neo Hookesche Modell als Spezialfall des Ogden-Modells im inkompressiblen Fall. Damit kann man direkt aus Satz 5.11 folgern, dass für $C_1 > 0$ auch die Verzerrungsenergiedichte des Neo Hookeschen Modells polykonvex ist. Es hat sich allerdings gezeigt, dass experimentelle Daten für einige isotrope, inkompressible, elastische Materialien nicht durch (5.22) reproduziert werden können (siehe [Hol00]). Dies legt nahe, dass eine zusätzliche Abhängigkeit der Verzerrungsenergiedichte von der zweiten Hauptinvarianten von $F^\top F$ sinnvoll ist.

Das *Mooney-Rivlin-Modell*, welches für $M = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $\gamma_1 = 2C_1$ und $\gamma_2 = -2C_2$ in (5.20) ebenfalls einen Spezialfall des Ogden-Modells darstellt, enthält die zweite Hauptinvariante in der folgenden Art und Weise:

$$W_{MR}(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3). \quad (5.23)$$

Wir wollen nun im Folgenden diese Funktion auf Polykonvexität untersuchen. Dazu formulieren wir die Funktion in (5.23) zunächst mithilfe der Definition der ersten und zweiten Hauptinvariante folgendermaßen um

$$\begin{aligned} W_{MR}(F) &= C_1(\|F\|_{Fr}^2 - 3) + C_2(\|\text{Cof}(F)\|_{Fr}^2 - 3) \\ &= C_1\|F\|_{Fr}^2 + C_2\|\text{Cof}(F)\|_{Fr}^2 - 3(C_1 + C_2). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Lemma 5.6. *Die Verzerrungsenergiedichte für das Mooney-Rivlin-Modell in (5.24) ist für $C_1, C_2 > 0$ polykonvex.*

Beweis. Zunächst einmal lässt sich leicht zeigen, dass für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(X) = g(X) + a$ genau dann konvex in $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$, wenn g konvex in $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist. Wir setzen in (5.24) $a := -3(C_1 + C_2)$. Damit ist für $C_1, C_2 > 0$ mit Satz 5.8 die Funktion $W_{MR}(F)$ konvex in F und konvex in $\text{Cof}(F)$, da die Frobenius-Norm konvex und nichtnegativ ist. Somit erhält man insgesamt die Polykonvexität von $W_{MR}(F)$. \square

Nach [Hol00] ist das Mooney-Rivlin-Modell nicht sehr gut geeignet, wenn man inkompressible, gummiähnliche Materialien betrachten will, die Verstärkerfüllstoffe, wie Ruß oder Kieselerde, enthalten. Aus diesem Grund wurde das sogenannte *Yeoh-Modell* aufgestellt, dessen Verzerrungsenergiedichte die folgende Form besitzt:

$$W_Y(I_1) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (5.25)$$

mit Materialparametern C_{i0} , $i = 1, 2, 3$. Diese Bezeichnung der Materialparameter für das Yeoh-Modell findet man häufig in der Literatur. Dies rührt daher, dass das Yeoh-Modell ein Spezialfall des 1951 von Rivlin und Saunders entwickelten *allgemeinen (polynomialen) Rivlin-Modells*

$$W_R(I_1, I_2) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (5.26)$$

mit den Materialparametern C_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, darstellt für $N = 3$, $M = 0$ und $C_{00} = 0$. Man kann leicht sehen, dass beispielsweise auch das Mooney-Rivlin-Modell ein Spezialfall des Rivlin-Modells ist für $M = N = 1$ und $C_{00} = C_{11} = 0$. Im Folgenden wollen wir nun das Rivlin-Modell im Allgemeinen und das Yeoh-Modell im Speziellen auf Polykonvexität untersuchen.

Lemma 5.7. *Die Verzerrungsenergiedichte*

$$W_Y(F) = C_{10}(\|F\|_{Fr}^2 - 3) + C_{20}(\|F\|_{Fr}^2 - 3)^2 + C_{30}(\|F\|_{Fr}^2 - 3)^3$$

des Yeoh-Modells ist für $C_{k0} > 0$, $k = 1, 2, 3$, polykonvex.

Beweis. Die Terme $(\|F\|_{Fr}^2 - 3)^i$ für $i = 1, 2, 3$ sind nach Lemma 5.3 mit $\det(F) = 1$ (Inkompressibilitätsbedingung (5.17)) polykonvex. Deshalb besteht W_Y unter der Annahme

$C_{k0} > 0$ für $k = 1, 2, 3$ aus einer Summe polykonvexer Funktionen und ist dementsprechend wieder polykonvex. \square

Im Gegensatz zu der Verzerrungsenergiedichte im Yeoh-Modell muss festgestellt werden, dass die Verzerrungsenergiedichte des Rivlin-Modells (5.26) im Allgemeinen nicht polykonvex ist aufgrund des Terms $(I_2 - 3)^j$ (siehe [HN03]).

Modelle für gummiähnliche Materialien beziehungsweise Polymere werden unterteilt in phänomenologische und mikromechanische Materialmodelle. Die Struktur dieser Materialien ist charakterisiert durch kettenähnliche Makromoleküle, welche an bestimmten Punkten miteinander verknüpft sind (siehe [HDPS07]). Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Materialmodellen ist das *Arruda-Boyce-Modell* ein mikromechanisches Modell, welches durch diese spezielle mikromechanische Netzwerkstruktur motiviert ist. Bei diesem 1993 von Arruda und Boyce in [AB93] entwickelten Modell wird angenommen, dass es in einem kubischen repräsentativen Volumenelement acht Ketten gibt zwischen dem Mittelpunkt und den Ecken des Würfels. Aus diesem Grund wird das Modell von Arruda und Boyce auch 8-Ketten-Materialmodell genannt. Die Verzerrungsenergiedichte dieses Modells hat die Gestalt

$$W_{AB}(I_1) = c \sum_{k=1}^m d_k N^{1-k} (I_1^k - 3^k) \quad (5.27)$$

beziehungsweise

$$W_{AB}(F) = c \sum_{k=1}^m d_k N^{1-k} (\|F\|_{Fr}^{2k} - 3^k) \quad (5.28)$$

mit den beiden Materialparametern c und N . Dabei wird mit $N > 0$ die Anzahl der Segmente, wobei alle die gleiche Länge haben, in einer Kette bezeichnet. Die Faktoren d_k sind feste Zahlen, welche a-priori durch eine Taylor-Entwicklung der inversen Langevin-Funktion definiert sind (siehe [Tre05]). Es gilt unter anderem $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{1}{20}$ beziehungsweise $d_3 = \frac{11}{1050}$. Im Folgenden wollen wir die Verzerrungsenergiedichte $W_{AB}(F)$ auf Polykonvexität untersuchen.

Satz 5.12. *Für $c > 0$ und $d_k > 0$ für alle $k = 1, \dots, m$ ist $W_{AB}(F)$ aus (5.28) polykonvex.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist N^{1-k} für alle $k = 1, \dots, m$ positiv. Mit den Annahmen $c > 0$ und $d_k > 0$ für alle $k = 1, \dots, m$ muss also nur gezeigt werden, dass die Funktion $f_k(F) := \|F\|_{Fr}^{2k} - 3^k$ polykonvex ist für alle $k = 1, \dots, m$. Die Polykonvexität von $f_k(F)$ folgt allerdings unmittelbar aus Lemma 5.2 mit der Inkompressibilitätsbedingung $\det(F) = 1$

und Satz 5.8. Somit folgt direkt die Polykonvexität von $W_{AB}(F) = c \sum_{k=1}^m d_k N^{1-k} f_k(F)$, was zu zeigen war. \square

Neben den betrachteten Materialmodellen für inkompressible, isotrope, hyperelastische Materialien existieren noch weitere Modelle für diese Art von Materialien, wie beispielsweise das Gent-Modell oder das Blatz-Ko-Modell (siehe zum Beispiel [Hac15]). Allerdings ist die Klasse der inkompressiblen Materialien sehr beschränkt beziehungsweise findet man, wie bereits erwähnt, in der Realität nur Materialien, die nahezu, wenn überhaupt, inkompressibel sind. Aus diesem Grund wollen wir uns im Weiteren nun den kompressiblen Materialien widmen. Außerdem sei erwähnt, dass in der Regel Modelle für kompressible Materialien ein inkompressibles Pendant haben respektive man das entsprechende inkompressible Materialmodell durch Setzen von $\det(F) = 1$ im kompressiblen Modell erhält. Beispielsweise existieren auch unter anderem kompressible Ogden-, Mooney-Rivlin- oder Neo Hookesche Modelle, wie wir im Folgenden sehen werden.

5.4.2 Kompressible, isotrope, hyperelastische Materialien

Um von inkompressiblen überzugehen auf kompressible Materialien, beginnen wir diesen Abschnitt mit einer multiplikativen Aufteilung des Deformationsgradienten F in einen volumenändernden und einen volumenerhaltenden Teil. Dieser auf Flory ([Flo61]) zurückgehende Ansatz wird in der Literatur häufig genutzt, insbesondere im Hinblick auf Materialien, welche nur schwach kompressibel sind (siehe beispielsweise [Ogd77], [Hol00], [HN03], [ST91]). Dazu definieren wir

$$F = \hat{F} \bar{F} \quad (5.29)$$

mit dem volumenerhaltenden (isochorischen) Teil $\bar{F} = J^{-\frac{1}{3}} F$ mit $\det(\bar{F}) = 1$ und dem volumenverändernden (volumetrischen) Teil $\hat{F} = J^{\frac{1}{3}} I$. Dabei gilt wie im vorherigen Abschnitt $J = \det(F)$. Mithilfe dieser Zerlegung von F kann man auch $C = F^\top F$ zerlegen, indem man

$$\bar{C} = \bar{F}^\top \bar{F} = J^{-\frac{2}{3}} C \quad (5.30)$$

definiert.

Im Zusammenhang mit schwach kompressiblen, isotropen, hyperelastischen Materialien wird diese Zerlegung des Deformationsgradienten oft genutzt, um auch die Verzerrungs-

energiedichte in zwei Teile aufzuspalten:

$$\hat{W}(F) = W_{vol}(J) + W_{iso}(\bar{F}). \quad (5.31)$$

Hier steht “vol” für volumetrisch und “iso” für isochorisch. Diese Bezeichnungen liegen nahe, da die Funktion W_{vol} nur von dem volumenändernden $J = \det(F)$ abhängt und die Funktion W_{iso} ausschließlich von den volumenerhaltenden Größen $\bar{I}_1 := I_1(\bar{F}^\top \bar{F})$ und $\bar{I}_2 := I_2(\bar{F}^\top \bar{F})$ abhängig ist. Weitere Erläuterungen dazu findet man beispielsweise in [Hol00]. Außerdem soll \hat{W} kennzeichnen, dass es sich dabei um eine Verzerrungsenergiedichte eines kompressiblen Materials handelt im Unterschied zu W für die Verzerrungsenergiedichte eines inkompressiblen Materials.

Wir wollen nun im Folgenden zunächst spezielle Verzerrungsenergiedichten von kompressiblen, isotropen, hyperelastischen Materialien, die die Form (5.31) aufweisen, betrachten und auf Polykonvexität untersuchen. Allerdings kommt es in der Literatur häufiger vor, dass die Modelle zwar eine Aufspaltung der Verzerrungsenergiedichte in einen volumetrischen und einen isochorischen Term berücksichtigen, aber der isochorische Term direkt vom Deformationsgradienten F und nicht vom modifizierten Deformationsgradienten \bar{F} abhängig ist. In diesem Fall wird also eine multiplikative Aufspaltung von F wie in (5.29) nicht verwendet.

Wie auch bei den inkompressiblen Materialien stellen auch hier die *kompressible Ogden-Materialien* unser erstes Beispiel dar. In [Cia88] findet man ein Modell für Ogden-Materialien mit der Verzerrungsenergiedichte

$$\hat{W}_O(F) = \sum_{i=1}^M b_i \|F\|_{Fr}^{\mu_i} + \sum_{j=1}^N c_j \|\text{Cof}(F)\|_{Fr}^{\delta_j} + \Gamma(\det(F)) \quad (5.32)$$

mit $b_i > 0$, $\mu_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq M$, $c_j > 0$ und $\delta_j \geq 1$ für $1 \leq j \leq N$ und $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ einer konvexen Funktion mit $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty$. Wie man leicht erkennen kann, weist diese Funktion zwar eine Zerlegung in einen volumetrischen Term $\Gamma(\det(F))$ und einen isochorischen Term $\sum_{i=1}^M b_i \|F\|_{Fr}^{\mu_i} + \sum_{j=1}^N c_j \|\text{Cof}(F)\|_{Fr}^{\delta_j}$ auf, aber ohne die Zerlegung des Deformationsgradienten F und damit \bar{F} zu verwenden. Allerdings stellt (5.32) eine sehr allgemeine Formulierung der Verzerrungsenergiedichte eines Ogden-Materials dar. Wir wollen hier zunächst erst einmal die Funktion $\hat{W}_O(F)$ ganz allgemein auf Polykonvexität untersuchen und anschließend eine spezielle Darstellung einer Verzerrungsenergiedichte eines Ogden-Materials angeben, die die Zerlegung des Deformationsgradienten (5.29) erfüllt.

Satz 5.13. Die Verzerrungsenergiedichte $\hat{W}_O(F)$ in (5.32) ist polykonvex.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [Cia88].

Bevor wir noch eine andere Formulierung der Verzerrungsenergiedichte eines Ogden-Materials angeben wollen, möchten wir, wie bereits auch bei den inkompressiblen Materialien, auf zwei Spezialfälle der Verzerrungsenergiedichte eines Ogden-Materials in (5.32) eingehen.

Die Verzerrungsenergiedichte eines *kompressiblen Neo Hookeschen Materials* kann man darstellen in der Form

$$\hat{W}_{NH}(F) = a\|F\|_{Fr}^2 + \Gamma(\det(F)) \quad (5.33)$$

mit $a > 0$ und einer konvexen Funktion Γ (siehe (5.32)). Die Polykonvexität der Funktion $\hat{W}_{NH}(F)$ in F folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $a\|F\|_{Fr}^2$ für $a > 0$ konvex in F ist und $\Gamma(\det(F))$ nach Voraussetzung konvex in $\det(F)$ sein soll.

Einen zweiten Spezialfall der Verzerrungsenergiedichte in (5.32) stellt die folgende Verzerrungsenergiedichte eines *kompressiblen Mooney-Rivlin-Materials* dar:

$$\hat{W}_{MR}(F) = a\|F\|_{Fr}^2 + b\|\text{Cof}(F)\|_{Fr}^2 + \Gamma(\det(F)) \quad (5.34)$$

mit $a > 0$, $b > 0$ und $\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d\log(\delta)$ für $c > 0$ und $d > 0$. Man kann leicht zeigen, dass die Funktion $\Gamma(\delta)$ konvex in $\delta = \det(F)$ ist. Damit entspricht die Funktion in (5.34) für $M = N = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = b$ und $\mu_1 = \delta_1 = 2$ in (5.32) der Verzerrungsenergiedichte in (5.32) und ist somit nach Satz 5.13 polykonvex in F . In [Hol00] wird die folgende Darstellung einer Verzerrungsenergiedichte eines Ogden-Materials angegeben. Dabei wird der isochorische Term analog zu der Verzerrungsenergiedichte eines inkompressiblen Ogden-Materials (siehe (5.18)) definiert:

$$W_{iso}^O(\bar{F}) = \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} (\bar{\lambda}_1^{\frac{a_i}{2}} + \bar{\lambda}_2^{\frac{a_i}{2}} + \bar{\lambda}_3^{\frac{a_i}{2}} - 3) = \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} (\|\bar{F}\|_{Fr}^{a_i} - 3) \quad (5.35)$$

mit den Eigenwerten $\bar{\lambda}_i = J^{-\frac{2}{3}}\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$, von $\bar{F}^\top \bar{F}$ und $\gamma_i a_i > 0$ für $i = 1, \dots, M$ (siehe (5.18)).

Für gummiähnliche Materialien hat Ogden 1972 in [Ogd72b] einen volumetrischen Term in Abhängigkeit von J der Form

$$W_{vol}^O(J) = \kappa G(J) \text{ mit } G(J) = \beta^{-2}(\beta \ln(J) + J^{-\beta} - 1) \quad (5.36)$$

für $\beta > 0$ vorgeschlagen. Dabei bezeichnet κ das konstante Kompressionsmodul in der Referenzkonfiguration und β eine (empirische) Konstante. Unter der Voraussetzung, dass das Material schwach kompressibel ist, das heißt, dass $J = \det(F) \approx 1$ gilt, kann man zeigen, dass die Funktion G für $\beta > 0$ strikt konvex ist. Wir erhalten also als Verzerrungsenergiedichte eines Ogden-Materials in der Darstellung von [Hol00]

$$\hat{W}_O(\bar{F}, J) = W_{iso}^O(\bar{F}) + W_{vol}^O(J) \quad (5.37)$$

mit $W_{iso}^O(\bar{F})$ aus (5.35) und $W_{vol}^O(J)$ aus (5.36). Den isochoren Term können wir mit der Definition von \bar{F} umschreiben als Funktion in Abhängigkeit von F :

$$W_{iso}^O(F, \det(F)) = \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} \left(\left(\frac{\|F\|_{Fr}}{(\det(F))^{\frac{1}{3}}} \right)^{a_i} - 3 \right). \quad (5.38)$$

Mithilfe dieser Umformulierung erhalten wir für die Verzerrungsenergiedichte eines Ogden-Materials (nach Holzapfel, [Hol00])

$$\begin{aligned} & \hat{W}_O(F) \\ &= W_{iso}^O(F, \det(F)) + W_{vol}^O(\det(F)) \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{a_i} \left(\left(\frac{\|F\|_{Fr}}{(\det(F))^{\frac{1}{3}}} \right)^{a_i} - 3 \right) + \kappa \beta^{-2} (\beta \ln(\det(F)) + (\det(F))^{-\beta} - 1). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Diese Funktion wollen wir nun im nächsten Satz auf Polykonvexität untersuchen.

Satz 5.14. *Die Verzerrungsenergiedichte $\hat{W}_O(F)$ in (5.39) ist für $\gamma_i > 0$, $a_i \geq 2$, $\beta > 0$ und $\kappa > 0$ polykonvex in F .*

Beweis. Zunächst einmal erinnern wir daran, dass $G(J) = \beta^{-2}(\beta \ln(J) + J^{-\beta} - 1)$ konvex in $J > 0$ ist für $\beta > 0$. Damit ist $W_{vol}^O(\det(F)) = \kappa G(\det(F))$ für $\kappa > 0$ konvex in $\det(F)$. Wir müssen also für die Polykonvexität von $\hat{W}_O(F)$ in F zeigen, dass die Funktion $W_{iso}^O(F, \det(F))$ in (5.39) konvex sowohl in F als auch in $\det(F)$ ist, also insgesamt polykonvex in F ist. Dazu definieren wir $k_i := a_i/2$ mit $k_i \geq 1$ für $a_i \geq 2$, $i = 1, \dots, M$. Dann folgt

$$W_{iso}^O(F, \det(F)) = \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{2k_i} \left(\left(\frac{\|F\|_{Fr}^2}{(\det(F))^{\frac{2}{3}}} \right)^{k_i} - 3 \right).$$

Nach Lemma 5.2 ist $\|F\|_{Fr}^2/(\det(F))^{\frac{2}{3}}$ polykonvex in F und somit konvex in F und $\det(F)$. Daraus folgt mit Satz 5.8, dass $(\|F\|_{Fr}^2/(\det(F))^{\frac{2}{3}})^{k_i}$ polykonvex in F ist für $k_i \geq 1$ und

somit für $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, M$, und damit die Aussage des Satzes. \square

Weitere Verzerrungsenergiedichten für Modelle von kompressiblen, isotropen, hyperelastischen Materialien, die einen isochorischen als auch einen separaten volumetrischen Term haben, findet man beispielsweise in [Cia88]. Darin werden unter anderem ein Materialmodell von Ciarlet und Geymonat von 1982 oder Hadamard-Green-Materialien genannt. In dem bereits häufig zitierten Artikel [HN03] von Hartmann und Neff wird allgemein eine Aufteilung einer Verzerrungsenergiedichte in einen isochoren und einen volumetrischen Teil angenommen und dann getrennt für beide Teile Beispiele angegeben und auf Polykonvexität untersucht. In diesem Zusammenhang werden zwar überwiegend keine konkreten Materialmodelle betrachtet, allerdings kann man auch zum Beispiel für den isochorischen Term die Verzerrungsenergiedichten von inkompressiblen Materialmodellen verwenden (siehe [HM09]). Für die Identifikation von W_{iso} mit der inkompressiblen Verzerrungsenergiedichte benötigt man allerdings, dass die entsprechende Volumenänderung (J) infinitesimal ist und die volumetrische Funktion $W_{vol}(J)$ erweitert werden kann als eine Taylorreihe für diesen Bereich von Volumenänderungen. In [HM09] wird gezeigt, dass experimentelle Daten nahelegen, dass die zweite Bedingung nicht immer erfüllt ist, insbesondere für große Deformationen. Unter diesen Voraussetzungen erhält man mit einer geeigneten Funktion in Abhängigkeit von $\det(F)$ eine kompressible Version des entsprechenden inkompressiblen Materialmodells. Beispiele dafür ergeben sich, wenn man die kompressible und die inkompressible Version der Verzerrungsenergiedichte der oben vorgestellten Ogden-, Mooney-Rivlin- oder Neo Hookeschen Materialien miteinander vergleicht. Wir wollen zunächst einige isochorische Terme vorstellen, deren Polykonvexität in [SN03] bewiesen wird:

-

$$W_{iso}^1(\bar{I}_1) = (\bar{I}_1^k - 3^k)^i, \quad i \geq 1, \quad k \geq 1,$$

-

$$W_{iso}^2(\bar{I}_2) = (\bar{I}_2^{\frac{3k}{2}} - (3\sqrt{3})^k)^j, \quad j \geq 1, \quad k \geq 1,$$

-

$$W_{iso}^3(W_{iso}^1(\bar{I}_1)) = \exp(W_{iso}^1(\bar{I}_1)) - 1, \quad i \geq 1, \quad k \geq 1,$$

-

$$W_{iso}^4(W_{iso}^2(\bar{I}_2)) = \exp(W_{iso}^2(\bar{I}_2)) - 1, \quad j \geq 1, \quad k \geq 1.$$

Diese Beispiele für polykonvexe, isochorische Terme einer Verzerrungsenergiedichte sind insbesondere von Interesse, wenn man die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten ausnutzt (siehe oben).

In dem Artikel [HN03] werden außerdem altbekannte volumetrische Terme einer Verzerrungsenergiedichte aus der Literatur angegeben. Allerdings gibt es auch noch weitere sehr interessante Artikel in Hinblick auf volumetrische Terme einer Verzerrungsenergiedichte, wie beispielsweise [HM09] und [DS00]. Insbesondere in [DS00] findet man auch eine Liste von volumetrischen Termen. Sowohl in [HN03], als auch in [DS00] werden die volumetrischen Termen nicht nur auf Konvexität, was für die Polykonvexität der Verzerrungsenergiedichte notwendig ist, sondern auch auf weitere physikalische Bedingungen untersucht. Diese Bedingungen sind unter anderem notwendig, um eine energie- und spannungsfreie Referenzkonfiguration vorauszusetzen. Aufgrund der mathematischen Einfachheit wird im Allgemeinen angenommen, dass der volumetrische Term endlich polynomial in $J = \det(F)$ ist. Aber in [HM09] wird beispielsweise auch ein rationaler Funktionsansatz vorgestellt. Ein Beispiel für einen polynomialen volumetrischen Term haben wir schon mit der Funktion $G(J)$ (siehe (5.36)) beim kompressiblen Ogden-Modell kennengelernt. Der am häufigsten gebrauchte Ausdruck für den volumetrischen Term einer Verzerrungsenergiedichte eines kompressiblen, isotropen, hyperelastischen Materials ist allerdings

$$W_{vol}^1(J) = \frac{\kappa}{2}(J - 1)^2.$$

Dabei und im Weiteren wird mit κ der Kompressionsmodul bezeichnet. Die Funktion W_{vol}^1 ist konvex in J für $\kappa > 0$. In [HM09] wird experimentell gezeigt, dass der quadratische Term W_{vol}^1 eine gute Wahl ist für moderate Deformationen, für die etwa $1 \leq J \leq 1.0003$ gilt. Wir wollen im Folgenden einige weitere bekannte konvexe, volumetrische Terme inklusive einer Referenz auflisten:

•

$$W_{vol}^2(J) = \frac{\kappa}{2}(\ln(J))^2, \quad \text{Simo et al. (1985) ([STP85]),}$$

•

$$W_{vol}^3(J) = \frac{\kappa}{4}\left((J - 1)^2 + (\ln(J))^2\right), \quad \text{Simo und Taylor (1982) ([ST82]),}$$

•

$$W_{vol}^4(J) = \kappa(J \ln(J) - J + 1), \quad \text{Liu et al. (1994) ([LHM94]),}$$

- $$W_{vol}^5(J) = \frac{\kappa}{4}(J^2 - 1 - 2 \ln(J)), \quad \text{Simo und Taylor (1991) ([ST91])}.$$

Ein weiterer konvexer, volumetrischer Term ist

$$W_{vol}^6(J) = \frac{c_1}{\beta}(J^{-2\beta} - 1). \quad (5.40)$$

Dabei seien $\beta = \frac{\nu}{1-2\nu} > 0$ mit der Poissonrate ν und $c_1 = \frac{\mu}{2} > 0$ mit dem Schubmodul μ . Es sei schließlich erwähnt, dass jede additive Zusammensetzung der einzelnen volumetrischen Funktionen W_{vol}^1 bis W_{vol}^6 als eine zulässige Verallgemeinerung der einzelnen Funktionen gesehen werden kann. Dies lässt sich auch damit begründen, dass eine additive Zusammensetzung von konvexen Funktionen wieder konvex ist.

Kapitel 6

Numerische Realisierung und Ergebnisse

6.1 Das Materialmodell

Für die numerische Lösung sowohl des Vorwärtsproblems als auch des inversen Problems benötigen wir zunächst ein konkretes Materialmodell. Dabei wollen wir ein isotropes, hyperelastisches Material betrachten. Es wurde bereits ausführlich erläutert, dass wir für die Verzerrungsenergiedichte $C(x, Y)$ in unserem Modell eine konische Kombination

$$C(x, Y) = \sum_{K=1}^N \alpha_K C_K(x, Y),$$

$\alpha_K \geq 0$ für alle $K = 1, \dots, N$, von Tensorprodukten

$$C_K(x, Y) = v_K(x)C(Y)$$

ansetzen wollen. Dazu haben wir bereits in Kapitel 5 ein Dictionary an Funktionen $C(Y)$ für isotrope, hyperelastische Materialien aufgestellt. In diesem Abschnitt und somit für die numerische Umsetzung wollen wir ein Neo Hookesches Material mit der folgenden Verzerrungsenergiedichte (siehe (5.22) und $W_{vol}^6(J)$ in Kapitel 5) betrachten:

$$C(Y) = c_1(I_1 - 3) + \frac{c_1}{\beta}(J^{-2\beta} - 1). \quad (6.1)$$

Als Materialparameter enthält dieses Modell $\beta = \frac{\nu}{1-2\nu} = \frac{3\kappa-2\mu}{6\mu} > 0$ und $c_1 = \frac{\mu}{2} > 0$ mit der Poissonrate ν , dem Schubmodul μ und dem Kompressionsmodul κ . Bei der

numerischen Umsetzung haben wir dabei $\kappa = 68.6\text{GPa}$ und $\mu = 26.32\text{GPa}$ verwendet, womit $\beta \approx 0.96986$ und $c_1 = 13.16\text{GPa}$ positiv sind. Diese Werte entstammen dem Artikel [RL15].

6.1.1 Der Messaufbau

Um im nächsten Abschnitt unsere Wahl der ortsabhängigen Funktionen v_K , $K = 1, \dots, N$, genau erläutern zu können, wollen wir zunächst im Folgenden genauer auf den Aufbau des numerischen Experiments eingehen. Dabei betrachten wir eine Platte, die in x_1 -Richtung relativ dünn im Vergleich zu den anderen beiden Richtungen x_2 und x_3 ist. Genauer gesagt, hat die Platte im gerechneten Beispiel die Maße $[-0.1, 0.1] \times [-15, 15]^2$. Außerdem nehmen wir an, dass wenn ein Schaden an der Platte auftritt, sich dieser am Rand der Platte befindet und die Platte im Inneren unbeschädigt bleibt. Dies ist beispielsweise bei Delaminationen der Fall. Aus diesem Grund betrachten wir in x_1 -Richtung zwei Schichten I, II nah am Rand der Platte und zwar I bei $x_1 = -0.1 + \epsilon$ und II bei $x_1 = 0.1 - \epsilon$ für $\epsilon > 0$ (siehe Abbildung 6.1). Zwischen den beiden Schichten gilt $C_K(x, Y) \equiv C(Y)$

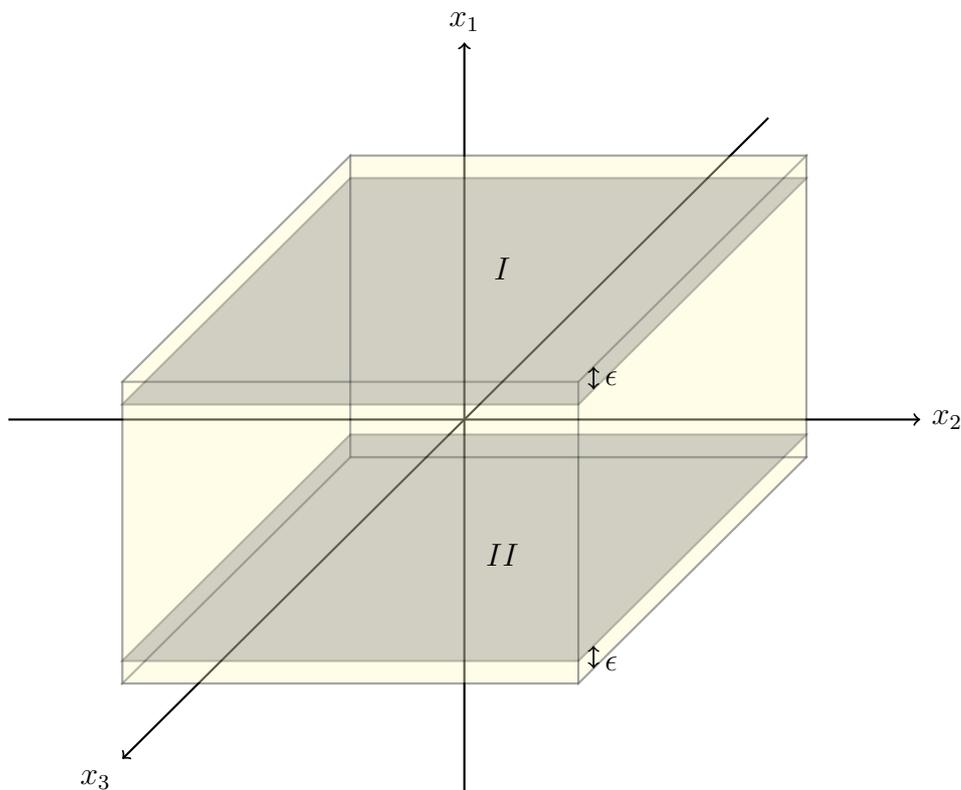


Abbildung 6.1: Skizze der Platte mit den beiden Schichten

für alle $K = 1, \dots, N$ und somit ist die Verzerrungsenergiedichte dort unabhängig vom Ort beziehungsweise es gilt $v_K \equiv 1$ für alle $K = 1, \dots, N$. In den Schichten hingegen gilt entweder $x_1 = -0.1 + \epsilon$ oder $x_1 = 0.1 - \epsilon$ und die Verzerrungsenergiedichte $C(x, Y)$ hängt somit bezüglich des Ortes nur von x_2 und x_3 ab. Wir gehen jetzt davon aus, dass wir sowohl in x_2 - als auch in x_3 -Richtung eine äquidistante Zerlegung

$$-15 = a = x_l^{(0)} < x_l^{(1)} < \dots < x_l^{(n)} = b = 15, \quad l = 2, 3, \quad n \in \mathbb{N},$$

des Intervalls $[a, b] = [-15, 15]$ mit konstanten $h = x_l^{(k)} - x_l^{(k-1)} = \frac{30}{n}$ für $l = 2, 3$ und alle $k = 1, \dots, n$ haben. Somit erhalten wir ein Gitter auf $[-15, 15]^2$ und nummerieren die Gitterpunkte zeilenweise beginnend beim Punkt $(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (-15, -15)$ von 1 bis N mit $N = (n + 1)^2$ durch. Dann lässt sich der Zusammenhang zwischen dem Punkt $(x_2^{(i)}, x_3^{(j)})$, $i, j = 0, \dots, n$, und der Nummer $K \in \{1, \dots, N\}$ dieses Punktes darstellen mithilfe der bijektiven Abbildung $\varphi : \{0, \dots, n\}^2 \rightarrow \{1, \dots, N\}$, $\varphi(i, j) := i + (n + 1)j + 1$ für $i, j = 0, \dots, n$. Dieser Zusammenhang wird uns im Folgenden sehr hilfreich sein bei der Wahl der ortsabhängigen Funktionen in den beiden Schichten.

6.1.2 Wahl der ortsabhängigen Funktionen

Mithilfe der Notationen aus dem vorherigen Abschnitt wählen wir nun für die Funktionen $v_K(x)$, $K = 1, \dots, N$, bilineare Splines

$$B_{ij}(x_2, x_3) = b_i(x_2)b_j(x_3)$$

mit $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Dabei definieren wir

$$b_i(z) = N_{i,1}(z) = \begin{cases} \frac{1}{h}(z - x^{(i-1)}) & , z \in [x^{(i-1)}, x^{(i)}] \\ 1 - \frac{1}{h}(z - x^{(i)}) & , z \in [x^{(i)}, x^{(i+1)}] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (6.2)$$

für $i = 1, \dots, n - 1$,

$$b_0(z) = N_{0,1}(z) = \left(1 - \frac{1}{h}(z - x^{(0)})\right)\chi_{[x^{(0)}, x^{(1)}]}(z) \quad (6.3)$$

und

$$b_n(z) = N_{n,1}(z) = \frac{1}{h}(z - x^{(n-1)})\chi_{[x^{(n-1)}, x^{(n)}]}(z). \quad (6.4)$$

Dabei steht z immer entweder für x_2 oder für x_3 und χ für die Indikatorfunktion. Bevor wir zur Verzerrungsenergiedichte zurückkehren, wollen wir zunächst einige Aussagen über die in (6.2) bis (6.4) definierten Splines, den sogenannten *B-Splines 1. Ordnung*, zeigen. Dazu benötigen wir aber noch die folgende Definition von $N_{i,0}(z)$ für alle $i = 0, \dots, n$. Es seien

$$N_{i,0}(z) = \chi_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}]}(z) \quad (6.5)$$

für $i = 0, \dots, n - 1$ und

$$N_{n,0}(z) = 0. \quad (6.6)$$

Mithilfe dieser *B-Splines 0. Ordnung* können wir nun die in (6.2) bis (6.4) betrachteten Funktionen $b_i(z) = N_{i,1}(z)$ für $i = 0, \dots, n$ auch folgendermaßen formulieren:

$$b_i(z) = N_{i,1}(z) = \frac{1}{h}(z - x^{(i-1)})N_{i-1,0}(z) + \left(1 - \frac{1}{h}(z - x^{(i)})\right)N_{i,0}(z) \quad (6.7)$$

für alle $i = 1, \dots, n - 1$,

$$b_0(z) = N_{0,1}(z) = \left(1 - \frac{1}{h}(z - x^{(0)})\right)N_{0,0}(z) \quad (6.8)$$

und

$$b_n(z) = N_{n,1}(z) = \frac{1}{h}(z - x^{(n-1)})N_{n-1,0}(z). \quad (6.9)$$

Die folgende, sogenannte *Marsden-Identität* ist nützlich, um die darauffolgende Eigenschaft, die Zerlegung der Eins, der hier definierten Splines zu zeigen.

Lemma 6.1. *Für alle $x \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(x - s) = \sum_{i=0}^n (x^{(i)} - s)N_{i,1}(x).$$

Beweis. Es seien $x \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^n (x^{(i)} - s) N_{i,1}(x) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} (x^{(i)} - s) (x - x^{(i-1)}) N_{i-1,0}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} (x^{(i)} - s) \left(1 - \frac{1}{h} (x - x^{(i)})\right) N_{i,0}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{h} (x^{(i+1)} - s) (x - x^{(i)}) N_{i,0}(x) + (x^{(i)} - s) \left(1 - \frac{1}{h} (x - x^{(i)})\right) N_{i,0}(x)\right) \right] \\
&= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n-1} \left[(x^{(i+1)} - s) (x - x^{(i)}) + (x^{(i)} - s) (x^{(i+1)} - x) \right] N_{i,0}(x) \\
&= (x - s) \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,0}(x) \\
&= (x - s) \sum_{i=0}^n N_{i,0}(x) \\
&= (x - s) \sum_{i=0}^n \chi_{[x^{(i)}, x^{(i+1)})}(x) \\
&= (x - s)
\end{aligned}$$

und somit die Aussage des Lemmas. □

Damit können wir nun die bereits erwähnte *Zerlegung der Eins* beweisen:

Korollar 6.1. *Es gilt für alle $x \in [a, b]$*

$$1 = \sum_{i=0}^n N_{i,1}(x).$$

Beweis. Sei $f(s) := x - s$ für ein festes $x \in [a, b]$. Dann gilt $f'(s) = -1$. Mithilfe der Marsden-Identität (Lemma 6.1) gilt

$$-1 = \sum_{i=0}^n (-1) N_{i,1}(x)$$

und damit ist das Korollar bewiesen. □

Als letzte Eigenschaft der B-Splines 1. Ordnung, die wir hier beweisen wollen, betrachten wir die Splines an den Stützstellen $x^{(k)}$, $k = 0, \dots, n$, der äquidistanten Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.

Lemma 6.2. *Es gilt für alle $k = 0, \dots, n$ und $i = 0, \dots, n$*

$$N_{i,1}(x^{(k)}) = \delta_{ik}.$$

Beweis. Es seien $i, k \in \{0, \dots, n\}$ beliebig. Angenommen es gilt $x^{(k)} \notin [x^{(i-1)}, x^{(i+1)})$, dann folgt nach (6.2) $N_{i,1}(x^{(k)}) = 0$. Damit betrachten wir nun $x^{(k)} \in [x^{(i-1)}, x^{(i+1)})$. Wir untersuchen zuerst den Fall, dass $x^{(k)} \in [x^{(i-1)}, x^{(i)})$ gilt. Dann folgt $x^{(k)} = x^{(i-1)}$ und damit nach (6.2) $N_{i,1}(x^{(k)}) = \frac{1}{h}(x^{(i-1)} - x^{(i-1)}) = 0$. Somit müssen wir nur noch den Fall, dass $x^{(k)} \in [x^{(i)}, x^{(i+1)})$ ist, behandeln. Dann gilt aber $x^{(k)} = x^{(i)}$ und dies liefert mithilfe von (6.2) wiederum $N_{i,1}(x^{(k)}) = 1 - \frac{1}{h}(x^{(i)} - x^{(i)}) = 1$. Da dies für alle $i, k \in \{0, \dots, n\}$ gilt, folgt die Behauptung. \square

6.1.3 Ableitungen der Verzerrungsenergiedichte

Um sowohl das Vorwärtsproblem als auch das inverse Problem numerisch lösen zu können, müssen wir, wie wir später sehen werden, im nächsten Schritt die erste und zweite Ableitung der Verzerrungsenergiedichte $C(Y)$ aus (6.1) nach Y bestimmen. Dabei ist Y ein Tensor 2. Stufe, welcher im Zusammenhang mit unserer Problemstellung den Deformationsgradienten $F(t, x) = I + \nabla u(t, x)$ mit dem Verschiebungsgradienten $\nabla u(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ repräsentiert. In Kapitel 2 haben wir erläutert, dass $\det(Y) > 0$ für den Deformationsgradienten $Y = I + \nabla u$ gilt und damit Y invertierbar ist. Für die Ableitungen nach Y benötigen wir das folgende Lemma, welches Rechenregeln für die Differentiation nach einem Tensor 2. Stufe liefert.

Lemma 6.3. *Für Tensoren 2. Stufe A, B und C gilt:*

(i)

$$\frac{\partial(A : B)}{\partial C} = A : \frac{\partial B}{\partial C} + B : \frac{\partial A}{\partial C},$$

(ii)

$$\frac{\partial A}{\partial A} : B = B : \frac{\partial A}{\partial A} = B,$$

(iii) für A invertierbar:

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A} = \det(A) A^{-\top},$$

(iv)

$$\frac{\partial A^{-\top}}{\partial A} : B = -A^{-\top} B^{\top} A^{-\top}.$$

Einen Beweis dieses Lemmas findet man beispielsweise in [Hol00]. Mithilfe des Lemmas 6.3 erhalten wir

$$\frac{\partial I_1}{\partial Y} = \frac{\partial(Y : Y)}{\partial Y} \stackrel{(i)}{=} Y : \frac{\partial Y}{\partial Y} + Y : \frac{\partial Y}{\partial Y} \stackrel{(ii)}{=} Y + Y = 2Y. \quad (6.10)$$

Damit können wir nun den folgenden Satz angeben und beweisen.

Satz 6.1. *Sei $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ein beliebiger Tensor 2. Stufe. Für die Verzerrungsenergiedichte $C(Y)$ aus (6.1) gilt dann:*

(i)

$$\nabla_Y C(Y) = 2c_1 Y - 2c_1 J^{-2\beta} Y^{-\top},$$

(ii)

$$\nabla_Y \nabla_Y C(Y) : H = 2c_1 H + 4c_1 \beta J^{-2\beta} (Y^{-\top} \otimes Y^{-\top}) : H + 2c_1 J^{-2\beta} Y^{-\top} H^{\top} Y^{-\top}.$$

Beweis. Zunächst einmal gilt

$$\nabla_Y C(Y) = c_1 \frac{\partial I_1}{\partial Y} - 2c_1 J^{-2\beta-1} \frac{\partial J}{\partial Y}.$$

Mithilfe von (6.10), $J = \det(Y) > 0$ und Lemma 6.3 (iii) folgt daraus

$$\nabla_Y C(Y) = 2c_1 Y - 2c_1 J^{-2\beta} Y^{-\top}. \quad (6.11)$$

Damit ist (i) gezeigt. Dies führt bei dem Beweis von (ii) außerdem im ersten Schritt auf

$$\nabla_Y \nabla_Y C(Y) = 2c_1 \frac{\partial Y}{\partial Y} - 2c_1 \frac{\partial}{\partial Y} (J^{-2\beta} Y^{-\top}).$$

Daraus erhalten wir mit Lemma 6.3 (ii) für alle Tensoren 2. Stufe $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\nabla_Y \nabla_Y C(Y) : H = 2c_1 H - 2c_1 \frac{\partial}{\partial Y} (J^{-2\beta} Y^{-\top}) : H.$$

Die Ableitung im zweiten Summanden lässt sich mithilfe der Produktregel und Lemma 6.3 folgendermaßen umformulieren

$$\frac{\partial}{\partial Y} (J^{-2\beta} Y^{-\top}) : H$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial(J^{-2\beta})}{\partial Y} : H \right) Y^{-\top} + J^{-2\beta} \left(\frac{\partial Y^{-\top}}{\partial Y} : H \right) \\
&= (-2\beta J^{-2\beta-1} \frac{\partial J}{\partial Y} : H) Y^{-\top} - J^{-2\beta} Y^{-\top} H^{\top} Y^{-\top} \\
&= -2\beta J^{-2\beta} (Y^{-\top} : H) Y^{-\top} - J^{-2\beta} Y^{-\top} H^{\top} Y^{-\top} \\
&= -2\beta J^{-2\beta} (Y^{-\top} \otimes Y^{-\top}) : H - J^{-2\beta} Y^{-\top} H^{\top} Y^{-\top}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich die Aussage von (ii). \square

6.1.4 Zusammenfassung: Die konische Kombination für die Verzerrungsenergiedichte

Wie bereits im Abschnitt 6.1.1 erläutert, wollen wir für die numerischen Experimente eine Platte mit den Maßen $[-0.1, 0.1] \times [-15, 15]^2$ betrachten. Somit ist die Platte in x_1 -Richtung im Vergleich zur x_2 - beziehungsweise x_3 -Richtung relativ dünn. Außerdem betrachten wir in x_1 -Richtung zwei Schichten *I* und *II* nahe am Rand der Platte und zwar bei $x_1 = -0.1 + \epsilon$ und bei $x_1 = 0.1 - \epsilon$ für $\epsilon > 0$ (siehe Abbildung 6.1). Zwischen diesen beiden Schichten gilt für die Verzerrungsenergiedichte

$$C(x, Y) = C(Y) \tag{6.12}$$

mit

$$C(Y) = c_1(I_1 - 3) + \frac{c_1}{\beta}(J^{-2\beta} - 1)$$

(siehe (6.1)) und aufgrund von Satz 6.1

$$\nabla_Y C(Y) = 2c_1 Y - 2c_1 J^{-2\beta} Y^{-\top}$$

und

$$\nabla_Y \nabla_Y C(Y) : H = 2c_1 H + 4c_1 \beta J^{-2\beta} (Y^{-\top} \otimes Y^{-\top}) : H + 2c_1 J^{-2\beta} Y^{-\top} H^{\top} Y^{-\top}.$$

In den beiden Schichten gilt entweder $x_1 = -0.1 + \epsilon$ oder $x_1 = 0.1 - \epsilon$ und die Verzerrungsenergiedichte $C(x, Y)$ hängt bezüglich des Ortes nur von x_2 und x_3 ab. Dann wählen

wir

$$C(x, Y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} b_i(x_2) b_j(x_3) C(Y) \quad (6.13)$$

mit $\alpha_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 0, \dots, n$, den B-Splines 1. Ordnung

$$b_i(x_2) = N_{i,1}(x_2), \quad b_j(x_3) = N_{j,1}(x_3)$$

(siehe (6.2) bis (6.4)) für alle $i, j = 0, \dots, n$ und der Verzerrungsenergiedichte eines Neo Hookeschen Materials

$$C(Y) = c_1(I_1 - 3) + \frac{c_1}{\beta}(J^{-2\beta} - 1)$$

(siehe (6.1)). Da $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} b_i(x_2) b_j(x_3)$ unabhängig von Y ist, folgt für die Ableitungen von $C(x, Y)$ aus (6.13) nach Y mithilfe von Satz 6.1

$$\begin{aligned} \nabla_Y C(x, Y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} b_i(x_2) b_j(x_3) \nabla_Y C(Y) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} b_i(x_2) b_j(x_3) (2c_1 Y - 2c_1 J^{-2\beta} Y^{-\top}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

und für alle Tensoren 2. Stufe $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\begin{aligned} &\nabla_Y \nabla_Y C(x, Y) : H \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} b_i(x_2) b_j(x_3) \nabla_Y \nabla_Y C(Y) : H \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} b_i(x_2) b_j(x_3) (2c_1 H + 4c_1 \beta J^{-2\beta} (Y^{-\top} \otimes Y^{-\top}) : H \\ &\quad + 2c_1 J^{-2\beta} Y^{-\top} H^{\top} Y^{-\top}). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Für den Fall, dass wir für x_2 und x_3 jeweils eine äquidistante Zerlegung

$$-15 = x_l^{(0)} < x_l^{(1)} < \dots < x_l^{(n)} = 15, \quad l = 2, 3, \quad n \in \mathbb{N},$$

des Intervalls $[-15, 15]$ betrachten, erhalten wir an den Stützstellen $x_l^{(k)} \in [-15, 15]$, $l = 2, 3$, $k = 0, \dots, n$,

$$C(x_2^{(p)}, x_3^{(q)}, Y) = \alpha_{pq} C(Y) \quad (6.16)$$

$$\nabla_Y C(x_2^{(p)}, x_3^{(q)}, Y) = \alpha_{pq} \nabla_Y C(Y) \quad (6.17)$$

$$\nabla_Y \nabla_Y C(x_2^{(p)}, x_3^{(q)}, Y) : H = \alpha_{pq} \nabla_Y \nabla_Y C(Y) : H \quad (6.18)$$

für alle $p, q = 0, \dots, n$ und alle Tensoren 2. Stufe $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit den Ableitungen von $C(Y)$ nach Y aus Satz 6.1. Dies spielt vorallem dann eine wichtige Rolle, wenn wir im Verfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems beziehungsweise des inversen Problems die entsprechende Funktion an den Quadraturpunkten integrieren wollen. Da wir die Gauß-Lobatto-Quadratur gewählt haben, stimmen diese mit den Gitterpunkten überein für den Fall, dass wir für alle Zellen in jeder Richtung zwei Quadraturpunkte pro Richtung wählen. Darauf wollen wir aber später noch genauer eingehen. Im nächsten Schritt betrachten wir die Lösung des Vorwärtsproblems.

6.2 Das Verfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems

6.2.1 Die Herleitung des Verfahrens

In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren zur Bestimmung einer Lösung von

$$\rho \ddot{u}(t, x) - \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \nabla u(t, x)) = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (6.19)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = \dot{u}(0, x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (6.20)$$

und homogenen Dirichlet-Randwerten

$$u(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in [0, T] \times \partial\Omega \quad (6.21)$$

vorstellen. Wir betrachten hier, wie bereits in den vorherigen Abschnitten erwähnt, als Struktur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine Platte mit den Maßen $[-0.1, 0.1] \times [-15, 15]^2$. Für die Verzerungsenergiedichte $C(x, \nabla u(t, x))$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ in (6.19) wollen wir (6.12) beziehungsweise (6.13) mit (6.1) verwenden, wobei $Y = I + \nabla u(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$,

gelte. Um die Gleichung (6.19) im Folgenden zu diskretisieren und numerisch zu lösen, überführen wir diese Gleichung in ein System 1. Ordnung, indem wir $r(t, x) := \dot{u}(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ setzen. Dann erhalten wir als zur Gleichung (6.19) äquivalente Formulierung

$$\begin{cases} \dot{u}(t, x) - r(t, x) = 0 \\ \rho \dot{r}(t, x) - \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \nabla u(t, x)) = f(t, x) \end{cases} \quad (6.22)$$

für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. Nun diskretisieren wir dieses System von Differentialgleichungen zunächst in der Zeit, indem wir die sogenannte θ -Methode benutzen. Der Vorteil dieser Methode liegt einerseits darin, dass wir dabei nur zwei Zeitschritte benötigen, und andererseits darin, dass wir mehrere Methoden der Zeitdiskretisierung durch eine beliebige Wahl von $\theta \in [0, 1]$ abdecken. So erhalten wir beispielsweise für $\theta = 0$ die explizite Euler-Methode, für $\theta = 1/2$ das Crank-Nicolson-Schema und für $\theta = 1$ das implizite Euler-Verfahren. Um die θ -Methode anzuwenden, unterteilen wir das Zeitintervall $I = [0, T]$ in $m > 0$ gleichgroße Zeitschritte der festen Länge $k = T/m$ mit $t_j = jk$, $j = 0, \dots, m$. Dann liefert die θ -Methode in Zeitschritt j für alle $j = 1, \dots, m$ die folgende Formulierung der zeitdiskretisierten Gleichung

$$\begin{cases} \frac{u^j - u^{j-1}}{k} = \theta r^j + (1 - \theta) r^{j-1} \\ \rho \frac{r^j - r^{j-1}}{k} = \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}) + \theta f^j + (1 - \theta) f^{j-1}. \end{cases}$$

Dabei und im Weiteren steht ein hochgestelltes j für den Wert der Variablen zum Zeitpunkt t_j . Nun stellen wir die beiden Gleichungen nach u^j beziehungsweise r^j um und erhalten

$$\begin{cases} u^j = u^{j-1} + k\theta r^j + k(1 - \theta) r^{j-1} \\ r^j = r^{j-1} + \frac{k}{\rho} \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}) + \frac{k\theta}{\rho} f^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho} f^{j-1}. \end{cases}$$

Schließlich eliminieren wir r^j aus der ersten Gleichung:

$$\begin{cases} u^j = u^{j-1} + k r^{j-1} + \frac{k^2 \theta}{\rho} \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}) \\ \quad + \frac{k^2 \theta^2}{\rho} f^j + \frac{k^2 \theta (1-\theta)}{\rho} f^{j-1} \\ r^j = r^{j-1} + \frac{k}{\rho} \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}) + \frac{k\theta}{\rho} f^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho} f^{j-1}. \end{cases} \quad (6.23)$$

In dem Gleichungssystem (6.23) ist die erste Gleichung nicht linear in u^j , die zweite Gleichung ist aber linear in r^j . Dies hat zur Folge, dass wir einen nichtlinearen Löser für die erste Gleichung implementieren müssen, um die beiden Gleichungen im Raum diskretisieren und lösen zu können. Somit widmen wir uns zunächst der ersten Gleichung, welche wir mit dem Newton-Verfahren lösen wollen. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} F(u_l^j) &= u_l^j - u^{j-1} - kr^{j-1} - \frac{k^2\theta}{\rho} \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) \\ &\quad - \frac{k^2\theta^2}{\rho} f^j - \frac{k^2\theta(1-\theta)}{\rho} f^{j-1} \end{aligned} \quad (6.24)$$

mit dem Iterationsindex $l = 0, 1, \dots$ des Newton-Verfahrens. Damit entspricht die zu lösende erste Gleichung in (6.23) der nichtlinearen Gleichung $F(u_l^j) = 0$. Das Newton-Verfahren liefert eine Lösung dieser Gleichung, indem ∂u_l^j mit

$$F'(u_l^j) \partial u_l^j = -F(u_l^j)$$

bestimmt und anschließend

$$u_{l+1}^j = u_l^j + \partial u_l^j$$

für alle $l = 0, 1, \dots$ mit $u_0^j = u^{j-1}$ gesetzt wird, bis eine hinreichende Genauigkeit erreicht ist. Die Darstellung der Richtungsableitung von F an der Stelle u_l^j in Richtung ∂u_l^j liefert der folgende Satz.

Satz 6.2. Die Funktion $F : H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ sei gegeben durch (6.24). Dann gilt für alle $\partial u_l^j \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$

$$F'(u_l^j) \partial u_l^j = \partial u_l^j - \frac{k^2\theta^2}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla(\partial u_l^j)].$$

Bemerkung 6.1. Im Kapitel über die Fréchet-Ableitung haben wir gesehen, dass für die Lösung u der Differentialgleichung (6.19) $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gelten muss und mit (6.21) schließlich $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ folgt. Aufgrund dessen, dass u_l^j und u^{j-1} eine Lösung dieser Differentialgleichung im entsprechenden Zeitschritt beziehungsweise r^j die zeitliche Ableitung der Lösung u^j zum Zeitpunkt t_j darstellen soll, muss damit auch $u_l^j, u^{j-1}, r^{j-1} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gelten. Dies führt am Ende dazu, dass wir auch für die Richtung $\partial u_l^j \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ jeweils betrachten.

Beweis von Satz 6.2: Es seien $u_l^j, \partial u_l^j \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und $s > 0$ hinreichend klein. Unter der

Annahme, dass der Grenzwert

$$v := \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{F(u_l^j + s\partial u_l^j) - F(u_l^j)}{s} \quad (6.25)$$

existiert, gilt

$$v = F'(u_l^j)\partial u_l^j.$$

Mit (6.24) erhalten wir

$$\begin{aligned} & F(u_l^j + s\partial u_l^j) - F(u_l^j) \\ = & s\partial u_l^j - \frac{k^2\theta^2}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y C(x, \theta\nabla(u_l^j + s\partial u_l^j) + (1-\theta)\nabla u^{j-1}) \\ & - \nabla_Y C(x, \theta\nabla u_l^j + (1-\theta)\nabla u^{j-1})]. \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$G(r) := \nabla_Y C(x, r\theta\nabla(u_l^j + s\partial u_l^j) + (1-r)\theta\nabla u_l^j + (1-\theta)\nabla u^{j-1})$$

für alle $r \in [0, 1]$ folgt

$$\begin{aligned} & \nabla_Y C(x, \theta\nabla(u_l^j + s\partial u_l^j) + (1-\theta)\nabla u^{j-1}) - \nabla_Y C(x, \theta\nabla u_l^j + (1-\theta)\nabla u^{j-1}) \\ = & G(1) - G(0) \\ = & \int_0^1 G'(r) dr \\ = & \int_0^1 Y_r : (\theta\nabla(u_l^j + s\partial u_l^j) - \theta\nabla u_l^j) dr \end{aligned}$$

mit

$$Y_r := \nabla_Y \nabla_Y C(x, r\theta\nabla(u_l^j + s\partial u_l^j) + (1-r)\theta\nabla u_l^j + (1-\theta)\nabla u^{j-1}).$$

Dabei gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} Y_r = \nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta\nabla u_l^j + (1-\theta)\nabla u^{j-1}).$$

Dies liefert

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} [\nabla_Y C(x, \theta\nabla(u_l^j + s\partial u_l^j) + (1-\theta)\nabla u^{j-1})$$

$$\begin{aligned}
& -\nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1})] \\
= & \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \int_0^1 Y_r : \theta s \nabla(\partial u_l^j) dr \\
= & \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^1 Y_r : \theta \nabla(\partial u_l^j) dr \\
= & \nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}) : \theta \nabla(\partial u_l^j).
\end{aligned}$$

Nun können wir alles zusammensetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{F(u_l^j + s \partial u_l^j) - F(u_l^j)}{s} \\
= & \partial u_l^j - \frac{k^2 \theta^2}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}) : \theta \nabla(\partial u_l^j)].
\end{aligned}$$

Dies ergibt schließlich mit (6.25) und $v = F'(u_l^j) \partial u_l^j$ die Behauptung. \square

Bevor wir die zeitdiskretisierten Gleichungen (siehe (6.23)) auch im Ort diskretisieren, wollen wir die schwache Formulierung dieses Systems inklusive nichtlinearem Löser in jedem Zeitschritt $t_j = jk$ angeben. Wir betrachten als Lösungs- beziehungsweise Testraum $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und erhalten:

Finde $\partial u_l^j \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, sodass

$$\langle F'(u_l^j) \partial u_l^j, \varphi \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} = -\langle F(u_l^j), \varphi \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \quad (6.26)$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gilt, und setze

$$u_{l+1}^j = u_l^j + \partial u_l^j$$

für alle $l = 0, 1, \dots$

Finde $r^j \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, sodass

$$\begin{aligned}
& \langle r^j, \varphi \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \\
= & \langle r^{j-1}, \varphi \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} + \frac{k}{\rho} \langle \nabla \cdot \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}), \varphi \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \quad (6.27)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{k\theta}{\rho} \langle f^j, \varphi \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} + \frac{k(1-\theta)}{\rho} \langle f^{j-1}, \varphi \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gilt.

Bemerkung 6.2. Die erste Gleichung beinhaltet ein iteratives Verfahren, mit anderen Worten wird sie in jedem Zeitschritt mehrfach gelöst, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist.

Wir kommen nun zur Diskretisierung dieser schwachen Formulierung unseres zeitdiskretisierten Problems im Raum. Dazu wollen wir die Finite-Elemente-Methode verwenden. Es sei \mathcal{V}_h ein endlichdimensionaler $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ -konformer Finite-Elemente-Raum mit nodaler Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_L\}$, wobei $\dim \mathcal{V}_h = L < \infty$ gelte. Als Nächstes entwickeln wir alle in der schwachen Formulierung auftretenden Funktionen mithilfe dieser nodalen Basis.

Dabei bezeichnen wir immer die entsprechenden Koeffizientenvektoren mit Großbuchstaben. So erhalten wir zum Beispiel $w^j = \sum_{r=1}^L U_r^j \varphi_r \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $U^j \in \mathbb{R}^L$. In der schwachen Formulierung verwenden wir anstelle von $\varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ als Testfunktion φ_s für $s \in \{1, \dots, L\}$, da $\varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ darstellbar ist als $\varphi = \sum_{r=1}^L A_r \varphi_r$, $A = (A_r)_{r=1, \dots, L} \in \mathbb{R}^L$, und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}$ bilinear ist. Für das erste Skalarprodukt in der schwachen Formulierung unseres Problems erhalten wir mit $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} & \langle F'(u_l^j) \partial u_l^j, \varphi_s \rangle_H \\ &= \sum_{r=1}^L [\langle \partial U_r^{j,l} \varphi_r, \varphi_s \rangle_H \\ & \quad - \frac{k^2 \theta^2}{\rho} \partial U_r^{j,l} \langle \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla \varphi_r], \varphi_s \rangle_H]. \end{aligned}$$

Wir definieren für $r, s = 1, \dots, L$

$$\tilde{A}_{rs}(u_l^j, u^{j-1}) := \langle \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla \varphi_r], \varphi_s \rangle_H.$$

Mit der Randbedingung (6.21) und partieller Integration folgt

$$\tilde{A}_{rs}(u_l^j, u^{j-1}) = - \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla \varphi_r) : \nabla \varphi_s \, dx.$$

Die Definition

$$A(u_l^j, u^{j-1}) = (A_{rs}(u_l^j, u^{j-1}))_{r,s=1, \dots, L} := (-\tilde{A}_{rs}(u_l^j, u^{j-1}))_{r,s=1, \dots, L} \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

liefert

$$\begin{aligned} & \langle F'(u_l^j) \partial u_l^j, \varphi_s \rangle_H \\ &= \sum_{r=1}^L \left[\partial U_r^{j,l} \langle \varphi_r, \varphi_s \rangle_H + \frac{k^2 \theta^2}{\rho} \partial U_r^{j,l} A_{rs}(u_l^j, u^{j-1}) \right] \end{aligned}$$

und schließlich

$$F'_h(U^{j,l}) \partial U^{j,l} = \left(M + \frac{k^2 \theta^2}{\rho} A(u_l^j, u^{j-1}) \right) \partial U^{j,l} \quad (6.28)$$

mit der Massematrix

$$M = (\langle \varphi_r, \varphi_s \rangle_H)_{r,s=1,\dots,L} \in \mathbb{R}^{L \times L}.$$

Nun wollen wir das zweite Skalarprodukt in der schwachen Formulierung unseres Problems betrachten. Dabei verwenden wir $M_{rs} = \langle \varphi_r, \varphi_s \rangle_H$ für alle $r, s = 1, \dots, L$ und erhalten

$$\begin{aligned} & \langle F(u_l^j), \varphi_s \rangle_H \\ &= \sum_{r=1}^L \left[U_r^{j,l} M_{rs} - U_r^{j-1} M_{rs} - k R_r^{j-1} M_{rs} \right. \\ & \quad \left. - \frac{k^2 \theta}{\rho} \langle \nabla \cdot [\nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1})], \varphi_s \rangle_H \right. \\ & \quad \left. - \frac{k^2 \theta^2}{\rho} F_r^j M_{rs} - \frac{k^2 (1 - \theta) \theta}{\rho} F_r^{j-1} M_{rs} \right]. \end{aligned}$$

Jetzt definieren wir für $s = 1, \dots, L$

$$\tilde{D}_s(u_l^j, u^{j-1}) := \langle \nabla \cdot [\nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1})], \varphi_s \rangle_H$$

und erhalten dafür mit der Randbedingung (6.21) beziehungsweise erneutem Anwenden von Lemma A.4

$$\tilde{D}_s(u_l^j, u^{j-1}) = - \int_{\Omega} \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla \varphi_s \, dx.$$

Wenn wir

$$D(u_l^j, u^{j-1}) = (D_s(u_l^j, u^{j-1}))_{s=1,\dots,L} := (-\tilde{D}_s(u_l^j, u^{j-1}))_{s=1,\dots,L} \in \mathbb{R}^L$$

setzen, liefert dies schließlich

$$\begin{aligned}
& F_h(U^{j,l}) \\
&= M(U^{j,l} - U^{j-1} - kR^{j-1}) + \frac{k^2\theta}{\rho}D(u_l^j, u^{j-1}) - \frac{k^2\theta^2}{\rho}MF^j \\
&\quad - \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho}MF^{j-1}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Somit haben wir die Komponenten der Gleichung (6.26) im Raum diskretisiert. Es verbleibt jetzt noch (6.27) im Raum zu diskretisieren. Mit den obigen Definitionen erhalten wir dafür

$$\begin{aligned}
& \langle r^j, \varphi_s \rangle_H \\
&= \sum_{r=1}^L [R_r^{j-1}M_{rs} - \frac{k}{\rho}D_s(u^j, u^{j-1}) + \frac{k\theta}{\rho}F_r^jM_{rs} + \frac{k(1-\theta)}{\rho}F_r^{j-1}M_{rs}]
\end{aligned}$$

und am Ende

$$MR^j = MR^{j-1} - \frac{k}{\rho}D(u^j, u^{j-1}) + \frac{k\theta}{\rho}MF^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho}MF^{j-1}. \tag{6.30}$$

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass in jedem Zeitschritt t_j damit die folgenden Matrixgleichungen gelöst werden müssen:

$$\begin{cases}
F'_h(U^{j,l})\partial U^{j,l} = -F_h(U^{j,l}) \\
U^{j,l+1} = U^{j,l} + \partial U^{j,l}, \quad U^{j,0} = U^{j-1} \\
MR^j = MR^{j-1} - \frac{k}{\rho}D(u^j, u^{j-1}) + \frac{k\theta}{\rho}MF^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho}MF^{j-1}.
\end{cases} \tag{6.31}$$

Es stellt sich nun die Frage, welchen Löser man für die erste Gleichung in (6.31) verwenden kann. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass die zugehörige (zu invertierende) Systemmatrix (siehe 6.28)

$$S := M + \frac{k^2\theta^2}{\rho}A(u_l^j, u^{j-1}) \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

symmetrisch und positiv definit ist. In diesem Fall können wir als numerischen Löser für die erste Gleichung in (6.31) die Methode der Konjugierten Gradienten (CG-Verfahren) verwenden. Es ist offensichtlich, dass die Matrix S symmetrisch ist, falls sowohl M als auch $A(u_l^j, u^{j-1})$ symmetrisch sind. Da $C := \frac{k^2\theta^2}{\rho} > 0$ für $\theta \neq 0$ gilt, folgt, dass S positiv definit ist, wenn wir zeigen können, dass M positiv definit und $A(u_l^j, u^{j-1})$ positiv semidefinit

ist. Im Fall $\theta = 0$ gilt $S = M$ und damit ist dann S genau dann positiv definit, wenn M positiv definit ist. Aus diesem Grund untersuchen wir die beiden Matrizen in den nächsten beiden Sätzen separat.

Satz 6.3. *Die Massenmatrix*

$$M = (M_{rs})_{r,s=1,\dots,L} = (\langle \varphi_r, \varphi_s \rangle_H)_{r,s=1,\dots,L} \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

mit

$$\langle \varphi_r, \varphi_s \rangle_H = \int_{\Omega} \langle \varphi_r(x), \varphi_s(x) \rangle dx$$

für alle $r, s = 1, \dots, L$ ist symmetrisch und positiv definit.

Beweis. Die Symmetrie der Matrix M folgt direkt aus der Symmetrie des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Um zu beweisen, dass M positiv definit ist, müssen wir zeigen, dass $\langle \xi, M\xi \rangle_{\mathbb{R}^L} > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$ gilt. Sei also $\xi \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \xi, M\xi \rangle_{\mathbb{R}^L} &= \sum_{r=1}^L \sum_{s=1}^L \xi_r M_{rs} \xi_s \\ &= \sum_{r=1}^L \sum_{s=1}^L \xi_r \left(\int_{\Omega} \langle \varphi_r(x), \varphi_s(x) \rangle dx \right) \xi_s \\ &= \int_{\Omega} \left\langle \sum_{r=1}^L \xi_r \varphi_r(x), \sum_{s=1}^L \xi_s \varphi_s(x) \right\rangle dx \\ &= \left\| \sum_{r=1}^L \xi_r \varphi_r \right\|_H^2. \end{aligned}$$

Damit folgt $\langle \xi, M\xi \rangle_{\mathbb{R}^L} \geq 0$. Allerdings gilt $\left\| \sum_{r=1}^L \xi_r \varphi_r \right\|_H = 0$ genau dann, wenn $\sum_{r=1}^L \xi_r \varphi_r = 0$ ist, wobei $z := \sum_{r=1}^L \xi_r \varphi_r$ als Element von \mathcal{V}_h gesehen werden kann. Dies bedeutet, wenn $z = 0$ gilt, dass dann $\xi_r = 0$ für alle $r = 1, \dots, L$ und somit $\xi = 0$ gelten muss. Damit folgt $\langle \xi, M\xi \rangle_{\mathbb{R}^L} > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$ und somit die Behauptung. \square

Satz 6.4. *Sei*

$$\begin{aligned} A &= (A_{rs}(u_l^j, u_l^{j-1}))_{r,s=1,\dots,L} \\ &= \left(\int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u_l^{j-1}) : \nabla \varphi_r) : \nabla \varphi_s dx \right)_{r,s=1,\dots,L} \in \mathbb{R}^{L \times L}. \end{aligned}$$

Dann ist die Matrix A symmetrisch und positiv definit.

Beweis. Zuerst wollen wir zeigen, dass die Matrix A symmetrisch ist. Dazu schreiben wir die Frobenius-Skalarprodukte in der Definition von A aus und erhalten für alle $r, s = 1, \dots, L$

$$A_{rs} = \sum_{k,l,p,q=1}^3 \int_{\Omega} \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C(x, Y) \partial_l(\varphi_r)_k \partial_q(\varphi_s)_p dx$$

mit $Y = \theta \nabla u_i^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}$. An dieser Darstellung sieht man leicht, dass A symmetrisch ist, falls für alle $k, l, p, q = 1, 2, 3$ und $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C(x, Y) = \partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{kl}} C(x, Y)$$

gilt. Da wir, wie bereits in den vorherigen Abschnitten erläutert, für die numerische Lösung unseres Problems die Verzerrungsenergiedichte

$$C(Y) = c_1(I_1 - 3) + \frac{c_1}{\beta}(J^{-2\beta} - 1)$$

aus (6.1) verwenden wollen, werden wir im Folgenden zeigen, dass diese Verzerrungsenergiedichte die obige Symmetriebedingung erfüllt. Dabei spielt die ortsabhängige Komponente keine Rolle, da für alle $k, l, p, q = 1, 2, 3$

$$\partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C(x, Y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} b_i(x_2) b_j(x_3) \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C(Y)$$

in den beiden Schichten am Rand der Platte (siehe vorheriger Abschnitt) und

$$\partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C(x, Y) = \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C(Y)$$

im Inneren der Platte gilt. Somit müssen wir zeigen, dass $\partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C(Y) = \partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{kl}} C(Y)$ für alle $k, l, p, q = 1, 2, 3$ und $C(Y)$ aus (6.1) gilt.

Es seien $k, l, p, q \in \{1, 2, 3\}$ und $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Aus $I_1 = Y : Y = \sum_{i,j=1}^3 Y_{ij}^2$ folgt dann $\frac{\partial I_1}{\partial Y_{pq}} = 2Y_{pq}$ und damit

$$\partial_{Y_{pq}} C(Y) = c_1 \frac{\partial I_1}{\partial Y_{pq}} + \frac{c_1}{\beta} (-2\beta) J^{-2\beta-1} \frac{\partial J}{\partial Y_{pq}}$$

$$= 2c_1 Y_{pq} - 2c_1 J^{-2\beta-1} \frac{\partial J}{\partial Y_{pq}}$$

für alle $p, q \in \{1, 2, 3\}$. Wenn wir diese Funktion jetzt nach Y_{kl} differenzieren, erhalten wir unter Verwendung des Satzes von Schwarz

$$\begin{aligned} & \partial_{Y_{kl}} \partial_{Y_{pq}} C(Y) \\ &= 2c_1 \delta_{pk} \delta_{ql} - 2c_1 \left[(-2\beta - 1) J^{-2\beta-2} \frac{\partial J}{\partial Y_{kl}} \cdot \frac{\partial J}{\partial Y_{pq}} + J^{-2\beta-1} \frac{\partial^2 J}{\partial Y_{kl} \partial Y_{pq}} \right] \\ &= 2c_1 \delta_{kp} \delta_{lq} - 2c_1 \left[(-2\beta - 1) J^{-2\beta-2} \frac{\partial J}{\partial Y_{pq}} \cdot \frac{\partial J}{\partial Y_{kl}} + J^{-2\beta-1} \frac{\partial^2 J}{\partial Y_{pq} \partial Y_{kl}} \right] \\ &= \partial_{Y_{pq}} \partial_{Y_{kl}} C(Y) \end{aligned}$$

für alle $k, l, p, q \in \{1, 2, 3\}$, womit die Symmetrie gezeigt ist. Wir wollen nun zeigen, dass die Matrix A positiv semidefinit ist, das heißt, dass $\langle \xi, A\xi \rangle_{\mathbb{R}^L} \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$ gilt. Sei also $\xi \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle \xi, A\xi \rangle_{\mathbb{R}^L} &= \sum_{r=1}^L \sum_{s=1}^L \xi_r A_{rs} \xi_s \\ &= \sum_{r=1}^L \sum_{s=1}^L \xi_r \left(\int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla \varphi_r) : \nabla \varphi_s dx \right) \xi_s \\ &= \int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla z) : \nabla z dx \end{aligned}$$

mit $z := \sum_{k=1}^L \xi_k \varphi_k$. In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass die Verzerrungsenergiedichte $C(Y)$ aus (6.1) polykonvex und damit auch Rang-1-konvex ist. Dies bedeutet, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $g(t) = C(Y + ta \otimes b)$ konvex in t ist für alle $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $a, b \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$g''(t) = (\nabla_Y \nabla_Y C(Y + ta \otimes b) : a \otimes b) : a \otimes b \geq 0.$$

Da $z = \sum_{k=1}^L \xi_k \varphi_k$ als Element des \mathcal{V}_h gesehen werden kann und damit $z(x) \in \mathbb{R}^3$ für alle $x \in \Omega$ folgt, stellt ∇z einen Tensor 2. Stufe dar. Damit kann man $\nabla z = a \otimes b$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}^3$ schreiben. Mit der Wahl $t = 0$ und $Y = (\theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ erhalten wir

$$(\nabla_Y \nabla_Y C(\theta \nabla u_l^j + (1-\theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla z) : \nabla z \geq 0.$$

Da $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} b_i(x_2) b_j(x_3) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt, folgt schließlich

$$\int_{\Omega} (\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u_l^j + (1 - \theta) \nabla u^{j-1}) : \nabla z) : \nabla z \, dx \geq 0$$

und damit die zweite Behauptung des Satzes. \square

6.2.2 Das vollständige Verfahren für das Vorwärtsproblem

In diesem Abschnitt wollen wir das Verfahren, welches im letzten Abschnitt hergeleitet wurde, vollständig skizzieren. Dabei soll es konkret um den tatsächlichen Ablauf des Verfahrens gehen. Implementiert haben wir dieses Verfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems in C++ mithilfe der deal.II Finite-Elemente-Bibliothek. Erläuterungen zu deal.II findet man beispielsweise in [BHK07].

Bei der Herleitung des Verfahrens zur Lösung des Vorwärtsproblems im letzten Abschnitt haben wir bereits festgestellt, dass wir die erste Gleichung in (6.22) mithilfe des Newton-Verfahrens lösen, da diese nicht linear ist. Die linearen Gleichungssysteme, die aus der Ortsdiskretisierung in jedem Iterationsschritt des Newton-Verfahrens für diese nichtlineare Gleichung resultieren, wollen wir mithilfe des Verfahrens der Konjugierten Gradienten (CG-Verfahren) lösen. Dies lässt sich dann schematisch insgesamt in folgender Art und Weise darstellen:

Algorithmus 1. ($u = \text{vorw}(\alpha)$)

Eingabe: $\alpha \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$

1. Setze $U^0 = 0 \in \mathbb{R}^L$.
2. Setze $MR^0 = 0 \in \mathbb{R}^L$.
3. Für jedes $j = 1, \dots, m$:
 - 3.1 Setze $l = 0$.
 - 3.2 Setze $U^{j,0} = U^{j-1}$.
 - 3.3 Berechne $F_h(U^{j,0}) = -kMR^{j-1} + \frac{k^2\theta}{\rho} D(u_0^j, u^{j-1}) - \frac{k^2\theta^2}{\rho} MF^j - \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho} MF^{j-1}$.
 - 3.4 Berechne $F'_h(U^{j,0}) = M + \frac{k^2\theta^2}{\rho} A(u_0^j, u^{j-1})$.
 - 3.5 Berechne $\partial U^{j,0}$ mit $F'_h(U^{j,0}) \partial U^{j,0} = -F_h(U^{j,0})$.
 - 3.6 Setze $U^{j,1} = U^{j,0} + \partial U^{j,0}$.

3.7 Solange $\|F_h(U^{j,l})\| > \text{tol}$ gilt, wiederhole:

- i. Setze $l = l + 1$.
- ii. Berechne

$$\begin{aligned} & F_h(U^{j,l}) \\ = & M(U^{j,l} - U^{j-1} - kR^{j-1}) + \frac{k^2\theta}{\rho}D(u_l^j, u^{j-1}) - \frac{k^2\theta^2}{\rho}MF^j \\ & - \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho}MF^{j-1}. \end{aligned}$$

- iii. Berechne $F'_h(U^{j,l}) = M + \frac{k^2\theta^2}{\rho}A(u_l^j, u^{j-1})$.
- iv. Berechne $\partial U^{j,l}$ mit $F'_h(U^{j,l})\partial U^{j,l} = -F_h(U^{j,l})$.
- v. Setze $U^{j,l+1} = U^{j,l} + \partial U^{j,l}$.

3.8 Setze $MR^j = MR^{j-1} - \frac{k}{\rho}D(u^j, u^{j-1}) + \frac{k\theta}{\rho}MF^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho}MF^{j-1}$.

Ausgabe: $U^j \in \mathbb{R}^L$ für $j = 0, \dots, m$.

6.3 Das Verfahren zur Lösung des adjungierten Problems

Für die numerische Lösung des inversen Identifikationsproblems benötigen wir nicht nur ein Verfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems, wie wir es in Abschnitt 6.2 vorgestellt haben, sondern auch ein Verfahren zur Lösung des adjungierten Problems aus Kapitel 4.

6.3.1 Die Herleitung des Verfahrens

In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren herleiten, welches eine Lösung $p := (B^{-1})^*w$ des adjungierten Problems

$$\rho\ddot{p}(t, x) - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(t, x)) : \nabla p(t, x)] = w(t, x), \quad t \in [0, T], x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad (6.32)$$

mit den Endbedingungen

$$p(T, x) = \dot{p}(T, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (6.33)$$

und homogenen Dirichlet-Randwerten

$$p(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (6.34)$$

liefert. Dabei wird später im Verfahren zur Lösung des Identifikationsproblems $w = u - u^\delta$ mit der Lösung u des entsprechenden Vorwärtsproblems und Messdaten u^δ sein. Wir wollen bei der Herleitung des Verfahrens analog zur Vorgehensweise für das Vorwärtsproblem in Abschnitt 6.2.1 verfahren. Der Unterschied ist, dass die Differentialgleichung (6.32) hier linear ist. Allerdings enthält (6.32) auch wieder die zweite Ableitung nach der Zeit, weshalb wir auch diese Differentialgleichung zunächst wieder überführen in ein System 1. Ordnung, indem wir $q(t, x) := \dot{p}(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ setzen. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass wir in diesem Fall rückwärts in der Zeit gehen. Dann erhalten wir als zur Gleichung (6.32) äquivalentes System

$$\begin{cases} \dot{p}(t, x) - q(t, x) = 0 \\ \rho \dot{q}(t, x) - \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \nabla u(t, x)) : \nabla p(t, x)] = w(t, x) \end{cases} \quad (6.35)$$

für alle $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. Als Nächstes diskretisieren wir wieder dieses Differentialgleichungssystem mithilfe der θ -Methode in der Zeit. Das Zeitintervall $[0, T]$ sei abermals unterteilt in $m > 0$ gleichgroße Schritte der festen Länge $k = T/m$ mit $t_j = jk$, $j = 0, \dots, m$. Dann erhalten wir in Zeitschritt j für alle $j = 0, \dots, m - 1$ die folgende Formulierung der zeitdiskretisierten Gleichung

$$\begin{cases} \frac{p^j - p^{j+1}}{k} = \theta q^j + (1 - \theta) q^{j+1} \\ \rho \frac{q^j - q^{j+1}}{k} = \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1 - \theta) \nabla u^{j+1}) : (\theta \nabla p^j + (1 - \theta) \nabla p^{j+1})] \\ \quad + \theta w^j + (1 - \theta) w^{j+1}. \end{cases}$$

Nun stellen wir die beiden Gleichungen nach p^j beziehungsweise q^j um und erhalten

$$\begin{cases} p^j = p^{j+1} + k\theta q^j + k(1 - \theta) q^{j+1} \\ q^j = q^{j+1} + \frac{k\theta}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1 - \theta) \nabla u^{j+1}) : \nabla p^j] \\ \quad + \frac{k(1-\theta)}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1 - \theta) \nabla u^{j+1}) : \nabla p^{j+1}] + \frac{k\theta}{\rho} w^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho} w^{j+1}. \end{cases}$$

Im nächsten Schritt eliminieren wir q^j aus der ersten Gleichung:

$$\left\{ \begin{array}{l} p^j = p^{j+1} + kq^{j+1} + \frac{k^2\theta^2}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1-\theta) \nabla u^{j+1}) : \nabla p^j] \\ \quad + \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1-\theta) \nabla u^{j+1}) : \nabla p^{j+1}] \\ \quad + \frac{k^2\theta^2}{\rho} w^j + \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho} w^{j+1} \\ q^j = q^{j+1} + \frac{k\theta}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1-\theta) \nabla u^{j+1}) : \nabla p^j] \\ \quad + \frac{k(1-\theta)}{\rho} \nabla \cdot [\nabla_Y \nabla_Y C(x, \theta \nabla u^j + (1-\theta) \nabla u^{j+1}) : \nabla p^{j+1}] + \frac{k\theta}{\rho} w^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho} w^{j+1}. \end{array} \right.$$

Man sieht auch hier, dass die beiden Gleichungen jeweils linear sind. Aus diesem Grund können wir jetzt direkt die beiden Gleichungen im Raum diskretisieren und anschließend lösen und müssen nicht wie im Fall des Vorwärtsproblems zunächst einen nichtlinearen Löser für eine Gleichung einbauen. Für die Diskretisierung im Raum wollen wir analog zu der Vorgehensweise in Abschnitt 6.2.1 wieder die Finite-Elemente-Methode verwenden. Es sei daher wieder \mathcal{V}_h ein endlichdimensionaler $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ -konformer Finite-Elemente-Raum mit nodaler Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_L\}$, wobei $\dim \mathcal{V}_h = L < \infty$ gelte. Außerdem sei $w \in \mathcal{V}'_h \subset V'$. Dann erhalten wir mit der dualen Basis $(\varphi'_r)_{r=1, \dots, L}$ zu $(\varphi_r)_{r=1, \dots, L}$, wobei $\langle \varphi'_r, \varphi_s \rangle = \delta_{rs}$ für alle $r, s = 1, \dots, L$ gilt, und mit der in Abschnitt 6.2.1 verwendeten Notation für das adjungierte Problem das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} MP^j = MP^{j+1} + kMQ^{j+1} - \frac{k^2\theta^2}{\rho} A(u^j, u^{j+1})P^j - \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho} A(u^j, u^{j+1})P^{j+1} \\ \quad + \frac{k^2\theta^2}{\rho} W^j + \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho} W^{j+1} \\ MQ^j = MQ^{j+1} - \frac{k\theta}{\rho} A(u^j, u^{j+1})P^j - \frac{k(1-\theta)}{\rho} A(u^j, u^{j+1})P^{j+1} \\ \quad + \frac{k\theta}{\rho} W^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho} W^{j+1}. \end{array} \right. \quad (6.36)$$

Dies lässt sich noch etwas umstellen und wir erhalten das folgende zu lösende lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + \frac{k^2\theta^2}{\rho} A(u^j, u^{j+1}))P^j = (M - \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho} A(u^j, u^{j+1}))P^{j+1} + kMQ^{j+1} \\ \quad + \frac{k^2\theta^2}{\rho} W^j + \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho} W^{j+1} \\ MQ^j = MQ^{j+1} - \frac{k\theta}{\rho} A(u^j, u^{j+1})P^j \\ \quad - \frac{k(1-\theta)}{\rho} A(u^j, u^{j+1})P^{j+1} + \frac{k\theta}{\rho} W^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho} W^{j+1}. \end{array} \right. \quad (6.37)$$

Mithilfe der Definitionen

$$S_0 := M + \frac{k^2\theta^2}{\rho}A(u^j, u^{j+1}) \in \mathbb{R}^{L \times L} \quad (6.38)$$

und

$$S_1 := M - \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho}A(u^j, u^{j+1}) \in \mathbb{R}^{L \times L} \quad (6.39)$$

lässt sich das Gleichungssystem (6.37) auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{cases} S_0 P^j = S_1 P^{j+1} + kMQ^{j+1} + \frac{k^2\theta^2}{\rho}W^j + \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho}W^{j+1} \\ MQ^j = MQ^{j+1} - \frac{k\theta}{\rho}A(u^j, u^{j+1})P^j - \frac{k(1-\theta)}{\rho}A(u^j, u^{j+1})P^{j+1} \\ \quad + \frac{k\theta}{\rho}W^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho}W^{j+1}. \end{cases} \quad (6.40)$$

Bemerkung 6.3. Ein Unterschied zwischen den Gleichungssystemen (6.31) und (6.40) ist die Zeitrichtung, die für das Vorwärtsproblem positiv und für das adjungierte Problem negativ ist. Es gibt allerdings auch noch einen weiteren Unterschied zwischen diesen beiden Gleichungssystemen im Zusammenhang mit der Diskretisierung der jeweiligen rechten Seite f beziehungsweise w der entsprechenden Differentialgleichung und zwar fehlt auf der rechten Seite von (6.40) die Massenmatrix M jeweils bei W^j und W^{j+1} . Der Grund dafür ist, dass f^j beziehungsweise f^{j+1} in der Basis $(\varphi_r)_{r=1,\dots,L}$ dargestellt werden, aber w^j beziehungsweise w^{j+1} in der dualen Basis $(\varphi'_r)_{r=1,\dots,L}$ vorliegen. Wir werden in Abschnitt 6.4 sehen, dass diese Wahl vorteilhafter bei der Diskretisierung des (adjungierten) Beobachtungsoperators ist.

6.3.2 Das vollständige Verfahren für das adjungierte Problem

In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren zur Lösung von (6.40) vorstellen. Als Basis dafür verwenden wir das Verfahren der Konjugierten Gradienten. Mithilfe von Satz 6.3 und Satz 6.4 folgt, dass die Matrix S_0 symmetrisch und positiv definit ist. Somit ist das CG-Verfahren auch auf dieses lineare Gleichungssystem anwendbar. Das Verfahren zur Lösung des adjungierten Problems lässt sich dann schematisch folgendermaßen formulieren:

Algorithmus 2. ($p = \text{adj1}(w, u)$)

Eingabe: $W^j \in \mathbb{R}^L$ und $w^j \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ für $j = 0, \dots, m$

1. Setze $P^m = 0 \in \mathbb{R}^L$.

2. Setze $MQ^m = 0 \in \mathbb{R}^L$.
3. Für jedes $j = m - 1, \dots, 0$:
 - 3.1 Berechne $A(u^j, u^{j+1})$.
 - 3.2 Berechne $S_0 = M + \frac{k^2\theta^2}{\rho}A(u^j, u^{j+1})$.
 - 3.3 Berechne $S_1 = M - \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho}A(u^j, u^{j+1})$.
 - 3.4 Berechne P^j mit

$$S_0P^j = S_1P^{j+1} + kMQ^{j+1} + \frac{k^2\theta^2}{\rho}W^j + \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho}W^{j+1}.$$

- 3.5 Berechne MQ^j mit

$$\begin{aligned} MQ^j &= MQ^{j+1} - \frac{k\theta}{\rho}A(u^j, u^{j+1})P^j - \frac{k(1-\theta)}{\rho}A(u^j, u^{j+1})P^{j+1} \\ &\quad + \frac{k\theta}{\rho}W^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho}W^{j+1}. \end{aligned}$$

Ausgabe: $P^j \in \mathbb{R}^L$ für $j = 0, \dots, m$.

6.4 Der Beobachtungsoperator

Der sogenannte Beobachtungsoperator dient nun dazu, die Geometrie des Messvorgangs mathematisch zu modellieren. Genauer gesagt, möchte man damit ein Sensornetzwerk modellieren mit Sensoren auf der Oberfläche der Struktur. Diese Sensoren messen dann schließlich das Verschiebungsfeld am Rand des Körpers. Im Weiteren wollen wir uns auf den bereits in dem Artikel [BSS15] verwendeten Beobachtungsoperator beziehen und diesen auch zu unserer numerischen Lösung des Identifikationsproblems verwenden. Dieser Beobachtungsoperator mittelt die Messungen gewichtet über eine kleine Fläche und lässt sich dann wie folgt definieren.

Es sei $\mathcal{Q} : L^2(0, T; U) \rightarrow L^2(0, T; \mathbb{R}^l)$ der Beobachtungsoperator mit

$$\mathcal{Q}[u](t) := \left(\int_{\partial\Omega} \langle g_k, u(t) \rangle_{\mathbb{R}^3} d\xi \right)_{k=1, \dots, l} = \left(\langle g_k, \Gamma(u(t)) \rangle_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)} \right)_{k=1, \dots, l} \in \mathbb{R}^l \quad (6.41)$$

mit dem Spuroperator $\Gamma : V \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$, $l \in \mathbb{N}$ der Anzahl der Sensoren beziehungsweise $g_k \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$ den nichtnegativen Gewichtungsfunktionen, die den Messbereich der

Sensoren modellieren sollen (siehe [BSS15]). Dann stellt $L^2(0, T; \mathbb{R}^l)$ den Raum der beobachteten Daten dar. Anhand der Darstellung (6.41) ist leicht zu erkennen, dass \mathcal{Q} linear in $u \in L^2(0, T; U)$ ist. Des Weiteren wird in [BSS15] die Stetigkeit von \mathcal{Q} in $u \in L^2(0, T; U)$ bewiesen. Ein weiterer Vorteil der Wahl von \mathcal{Q} aus (6.41) als Beobachtungsoperator ist, dass wir bereits den dazu adjungierten Operator \mathcal{Q}^* wiederum aus [BSS15] kennen und zwar gilt für alle $a \in L^2(0, T; \mathbb{R}^l)$

$$\mathcal{Q}^* a = \sum_{k=1}^l a_k \Gamma^* g_k. \quad (6.42)$$

Den Beobachtungsoperator müssen wir schließlich noch diskretisieren, bevor wir zum vollständigen Verfahren zur Lösung des Identifikationsproblems kommen können. Dazu gehen wir wieder analog zum Artikel [BSS15] vor. Sei $v \in \mathcal{V}_h$. Dann lässt sich v schreiben als $v = \sum_{r=1}^L V_r \varphi_r$ mit einer Basis $(\varphi_r)_{r=1, \dots, L}$ des \mathcal{V}_h . Damit können wir den Beobachtungsoperator folgendermaßen formulieren als

$$\mathcal{Q}[v](t) = \left(\sum_{r=1}^L V_r(t) \int_{\partial\Omega} \langle g_k, \varphi_r \rangle_{\mathbb{R}^3} d\xi \right)_{k=1, \dots, l} = (G(V_r)(t))_{r=1, \dots, L} \quad (6.43)$$

mit $G \in \mathbb{R}^{l \times L}$ der Matrix, die $\mathcal{Q}|_{\mathcal{V}_h}$ in den Basen $(e_j)_{j=1, \dots, l}$ von \mathbb{R}^l und $(\varphi_r)_{r=1, \dots, L}$ von \mathcal{V}_h darstellt. Des Weiteren lässt sich \mathbb{R}^l beziehungsweise $L^2(0, T; \mathbb{R}^l)$ mit seinem Dualraum identifizieren, wenn man das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^l wählt. In diesem Fall entspricht die Matrix G^\top gerade der Darstellung von $\mathcal{Q}^* : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathcal{V}'_h$ in den Basen $(e_j)_{j=1, \dots, l}$ von \mathbb{R}^l und $(\varphi'_r)_{r=1, \dots, L}$ von \mathcal{V}'_h (siehe Bemerkung 6.3).

Wenn wir die Gewichtungsfunktionen g_k , $k = 1, \dots, l$, ebenfalls aus \mathcal{V}_h wählen, das heißt, dass $g_k = \sum_{r=1}^L \bar{g}_{k,r} \varphi_r$ für alle $k = 1, \dots, l$ gilt, dann folgt mit (6.43)

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}[v](t) &= \left(\sum_{r=1}^L V_r(t) \int_{\partial\Omega} \langle g_k, \varphi_r \rangle_{\mathbb{R}^3} d\xi \right)_{k=1, \dots, l} \\ &= \left(\sum_{r=1}^L \sum_{s=1}^L V_r(t) \bar{g}_{k,s} \int_{\partial\Omega} \langle \varphi_s, \varphi_r \rangle_{\mathbb{R}^3} d\xi \right)_{k=1, \dots, l} \\ &= \bar{G} M_{\partial\Omega} (V_r)_{r=1, \dots, L}, \end{aligned}$$

wobei $M_{\partial\Omega} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ mit $(M_{\partial\Omega})_{rs} = \int_{\partial\Omega} \langle \varphi_r, \varphi_s \rangle_{\mathbb{R}^3} d\xi$ für alle $r, s = 1, \dots, L$ die Randmassenmatrix und $\bar{G} \in \mathbb{R}^{l \times L}$ die Koeffizientenmatrix der Sensoren mit $\bar{G}_{ks} = \bar{g}_{k,s}$ für alle

$k = 1, \dots, l$ und $s = 1, \dots, L$ seien. Dann folgt schließlich

$$G = \bar{G}M_{\partial\Omega} \quad \text{und} \quad G^\top = M_{\partial\Omega}\bar{G}^\top.$$

6.5 Das Verfahren zur Lösung des Identifikationsproblems

Wir haben jetzt alles zusammen, um das vollständige Verfahren zur Lösung unseres Identifikationsproblems (3.8) zu skizzieren, deren numerische Ergebnisse wir im nächsten Abschnitt präsentieren werden. Implementiert wurde dieses Verfahren, genauso wie der Algorithmus zur Lösung des Vorwärtsproblems, in C++ mit Verwendung der Finite-Elemente-Bibliothek deal.II.

Als Grundlage für unser Verfahren dient das sogenannte Landweber-Verfahren, welches wir im Folgenden zunächst kurz vorstellen wollen.

6.5.1 Nichtlineares (gedämpftes) Landweber-Verfahren

Das nichtlineare Landweber-Verfahren ist eine einfache, aber auch sehr umfangreich untersuchte Methode zur Lösung von nichtlinearen, schlechtgestellten Problemen der Form

$$\mathcal{T}(x) = y, \tag{6.44}$$

wobei \mathcal{T} ein nichtlinearer Operator mit einem offenen Definitionsbereich $D(\mathcal{T}) \subset \mathcal{X}$ und dem Bild in \mathcal{Y} sei. Dabei seien \mathcal{X} und \mathcal{Y} jeweils Hilberträume. Das Landweber-Verfahren ist dann im Fall von exakten Daten gegeben durch die iterative Vorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \mathcal{T}'(x^{(k)})^*(\mathcal{T}(x^{(k)}) - y), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{6.45}$$

Man kann leicht erkennen, dass für die Anwendbarkeit des Landweber-Verfahrens der Operator \mathcal{T} Fréchet-differenzierbar sein muss. Außerdem kann das Landweber-Verfahren nur konvergieren, wenn das Problem (6.44) geeignet skaliert ist. Aus diesem Grund wird in der Regel bei Konvergenzuntersuchungen zur Landweber-Iteration, siehe beispielsweise [KNS08] und [EHN96], angenommen, dass

$$\|\mathcal{T}'(x)\| \leq 1 \tag{6.46}$$

gilt für alle $x \in \mathcal{B}_\rho(x^{(0)}) \subseteq D(\mathcal{T})$ mit $\mathcal{B}_\rho(x^{(0)})$ einer Kugel mit Radius $\rho > 0$ um einen Startwert $x^{(0)} \in D(\mathcal{T})$ der Iteration (6.45). Dies lässt sich umgehen, wenn man einen sogenannten Dämpfungparameter oder auch Relaxationsparameter

$$\omega \in \left(0, \frac{1}{C_\rho^2}\right) \quad (6.47)$$

mit

$$C_\rho := \sup\{\|\mathcal{T}'(x)\| : x \in \mathcal{B}_\rho(x^{(0)})\} \quad (6.48)$$

eingführt und somit das gedämpfte Landweber-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega \mathcal{T}'(x^{(k)})^*(\mathcal{T}(x^{(k)}) - y), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

betrachtet, siehe zum Beispiel [Sch98]. Ausführliche Ergebnisse und Untersuchungen zum (gedämpften) Landweber-Verfahren findet man auch unter anderem in [DES98], [Sch95], [HNS95] und [Rie03]. Wir wollen als Nächstes zwei allgemeine Konvergenzresultate für die Landweber-Iteration aus (6.45) angeben, die wir im weiteren Verlauf dazu verwenden wollen, um zu zeigen, dass das Landweber-Verfahren für unser Identifikationsproblem konvergiert.

Satz 6.5. *Es habe \mathcal{T} eine stetige Fréchet-Ableitung mit $\|\mathcal{T}'(\cdot)\| \leq 1$ in einer Kugel $\mathcal{B}_{2\rho}(x^{(0)}) \subset D(\mathcal{T})$ um $x^{(0)}$. Wenn $\mathcal{T}(x) = y$ lösbar ist in $\mathcal{B}_\rho(x^{(0)})$ und*

$$\|\mathcal{T}(\tilde{x}) - \mathcal{T}(x) - \mathcal{T}'(x)(\tilde{x} - x)\| \leq \eta_{KB} \|\mathcal{T}(\tilde{x}) - \mathcal{T}(x)\|, \quad \eta_{KB} < \frac{1}{2}, \quad (6.50)$$

in $\mathcal{B}_{2\rho}(x^{(0)})$ gilt, so konvergiert die nichtlineare Landweber-Iteration (6.45) angewendet auf exakte Daten y gegen eine Lösung von $\mathcal{T}(x) = y$. Falls außerdem für die Nullräume $\mathcal{N}(\mathcal{T}'(x^\dagger)) \subset \mathcal{N}(\mathcal{T}'(x))$ für alle $x \in \mathcal{B}_\rho(x^\dagger)$ gilt, so konvergiert x_k gegen die Minimum-Norm-Lösung x^\dagger für $k \rightarrow \infty$.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [EHN96] beziehungsweise [KNS08]. Dabei lässt sich die Aussage leicht auf das gedämpfte Landweber-Verfahren (6.49) übertragen, wenn man $\sqrt{\omega} \|\mathcal{T}'(x)\| \leq \|\mathcal{T}'(x)\|/C_\rho \leq 1$ für alle $x \in \mathcal{B}_{2\rho}(x^{(0)})$ berücksichtigt.

In Hinblick auf praktische Anwendungen muss man nun allerdings davon ausgehen, dass keine exakten Daten y vorliegen. Sondern es existieren in der Regel nur Daten, die durch einen gewissen Messfehler gestört sind. Dies spielt vorallem dann eine große Rolle, wenn man schlechtgestellte Probleme betrachtet, da diese die Eigenschaft aufweisen, dass be-

liebig kleine Störungen in den Daten zu starken Abweichungen in den Lösungen führen können. Wir gehen im Weiteren davon aus, dass gestörte Daten y^δ vorliegen, die für ein $\delta > 0$ die Bedingung

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta \quad (6.51)$$

erfüllen. Die Iterierten bezeichnen wir in diesem Fall dann mit $(x^{(k),\delta})_{k=0,1,2,\dots}$. Bevor wir allerdings im nächsten Satz ein Konvergenzresultat bezüglich gestörter Daten angeben können, müssen wir noch das folgende, sogenannte Diskrepanzprinzip als eine Abbruchregel für das Landweber-Verfahren einführen. Demnach soll die Iteration nach $k_* := k(\delta, y^\delta)$ Schritten abbrechen, wenn

$$\|y^\delta - \mathcal{T}(x^{(k_*)},\delta)\| \leq \tau\delta < \|y^\delta - \mathcal{T}(x^{(k)},\delta)\| \quad (6.52)$$

für alle $0 \leq k < k_*$ gilt. Dabei ist τ eine positive Zahl, welche die Bedingung

$$\tau > 2 \frac{1 + \eta_{KB}}{1 - 2\eta_{KB}} > 2 \quad (6.53)$$

mit der Konstanten η_{KB} aus (6.50) erfüllt.

Satz 6.6. *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.5 und falls die Landweber-Iteration angewendet auf y^δ abbricht mit $k_* = k(\delta, y^\delta)$ bezüglich des Diskrepanzprinzips (6.52) mit τ aus (6.53), so konvergiert $x^{(k_*)},\delta$ gegen eine Lösung $x \in \mathcal{B}_\rho(x^{(0)})$ von $\mathcal{T}(x) = y$ für $\delta \rightarrow 0$.*

Damit haben wir alles allgemein zusammen, um im nächsten Abschnitt die lokale Konvergenz des gedämpften Landweber-Verfahrens angewendet auf unser Identifikationsproblems zu zeigen.

6.5.2 Konvergenz des gedämpften Landweber-Verfahren

Nachdem wir im letzten Abschnitt das gedämpfte Landweber-Verfahren vorgestellt haben und allgemeine Konvergenzresultate angegeben haben, wollen wir nun zeigen, dass dieses Verfahren mit $x = \alpha$ und $y = \tilde{u}$ angewendet auf unser Identifikationsproblem (3.8) konvergiert. Dabei setzen wir voraus, dass wir vollständige Daten haben. Als Iterationsvorschrift für das gedämpfte Landweber-Verfahren angewendet auf unser Problem (3.8)

erhalten wir

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \omega \mathcal{T}'(\alpha^{(k)})^* (\mathcal{T}(\alpha^{(k)}) - \tilde{u}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.54)$$

Dabei ist in diesem Abschnitt $\alpha^{(k)} = (\alpha_K^{(k)})_{K=1, \dots, N}$ im k -ten Iterationsschritt für alle $k = 0, 1, 2, \dots$ und mit den Koeffizienten α_K für alle $K = 1, \dots, N$ aus der Darstellung (3.6), da wir im Folgenden dann die Aussagen und Ergebnisse aus Kapitel 4 verwenden können.

Wir wollen nun die lokale Konvergenz des gedämpften Landweber-Verfahrens angewendet auf (3.8) zeigen.

Satz 6.7. *Sei $\mathcal{T}(\alpha) = \tilde{u}$ lösbar in einer abgeschlossenen Kugel $\mathcal{B}_\rho(\alpha^{(0)}) \subset D(\mathcal{T})$ um einen Startwert $\alpha^{(0)} \in \mathbb{R}_+^N$ mit*

$$\|\alpha^{(0)}\|_\infty < \frac{1}{81M_4 \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]}}$$

und Radius

$$0 < \rho < \frac{1 - 81C\sqrt{1 + C_\Omega}M_4\|\alpha^{(0)}\|_\infty \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]}}{18C\sqrt{1 + C_\Omega} \sum_{K=1}^N (9M_4\mu_K^{[2]} + 4\mu_K^{[1]})}. \quad (6.55)$$

Dann konvergiert das nichtlineare, gedämpfte Landweber-Verfahren mit

$$\omega \in \left(0, \frac{1}{L_1^2}\right) \quad (6.56)$$

mit $L_1 > 0$ aus Satz 4.4 angewendet auf exakte Daten $\tilde{u} \in L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ gegen eine Lösung von $\mathcal{T}(\alpha) = \tilde{u}$. Falls außerdem $\mathcal{N}(\mathcal{T}'(\alpha^\dagger)) \subset \mathcal{N}(\mathcal{T}'(\alpha))$ für alle $\alpha \in \mathcal{B}_\rho(\alpha^\dagger)$ gilt, so konvergiert $\alpha^{(k)}$ gegen die Minimum-Norm-Lösung α^\dagger für $k \rightarrow \infty$.

Beweis. Um die Aussage des Satzes zu zeigen, wollen wir die Annahmen von Satz 6.5 überprüfen. Zunächst einmal ist der Operator \mathcal{T} nach Satz 4.5 Fréchet-differenzierbar und nach Satz 4.4 gilt $\|\mathcal{T}'(\alpha)\| \leq L_1$ für ein $L_1 > 0$, womit die Fréchet-Ableitung beschränkt ist. Dies liefert insgesamt, dass \mathcal{T} stetig Fréchet-differenzierbar ist. Außerdem folgt ebenso aus Satz 4.4, dass $\|\mathcal{T}'(\alpha)\| \leq L_1$ für ein $L_1 > 0$ und für alle $\alpha \in D(\mathcal{T})$ und somit auch für alle $\alpha \in \mathcal{B}_\rho(\alpha^{(0)}) \subset D(\mathcal{T})$ erfüllt ist. Damit folgt mithilfe von (6.56) die Abschätzung

$\sqrt{\omega}\|\mathcal{T}'(\alpha)\| \leq \sqrt{\omega}L_1 \leq 1$ für alle $\alpha \in \mathcal{B}_\rho(\alpha^{(0)})$. Schließlich gilt nach Satz 4.7 die Bedingung

$$\|\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) - \mathcal{T}(\alpha) - \mathcal{T}'(\alpha)(\tilde{\alpha} - \alpha)\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \leq \eta_{KB} \|\mathcal{T}(\tilde{\alpha}) - \mathcal{T}(\alpha)\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)}$$

für $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathcal{B}_{2\rho}(\alpha^{(0)})$ und $\eta_{KB} = \bar{L}_3 C \sqrt{1 + C_\Omega}$. Dabei folgt mithilfe von

$$\|\tilde{\alpha}\|_\infty = \|\tilde{\alpha} - \alpha^{(0)} + \alpha^{(0)}\|_\infty \leq 2\rho + \|\alpha^{(0)}\|_\infty \quad \text{und} \quad \|\tilde{\alpha} - \alpha\|_\infty = \|\tilde{\alpha} - \alpha^{(0)} + \alpha^{(0)} - \alpha\|_\infty \leq 4\rho$$

für alle $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathcal{B}_{2\rho}(\alpha^{(0)})$ beziehungsweise aus (6.55)

$$\begin{aligned} \eta_{KB} &= \bar{L}_3 C \sqrt{1 + C_\Omega} \\ &= \frac{81}{2} M_4 C \sqrt{1 + C_\Omega} \|\tilde{\alpha}\|_\infty \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + 9C \sqrt{1 + C_\Omega} \|\tilde{\alpha} - \alpha\|_\infty \sum_{K=1}^N \mu_K^{[1]} \\ &\leq \frac{81}{2} M_4 C \sqrt{1 + C_\Omega} \|\alpha^{(0)}\|_\infty \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + 9C \sqrt{1 + C_\Omega} \sum_{K=1}^N \left(\frac{9}{2} M_4 \mu_K^{[2]} 2\rho + 4\rho \mu_K^{[1]} \right) \\ &= \frac{81}{2} M_4 C \sqrt{1 + C_\Omega} \|\alpha^{(0)}\|_\infty \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + 9C \sqrt{1 + C_\Omega} \sum_{K=1}^N \left(9M_4 \mu_K^{[2]} + 4\mu_K^{[1]} \right) \rho \\ &< \frac{81}{2} M_4 C \sqrt{1 + C_\Omega} \|\alpha^{(0)}\|_\infty \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} + \frac{1}{2} \left(1 - 81M_4 C \sqrt{1 + C_\Omega} \|\alpha^{(0)}\|_\infty \sum_{K=1}^N \mu_K^{[2]} \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Somit gilt $\eta_{KB} < 1/2$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 6.5 erfüllt. Dies liefert schließlich die Aussage des Satzes. \square

Aufbauend auf diesem Satz wollen wir noch das folgende Konvergenzresultat im Fall gestörter Daten $u^\delta \in L^2(0, T; U) \cap H^1(0, T; H)$ mit $\|u^\delta - \tilde{u}\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \leq \delta$ für ein $\delta > 0$ zeigen. Ein interessanter Artikel im Zusammenhang mit der lokalen Konvergenz des gedämpften Landweber-Verfahrens im Fall gestörter Daten ist [GHH16].

Korollar 6.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.7 und falls die Landweber-Iteration angewendet auf u^δ abbricht mit $k_* = k(\delta, u^\delta)$ bezüglich des Diskrepanzprinzips*

$$\|u^\delta - \mathcal{T}(\alpha^{(k_*)})\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \leq \tau \delta < \|u^\delta - \mathcal{T}(\alpha^{(k),\delta})\|_{L^2(0,T;U) \cap H^1(0,T;H)} \quad (6.57)$$

für alle $0 \leq k < k_*$ mit τ aus (6.53), so konvergiert $\alpha^{(k_*)}$ gegen eine Lösung $\alpha \in \mathcal{B}_\rho(\alpha^{(0)})$ von $\mathcal{T}(\alpha) = \tilde{u}$ für $\delta \rightarrow 0$.

Beweis. Im Beweis von Satz 6.7 haben wir gesehen, dass alle Voraussetzungen von Satz 6.5 und damit auch von Satz 6.6 erfüllt sind. Somit folgt die Aussage direkt aus Satz 6.6. \square

6.5.3 Das vollständige Verfahren für das Identifikationsproblem

In diesem Abschnitt wollen wir jetzt alles zusammenbringen, um schließlich den Algorithmus zur Lösung unseres Identifikationsproblems (3.8) zu skizzieren. Dazu wollen wir das im letzten Abschnitt vorgestellte gedämpfte Landweber-Verfahren aus (6.54) verwenden. Allerdings haben wir im letzten Abschnitt für den Beweis der Konvergenz den Koeffizientenvektor $\alpha = (\alpha_K)_{K=1,\dots,N}$ betrachtet, um die Annahmen und Ergebnisse aus Kapitel 4 zu verwenden. Für die numerische Lösung gehen wir nun davon aus, dass $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ mit der Beziehung zwischen $i, j \in \{0, \dots, n\}$ und $K \in \{1, \dots, N\}$ aus Abschnitt 6.1.1 beziehungsweise (6.16) bis (6.18) sei.

In der Iterationsvorschrift (6.54) kann man leicht erkennen, dass man in jeder Iteration sowohl einmal das Vorwärtsproblem lösen muss als auch einmal das adjungierte Problem. Bisher sind wir bei der Formulierung der Algorithmen zur Lösung des Vorwärtsproblems beziehungsweise des adjungierten Problems (siehe Algorithmen 1 und 2) davon ausgegangen, dass das ganze Verschiebungsfeld bekannt ist und somit auf ganz Ω Messdaten vorliegen. Dies ist allerdings insbesondere im Zusammenhang mit realen Daten in der Regel nicht der Fall. Aus diesem Grund wurde in Abschnitt 6.4 der Beobachtungsoperator \mathcal{Q} eingeführt und diskretisiert. Damit erhalten wir als Iterationsvorschrift für das gedämpfte Landweber-Verfahren zur Lösung unseres Identifikationsproblems aus Messdaten am Rand der Platte

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \omega \mathcal{T}'(\alpha^{(k)})^* \mathcal{Q}^*(\mathcal{Q}\mathcal{T}(\alpha^{(k)}) - \tilde{u}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.58)$$

Bevor wir also das vollständige Verfahren zur Lösung des Identifikationsproblems skizzieren, müssen wir in den Algorithmus 2 noch den Beobachtungsoperator einbauen. Dann erhalten wir den folgenden Algorithmus:

Algorithmus 3. ($p = \text{adj2}(w, u)$)

Eingabe: $W^j \in \mathbb{R}^l$ und $u^j \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ für $j = 0, \dots, m$

1. Setze $P^m = 0 \in \mathbb{R}^L$.
2. Setze $MQ^m = 0 \in \mathbb{R}^L$.

3. Für jedes $j = m - 1, \dots, 0$:

3.1 Berechne $A(u^j, u^{j+1})$.

3.2 Berechne $S_0 = M + \frac{k^2\theta^2}{\rho}A(u^j, u^{j+1})$.

3.3 Berechne $S_1 = M - \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho}A(u^j, u^{j+1})$.

3.4 Berechne P^j mit

$$S_0P^j = S_1P^{j+1} + kMQ^{j+1} + \frac{k^2\theta^2}{\rho}M_{\partial\Omega}\bar{G}^\top W^j + \frac{k^2(1-\theta)\theta}{\rho}M_{\partial\Omega}\bar{G}^\top W^{j+1}.$$

3.5 Berechne MQ^j mit

$$\begin{aligned} MQ^j &= MQ^{j+1} - \frac{k\theta}{\rho}A(u^j, u^{j+1})P^j - \frac{k(1-\theta)}{\rho}A(u^j, u^{j+1})P^{j+1} \\ &\quad + \frac{k\theta}{\rho}M_{\partial\Omega}\bar{G}^\top W^j + \frac{k(1-\theta)}{\rho}M_{\partial\Omega}\bar{G}^\top W^{j+1}. \end{aligned}$$

Ausgabe: $P^j \in \mathbb{R}^L$ für $j = 0, \dots, m$.

Somit haben wir alles zusammen, um das Verfahren zur Lösung des Identifikationsproblems anzugeben. Allerdings kommen noch einige Besonderheiten hinzu:

Als Startwert $\alpha^{(0)}$ verwenden wir die Matrix, deren Einträge alle gleich 1 sind, womit wir bei der unbeschädigten Struktur starten. In jeder Iteration des Landweber-Verfahrens (6.54) und (6.58) müssen wir $\mathcal{T}'(\alpha^{(k)})^*w$ mit $w = \mathcal{T}(\alpha^{(k)}) - \tilde{u}$ beziehungsweise $w = \mathcal{Q}^*(\mathcal{Q}\mathcal{T}(\alpha^{(k)}) - \tilde{u})$ und der Darstellung von $\mathcal{T}'(\alpha^{(k)})^*w$ aus (4.73) ermitteln. Dabei muss jeweils ein Integral über das Zeitintervall $[0, T]$ bestimmt werden, welches wir mit der Trapezregel berechnen. Für

$$g_{rs}(t) := \int_{\Omega} \nabla_Y C_{rs}(x, \nabla u(t, x)) : \nabla p(t, x) dx \quad (6.59)$$

mit $C_{rs}(x, \nabla u(t, x)) = b_r(x_2)b_s(x_3)C(\nabla u(t, x))$ (siehe (6.13)) in den beiden Schichten, $C_{rs}(x, \nabla u(t, x)) \equiv C(\nabla u(t, x))$ im Inneren der Platte und $C_{rs}(x, \nabla u(t, x)) \equiv 0$ am Rand der Platte für alle $r, s = 0, \dots, n$ und $t \in [0, T]$ gilt dann

$$(\mathcal{T}'(\alpha)^*w)_{rs} = \int_0^T g_{rs}(t) dt \approx \frac{T}{m} \left[\frac{1}{2}g_{rs}(0) + \sum_{j=1}^{m-1} g_{rs}\left(\frac{j}{m}T\right) + \frac{1}{2}g_{rs}(T) \right]$$

für alle $r, s = 0, \dots, n$. Im folgenden Verfahren definieren wir für die Berechnung der $g_{rs}(t^j)$ für alle $r, s = 0, \dots, n$ aus (6.59) gerade die Funktion $\text{compadj}(r, s, u^j, p^j)$ für alle $r, s = 0, \dots, n$ und $u^j = u(t^j)$ beziehungsweise $p^j = p(t^j)$ mit $t^j = jT/m$ für alle $j = 0, \dots, m$. Dabei wird das Integral über Ω , wie in der Finite-Elemente-Methode (siehe [Bra10]) üblich, mittels Quadratur berechnet, das heißt, dass das Integral durch eine gewichtete Summe über eine Menge von Punkten, den Quadraturpunkten, in jeder Zelle ersetzt wird. Mit anderen Worten das Integral über Ω wird aufgeteilt in Integrale über alle Zellen und anschließend wird der Beitrag jeder Zelle durch Quadratur approximiert. Schließlich führen wir noch die Projektion auf den ersten Quadranten

$$\text{Proj}_{\geq 0}(c) := \begin{cases} c, & c \geq 0 \\ 0, & c < 0 \end{cases}$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ ein, um zu gewährleisten, dass die Koeffizienten in der konischen Kombination (6.13) für die Verzerrungsenergiedichte nichtnegativ bleiben.

Algorithmus 4. ($\alpha = \text{inv}(\tilde{u})$)

Eingabe: \tilde{u}^j für $j = 0, \dots, m$ und Basisfunktionen φ_r mit $r = 1, \dots, L$.

1. Berechne die Matrizen M , $M_{\partial\Omega}$ und \bar{G} mit

$$M_{rs} = \langle \varphi_r, \varphi_s \rangle_H \quad \forall r, s = 1, \dots, L,$$

$$(M_{\partial\Omega})_{rs} = \langle \varphi_r, \varphi_s \rangle_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)} \quad \forall r, s = 1, \dots, L,$$

und

$$\bar{G}_{ks} = \bar{g}_{k,s} \quad \forall k = 1, \dots, l, s = 1, \dots, L.$$

2. Setze $\delta = 1$.
3. Setze $\alpha = (\alpha_{rs})_{r,s=0,\dots,n} = 1$.
4. Setze $i = 0$.
5. Solange ($i < \text{maxiter}$) und ($\delta > \text{tol}$) gilt, wiederhole:
 - 5.1 Setze $i = i + 1$.
 - 5.2 Berechne $u = \text{vorw}(\alpha)$.
 - 5.3 Berechne $\bar{u} = \bar{G}M_{\partial\Omega}u$.

5.4 Setze $w = \bar{u} - \tilde{u}$.

5.5 Setze $\delta = \frac{T}{m} \left[\frac{1}{2} \|w^0\|_{\mathbb{R}^l}^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \|w^j\|_{\mathbb{R}^l}^2 + \frac{1}{2} \|w^m\|_{\mathbb{R}^l}^2 \right]$.

5.6 Berechne $p = \text{adj}2(w, u)$.

5.7 Für alle $r, s = 0, \dots, n$:

5.7.1 Berechne $z^j = \text{compadj}(r, s, w^j, p^j) \quad \forall j = 0, \dots, m$.

5.7.2 Setze $\gamma = \frac{T}{m} \left[\frac{1}{2} z^0 + \sum_{j=1}^{m-1} z^j + \frac{1}{2} z^m \right]$.

5.7.3 Berechne $\alpha_{rs} = \alpha_{rs} + \omega \gamma$.

5.7.4 Setze $\alpha_{rs} = \text{Proj}_{\geq 0}(\alpha_{rs})$.

Ausgabe: $\alpha = (\alpha_{rs})_{r,s=0,\dots,n} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$.

Man kann erkennen, dass sich dieser Algorithmus leicht auch auf den Fall vollständiger Daten anpassen lässt. Aus diesem Grund geben wir hier keinen separaten Algorithmus für diesen Fall an.

6.6 Numerische Ergebnisse

Um das im letzten Abschnitt vorgestellte Verfahren zu testen, haben wir einige Beispielrechnungen durchgeführt. Diese werden im Folgenden vorgestellt. Dazu haben wir zunächst eine Simulation mit Schaden berechnet. Ist das Ergebnis u_S , so ist der Beobachtungsoperator angewendet auf u_S , also

$$\tilde{u} = Qu_S,$$

die Eingabe zum Algorithmus. Auf diese Weise wurden verschiedene Schadensszenarien untersucht. Dabei wird zuerst von vollständigen Daten und somit von $Q = I$ ausgegangen. Danach wird mithilfe eines Beobachtungsoperators, der nur auf einen Teil des Randes abbildet, gezeigt, wie sich das Ergebnis des Algorithmus bei unvollständigen Daten ändert. Im ersten Unterabschnitt werden die für den Algorithmus notwendigen Daten und Spezifikationen, die betrachteten Schadensszenarien und die verwendeten Beobachtungsoperatoren vorgestellt. Anschließend werden im zweiten Unterabschnitt die Ergebnisse gezeigt.

6.6.1 Numerische Umsetzung

Wie bereits im Laufe des Kapitels erwähnt, betrachten wir eine Platte aus einem Neo Hookeschen Material (siehe Abschnitt 6.1) mit den Maßen von $1\text{m} \times 1\text{m}$ bei einer Dicke von 6.7mm . Der Koordinatenursprung befindet sich in der Mitte der Platte und die Plattendickenrichtung ist x_1 . Diskretisiert wird die Platte mit $5 \times 31 \times 31$ Knoten in 16 Zeitschritten, die das Zeitintervall $[0\mu\text{s}, 133\mu\text{s}]$ äquidistant zerlegen. Somit erhalten wir in x_1 -Richtung vier Zellen und in x_2 - und x_3 -Richtung jeweils 30 Zellen und somit wird die Platte in insgesamt 3600 Zellen unterteilt. Numerisch lässt sich dies insgesamt auf eine Platte mit den Abmessungen $[-0.1, 0.1] \times [-15, 15]^2$ übertragen. Außerdem betrachten wir in unserem Algorithmus das Zeitintervall $[0, T]$ mit $T = 4$.

Für die Zeitdiskretisierung sowohl bei der numerischen Simulation des Vorwärtsproblems als auch des adjungierten Problems verwenden wir $\theta = 0.5$ und somit das Crank-Nicolson-Schema. Als Quadraturformel haben wir die Gauß-Lobatto-Quadratur gewählt. Der Vorteil dieser Quadratur ist, dass bei einer Wahl von zwei Quadraturpunkten pro Zelle in jeder Richtung diese mit den Eckpunkten der Zelle und somit den Gitterpunkten übereinstimmen und somit keine Interpolation nötig ist. Dann erhält man acht Quadraturpunkte pro Zelle.

Als Ansatzraum für die Galerkin-Diskretisierung wurden trilineare Splines verwendet. Somit wird in jeder Finite-Elemente-Rechnung ein lineares System mit sowohl 230640 Gleichungen als auch Unbekannten gelöst.

Wir betrachten die beiden Schichten bei $x_1 = -0.05$ beziehungsweise $x_1 = 0.05$ und somit $\epsilon = 0.05$ (siehe Kapitel 5). Wenn die Quadraturpunkte den Gitterpunkten entsprechen, kann man die Quadraturpunkte aufgrund der gewählten Daten der Platte und der äquidistanten Zerlegung $-15 = a = x_l^{(0)} < x_l^{(1)} < \dots < x_l^{(30)} = b = 15$, $l = 2, 3$, des Intervalls $[-15, 15]$ in x_2 - und x_3 -Richtung (siehe Kapitel 5) wie folgt definieren:

$$x_i^{(k)} = -15 + k, \quad k = 0, \dots, 30, \quad i = 2, 3.$$

Die Quadraturpunkte benötigt man, wenn man über die Platte und somit Ω integrieren will. Dies ist beispielsweise beim Berechnen der Funktionen A und D (siehe Kapitel 5) der Fall. Bei der Integration über Ω wird zum einen über alle Zellen iteriert und für jede Zelle wird wiederum über die Quadraturpunkte iteriert (siehe vorheriger Abschnitt). Somit kennt man dann in jeder Iteration die Koordinaten $Q_r(Q_r[1], Q_r[2], Q_r[3])$ des aktuellen, r -ten Iterationspunktes. Für den Fall $Q_r[1] = 0$ folgt $C(Q_r, Y) = C(Y)$ und die Ableitungen nach Y sind entsprechend. Aufgrund der Randbedingung (21) und der Bedin-

gung $C(x, 0) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ an die Verzerrungsenergiedichte muss $C(Q_r, Y) = 0$ für $Q_r[1] = \pm 0.1$ erfüllt sein. Ansonsten, falls $Q_r[1] = \pm 0.05$ gilt, bestimmt man aus den Koordinaten $Q_r(\pm 0.05, x_2^{(k)}, x_3^{(l)})$ die zum r -ten Quadraturpunkt zugehörigen Werte $k = 15 + x_2^{(k)}$ und $l = 15 + x_3^{(l)}$. Dann kann man für $C(Q_r, Y) = C(\pm 0.05, x_2^{(k)}, x_3^{(l)}, Y)$ und den Ableitungen nach Y die Funktionen aus (6.16) bis (6.18) verwenden. Damit kann man schließlich die beiden von der Verzerrungsenergiedichte abhängigen Funktionen A und D im oben erläuterten Verfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems implementieren.

Außerdem wird die Platte mit einer Volumenkraft f , die an einer Stelle der Platte und zwar in der Mitte der Platte wirkt, angeregt. Bei unseren numerischen Simulationen haben wir die Kraftanregung folgendermaßen definiert:

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = f_t(t)f_2(x_2)f_3(x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.60)$$

Die Kraft wirkt somit in x_3 -Richtung. Die Zeitfunktion f_t sei auf dem Zeitintervall $[0, 0.5]$ $f_t(t) = t$, $t \in [0, 0.5]$, und ansonsten gilt $f_t(t) = 0$ für alle $t > 0.5$. Durch Einbeziehung der Zeitfunktion ist die Anregung recht breitbandig, da f_t einen kompakten Träger hat und somit nicht bandlimitiert ist. Dies ist sehr vorteilhaft, da möglicherweise unterschiedliche Schäden empfindlich auf verschiedene Frequenzen reagieren. Die für unser Zeitintervall gewählten $133\mu\text{s}$ entsprechen einer Abtastfrequenz von 120kHz . Nach dem Nyquist-Shannon-Abtasttheorem folgt daraus, dass nur Signale, die keine Frequenzen höher als 60kHz enthalten, eindeutig bestimmt werden können und zwar durch Messungen im Abstand von $1/(120\text{kHz}) = (25/3)\mu\text{s}$. Dies macht zwar deutlich, dass die Wahl der Frequenz beschränkt ist, aber dies spielt keine wesentliche Rolle für unsere Methode. Für die anderen beiden Faktorfunktionen f_2 und f_3 betrachten wir mit $i \in \{2, 3\}$

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_i \leq -1 \text{ oder } x_i \geq 1 \\ x_i + 1, & \text{falls } -1 \leq x_i \leq 0 \\ -x_i + 1, & \text{falls } 0 \leq x_i \leq 1. \end{cases}$$

Die Graphen dieser drei Funktionen sind in der Abbildung 6.2 dargestellt.

Es entsteht ein Peak als Anregung in der Mitte der Platte. Den Ansatz (6.60) für die Kraftanregung haben wir aus [BSS15] übernommen. Der Unterschied ist zum einen, dass wir die Platte nur an einer Stelle anregen und nicht wie im genannten Artikel an vier

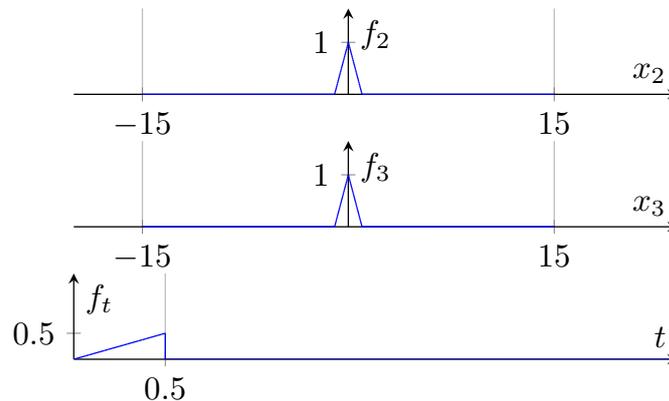


Abbildung 6.2: Faktorfunktionen für die Anregung der Platte

Stellen, und zum anderen verwenden wir hier andere Faktorfunktionen.

Schadhafte Stellen werden durch veränderte Koeffizienten in der konischen Kombination für die Verzerrungsenergiedichte modelliert. Dabei gehen wir davon aus, wie bereits in Abschnitt 6.5.3 erwähnt, dass die Koeffizienten für die unbeschädigte Struktur gerade alle gleich 1 seien. Die schadhafte Stellen sind zylinderförmig mit Achse in Plattendickenrichtung x_1 und einem Quadrat als Grundfläche in der x_2 - x_3 -Ebene. Dann stellen die Eckpunkte des Quadrats gerade vier entsprechend in der x_2 - x_3 -Ebene beieinander liegende Quadraturpunkte dar und somit entspricht das Quadrat gerade einer Gitterzelle in der x_2 - x_3 -Ebene. Somit sind die Seitenlängen des Quadrats alle gleich 1. Die drei Schadensszenarien sind:

- Ein Schaden etwa in der Mitte der Platte bei $(-1.5, -1.5)$ (Schadensszenario A)
- Zwei Schäden, einer von diesen weiter in der Mitte, der andere relativ nahe am Rand bei $(-1.5, -10.5)$ und $(5.5, 5.5)$ (Schadensszenario B)
- Zwei Schäden, wobei beide relativ mittig liegen bei $(-1.5, -4.5)$ und $(5.5, 5.5)$ (Schadensszenario C)

Dabei haben wir jeweils den Mittelpunkt des Quadrats angegeben, welches den Schaden darstellen soll. Die drei Szenarien sind in Abbildung 6.3 zu sehen. Bei Schadensszenario A haben wir $\alpha_{1313} = 2$, $\alpha_{1314} = 3$, $\alpha_{1413} = 4$ und $\alpha_{1414} = 2$ gesetzt. Für das Schadensszenario B wurden die Schäden mit $\alpha_{2020} = 2$, $\alpha_{2021} = 2$, $\alpha_{2120} = 2$ und $\alpha_{2121} = 2$ beziehungsweise $\alpha_{413} = 3$, $\alpha_{414} = 4$, $\alpha_{513} = 4$ und $\alpha_{514} = 3$ simuliert und für Schadensszenario C mit $\alpha_{2020} = 2$, $\alpha_{2021} = 2$, $\alpha_{2120} = 2$ und $\alpha_{2121} = 2$ beziehungsweise $\alpha_{1013} = 3$,

$\alpha_{1014} = 4$, $\alpha_{1113} = 4$ und $\alpha_{1114} = 3$.

Es ist zu beachten, dass die Koordinaten wie in Abbildung 6.4 zu verstehen sind. Des

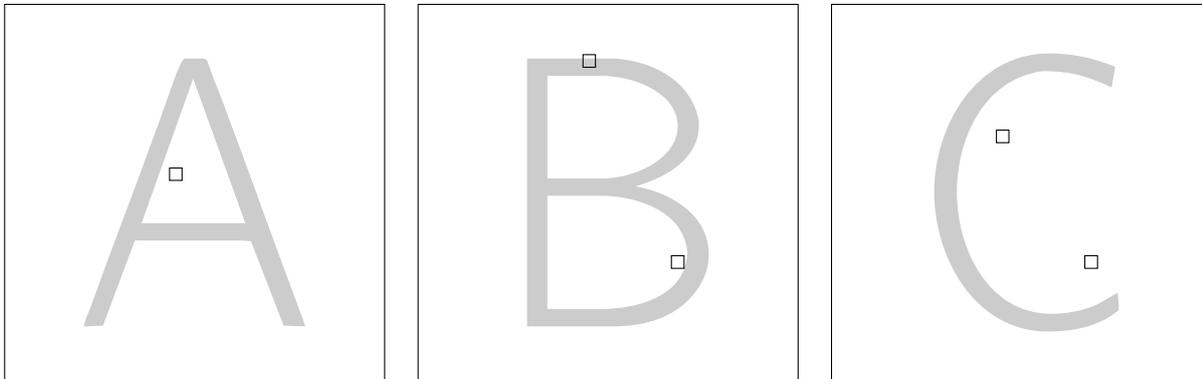


Abbildung 6.3: Die drei Schadensszenarien. Die schwarz umrandeten Quadrate markieren die Schadstellen in den Platten der Schadensszenarien A, B und C.

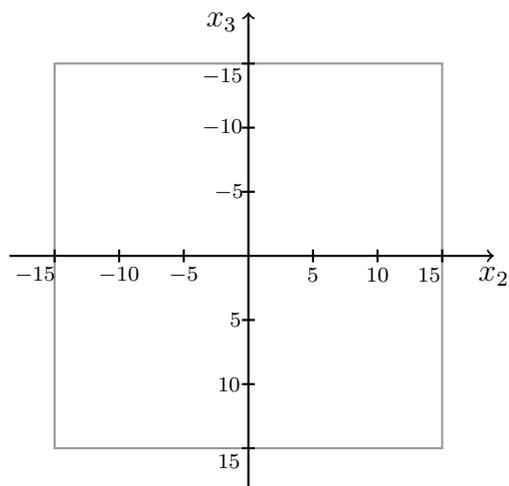


Abbildung 6.4: Skizze der Platte in der x_2 - x_3 -Darstellung

Weiteren haben wir bei unseren numerischen Experimenten den Beobachtungsoperator \mathcal{Q} wie in Abschnitt 6.4 beschrieben gewählt. Dabei sei $(\varphi_r)_{r=1,\dots,L}$ die Lagrange-Basis des Galerkin-Ansatzraumes der gewählten Finite-Elemente-Diskretisierung. Somit ist jede Basisfunktion an genau einem Diskretisierungsknoten 1 und an allen anderen 0. Wir haben außerdem als Gewichtsfunktion jedes Sensors ein auf den Rand der Platte eingeschränktes Basiselement gewählt. Diese Wahl des Beobachtungsoperators wurde aus dem Artikel [BSS15] entnommen. Für unsere Rechnungen wurde dann ein Beobachtungsoperator gewählt, zu dessen Definition es ausreicht, diejenigen Gitterpunkte aufzulisten, deren

zugehörige Lagrange-Basisfunktionen auch Gewichtsfunktionen eines Sensors darstellen. Damit genügt es die Lage der verwendeten Sensoren anzugeben. Bei der Durchführung des gedämpften Landweber-Verfahrens und somit des Algorithmus 4 haben wir im Fall vollständiger Daten als Dämpfungsparameter $\omega = 10$ gewählt.

Für die Auswertung der Experimente im Folgenden haben wir jeweils die entsprechende Koeffizientenmatrix $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j=0,\dots,30}$ graphisch dargestellt, wobei wir zwischen den einzelnen Einträgen interpoliert haben. Dabei stehen unterschiedliche Farben für verschiedene Werte der einzelnen Einträge der Matrix. Damit soll untersucht und sichtbar gemacht werden, ob die Methode fähig ist, schadhafte Stellen unter Berücksichtigung verschiedener Faktoren für Detektierbarkeit zu lokalisieren.

6.6.2 Numerische Experimente

Es wurden unter der Annahme vollständiger Daten insgesamt drei Experimente durchgeführt, um die Lokalisierung von Schäden anhand der drei Schadensszenarien zu untersuchen. Dabei ging es zunächst darum, wie sich die Anzahl der Iterationen des Algorithmus auf das Ergebnis auswirkt. Anschließend wurde ein Experiment mit zwei Schäden durchgeführt, um zu sehen, welchen Einfluss die erhöhte Anzahl und Lage der Schäden hat. Zuletzt fand noch ein Experiment zur Anfälligkeit im Hinblick auf verrauschte Daten statt.

Im ersten Experiment haben wir die Auswirkungen der Anzahl der Iterationsschritte untersucht. Dazu wurde das Schadensszenario A mit je 1, 50, 100 und 200 Iterationen gerechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.5 zu sehen. Es zeigt, dass selbst eine sehr geringe Anzahl an Iterationsschritten erahnen lässt, wo ein Schaden vorliegt. Man kann aber auch erkennen, dass bei einer höheren Anzahl an Iterationsschritten der Schaden deutlich sichtbarer wird. In den nachfolgenden Experimenten werden wir daher entweder 25 oder 50 Iterationen je Rechnung verwenden. Des Weiteren liefern die jeweiligen Wertebereiche, dass zwar sowohl die Werte der unbeschädigten Struktur als auch des beschädigten Bereichs ansteigen, aber der Abstand zwischen den entsprechenden Werten mit steigender Iterationsanzahl wächst und somit der Schaden deutlicher wird.

In einem zweiten Experiment wurden die Schadensszenarien B und C mit jeweils 50 Iterationen gerechnet, um zu sehen, wie sich das Verfahren beim Vorliegen von zwei Schäden verhält. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.6 dargestellt. Man sieht, dass jeweils beide Schäden lokalisiert werden. Allerdings ist auffällig, dass bei beiden Schadensszenarien immer ein Schaden stärker sichtbar ist und zwar derjenige der näher am Mittelpunkt der

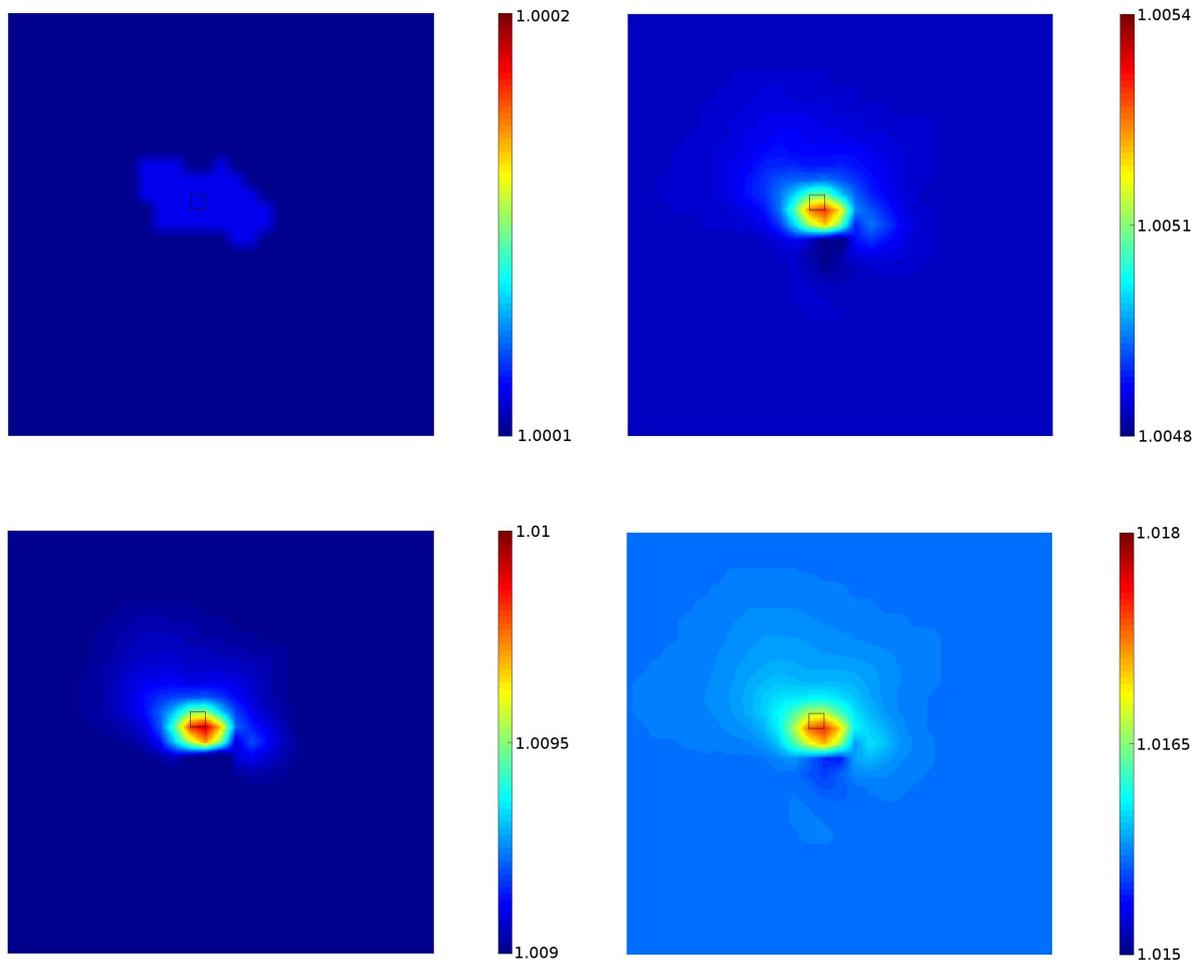


Abbildung 6.5: Die Ergebnisse aus Experiment 1 unter Verwendung von Schadensszenario A, von oben links nach unten rechts: 1, 50, 100 und 200 Iterationen.

Platte und somit am Ort der Anregung liegt. Außerdem treten jeweils im Bereich zwischen dem Mittelpunkt und dem näher liegendem Schaden Artefakte auf. Um die Ursachen für das Auftreten solcher Artefakte genauer zu untersuchen, wurde das Schadensszenario C betrachtet. Der Unterschied dabei zum Schadensszenario B ist, dass wir zwar den bei B näher am Mittelpunkt liegenden Schaden beibehalten haben, aber den zweiten, relativ am Rand liegenden Schaden näher an den Mittelpunkt gelegt haben. Man sieht deutlich, dass beim Schadensszenario C der Schaden, der vorher stärker ausgeprägt war bei B, jetzt schwächer sichtbar ist und andersherum der Schaden, der vorher schwächer dargestellt war, jetzt bei C deutlicher sichtbar ist. Somit lässt sich vermuten, dass die Artefakte aus Reflexionen der Welle am ersten Schaden, auf den die Welle trifft, resultieren.

Im dritten und für vollständige Daten letzten Experiment haben wir das Verfahren auf

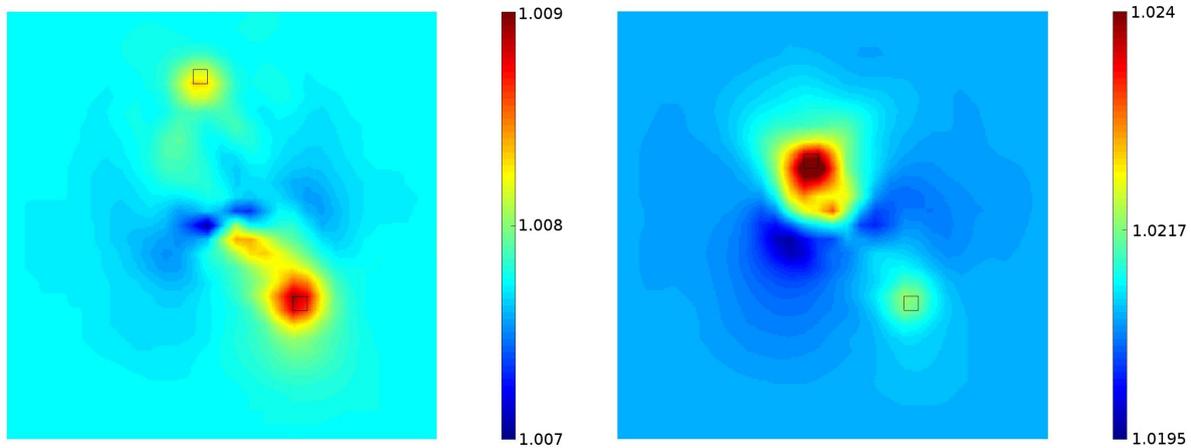


Abbildung 6.6: Die Ergebnisse aus Experiment 2 unter Verwendung von Schadensszenario B (links) und Schadensszenario C (rechts).

Sensibilität hinsichtlich fehlerbehafteter Daten untersucht. Dazu seien

$$e(t_j) = \sum_{r=1}^L E_r(t_j) \varphi_r, \quad u^\delta(t_j) = \sum_{r=1}^L U_r^\delta(t_j) \varphi_r \quad \text{und} \quad \tilde{u}(t_j) = \sum_{r=1}^L \tilde{U}_r(t_j) \varphi_r$$

mit $t_j = jT/m$ für alle $j = 0, \dots, m$ (siehe Abschnitt 6.2). Mit diesen Darstellungen haben wir einen zufälligen Vektor e mit $\|E\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^L)} = \delta \|\tilde{U}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^L)}$ auf das Eingaberverschiebungsfeld \tilde{u} addiert, so dass für die verrauschten Daten $u^\delta = \tilde{u} + e$ und das unverrauschte Eingaberverschiebungsfeld \tilde{u} die Bedingung

$$\frac{\|U^\delta - \tilde{U}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^L)}}{\|\tilde{U}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^L)}} = \delta$$

erfüllt ist.

In Abbildung 6.7 ist der Unterschied zwischen dem unverrauschten und dem verrauschten Verschiebungsfeld zum festen Zeitpunkt $t = 108\mu\text{s}$ dargestellt. Dabei gilt für das verrauschte Verschiebungsfeld $\delta = 1$. Die Ergebnisse aus Experiment 3 nach jeweils 25 Iterationen sind in Abbildung 6.8 zu sehen. Offenbar beeinträchtigt das Rauschen selbst für größere δ die Lokalisierung des Schadens nur wenig. Allerdings führt die Einführung eines Rauschens zu insgesamt geringeren Werten im Ergebnis, wobei die Unterschiede minimal sind. Schließlich sind vor allem für $\delta = 1$ kleine Artefakte im Vergleich zu den

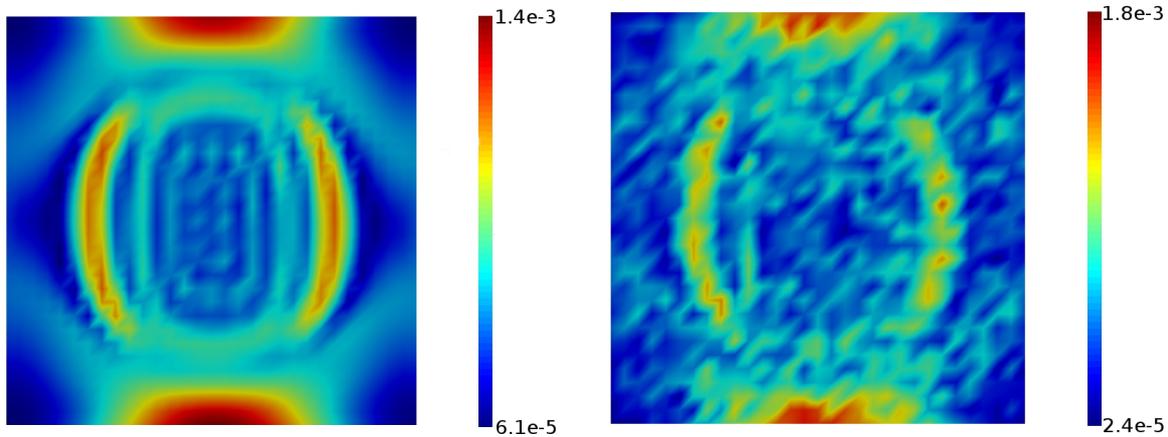


Abbildung 6.7: Der Unterschied zwischen unverraushtem und verraushtem ($\delta = 1$) Verschiebungsfeld aus Experiment 3. Das abgebildete Verschiebungsfeld stammt aus dem Schadensszenario A und wurde zum Zeitpunkt $t = 108\mu\text{s}$ aufgenommen. Die Färbung entspricht der Norm des Verschiebungsfeldes.

anderen Ergebnissen deutlich erkennbar.

Nachdem die drei Experimente unter Annahme vollständiger Daten durchgeführt wurden, fand ein Experiment unter der Annahme unvollständiger Daten statt. Dabei wurden als Eingabedaten das Verschiebungsfeld $\bar{u} = \mathcal{Q}\tilde{u}$ mit dem Beobachtungsoperator \mathcal{Q} verwendet, wobei wir zwei verschiedene Beobachtungsoperatoren betrachtet haben. In beiden Fällen haben wir die Sensoren im Quader jeweils längs der vier Kanten der Platte auf beiden Seiten der Platte angebracht. Im ersten Fall betrachten wir den Beobachtungsoperator R57d, das heißt an jeder Kante der Platte auf beiden Seiten der Platte befinden sich 57 Sensoren und somit insgesamt 448 Sensoren auf der Platte. Um zu sehen, wie sich eine geringere Anzahl von Sensoren auf das Ergebnis auswirkt, haben wir anschließend noch in einem zweiten Fall den Beobachtungsoperator R8d verwendet mit jeweils 8 Sensoren an jeder Kante der Platte auf beiden Seite der Platte und somit insgesamt 56 Sensoren auf der Platte. Dabei haben wir wieder jeweils 25 Iterationen des Verfahrens berechnet, allerdings in diesen beiden Fällen mit dem Dämpfungsparameter $\omega = 100$, da anderenfalls die Werte nach 25 Iterationen zu gering für ein sichtbares Ergebnis wären.

Die Ergebnisse aus Experiment 4 sind in der Abbildung 6.9 dargestellt. Zunächst kann man festhalten, dass in beiden Fällen der Schaden lokalisiert wird. Allerdings muss man auch sagen, dass eine geringere Anzahl an Sensoren zum einen zu einer höheren Anzahl an Artefakten führt und zum anderen im Hinblick auf die jeweils angegebenen Wertebereiche

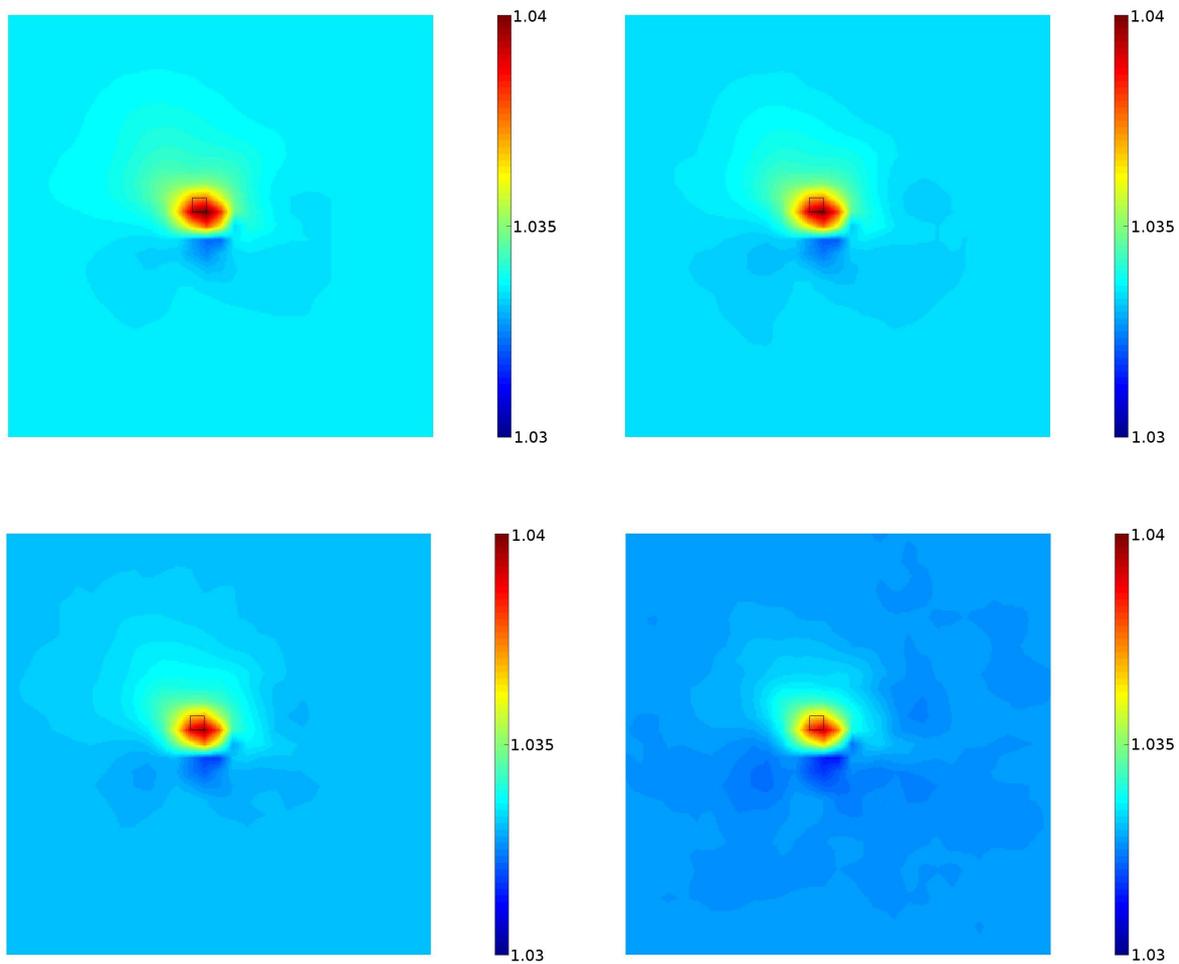


Abbildung 6.8: Die Ergebnisse aus Experiment 3. In jedem Bild Schadenszenario A, von oben links nach unten rechts: Rauschlevel von $\delta = 0, 0.2, 0.5$ und 1 .

der Unterschied zwischen den Werten der beschädigten und der unbeschädigten Struktur in diesem Fall wesentlich geringer ist. Somit ist der Schaden bei der höheren Anzahl von Sensoren deutlich sichtbar. Dies bestätigt allerdings nur die logische Annahme, dass mehr Sensoren und somit mehr Informationen zu besseren Ergebnissen führen.

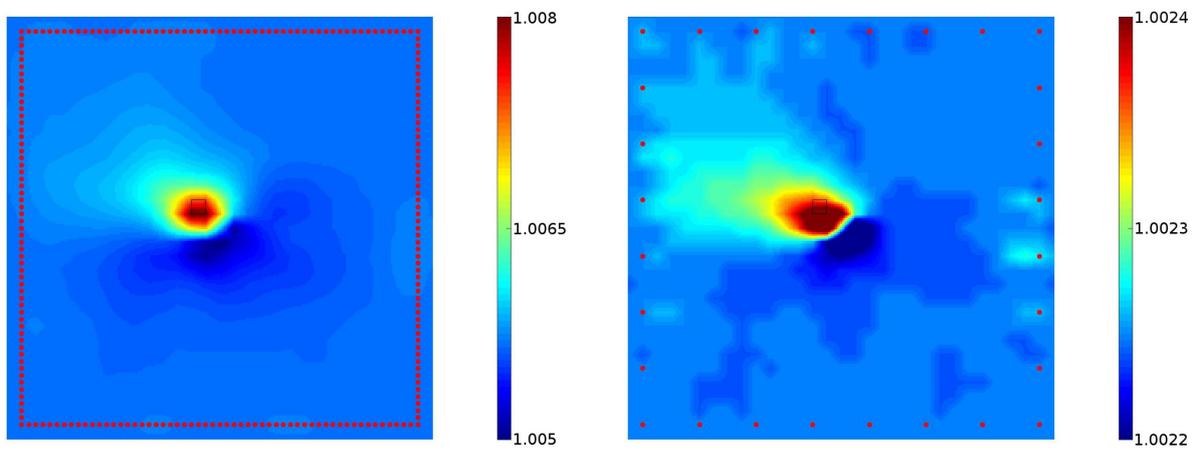


Abbildung 6.9: Die Ergebnisse aus Experiment 4. In beiden Bildern Schadenszenario A. Links Beobachtungsoperator R57d und rechts R8d.

Kapitel 7

Fazit und Ausblick

In vielen Bereichen, wie beispielsweise der Luft- und Raumfahrttechnik, spielen zerstörungsfreie Verfahren zur Schadensdetektion für Faserverbundstrukturen eine immer größer werdende Rolle. Einen vielversprechenden Ansatz bildet dabei die Applikation eines Netzwerks von Piezosensoren und -aktuatoren auf der Oberfläche der Struktur. Ein einfaches Modell für einen solchen Piezosensor stellt zum Beispiel ein Sensor dar, der gemittelte, gewichtete mechanische Spannungen an der Oberfläche misst. In dieser Arbeit ging es darum aus den Messungen solcher Sensoren über die Identifikation der Verzerrungsenergiedichte eines hyperelastischen Materials auf die mechanischen Eigenschaften der Struktur und somit auf die mögliche Existenz von Schäden zu schließen. Dabei sind beispielsweise kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe in der Klasse der hyperelastischen Materialien enthalten. Als Modell zur Wellenausbreitung in hyperelastischen Materialien dient die Cauchysche Bewegungsgleichung. Aufbauend auf den Ergebnissen des Artikels [WS15] haben wir gezeigt, dass der Lösungsoperator \mathcal{T} des Vorwärtsproblems, also der Cauchyschen Bewegungsgleichung für hyperelastische Materialien, Fréchet-differenzierbar ist. Des Weiteren wurde bewiesen, dass die Gâteaux-Ableitung zum einen die eindeutige, schwache Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen und zum anderen stetig in h für alle Richtungen h ist. Anschließend wurde eine Darstellung für die Adjungierte der Fréchet-Ableitung hergeleitet und die lokale Kegelbedingung für unser Problem bei Vorliegen vollständiger Daten bewiesen. Dies war notwendig, um das Problem der Identifikation der Verzerrungsenergiedichte numerisch mit dem (gedämpften) Landweber-Verfahren zu lösen beziehungsweise um zu zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen das Landweber-Verfahren angewendet auf unser Identifikationsproblem lokal konvergiert.

Wiederum aufbauend auf [WS15] und [KL07] haben wir in der gesamten Arbeit angenommen, dass sich die Verzerrungsenergiedichte darstellen lässt als eine konische Kombination

von endlich vielen, fest vorgegebenen Funktionen. Dies hat den Vorteil, dass sich unter Vorgabe eines Dictionaries solcher Funktionen unser Identifikationsproblem auf ein endlichdimensionales Problem reduziert, nämlich der Identifikation der Koeffizienten in der konischen Kombination für die Verzerrungsenergiedichte. Aus diesem Grund war auch ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit das Aufstellen eines geeigneten Dictionaries von Funktionen für die konische Kombination. Dabei hat sich zunächst herauskristallisiert, dass dafür polykonvexe Funktionen sinnvoll sind. Anschließend haben wir verschiedene Verzerrungsenergiedichten isotroper, hyperelastischer Materialien präsentiert und auf Polykonvexität untersucht.

Ein dritter Schwerpunkt und das eigentliche Ziel dieser Arbeit bestand darin, das Problem der Identifikation der Verzerrungsenergiedichte eines hyperelastischen Materials und somit der Schadensdetektion bei Strukturen aus derartigen Materialien numerisch zu lösen. Dazu haben wir das gedämpfte Landweber-Verfahren angewendet auf unser Problem implementiert. Allerdings muss dabei in jedem Iterationsschritt sowohl einmal das Vorwärtsproblem als auch einmal das adjungierte Problem gelöst werden. Für die Lösung des adjungierten Problems konnten wir auf den Artikel [BSS15] und den darin vorgestellten Algorithmus zurückgreifen. Entgegengesetzt dazu bestand die eigentliche Hauptaufgabe dieses Schwerpunkts darin, ein Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Vorwärtsproblems zu konzipieren und umzusetzen. Dieses wurde auch verwendet, um synthetische Daten zum Testen des Verfahrens zur Lösung des inversen Problems zu erzeugen. Einige Rechenbeispiele haben schließlich gezeigt, dass unser so entwickeltes Verfahren zur Identifikation der Verzerrungsenergiedichte erfolgreich diese synthetisch erzeugten Schäden lokalisiert. Dabei wurden mithilfe von drei Schadensszenarien, bei denen entweder ein Schaden oder zwei Schäden auftraten, auch verrauschte beziehungsweise mithilfe eines Beobachtungsoperators erzeugte, unvollständige Daten getestet.

Die erhaltenen Ergebnisse legen nahe, dass das Verfahren weiter entwickelt werden sollte. Ein nächster Schritt in Hinblick auf die Entwicklung eines autonomen, sensorgestützten SHM-Systems wäre die Verifizierung des Verfahrens anhand von (realen) Messungen an Piezosensoren, welche auf die Struktur appliziert werden, beziehungsweise von durch einen Laservibrometer erfassten Daten. Des Weiteren könnte man anstelle der in dieser Arbeit betrachteten plattenähnlichen Strukturen auch für die praktische Verwendung von Faserverbundwerkstoffen ebenso wichtige gekrümmte Strukturen betrachten und untersuchen, wie sich das Verfahren in diesem Fall verhält.

Eine andere Möglichkeit das entwickelte Verfahren hinsichtlich der Eingabedaten zu testen wäre weitere Beobachtungsoperatoren zu verwenden, um zu sehen, wie sich Lage und

Anzahl der Sensoren auf das Ergebnis auswirkt. Es sei darauf hingewiesen, dass wir hier mit dem Neo Hookeschen Material ein sehr einfaches Materialmodell betrachtet haben. Dies gibt aber auch Raum zum weiteren Testen des Verfahrens, indem man alternative Materialmodelle verwendet.

Außerdem sollte man sich bei der Weiterentwicklung des Verfahrens mit den insbesondere im Fall von zwei Schäden auftretenden Artefakten auseinandersetzen. Diese lassen sich möglicherweise durch das Einbauen von Sparsity Constraints unterbinden.

Ein weiterer Punkt, der in Zukunft auch noch Optimierungsbedarf hat, ist, dass das für unseren Algorithmus verwendete gedämpfte Landweber-Verfahren zwar auf der einen Seite sehr stabil ist, aber auf der anderen Seite auch ziemlich langsam konvergiert. Dies hat sich auch stark auf unser Verfahren zur Identifikation der Verzerrungsenergiedichte ausgewirkt. Aus diesem Grund könnte man beispielsweise Ideen der sequentiellen Unterraummethoden verwenden (siehe [Wal16]), um die Konvergenz des Verfahrens zu beschleunigen.

Zusammenfassend bietet diese Arbeit einen wichtigen Schritt im Hinblick auf die Schadensdetektion bei hyperelastischen Materialien, aber auch noch ein breites Spektrum an weiteren Forschungsgegenständen.

Anhang

In diesem Anhang wollen wir einige Aussagen angeben und beweisen, die wir in der Arbeit für gewisse Beweise benötigen, die aber ansonsten keine Rolle im Verlauf der Arbeit spielen.

A.1 Differentialrechnung

Wir benötigen im Verlauf des Kapitels zur Kontinuumsmechanik die folgende Darstellung der Ableitung der Determinante.

Lemma A.1. *Sei $A \in GL(3)$. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \Phi(M) = \det(M),$$

in A differenzierbar und es gilt

$$\nabla \Phi(A) : H = \operatorname{tr}(A^{-1}H)\Phi(A)$$

für alle $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Beweis. Nach der Leibnizschen Formel ist $\Phi(A)$ ein Polynom dritten Grades in den Einträgen A_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, von $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Somit ist Φ stetig. Da $GL(3) = \Phi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ gilt und die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ offen ist, folgt insgesamt, dass $GL(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ offen ist. Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz gilt für alle $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\det(I + M) = 1 + \operatorname{tr}(M) + f(M),$$

wobei $f(M)$ eine Summe von Monomen in den Komponenten von M vom Grad größer gleich 2 und damit $f(M) = o(M)$ für $M \rightarrow 0$ ist. Daher gilt

$$\Phi(A + H) = \det(A + H) = \det(A) \det(I + A^{-1}H)$$

$$= \det(A)[1 + \operatorname{tr}(A^{-1}H) + o(H)] = \Phi(A) + \operatorname{tr}(A^{-1}H)\Phi(A) + o(H)$$

und damit die Behauptung. \square

Als Nächstes stellen wir die Divergenz eines Tensorproduktes geeignet dar.

Lemma A.2. *Es seien $f, v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar. Dann gilt*

$$\nabla \cdot (f \otimes v) = (\nabla f)v + f(\nabla \cdot v),$$

wobei \otimes das Tensorprodukt sei.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f \otimes v) &= \nabla \cdot ((f_i v_j)_{j=1,2,3}^{i=1,2,3}) = (\nabla \cdot (f_i v_j)_{j=1,2,3})_{i=1,2,3} \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \partial_j (f_i v_j) \right)_{i=1,2,3} = \left(\sum_{j=1}^3 (\partial_j f_i) v_j + \sum_{j=1}^3 f_i (\partial_j v_j) \right)_{i=1,2,3} \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 (\nabla f)_{ij} v_j + f_i \sum_{j=1}^3 (\partial_j v_j) \right)_{i=1,2,3} = (\nabla f)v + f(\nabla \cdot v). \end{aligned}$$

Dies liefert direkt die Aussage. \square

Zusätzlich zeigen wir die folgende Darstellung der Divergenz des Produktes einer matrixwertigen Funktion mit einem Vektorfeld.

Lemma A.3. *Es sei $T : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ein partiell differenzierbares Tensorfeld und $v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\nabla \cdot (T^\top v) = \langle \nabla \cdot T, v \rangle + T : \nabla v.$$

Beweis. Direktes Nachrechnen liefert

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (T^\top v) &= \sum_{i=1}^3 \partial_i (T^\top v)_i = \sum_{i=1}^3 \partial_i \sum_{j=1}^3 T_{ji} v_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\partial_i T_{ji}) v_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ji} \partial_i v_j \\ &= \sum_{j=1}^3 (\nabla \cdot T)_j v_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ji} (\nabla v)_{ji} \end{aligned}$$

$$= \langle \nabla \cdot T, v \rangle + T : \nabla v$$

und damit die Aussage des Lemmas. \square

Des Weiteren wird das folgende Theorem von Gauß-Ostrogradski (auch bekannt als Gaußscher Integralsatz oder Divergenzsatz) im Zusammenhang mit dem Beweis einiger wichtiger Abschätzungen im Verlauf der Arbeit, insbesondere im Kapitel 4, verwendet.

Satz A.1. (*Theorem von Gauß-Ostrogradski*) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^1 -Gebiet mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor $\nu = \nu(x)$ für $x \in \Omega$ auf $\partial\Omega$ und $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} f(\xi) \cdot \nu(\xi) \, d\xi. \quad (\text{A.1})$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man beispielsweise in [Bar13]. Allerdings wird auch oft die nachstehende Folgerung aus Satz A.1 verwendet.

Lemma A.4. (*Partielle Integration*) Unter den Voraussetzungen aus Satz A.1 an Ω sei $T : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ein stetig differenzierbares Tensorfeld und $v : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \cdot T(x), v(x) \rangle \, dx = \int_{\partial\Omega} (T(\xi)^\top v(\xi)) \cdot \nu(\xi) \, d\xi - \int_{\Omega} T(x) : \nabla v(x) \, dx. \quad (\text{A.2})$$

Beweis. Es sei $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x) := T(x)^\top v(x)$ für alle $x \in \Omega$. Dann folgt aus Satz A.1

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (T(x)^\top v(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} (T(\xi)^\top v(\xi)) \cdot \nu(\xi) \, d\xi.$$

Dies liefert unter Verwendung von Lemma A.3

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \cdot T(x), v(x) \rangle + T(x) : \nabla v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} (T(\xi)^\top v(\xi)) \cdot \nu(\xi) \, d\xi$$

und somit die Behauptung. \square

A.2 Geometrie

Für den Beweis des Theorems von Cauchy benötigen wir das folgende Lemma, welches unter anderem eine Aussage über den Grenzwert des Verhältnisses aus dem Volumen und der Fläche eines Simplex im dreidimensionalen Raum liefert, wenn sich drei der vier Eckpunkte des Simplex gleichmäßig auf den Vierten zubewegen.

Lemma A.5. *Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein Simplex mit den Eckpunkten $p_i = x + \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, 3$, und $p_4 = x$. Des Weiteren seien die Seitenflächen F_1 , F_2 und F_3 so benannt, dass sie die Normalen e_1 , e_2 beziehungsweise e_3 haben. In Abbildung A.1 ist der Simplex mit den entsprechenden Bezeichnungen dargestellt. Außerdem sei ν der äußere Normaleneinheitsvektor der vierten Seitenfläche von S , die wir mit F_4 bezeichnen und die x gegenüber liegt. Dann gilt*

$$\text{vol}(F_i) = \nu_i \text{vol}(F_4), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ist $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i h$, $i = 1, 2, 3$, so gilt

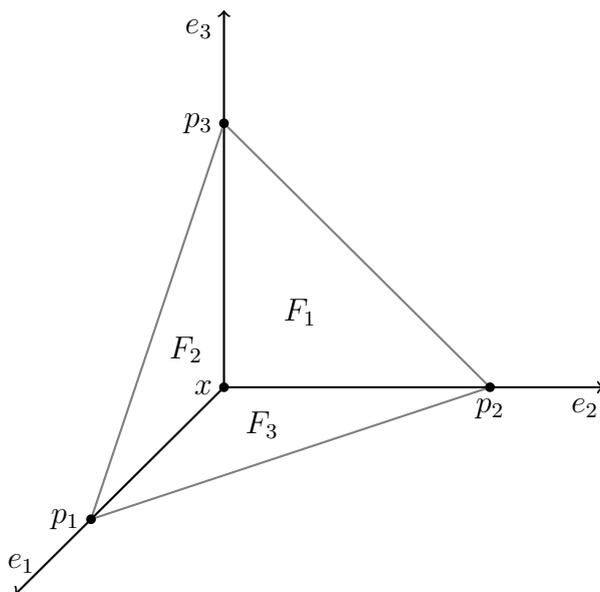


Abbildung A.1: Simplex S

$$\lim_{(p_1, p_2, p_3) \rightarrow x} \frac{\text{vol}(S)}{\text{vol}(F_4)} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(S)}{\text{vol}(F_4)} = 0,$$

das heißt, dass falls sich die Eckpunkte p_1 , p_2 und p_3 des Simplex S gleichmäßig dem Eckpunkt x nähern, so verschwindet das angegebene Verhältnis aus dem Volumen von S und der Fläche von F_4 .

Beweis. Zunächst einmal wird die Seitenfläche F_4 aufgespannt durch die Vektoren

$$a := p_2 - p_1 = \lambda_2 e_2 - \lambda_1 e_1 \quad \text{und} \quad b := p_3 - p_1 = \lambda_3 e_3 - \lambda_1 e_1.$$

Dann gilt für den Normaleneinheitsvektor von F_4

$$\nu = \frac{a \times b}{\|a \times b\|_2}$$

und somit

$$\nu \text{vol}(F_4) = \frac{\nu}{2} \|a \times b\|_2 = \frac{1}{2} a \times b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{vol}(F_1) \\ \text{vol}(F_2) \\ \text{vol}(F_3) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die erste Aussage des Lemmas gezeigt. Weiter gilt mit $x p_i := p_i - x$ für $i = 1, 2, 3$

$$\text{vol}(S) = \frac{1}{6} |(x p_1 \times x p_2) \cdot x p_3| = \frac{1}{6} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

und mit $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i h$, $i = 1, 2, 3$,

$$\text{vol}(S) = \frac{1}{6} h^3 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3.$$

Außerdem ist

$$\text{vol}(F_4) = \frac{1}{2} \|a \times b\|_2 = \frac{1}{2} h^2 \sqrt{(\tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3)^2 + (\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3)^2 + (\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2)^2}$$

und somit schließlich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(S)}{\text{vol}(F_4)} = 0.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

A.3 Lineare Algebra

Um äquivalente Aussagen zum Axiom der Objektivität zu beweisen, benötigen wir die folgenden Resultate zur Polarzerlegung einer Matrix.

Korollar A.1. (*Polarzerlegung*) *Es sei $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine invertierbare Matrix mit $\det(M) > 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Matrizen $R \in SO(3)$ und $U \in \text{Sym}_+(3)$ derart, dass*

die Gleichung

$$M = RU$$

gilt. Diese Darstellung nennt man Polarzerlegung von M und es gelten

$$U = (M^\top M)^{1/2} \quad \text{und} \quad R = MU^{-1}.$$

Um dieses Korollar zu beweisen, benötigen wir noch den folgenden Satz.

Satz A.2. *Es sei $M \in \text{Sym}_+(3)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $S \in \text{Sym}_+(3)$ derart, dass die Gleichung $S^2 = M$ gilt. In diesem Fall bezeichnen wir die Lösung dieser Gleichung unter der Nebenbedingung $S \in \text{Sym}_+(3)$ mit $S = M^{1/2}$.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [Cia88], aber auch in vielen Büchern über lineare Algebra, wie beispielsweise [Brö04].

Damit kommen wir zum Beweis des Korollars A.1 über die Polarzerlegung.

Beweis von Korollar A.1: Zunächst wollen wir die Eindeutigkeit der Polarzerlegung zeigen. Dazu nehmen wir an, dass eine Darstellung $M = RU$ mit $R \in \text{SO}(3)$ und $U \in \text{Sym}_+(3)$ existiert. Dann gilt

$$M^\top M = (RU)^\top (RU) = U^\top R^\top R U = U^\top U = U^2.$$

Da $M^\top M \in \text{Sym}_+(3)$ ist, folgt aus Satz A.2, dass ein eindeutiges $U = (M^\top M)^{1/2}$ mit $U \in \text{Sym}_+(3)$ existiert, das die Gleichung erfüllt. Somit ist schließlich auch $R = MU^{-1}$ eindeutig festgelegt.

Wir kommen nun zum Beweis der Existenz der Polarzerlegung. Dazu definieren wir wieder $U := (M^\top M)^{1/2}$ und $R = MU^{-1}$. Dann folgt direkt $M = RU$. Außerdem gilt

$$R^\top R = (MU^{-1})^\top (MU^{-1}) = U^{-\top} M^\top M U^{-1} = U^{-1} U^2 U^{-1} = I$$

und somit tatsächlich $R \in \text{SO}(3)$. Damit ist alles bewiesen. □

Literaturverzeichnis

- [AB93] E. M. Arruda and M. C. Boyce, *A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **41** (1993), no. 2, 389–412.
- [Bal77] J. M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **63** (1977), no. 4, 337–403.
- [Bar13] V. Barbu, *Partial differential equations and boundary value problems*, Mathematics and Its Applications, Springer Netherlands, 2013.
- [BC05] M. Bonnet and A. Constantinescu, *Inverse problems in elasticity*, Inverse Problems **21** (2005), no. 2, R1–R50.
- [BHK07] W. Bangerth, R. Hartmann, and G. Kanschat, *deal.II – a general purpose object oriented finite element library*, ACM Transactions on Mathematical Software **33** (2007), no. 4, 24/1–24/27.
- [Bra10] D. Braess, *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, 4 ed., Springer-Lehrbuch Masterclass, Springer, 2010.
- [Brö04] T. Bröcker, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, 2 ed., Grundstudium Mathematik, Birkhäuser, 2004.
- [BS92] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Integral inequalities and applications*, Mathematics and its Applications. East European series, vol. 57, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [BSS15] F. Binder, F. Schöpfer, and T. Schuster, *Defect localization in fibre-reinforced composites by computing external volume forces from surface sensor measurements*, Inverse Problems **31** (2015), no. 2, 22p.

- [Cia88] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volume I: Three-dimensional elasticity*, Elsevier Science Publishers B.V., 1988.
- [Dac89] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 78, Springer-Verlag, 1989.
- [DES98] P. Deuffhard, H. Engl, and O. Scherzer, *A convergence analysis of iterative methods for the solution of nonlinear ill-posed problems under affinity invariant conditions*, Inverse Problems **14** (1998), 1081 – 1106.
- [DS00] S. Doll and K. Schweizerhof, *On the development of volumetric strain-energy functions*, Journal of Applied Mechanics **67** (2000), no. 1, 17–21.
- [EHN96] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [Ehr06] G. W. Ehrenstein, *Faserverbund-Kunststoffe*, 2 ed., Hanser Fachbuchverlag, 2006.
- [FFL⁺14] M. Focardi, N. Fusco, C. Leone, P. Marcellini, E. Mascolo, and A. Verde, *Weak lower semicontinuity for polyconvex integrals in the limit case*, Calc. Var. Partial Differential Equations (2014), no. 51, 171–193.
- [Flo61] P. Flory, *Thermodynamic Relations for High Elastic Materials*, Transactions of the Faraday Society **57** (1961), 829–838.
- [FZR96] M. Flemming, G. Ziegmann, and S. Roth, *Faserverbundbauweisen*, Springer-Verlag, 1996.
- [Gan94] W. Gangbo, *On the weak lower semicontinuity of energies with polyconvex integrands*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1994), no. 73, 455–469.
- [GHH16] D. Garmatter, B. Haasdonk, and B. Harrach, *A Reduced Basis Landweber method for nonlinear inverse problems*, Inverse Problems **32** (2016), no. 3, 035001.
- [Giu08] V. Giurgiutiu, *Structural health monitoring*, Academic Press, 2008.
- [Gur81] M. E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, 1 ed., Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1981.

- [Hac15] R. M. Hackett, *Hyperelasticity primer*, Springer, 2015.
- [Han97] M. Hanke, *A regularizing Levenberg - Marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problems*, *Inverse Problems* **13** (1997), no. 1, 79.
- [HDPS07] M. Hossain, R. Denzer, G. Possart, and P. Steinmann, *On phenomenological and micro-mechanical models in finite elasticity and viscoelasticity for rubber-like materials*, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)* **7** (2007), 4060051–4060052.
- [HM09] C. O. Horgan and J. G. Murphy, *On the volumetric part of strain-energy functions used in the constitutive modeling of slightly compressible solid rubbers*, *International Journal of Solids and Structures* **46** (2009), no. 16, 3078 – 3085.
- [HN03] S. Hartmann and P. Neff, *Polyconvexity of generalized polynomial-type hyper-elastic strain energy functions for near-incompressibility*, *International Journal of Solids and Structures* **40** (2003), no. 11, 2767–2791.
- [HNS95] M. Hanke, A. Neubauer, and O. Scherzer, *A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems*, *Numerische Mathematik* **72** (1995), no. 1, 21–37.
- [Hol00] G. A. Holzapfel, *Nonlinear solid mechanics*, Wiley, 2000.
- [IK14] M. Itskov and V. N. Khiêm, *A polyconvex anisotropic free energy function for electro- and magneto-rheological elastomers*, *Mathematics and Mechanics of Solids* **21** (2014), no. 9.
- [KL07] B. Kaltenbacher and A. Lorenzi, *A uniqueness result for a nonlinear hyperbolic equation*, *Applicable Analysis* **86** (2007), no. 11.
- [Kle07] B. Klein, *Leichtbau-Konstruktion*, Viewegs Fachbücher der Technik, Vieweg, 2007.
- [KLL⁺12] B. Kim, S. B. Lee, J. Lee, S. Cho, H. Park, S. Yeom, and S. H. Park, *A comparison among Neo-Hookean model, Mooney-Rivlin model, and Ogden model for chloroprene rubber*, *International Journal of precision engineering and manufacturing* (2012), no. 13.

- [KNS08] B. Kaltenbacher, A. Neubauer, and O. Scherzer, *Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems*, Radon series on computational and applied mathematics, Walter de Gruyter, 2008.
- [KR14] A. Kirsch and A. Rieder, *On the linearization of operators related to the full waveform inversion in seismology*, *Mathematical Methods in Applied Sciences* **37** (2014), no. 18, 2995–3007.
- [LHM94] C. H. Liu, G. Hofstetter, and H. A. Mang, *3D finite element analysis of rubber-like materials at finite strains*, *Engineering Computations* **11** (1994), 111–128.
- [Lio71] J. L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1971.
- [LMK72] J. L. Lions, E. Magenes, and P. Kenneth, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1972.
- [MH83] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1983.
- [Mor52] C. B. Morrey, *Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals*, *Pacific Journal of Mathematics* (1952), no. 2, 25–53.
- [Ogd72a] R. W. Ogden, *Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* (1972), no. 326, 565–584.
- [Ogd72b] ———, *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids*, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* (1972), no. 328, 567–583.
- [Ogd77] ———, *Nearly isochoric elastic deformations: application to rubberlike solids*, *J. Mech. Phys. Solids* **26** (1977), 37–57.
- [Ogd82] ———, *Elastic deformations of rubberlike solids*, *Mechanics of Solids: The Rodney Hill 60th anniversary volume* (1982), 499–537.

- [Rie03] A. Rieder, *Keine Probleme mit Inversen Problemen: Eine Einführung in ihre stabile Lösung*, Vieweg+Teubner Verlag, 2003.
- [RL15] N. Rauter and R. Lammering, *Investigation of the Higher Harmonic Lamb Wave Generation in Hyperelastic Isotropic Material*, *Physics Procedia* **70** (2015), 309–313.
- [Sch95] O. Scherzer, *Convergence criteria of iterative methods based on landweber iteration for solving nonlinear problems*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **194** (1995), no. 3, 911 – 933.
- [Sch98] O. Scherzer, *An iterative multi level algorithm for solving nonlinear ill-posed problems*, *Numerische Mathematik* **80** (1998), no. 4, 579–600.
- [Sch05] H. Schürmann, *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*, 2 ed., VDI-Buch, Springer-Verlag, 2005.
- [SN03] J. Schröder and P. Neff, *Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions*, *International Journal of Solids and Structures* **40** (2003), 401–445.
- [SN10] J. Schröder and P. Neff, *Poly-, Quasi- and Rank-One Convexity in Applied Mechanics*, CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol. 516, Springer-Verlag KG, 2010.
- [SS16] J. Seydel and T. Schuster, *On the linearization of identifying the stored energy function of a hyperelastic material from full knowledge of the displacement field*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **40** (2016), 183–204.
- [SS17] ———, *Identifying the stored energy of a hyperelastic structure by using an attenuated Landweber method*, submitted to *Inverse Problems*, Special issue: Dynamic inverse problems: modelling, regularization, numerics (2017), <https://arxiv.org/abs/1704.06559>.
- [ST82] J. C. Simo and R. L. Taylor, *Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **35** (1982), no. 1, 107–118.

- [ST91] ———, *Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **85** (1991), no. 3, 273–310.
- [STP85] J. C. Simo, R. L. Taylor, and K. S. Pfister, *Variational and projection methods for volume constraint in finite deformation elasto-plasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **51** (1985), 177–208.
- [SW14] T. Schuster and A. Wöstehoff, *On the identifiability of the stored energy function of hyperelastic materials from sensor data at the boundary*, Inverse Problems **30** (2014), no. 10, 26pp.
- [Tre05] L. R. G. Treloar, *The Physics of Rubber Elasticity*, 3 ed., Oxford University Press, 2005.
- [Trö09] F. Tröltzsch, *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen*, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009, 2. Auflage.
- [Wal16] *Sequential subspace optimization for nonlinear inverse problems*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems **25** (2016), no. 4.
- [Wlo87] J. Wloka, *Partial differential equations*, Cambridge University Press, 1987.
- [Wös13] A. Wöstehoff, *Parameteridentifizierbarkeit in einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem aus der Kontinuumsmechanik anhand von Randmessungen*, Logos Verlag Berlin, 2013.
- [WS15] A. Wöstehoff and T. Schuster, *Uniqueness and stability result for Cauchy's equation of motion for a certain class of hyperelastic materials*, Applicable Analysis **94** (2015), no. 8, 1561–1593.