

Schnelle Randelementmethode für die Behandlung von
Inhomogenitäten bei elliptischen partiellen
Differentialgleichungen

Dissertation zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
der Fakultät für Mathematik und Informatik der
Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Christian Michel

Saarbrücken,
März, 2017

Tag des Kolloquiums: 29. Juni 2017

Dekan der Fakultät: Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Vorsitzender: Prof. Dr. Jörg Eschmeier
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Sergej Rjasanow
2. Berichterstatter: PD Dr. Heiko Andrä
akademischer Beisitzer: Dr. Richards Grzibovskis

Abstract

Die Randelementmethode ist ein aktueller Gegenstand der mathematischen Forschung. Sie ist ein vielseitig einsetzbares Verfahren und hat sich im Bereich der Elastizitätstheorie bewährt. Verfahren, wie H^2 -Matrizen wurden entwickelt, um Schwierigkeiten wie die Vollbesetztheit der Gleichungssysteme zu umgehen. Am Beispiel der Lamé-Gleichungen wird die Randelementmethode mit Hilfe von matrixwertigen radialen Basisfunktionen (RBF) vom Lamé-Typ erweitert, um Inhomogenitäten, sei es aufgrund von Nichtlinearitäten oder Volumenkraftdichten behandeln zu können. Für die hergeleiteten matrixwertigen RBF werden Fehler- und Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt und neue numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen entwickelt. Weiter ist es möglich, die matrixwertigen RBF auch im Kontext der H^2 -Matrizen zu verwenden, d.h. die Matrizen besitzen eine Niedrigrangapproximation und können folglich komprimiert werden. Es zeigt sich, dass die Konvergenzordnung der Randelementmethode von diesem Ansatz nicht beeinflusst wird. Im konkreten Anwendungsfall an einem Schädigungsmodell der Elastizitätstheorie entsteht ein nicht lineares System, welches mit Hilfe eines modifizierten Steklov-Poincaré-Operators und den neu entwickelten RBF behandelt wird. Zur Lösung wird eine Fixpunktiteration verwendet und die Konvergenz an einem numerischen Beispiel nachvollzogen.

Abstract

The boundary element method (BEM) is a recent subject of mathematical research and widely used for example for problems of elasticity. Methods such as H^2 -Matrices have been developed to circumvent difficulties with fully populated matrices. In this work the boundary element method for elasticity is extended by means of matrix-valued radial basis functions (RBF) of Lamé type to treat inhomogeneities due to nonlinearities or body forces. For the matrix-valued RBF of the Lamé type, error and stability estimates are presented and a new numerical method for solving the system of interpolation equations is developed. Furthermore, it is shown, that the H^2 -matrix technique is also applicable to the interpolation matrices, i.e. they have a low-rank approximation and can thus be compressed. It turns out that the convergence order of the boundary element method is not affected by this approach. As application, a nonlinear damage model is considered. The non linear system is treated numerically by a modified Steklov-Poincaré operator and the newly developed RBF.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|------------|---|------------|
| I | Einleitung | 6 |
| 1 | Überblick und Motivation | 6 |
| 1.1 | Einführung in die Elastizitätstheorie | 7 |
| 1.2 | Komposite | 15 |
| 1.3 | Schädigungsmodell | 16 |
| 2 | Randelementmethode | 19 |
| 2.1 | Grundbegriffe | 19 |
| 2.2 | Formulierung für Laplace-Gleichung | 25 |
| 2.3 | Formulierung für die Lamé-Gleichungen | 28 |
| 2.4 | Gebietszerlegung | 38 |
| 2.5 | Inhomogenität | 40 |
| 2.5.1 | Ansätze zur Eliminierung des Volumenpotentials | 42 |
| 3 | Hierarchische Matrizen | 46 |
| 3.1 | Grundbegriffe | 46 |
| 3.1.1 | Rang- k -Matrizen | 47 |
| 3.1.2 | Matrixpartition | 50 |
| 3.1.3 | Niedrigrangapproximation | 57 |
| 3.2 | Definition und Eigenschaften hierarchischer Matrizen | 62 |
| 3.3 | Definition und Eigenschaften von H^2 -Matrizen | 64 |
| 3.4 | Vergleich H - und H^2 -Matrix | 68 |
| II | Radiale Basisfunktionen | 71 |
| 4 | Grundbegriffe | 71 |
| 5 | Matrixwertige radiale Basisfunktionen | 75 |
| 5.1 | Grundbegriffe und Konstruktion | 75 |
| 5.2 | Konstruktion partikulärer Lösungen für die Lamé-Gleichungen | 78 |
| 5.2.1 | Konstruktion mittels Φ_{div} und Φ_{curl} | 78 |
| 5.2.2 | Konstruktion mittels $\Phi_{\text{Lamé}}$ | 81 |
| 6 | Numerische Verfahren für matrixwertige RBF | 106 |
| 6.1 | Matrix-Vektor-Multiplikation und schnelle Auswertung | 106 |
| 6.2 | Schnelle Löser für das Interpolationsproblem | 108 |
| III | Anwendung auf das Schädigungsmodell und numerische Ergebnisse | 115 |
| 7 | Einbettung in das Konzept des Multiscale Modellings | 115 |
| 7.1 | Vorstellung der Methode | 115 |
| 7.2 | Makroebene | 116 |
| 7.3 | Mikroebene und repräsentatives Volumenelement | 117 |
| 7.4 | Kopplung der partikulären Lösung mit der BEM | 120 |

| | | |
|-----------|---------------------------------------|------------|
| 8 | Volumenkraftdichte | 125 |
| 8.1 | Gravitation | 126 |
| 8.2 | Fliehkraft | 127 |
| 9 | Modell mit und ohne Schädigung | 129 |
| 9.1 | Ohne Schädigung | 129 |
| 9.2 | Homogenes Material | 135 |
| 9.3 | RVE - Inklusion - Kugel | 138 |
| 10 | Periodische Randbedingungen | 140 |
| 11 | Fazit und Ausblick | 143 |

Teil I

Einleitung

1 Überblick und Motivation

Die Elastizitätstheorie ist ein klassischer Teil der angewandten Mathematik bzw. der Mechanik und wurde bereits von vielen berühmten Mathematikern und Mechanikern untersucht und weiterentwickelt. Dennoch ist das Gebiet weiter Gegenstand aktueller Forschung, sei es in Bezug auf neue Materialien, wie Komposite, oder auch der Weiterentwicklung klassischer Materialmodelle um z.B. bestimmte Phänomene, wie Rissbildung oder plastische Verformung, abzubilden. Neu entwickelte Materialien wie glasfaserverstärkte Kunststoffe, hochfeste Stähle, Beton oder auch bestimmte Metalle stellen bisher nicht behandelte Anforderungen an die Modelle, vor allem in Bezug auf Komplexität und Wiedergabetreue. Die experimentelle Untersuchung dieser Materialien ist meist zeitaufwendig und falls größere Strukturen betrachtet werden wie z.B. in der Automobilindustrie, beim Maschinenbau oder im Bauwesen auch teuer, so dass neue Verfahren und Modelle benötigt werden.

In der Praxis werden häufig phänomenologische Modelle zur Untersuchung von Verbundwerkstoffen verwendet. Dabei wird das Material als homogen angenommen und die Parameter, z.B. für das Versagensverhalten, werden durch Parameteridentifizierung mittels Experimenten bestimmt. Ein besserer Zugang nicht-lineare Effekte des Materials, wie Rissbildung, Faserablösung, etc. zu modellieren ist es, dies direkt in der Mikroebene eines Multiskalenmodells zu tun.

In diesem Zusammenhang werden Homogenisierungsstrategien, [25, 66], und andere Modelle auf Mikroebene benötigt. Auf dieser Skala findet das Konzept eines repräsentativen Volumen-Elements Anwendung, [15]: ein spezifischer Ausschnitt bzw. Volumen des Materials, dessen effektives Verhalten repräsentativ und damit ununterscheidbar von dem heterogenen Verhalten des Materials ist. Für ein fiktives perfekt homogenes Material wäre dieser Ausschnitt unendlich klein. Für ein reales Material, d.h. insbesondere bei Vorhandensein von Mikrostruktur, muss das RVE ein genügend großes Volumen enthalten, um aus statistischer Sicht charakteristische Eigenschaften abbilden zu können.

Auf Mikroebene wird die lineare Elastizitätstheorie mit Hilfe eines Schädigungsmodells erweitert, um die nicht-linearen Effekte, wie Rissbildung, Faserablösung, etc. zu behandeln. Das entwickelte Modell ist jetzt nicht mehr rein mit der klassischen Theorie von elliptischen partiellen Differentialgleichungen behandelbar. Ziel ist die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Lösung des neuen Modells auf Mikroebene basierend auf der Randelementmethode mit einer Erweiterung durch matrixwertige radiale Basisfunktionen. Durch das Modell entstehen bei der Integralformulierung des Randwertproblems auf Mikroebene nicht nur Integrale über den Rand, sondern auch Volumenintegrale. Sie repräsentieren dabei die Anwendung des Newton-Potentials und stellen dabei eine partikuläre Lösung dar. Im Falle einer bekannten partikulären Lösung entfällt das Volumenintegral. Aufgrund des Modells ist keine partikuläre Lösung bekannt und folglich ein anderer Zugang notwendig.

Bereits in früheren Arbeiten, [52, 53], wurden radiale Basisfunktionen verwendet, um für spezielle rechte Seiten partikuläre Lösungen zu finden (für konservative rechte Seiten siehe [3]). Die vektorwertige Lamé-Gleichung verbietet allerdings eine direkte Anwendung der radialen Basisfunktionen für allgemeine rechte Seiten. Im Kontext dessen wird die Theorie der matrixwertigen radialen Basisfunktionen erweitert und schließlich zur Konstruktion einer partikulären Lösung verwendet.

Das in Abschnitt 1.3 vorgestellte Schädigungsmodell wird auf ein RVE angewendet. Die da-

bei entstehenden Gleichungen sind nicht linear und passen nicht in das Konzept der BEM. Mit Hilfe der entwickelten Theorie der matrixwertigen RBF wird mit einem iterativen Verfahren eine Lösung möglich.

Die Arbeit ist wie folgt organisiert: In Abschnitt 2 wird eine Integralformulierung der Lamé-Gleichung gegeben und diese in Abschnitt 5 mit Hilfe der matrixwertigen radialen Basisfunktionen erweitert. Eine vollständige Formulierung der Methode mit Schädigungsmodell und der entsprechenden Gebietszerlegung und Kopplung findet sich in Abschnitt 7.4. Eine Diskussion der Gleichungssysteme und deren Behandlung mit Hilfe von H^2 -Matrizen als auch Algorithmen zum schnellen Lösen des Interpolationsproblems der matrixwertigen RBF sowie der schnellen Auswertung des Interpolanten, finden sich in den Abschnitten 3 und 6.

Die numerischen Ergebnisse zu verschiedenen RVE finden sich im letzten Abschnitt.

1.1 Einführung in die Elastizitätstheorie

Ein Körper ist aus einer Menge diskreter Strukturen in Form von Atomen, Molekülen etc. zusammengesetzt. Die Kontinuumsmechanik stellt die Prämisse auf, dass bei der Betrachtung von Deformationen die diskrete Natur des Materials vernachlässigt werden kann, falls die betrachteten Größen beträchtlich größer sind als die Skalenlänge des Materials. Der Körper wird folglich als Kontinuum beschrieben und die auftretenden physikalischen Größen werden als Funktionen dargestellt. Ein Körper wird in eine unendliche Anzahl von Punkten und deren eindeutigen Positionen im Raum zerlegt. Zusammen liefert dies die Konfiguration eines Körpers. Es wird dabei angenommen, dass das vom Körper eingenommene Volumen ein Gebiet ist. Die Referenzkonfiguration eines Körpers \mathbb{B} , welcher das Gebiet \mathcal{R} mit dem Rand $\partial\mathcal{R}$ einnimmt, wird von der Momentankonfiguration des Körpers \mathbb{B} zur Zeit t mit dem Gebiet \mathcal{R}_t mit Rand $\partial\mathcal{R}_t$ unterschieden.

Wenn \mathbb{B} in Referenzkonfiguration vorliegt, dann wird die Position eines Punktes

$$P \in \mathbb{B} \quad (\text{relativ zum Ursprung})$$

mit $\mathbf{X}(P)$ beschrieben. Dabei wird $\mathbf{X}(P)$ als Referenzposition bezeichnet. Das Gebiet \mathcal{R} ist nun als

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{X}(P) : P \in \mathbb{B}\}$$

darstellbar. Liegt \mathbb{B} in der Momentankonfiguration zur Zeit t vor, dann wird die Position eines Punktes $P \in \mathbb{B}$ (relativ zum Ursprung) mit $\mathbf{x}(P, t)$ beschrieben. Dabei wird $\mathbf{x}(P, t)$ als Momentanposition bezeichnet. Das Gebiet \mathcal{R}_t ist als

$$\mathcal{R}_t = \{\mathbf{x}(P, t) : P \in \mathbb{B}\}$$

darstellbar.

In diesem Abschnitt werden die kartesischen Koordinaten der Referenzkonfiguration mit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ und die der Momentankonfiguration mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bezeichnet. Da jeder Punkt $P \in \mathbb{B}$ nur eine Position zur Zeit t einnehmen darf, gibt es zu jeder Zeit t eine Funktion

$$\chi(\cdot, t) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_t,$$

welcher jeder Position aus \mathcal{R} eine eindeutige Position in \mathcal{R}_t zuordnet. Folglich bezeichnet

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

die Momentanposition eines materiellen Punktes P , welcher zu einer Referenzposition $\mathbf{X}(P)$ zugeordnet ist. Die Forderungen an die Abbildung χ implizieren deren Injektivität.

Da aber auch jeder Punkt $P \in \mathbb{B}$ eine eindeutig bestimmte Position sowohl in der Referenz- als auch in der Momentankonfiguration besitzt, gehört auch jede Momentanposition in \mathcal{R}_t zu einer Referenzposition in \mathcal{R} . Folglich ist χ ein Isomorphismus und somit für jeden Zeitpunkt t invertierbar. Für jede zu einem Punkt $P \in \mathbb{B}$ gehörende Momentanposition $\mathbf{x}(P, t)$ in \mathcal{R}_t ist

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

die Referenzposition des gleichen Punktes P in der Referenzkonfiguration. Die Abbildung χ wird Bewegung eines Körpers genannt. Falls die Abstände zwischen zwei Punkten des Materials konstant bleiben, so spricht man von einer Starrkörperbewegung, wenn dies für alle Paare von Punkten gilt. Andernfalls spricht man von einer Deformation.

Für eine Teilmenge $\mathbb{C} \subset \mathbb{B}$ bezeichnet

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{X}(P) : P \in \mathbb{C}\}$$

die Menge der Referenzpositionen der Punkte P aus \mathbb{C} . Falls \mathcal{C} eine stetige Kurve ist, so spricht man von einer Linie im Material. Analog bezeichnet

$$\mathcal{C}_t = \{\mathbf{x}(P, t) : P \in \mathbb{C}\}$$

die Menge der Momentanpositionen und definiert ebenfalls eine stetige Kurve im Raum. Genauso wird von einer Oberfläche \mathbb{S} des Materials gesprochen, falls

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{X}(P) : P \in \mathbb{S}\}$$

eine zusammenhängende Oberfläche definiert. Von einem Volumen $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$ des Materials wird gesprochen, falls

$$\mathcal{R}' = \{\mathbf{X}(P) : P \in \mathbb{B}'\}$$

ein zusammenhängendes Volumen im Raum definiert. Zu jedem Zeitpunkt t definieren die Mengen \mathcal{S}_t und \mathcal{R}'_t ebenfalls eine zusammenhängende Oberfläche bzw. ein zusammenhängendes Volumen. Weiterhin beschreiben die Positionen der Punkte $P \in \partial\mathbb{B}$ den Rand

$$\partial\mathcal{R} = \{\mathbf{X}(P) : P \in \partial\mathbb{B}\} \text{ von } \mathcal{R} \text{ bzw. den Rand } \partial\mathcal{R}_t = \{\mathbf{x}(P, t) : P \in \partial\mathbb{B}\}$$

von \mathcal{R}_t . Es folgt aus dieser Darstellung, dass während der Verformung keine weiteren Oberflächen entstehen. Insbesondere sind dabei die Betrachtung von Brücken ausgeschlossen. Die Verschiebung u eines Punktes P zur Zeit t ist definiert als der Verbindungsvektor der Position in Momentankonfiguration zur Position in Referenzkonfiguration

$$u(P, t) = \mathbf{x}(P, t) - \mathbf{X}(P).$$

Die materielle Beschreibung der Verschiebung ist durch

$$u = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$$

gegeben, die räumliche Beschreibung durch

$$u = \mathbf{x} - \chi^{-1}(\mathbf{x}, t).$$

Seien P und Q zwei beliebige Punkte und \mathbb{C} ein Weg im Material, welcher P und Q verbindet mit zugehöriger stückweise glatter Kurve \mathcal{C} in der Referenzkonfiguration. Die

Position $\mathbf{R}_{Q,P} = \mathbf{X}(Q) - \mathbf{X}(P)$ von Q relativ zu P in der Referenzkonfiguration ist in Form eines wegunabhängigen Kurvenintegrals

$$\mathbf{R}_{Q,P} = \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{C}} \gamma dS$$

gegeben, wobei γ der Einheits-Tangentenvektor der Kurve ist.

Dem Weg \mathcal{C} im Material ist zum Zeitpunkt t ebenfalls eine glatte Kurve \mathcal{C}_t in der Momentankonfiguration zugeordnet. Analog definiert $\mathbf{r}_{Q,P} = \mathbf{x}(Q,t) - \mathbf{x}(P,t)$ die Position von Q relativ zu P in der Momentankonfiguration und ist ebenfalls als das wegunabhängige Kurvenintegral

$$\mathbf{r}_{Q,P} = \int_{\mathcal{C}_t} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}_t} \gamma_t ds$$

gegeben, wobei γ_t der Einheits-Tangentenvektor der Kurve \mathcal{C}_t ist. Die Kurve \mathcal{C}_t ist durch χ und \mathcal{C} eindeutig bestimmt. Für den Weg \mathcal{C} im Material lässt sich das Differential $d\mathbf{x}$ eindeutig durch das Differential $d\mathbf{X}$ ausdrücken. Es gilt

$$\mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{x},$$

so dass

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$$

und

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad (1)$$

gelten. Der Tensor \mathbf{F} ist von der Ordnung zwei und heißt Deformationsgradient (in materieller Darstellung). Seine Inverse ist bestimmt durch

$$\mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \mathbf{X}.$$

Umgekehrt gilt, falls der Deformationsgradient in jedem Punkt einer Linie im Material existiert und nicht singulär ist, dann gilt die Gleichung (1), so dass jede Kurve \mathcal{C}_t eindeutig durch eine Kurve \mathcal{C} bestimmt ist. Folglich existiert ein Isomorphismus zwischen der Referenz- und der Momentankonfiguration. Somit ist eine Bewegung χ genau dann ein Isomorphismus, wenn der Deformationsgradient existiert und

$$0 \neq J = \det \mathbf{F}$$

in keinem Punkt singulär ist. Die Kurvenintegrale lassen sich mit Hilfe von \mathbf{F} und \mathbf{F}^{-1} schreiben als

$$\mathbf{r}_{Q,P} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_{Q,P} = \int_{\mathcal{C}_t} \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}.$$

Falls der Deformationsgradient für eine Abbildung der Referenz- zu einer Momentankonfiguration konstant in jedem Punkt des Materials ist, so spricht man von einer homogenen Bewegung. Die Abbildung $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ kann dargestellt werden als

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{c},$$

wobei \mathbf{A} ein konstanter Tensor zweiter Ordnung und \mathbf{c} ein konstanter Vektor ist.

Der Deformationsgradient besitzt eine Polarzerlegung, d.h. er lässt sich eindeutig zerlegen in

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R},$$

wobei \mathbf{R} ein Rotationstensor,

$$\mathbf{U} = (\mathbf{F}^\top \mathbf{F})^{1/2}$$

der materielle rechte Strecktensor, und

$$\mathbf{V} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^\top)^{1/2}$$

der räumliche linke Strecktensor sind. Die Tensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} sind symmetrisch und positiv definit. Die Kenntnis von \mathbf{U} und \mathbf{V} beschreibt die Deformation des Körpers vollständig, während \mathbf{R} eine separate Starrkörperbewegung ist.

Für die Beschreibung der Deformation ist es sinnvoll, diese unabhängig von Translationen und Rotationen zu formulieren. Betrachtet wird die Kurve \mathcal{C} im Material mit Länge

$$S = \int_{\mathcal{C}} 1 \, dS$$

in der Referenzkonfiguration, bzw. mit Länge

$$s = \int_{\mathcal{C}_t} 1 \, ds$$

in der Momentankonfiguration. Es gilt

$$(ds)^2 = d\mathbf{x} \, d\mathbf{x} = d\mathbf{X} (\mathbf{F}^\top \mathbf{F}) d\mathbf{X} = \left(\gamma^\top (\mathbf{F}^\top \mathbf{F}) \gamma \right) (dS)^2$$

und somit

$$ds = \left(\gamma^\top (\mathbf{F}^\top \mathbf{F}) \gamma \right)^{1/2} dS,$$

wobei γ der Einheits-Tangentenvektor der Kurve \mathcal{C} ist.

Definition 1. Der rechte Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} , definiert als

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$$

ist positiv definit und symmetrisch.

Das Kurvenintegral kann in der Referenzkonfiguration berechnet werden zu

$$s = \int_{\mathcal{C}} \left(\gamma^\top (\mathbf{F}^\top \mathbf{F}) \gamma \right)^{1/2} dS.$$

Definition 2. Der Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} ist definiert durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - I).$$

Der Green-Lagrange-Verzerrungstensor hat gegenüber dem Cauchy-Green-Tensor den Vorteil, dass er für die Festkörperbewegungen verschwindet. Er lässt sich auch in Form des Verschiebungsfeldes angeben. Mit Hilfe der Relation

$$\mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{x}$$

schreibt sich

$$\mathbf{F} = I + \text{grad } u.$$

Definition 3. Der Green-Lagrange-Verzerrungstensor schreibt sich als Funktion der Verschiebung

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\text{grad } u + (\text{grad } u)^\top + (\text{grad } u)^\top \text{grad } u \right).$$

Wird das Kurvenintegral S in der Momentankonfiguration berechnet, so liefert eine ähnliche Diskussion die Darstellung des Verzerrungstensors.

Definition 4. Der linke Cauchy-Green-Tensor \mathbf{B} ist definiert als

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\top.$$

Der Euler-Almansi-Verzerrungstensor schreibt sich in der Form

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (I - \mathbf{B}^{-1}).$$

In einem Punkt mit kleinem Verschiebungsgradienten ist der Unterschied zwischen den Referenz- und Momentanrichtungen im Material vernachlässigbar klein und somit auch die Rotation.

Der Euler-Almansi-Verzerrungstensor und der Green-Lagrange-Verzerrungstensor sind folglich für kleine Verschiebungsgradienten gleich.

Definition 5. Der linearisierte Verzerrungstensor e ist durch

$$e = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^\top \right)$$

definiert.

Spannungstensor

Betrachtet wird ein Körper \mathbb{B} mit Oberfläche $\partial\mathbb{B}$ und sei weiter $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$ ein beliebiger Teil des Körpers. Zu \mathbb{B}' sind \mathcal{R}' und $\partial\mathcal{R}'$ in der Referenzkonfiguration bzw. \mathcal{R}'_t und $\partial\mathcal{R}'_t$ in der Momentankonfiguration zugeordnet. Die momentan auf das Volumen wirkenden Kräfte können entweder Oberflächenkräfte sein, die auf $\partial\mathbb{B}'$ wirken, oder auch Volumenkräfte, die auf die Masse von \mathbb{B}' wirken. Dabei rühren die Oberflächenkräfte vom Kontakt mit dem Rest des Körpers her, bzw. falls der Schnitt des Randes von \mathbb{B}' und \mathbb{B} nicht leer ist, mit dem Kontakt eines anderen Körpers. Währenddessen sind Volumenkräfte z.B. durch Gravitation entstehende Kräfte.

Betrachte einen Punkt $P \in \partial\mathbb{B}'$ auf dem Rand von \mathbb{B}' und eine Oberfläche $\Delta\mathcal{S}$ mit $P \in \Delta\mathcal{S} \subset \partial\mathbb{B}'$. Zur Zeit t existiert eine auf $\Delta\mathcal{S}$ wirkende Oberflächenkraft, welche zu einer momentan auf den Punkt $\mathbf{x}(P, t)$ resultierende Kraft $\Delta\mathbf{F}^S$ und einen Rest $\Delta\mathbf{M}^S$ äquivalent ist. In der Referenzkonfiguration wird die Fläche von $\Delta\mathcal{S}$ mit ΔA und der äußere Normalenvektor in P mit $\hat{\mathbf{N}}$ bezeichnet. Dabei wird angenommen, dass

$$\lim_{\Delta\mathcal{S} \rightarrow P} \frac{\Delta\mathbf{M}^S}{\Delta A} = 0$$

und dass

$$\mathbf{t}^{(N)} = \lim_{\Delta\mathcal{S} \rightarrow P} \frac{\Delta\mathbf{F}^S}{\Delta A}$$

gegen einen Vektor, der Oberflächenspannung, konvergiert. Weiterhin wird verlangt, dass $\mathbf{t}^{(N)}$ unabhängig von dem Volumen \mathbb{B}' ist und somit

$$\mathbf{t}^{(N)} = \mathbf{t}^{(N)}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{N}}, t).$$

Die resultierende Kraft auf die Oberfläche des Volumens \mathbb{B}' zur Zeit t ist in der Form

$$\mathbf{F}^S(t) = \int_{\partial\mathcal{R}'} \mathbf{t}^{(N)}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{N}}, t) dA$$

gegeben. Das resultierende Moment (bezüglich des Ursprunges) der Oberflächenkräfte zur Zeit t ist durch

$$\mathbf{M}^S = \int_{\partial\mathcal{R}'} \chi(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{t}^{(N)}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{N}}, t) dA$$

gegeben.

Betrachte einen Punkt Q innerhalb von \mathbb{B}' und bezeichne mit $\Delta\mathbb{B}$ ein Volumenelement mit $Q \in \Delta\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$. Zur Zeit t existiert eine auf $\Delta\mathbb{B}$ wirkende Kraft, welche äquivalent zu einer resultierenden Kraft $\Delta\mathbf{F}^B$ ist, welche auf den Punkt $\mathbf{x}(Q, t)$ wirkt, und einen Rest $\Delta\mathbf{M}^B$. Das Volumen von $\Delta\mathbb{B}$ werde mit ΔV bezeichnet. Wie im Falle der Oberflächenkräfte wird

$$\lim_{\Delta\mathbb{B} \rightarrow Q} \frac{\Delta\mathbf{M}^B}{\Delta V} = 0$$

gefordert, sowie die Konvergenz von

$$\rho_0 \mathbf{b} = \lim_{\Delta\mathbb{B} \rightarrow Q} \frac{\Delta\mathbf{F}^B}{\Delta V}.$$

Dabei ist $\rho_0 \mathbf{b}$ die momentane Volumenkraft pro Einheitsvolumen in der Referenzkonfiguration. Der Vektor \mathbf{b} beschreibt die momentane Volumenkraft pro Einheitsmasse. Die auf das Volumen \mathbb{B}' zur Zeit t wirkende resultierende Kraft ist gegeben durch

$$\mathbf{F}^B(t) = \int_{\mathcal{R}'} \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) dV.$$

Das resultierende Moment schreibt sich in der Form

$$\mathbf{M}^B(t) = \int_{\mathcal{R}'} \chi(\mathbf{X}, t) \times (\rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)) dV.$$

Das Gleichgewicht der Momente erster Ordnung in der Referenzkonfiguration schreibt sich in der Form

$$\int_{\partial\mathcal{R}'} \mathbf{t}^{(N)} dA + \int_{\mathcal{R}'} \rho_0 \mathbf{b} dV = \int_{\mathcal{R}'} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV,$$

wobei $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ die Geschwindigkeit ist. Analog schreibt sich das Gleichgewicht der Drehmomente in der Form

$$\int_{\partial\mathcal{R}'} \mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(N)} dA + \int_{\mathcal{R}'} \rho_0 \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV = \int_{\mathcal{R}'} \rho_0 \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV.$$

Mit Hilfe der Momente erster Ordnung lässt sich speziell

$$\mathbf{t}^{(N)}(\mathbf{X}, -\hat{\mathbf{N}}, t) = -\mathbf{t}^{(N)}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{N}}, t).$$

zeigen. Mit Hilfe des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors \mathbf{S} lassen sich die Oberflächenspannungen in der Form

$$\mathbf{t}^{(N)} = \hat{\mathbf{N}}\mathbf{S}, \quad \mathbf{t}_i^{(N)} = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \mathbf{S}_{ji}$$

schreiben, wobei

$$\mathbf{S} = \sum_{i,j=1}^3 S_{ji} e_j e_i^\top$$

mit

$$S_{ji} = \mathbf{t}_j^{(N)}(\mathbf{X}, -e_j, t) e_i$$

und e_1, e_2, e_3 die Basisvektoren des Koordinatensystems sind. Durch Einsetzen in die Gleichung der Momente und Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes erhält man die Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{S}^\top + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2)$$

und die Bedingung

$$\mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{S}^\top \mathbf{F}^\top.$$

Der nicht symmetrische erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor kann durch den zweiten symmetrischen Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{F}^{-\top}$$

ersetzt werden.

Wird die Diskussion in der Momentankonfiguration durchgeführt, so schreibt sich Gleichung (2) in der Form

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^\top + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

wobei

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} e_i e_j^\top$$

der Cauchy'sche Spannungstensor

$$T_{ji} = \mathbf{t}_j e_i$$

ist. Das Gleichgewicht der Drehmomente impliziert die Symmetrie.

Bemerkung 6. Die Spannungstensoren \mathbf{S} , $\tilde{\mathbf{S}}$ und \mathbf{T} lassen sich ineinander überführen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}, \\ \mathbf{T} &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{S}, \\ \tilde{\mathbf{S}} &= \det \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-\top}, \\ \mathbf{T} &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{F}^\top. \end{aligned}$$

Linearisierung

Im Falle kleiner Deformationen fallen die Spannungstensoren der Referenz- und Momentankonfiguration zusammen. Es gilt $\mathbf{S} \approx \tilde{\mathbf{S}} \approx \mathbf{T}$, [61]. Für alle drei wird die linearisierte Form des Cauchy-Spannungstensors

$$\sigma = \sigma(\mathbf{X}, t) = \sigma(\mathbf{x}, t)$$

benutzt. Die Beziehung der Oberflächenspannungen zu den Spannungstensoren schreibt sich in der Form

$$t = \hat{\mathbf{n}}^\top \sigma, \quad t_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{n}}_j \sigma_{ji}$$

mit Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$. Gleichung (2) geht über in

$$\operatorname{div} \sigma^\top + \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

wobei $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$ die Volumenkraft ist. Das Gleichgewicht der Drehmomente impliziert auch die Symmetrie, so dass die Oberflächenspannung in der Form

$$t = \sigma \hat{\mathbf{n}}, \quad t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \hat{\mathbf{n}}_j$$

geschrieben wird und

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3)$$

gilt.

Konstitutive Bedingungen

Die Gleichung (3) ist im Allgemeinen nicht ausreichend um die Spannungen zu berechnen. Ein elastisches Material ist dadurch definiert, dass die Veränderung der Spannung zwischen zwei Zuständen nicht von der Zeit abhängig ist und somit allein von der Deformation in der Form

$$\mathbf{T} = \mathbf{g}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x})$$

abhängt. Falls zusätzlich $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{F})$ gilt, heißt das Material homogen. Im linearisierten Fall vereinfacht sich dies zu

$$\sigma = \mathbf{h}(e),$$

wobei $\mathbf{h}(e)$ eine symmetrische, tensorwertige Funktion ist. Konstitutive Beziehungen werden allgemein auch Werkstoff- bzw. Materialgleichungen genannt. Die Werkstoffgleichung drückt aus, dass die Spannungen nur von den aktuellen Verzerrungen abhängen. Vorausgesetzt wird, dass der durch äußere Kräfte belastete Körper nach Entfernung dieser Kräfte spannungsfrei ist.

Für den Fall eines hyperelastischen Materials lässt sich die Verzerrungsenergiedichte vereinfacht angeben in der Form

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(e) = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} dt = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_0^e \sigma_{ij} de_{ij}$$

und

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial e_{ij}}.$$

Eine zusätzliche Linearisierung von \mathbf{h} liefert die konstitutive Bedingung

$$\sigma = \mathbf{C}e,$$

wobei \mathbf{C} der Elastizitätstensor vierter Ordnung ist.

Bemerkung. Für den Fall eines hyperelastischen Materials und aufgrund der getroffenen Annahmen der Symmetrie des Spannungs- und Dehnungstensor und

$$\frac{\partial \mathcal{U}(e)}{\partial e_{ij}} = \sum_{r,s=1}^3 C_{ijrs} e_{rs},$$

sowie

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}(e)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = C_{ijkl}$$

folgen

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{klij},$$

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{jikl},$$

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{ijlk}$$

und \mathbf{C} besitzt folglich 21 unbekannte Materialparameter, [2].

Die Energiedichte schreibt sich in der Form

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} e : \mathbf{C} : e, \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \mathbf{C}_{ijkl} e_{ij} e_{kl}$$

oder

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sigma : e.$$

Die konstitutiven Gleichungen für isotrope Materialien finden im Kapitel der Randelementmethode später Anwendung.

Definition 7. Ein Material heißt isotrop, wenn der Elastizitätstensor invariant unter allen orthogonalen Transformationen ist.

Die konstitutiven Gleichungen schreiben sich unter Berücksichtigung der Symmetrien

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} e_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) e_{kl},$$

wobei λ und μ die Lamé-Konstanten sind. Die in Definition 7 geforderte Invarianz impliziert die Hyperelastizität des Materials, [61].

1.2 Komposite

Seit einigen Jahren rückt die Verwendung von Komposit-Materialien immer mehr in den Fokus der Industrie, z.B. bei der Verwendung zum Bau von Windrädern, Flugzeugen oder in der Automobilindustrie. Das Anwendungsfeld ist vielfältig aufgrund unschlagbarer Vorteile gegenüber gewöhnlichen Materialien wie Stahl oder Aluminium; dazu zählen vor allem das bessere Verhältnis von Festigkeit zu Gewicht bzw. Steifigkeit zu Gewicht.

Weit gefasst spricht man bereits von einem Komposit, falls es aus zwei oder mehr Materialien mit Grenzschicht besteht. Das resultierende Material besitzt im Verbund nun Eigenschaften, welche sich von denen der Einzelmaterialien deutlich unterscheiden und beträchtlich von deren geometrischer Anordnung sowie Volumenanteilen abhängen. Grundsätzlich besteht ein Verbundmaterial aus dem sogenannten Matrixmaterial und dem Füllmaterial (reinforcement). Je nach Wahl der Matrix unterscheidet man zwischen:

- PMC (polymer matrix composites, Polymermatrix Verbundwerkstoffe),

- MMC (metal matrix composites, Metallmatrix-Verbundwerkstoffe),
- CMC (ceramic matrix composites, Verbundkeramik).

Die Wahl des Matrixmaterials wird häufig aufgrund des Einsatzgebietes getroffen. So wurden MMC-Verbundwerkstoffe bereits um 1975 im Space-Shuttle-Programm wegen ihrer geringen Wärmeausdehnung verwendet, während CMC-Verbundwerkstoffe dort als Hitzeschutz verbaut wurden und heutzutage auch im Bau von Gasturbinen Verwendung finden (siehe [43]).

Die Komposite besitzen z.B. eine polymere Matrix und werden je nach Faser-Füllmaterial in folgende Gruppen unterteilt:

- glasfaserverstärkter Kunststoff (GFK),
- aramidfaserverstärkter Kunststoff (AFK),
- kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff (CFK),

um hier nur einige zu nennen. Eine Auflistung und genaue Beschreibung vieler Komposite findet sich in [1]. Speziell werden in dieser Arbeit sogenannte kurzfaserverstärkte Kunststoffe betrachtet. Mit ihren Eigenschaften schließen sie die Lücke zwischen langfaserverstärkten und unverstärkten Kunststoffen, besitzen aber dabei den Vorteil, dass sie im Spritzgussverfahren hergestellt werden können. Im Anwendungsbereich ist vor allem die Erhöhung der Steifigkeit und Festigkeit sowie der Dimensionsstabilität von Vorteil gegenüber unverstärkten Kunststoffen.

1.3 Schädigungsmodell

Komposite besitzen neben den in Abschnitt 1.2 genannten Vorteilen auch eine Schwäche. So können sich bei zu großer Belastung die Fasern vom Matrixmaterial lösen oder brechen. Dabei geht die Steifigkeit verloren, ohne dass es mit dem linearen Modell aus Abschnitt 1.1 vorhersagbar ist. Außerdem bilden sich aufgrund des Herstellungsprozesses und je nach Fließbedingungen in der Schmelze oder auch wegen der Geometrie des Bauteiles, bestimmte Faserorientierungen aus, welche die mechanischen Eigenschaften verändern. Die Modellierung dieser Effekte würde zu einem komplexen Modell führen. Anstelle jedes der einzelnen Phänomene zu modellieren, wird bei einem kontinuumsmechanischen Schädigungsmodell eine Schädigungsvariable d eingeführt, um die Degradation des Materials auch im Falle von Faserablösungen oder Ähnlichem zu modellieren. Kachanov, [33], führte die Idee einer skalaren Schädigungsvariable ein, begründet durch die Veränderung der effektiven Oberfläche, welche einer geschädigten Oberfläche zugeordnet ist. Die lasttragende Querschnittsfläche wird durch Entfernen von Brüchen, Löchern etc. erhalten. Die effektive Oberfläche ist definiert über

$$\bar{A} = (1 - d)A,$$

wobei $d = 0$ keine Schädigung und $d = 1$ ein komplett zerstörtes Material bedeuten. Die von Lemaitre und Chaboche, [37], aufgestellte Hypothese, dass jede Deformation eines geschädigten Materials durch die konstitutiven Gleichungen des ursprünglichen Materials dargestellt werden können, in dem die Spannungen durch die effektiven Spannungen ersetzt werden, führt auf die Definition

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d}$$

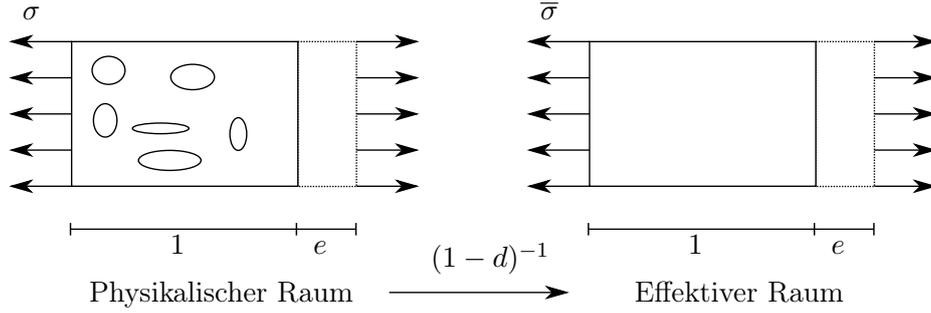


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Konzeptes der effektiven Dehnung

der effektiven Spannung. Im Kontext dieser Theorie findet das Modell von Simo und Ju, [60], Verwendung, in der die konstitutiven Gleichungen aus der freien Energie

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}(1-d)e : \mathbf{C} : e$$

hergeleitet werden, wobei \mathbf{C} der Elastizitätstensor des ungeschädigten Materials ist. Als alternatives Konzept wird von Simo und Ju, [60], jedoch das Konzept der effektiven Dehnung postuliert: Die Spannungen, welche zu einem geschädigten Zustand mit den angewandten Dehnungen führen, ist äquivalent zu den Spannungen, welche das ungeschädigte Material unter den effektiven Dehnungen erfährt, d.h.

$$\bar{e} = (1-d)e,$$

wobei \bar{e} die effektiven Dehnungen sind.

Der Spannungstensor ist über die Ableitung

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{U}(e)}{\partial e} = (1-d)\mathbf{C} : e$$

definiert. Die spannungsähnliche innere Variable

$$Y = -\frac{\partial \mathcal{U}(e)}{\partial d} = \frac{1}{2}e : \mathbf{C} : e. \quad (4)$$

ist der verzerrungsähnlichen inneren Variablen d zugeordnet und wird folglich auch als konjugierte oder duale innere Variable bezeichnet. Für den rein mechanischen Fall, also ohne Beachtung von Temperaturänderungen, schreibt sich die Clausius-Duhem-Ungleichung¹

$$-\dot{\Psi} + \sigma : \dot{e} \geq 0,$$

wobei \dot{e} die Verzerrungsgeschwindigkeit ist. Die Spannungsleistung muss stets größer sein, als die Produktion an freier Energie, also

$$-\dot{\Psi} + \sigma : \dot{e} = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial e} \dot{e} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d}\right) = Y \dot{d} \geq 0. \quad (5)$$

Zur Beschreibung der fortschreitenden Schädigung des Materials wird ein einfacher isotroper Mechanismus ausgewählt. Die in dem Zusammenhang verwendeten äquivalenten Dehnungen

$$\epsilon(Y) = \sqrt{2Y}$$

¹Dissipationsungleichung für den isothermalen Fall.

werden durch Gleichung (4) motiviert. Auch andere Formen sind denkbar, wie z.B. die von Lemaitre und Mazars, [38],

$$\epsilon(e) = \sqrt{e : e},$$

welche allerdings den Nachteil einer nicht symmetrischen Materialtangente² aufweist. Das Kriterium für Schädigung wird über die Bedingung

$$g(\epsilon(Y), r_t) \leq 0$$

geregelt, wobei

$$g(\epsilon(Y), r_t) = \epsilon(Y) - r_t \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (6)$$

Der Index t in r_t ist dabei eine zeitabhängige Schwelle, ab der Schädigung eintritt. Falls bereits eine Schädigung des Materials zu Beginn vorliegt, so wird zusätzlich $r_t \geq r_0$ gefordert. Gleichung (6) bewirkt, dass Schädigung eintritt, sobald die Energienorm des Dehnungstensors die Schwelle r_0 überschreitet. Für den isotropen Fall wird die Evolution von d über die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{d}_t &= \dot{\mu} H(\epsilon(Y), d_t) \\ \dot{r} &= \dot{\mu}, \end{aligned}$$

wobei $\dot{\mu} \geq 0$ ist, beschrieben. Der Index t in d_t bezieht sich dabei auf die Zeit; so beschreibt d_t die Schädigung zum Zeitpunkt t . Aus den Beschränkungen für die Werte der Funktion g und $\dot{\mu}$ folgen zusammen mit den Belastungs- und Entlastungsbedingungen die Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\dot{\mu} \geq 0, \quad g(\epsilon(Y), r_t) \leq 0, \quad \dot{\mu} g(\epsilon(Y), r_t) = 0.$$

Ist nun $g < 0$, so muss folglich $\dot{\mu} = 0$ gelten. Es folgt, dass $\dot{d} = 0$ ist und keine weitere Schädigung entsteht. Ist andererseits $\dot{\mu} > 0$ und findet weitere Schädigung statt, so muss $g = 0$ gelten. Der Parameter μ ist nun über

$$g = \dot{g} = 0$$

durch $\dot{\mu} = \dot{\epsilon}(Y)$ festgelegt. Betrachtet wird im folgenden ein Modell mit

$$H(\epsilon(Y), d_t) = H(\epsilon(Y)) = \frac{\partial \phi(Y)}{\partial Y}.$$

Die Schädigungsvariable erhält man mittels

$$\dot{d} = \dot{\phi}(Y) \implies d = \phi(Y) + d_0.$$

Die anfängliche Schädigung d_0 wird im Folgenden als 0 vorausgesetzt. Für ϕ wird hier das von J. Spahn, [62], vorgeschlagene Modell

$$\phi(Y) = 1 - \exp(-H_{\text{hard}}(\epsilon(Y) - Y_0))$$

verwendet. Die eigentliche Schädigungsvariable ist zusätzlich von der Materialgeschichte

$$d(t) = \max_{0 \leq \tau < t} \{d(\tau), \phi(Y)\}$$

abhängig. Der Parameter H_{hard} entspricht mathematisch der plastischen Verfestigung, beschreibt jedoch, wie schnell Schädigung bzw. Entfestigung bei zunehmender Verzerrungsenergie Y bzw. bei steigender äquivalenter Dehnung anwächst und Y_0 ist eine Größe, die vorgibt, ab wann Schädigung eintritt.

²Die Materialtangente stellt den Zusammenhang zwischen dem Differential der totalen Dehnungen und dem resultierenden Spannungswert her.

2 Randelementmethode

Die mathematische Beschreibung vieler physikalischer Prozesse führt zu Differential- und Integralgleichungen. Oft ist es dabei unmöglich eine Lösung in geschlossener Form, d.h. als elementare Funktion, zu finden. Die Ursache dafür ist z.B. eine komplexe Geometrie oder eine Nichtlinearität. Die Idee der Randelementmethode entwickelte sich als Ansatz, die Lösung eines Randwertproblems in integraler Form der entsprechenden Randwerte der gesuchten Lösung darzustellen. Bei einem wohl definierten Randwertproblem werden dabei nur die Hälfte, z.B. die Dirichlet-Daten, der Randwerte vorgegeben, welche später in die integrale Form eingehen. Dabei wird die direkte von der indirekten Methode unterschieden. Die Unterschiede liegen in der Form der gesuchten Unbekannten. Bei der direkten Methode werden physikalische Größen gesucht und berechnet, während bei der indirekten Methode nur Potentiale verwendet werden, die zur späteren Berechnung physikalischer Größen herangezogen werden. Als wichtige Arbeiten im Bereich der direkten Formulierung der Randelementmethode in der Elastostatik sind die Arbeiten von Rizzo und Cruse, [12, 13, 57], von Kupradze, [34, 35], und in der neueren Zeit von Steinbach, [64, 65], und von Sauter und Schwab, [59], anzusehen. In den nächsten Abschnitten werden die Grundbegriffe und die Idee der direkten Formulierung für partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten aufgezeigt.

2.1 Grundbegriffe

In diesem Abschnitt werden Definitionen und Eigenschaften von Sobolev-Räumen eingeführt. Es werden dabei stets reellwertige Funktionen betrachtet. Die Darstellung orientiert sich an [58].

Es seien $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex und $x \in \mathbb{R}^d$ mit

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$$

und

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}.$$

Für die spätere Anwendung auf die Laplace- und Lamé-Gleichungen wird $d = 3$ sein. Die partiellen Ableitungen einer Funktion u lassen sich schreiben als

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x_3^{\alpha_3}} u(x_1, x_2, x_3), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^3.$$

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein nicht-leeres beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet und $k \in \mathbb{N}_0$. Mit $C^k(\Omega)$ werden alle k mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω versehen mit der endlichen Norm

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

bezeichnet und

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega).$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\kappa \in (0, 1)$ wird der Raum der Hölder-stetigen Funktionen mit $C^{k,\kappa}(\Omega)$ bezeichnet, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\kappa}(\Omega)} = \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|u(x) - u(y)|^\kappa}.$$

Der Träger einer Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Abschluss in Ω der Menge

$$\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$$

und wird mit $\text{supp } u$ bezeichnet. Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Mit

$$C_K^k(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega) : \text{supp } u \subseteq K \right\}$$

und

$$C_K^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C_K^k(\Omega)$$

werden die k mal bzw. unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit Träger in K genannt. Analog definiert

$$\begin{aligned} C_0^k(\Omega) &= \left\{ u : u \in C_K^k(\Omega) \text{ für ein } K \subset \Omega \right\}, \\ C_0^\infty(\Omega) &= \left\{ u : u \in C_K^\infty(\Omega) \text{ für ein } K \subset \Omega \right\}, \end{aligned}$$

den Raum der k mal bzw. unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Der Raum $L_p(\Omega)$ besteht aus allen Lebesgue-messbaren Funktionen auf Ω , deren p -te Potenz integrierbar ist, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

$L_p(\Omega)$ ist ein Banachraum. $L_\infty(\Omega)$ ist der Raum aller wesentlich beschränkten Funktionen versehen mit der Norm

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} \{|u(x)|\} = \inf_{\substack{K \subset \Omega \\ K \text{ Nullmenge}}} \sup_{x \in \Omega \setminus K} |u(x)|.$$

Es gelten dabei die Minkowskische

$$\|u + v\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}, \quad u, v \in L_p(\Omega)$$

und die Höldersche Ungleichung

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}, \quad u \in L_p(\Omega), \quad v \in L_q(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Weiterhin definiert für $p = 2$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \langle u, u \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad u \in L_2(\Omega)$$

eine Norm mit dem zugehörigen Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

auf $L_2(\Omega)$. Der Raum $L_2(\Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt ist ein Hilbertraum. Bezüglich des Dualitätsproduktes

$$\langle u, v \rangle_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

kann der Dualraum von $L_p(\Omega)$ für $1/p + 1/q = 1$ mit $L_q(\Omega)$ identifiziert werden.

Definition 8. Eine Funktion

$$u \in L_1^{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ u : \int_K |u(x)|dx < \infty, \text{ für jedes Kompakutm } K \subset \Omega \right\}$$

besitzt eine verallgemeinerte partielle Ableitung nach x_i , wenn eine Funktion $v \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ existiert, so dass $\langle v, \varphi \rangle_{L_2(\Omega)} = -\langle u, \partial_{x_i} \varphi \rangle_{L_2(\Omega)}$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ erfüllt ist. Die verallgemeinerte Ableitung v wird mit $\partial_{x_i} u(\cdot)$ bezeichnet.

Definition 9. Seien $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein nicht-leeres Gebiet. Der Sobolev-Raum der $W_p^k(\Omega)$ der Ordnung k ist definiert durch den Abschluss

$$W_p^k(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}}$$

bezüglich der Norm

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Für den Fall $p = \infty$ wird die Norm über

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$$

definiert.

Analog zu den Hölder-stetigen Funktionen wird die Sobolev-Norm für $0 < s \in \mathbb{R}$ mit der Zerlegung $s = k + \kappa$ verallgemeinert, indem man den Raum $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|u\|_{W_p^k(\Omega)}^p + |u|_{W_p^k(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

vervollständigt, wobei

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{3+k\kappa}} dx dy \right)^{1/p}.$$

Die Sobolev-Räume für $p = 2$ lassen sich auch mittels der Fouriertransformation von Distributionen als Einschränkung des \mathbb{R}^3 auf Ω einführen. Eine Distribution T ist eine stetige Linearform über dem Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$. Mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ wird der Raum der schnell abklingenden unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnet. Eine temperierte Distribution ist eine stetige Linearform über $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Die Gesamtheit aller temperierten Distributionen wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, die Gesamtheit aller Distributionen mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet. Für eine Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ definiert

$$\hat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \exp(-i(x, \xi)) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

die Fouriertransformation. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ definiert $\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ die Fouriertransformation. Der Bessel-Operator $\mathcal{J}^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ist definiert durch

$$\mathcal{J}^s u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \exp(i(x, \xi)) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

und seine Fouriertransformation ist gegeben durch

$$(\mathcal{F}\mathcal{J}^s u)(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} (\mathcal{F}u)(\xi).$$

Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definiert

$$(\mathcal{J}^s T)(\varphi) = T(\mathcal{J}^s \varphi)$$

einen beschränkten linearen Operator

$$\mathcal{J}^s : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$$

auf dem Raum der temperierten Distributionen. Der Raum $H^s(\mathbb{R}^3)$ ist der Raum aller Distributionen $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ mit $\mathcal{J}^s u \in L_2(\mathbb{R}^3)$ mit der vom inneren Produkt

$$\langle v, u \rangle_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \langle \mathcal{J}^s v, \mathcal{J}^s u \rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

induzierten Norm $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\mathcal{J}^s u\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2$. Der Raum $H^s(\Omega)$ wird als Einschränkung der Funktionen auf Ω definiert.

Definition 10 (Lipschitz-Gebiet). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Zu jedem $x \in \partial\Omega$ gebe es eine offene Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^3$ und eine orthogonale Transformation $Q_x : U_x \rightarrow U_y$ mit $x \mapsto y = (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit

1. $Q_x(U_x \cap \partial\Omega)$ ist der Graph einer Funktion $\Psi_x : Y_x \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $y_3 = \Psi_x(y_1, y_2)$ mit $(y_1, y_2) \in Y_x$,
2. $Q_x(U_x \cap \Omega)$ liegt oberhalb des Graphen,
3. $Q_x(U_x \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}))$ liegt unterhalb des Graphen.

Ein solches Gebiet Ω heißt Lipschitz-Gebiet, wenn alle Ψ_x Lipschitz-stetig sind. Man spricht von einem $C^{k,\kappa}$ -Gebiet, falls alle Ψ_x $C^{k,\kappa}$ -Funktionen sind.

Für die später betrachteten Lipschitz-Gebiete, bzw. Gebiete mit einer inneren gleichmäßigen Kegelbedingung, stimmen die so definierten Räume $H^s(\Omega)$ und $W_2^s(\Omega)$ überein, [44, Kapitel 3].

Satz 11 (Sobolev'scher Einbettungssatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $d \leq s$ für $p = 1$ bzw. $3/p < s$ für $p > 1$. Es gilt $W_p^s(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ und

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{W_p^s(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W_p^s(\Omega).$$

Die Definition von Sobolev-Räumen auf Mannigfaltigkeiten erfordert zunächst eine stückweise überlappende Parametrisierung des Randes $\Gamma = \partial\Omega$ eines beschränkten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ in der Form

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^J \Gamma_i, \tag{7}$$

wobei

$$\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \chi_i(\xi) \text{ für } \xi \in \mathcal{T}_i \subset \mathbb{R}^2\}$$

und eine zugehörige Partition der Eins

$$\sum_{i=1}^J \varphi_i(x) = 1 \text{ für } x \in \Gamma, \varphi_i(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma \setminus \Gamma_i, \varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \varphi_i(x) > 0$$

gegeben sind. Eine auf Γ definierte Funktion v lässt sich als

$$v(x) = \sum_{i=1}^J \varphi_i(x)v(x)$$

darstellen. Bezüglich der lokalen Parametrisierung ergibt sich aus

$$\varphi_i(x)v(x) = \varphi_i(\chi_i(\xi))v(\chi_i(\xi)) = \tilde{v}_i(\xi), \quad \xi \in \mathcal{T}_i \subset \mathbb{R}^2$$

für $i = 1, \dots, J$ die Möglichkeit, eine Norm auf $H^s(\Gamma)$ durch

$$\|v\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^J \|\tilde{v}_i\|_{H^s(\mathcal{T}_i)}^2 \right)^{1/2} \quad (8)$$

zu definieren.

Definition 12 (Sobolev-Räume auf dem Rand, positive Ordnung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein $C^{l-1,1}$ Gebiet und $0 < s \leq l$. Der Raum $H^s(\Gamma)$ ist definiert durch

$$H^s(\Gamma) = \{v : \tilde{v}_i \in H^s(\mathcal{T}_i), i = 1, \dots, J\}$$

versehen mit der Norm (8).

Definition 13 (Sobolev-Räume auf dem Rand, negative Ordnung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein $C^{l-1,1}$ Gebiet und $0 < s \leq l$. Der Raum $H^{-s}(\Gamma)$ ist definiert als Dualraum von $H^s(\Gamma)$, versehen mit der Norm

$$\|w\|_{H^{-s}(\Gamma)} = \sup_{\substack{v \in H^s(\Gamma) \\ v \neq 0}} \frac{\langle w, v \rangle_\Gamma}{\|v\|_{H^s(\Gamma)}}$$

wobei

$$\langle w, v \rangle_\Gamma = \int_\Gamma w(x)v(x)ds_x.$$

Die in der Definition gegebene Norm ist von der gewählten Parametrisierung abhängig. Es kann jedoch gezeigt werden, dass die Voraussetzungen an den Rand genügen, um die Äquivalenz zweier Normen zu unterschiedlichen Parametrisierungen zu zeigen. Der konstruierte Raum $H^s(\Gamma)$ ist somit unabhängig von der Parametrisierung, [70].

Für die Betrachtung von gemischten Randwertproblemen werden zusätzlich Sobolev-Räume benötigt, die nur auf offenen Randstücken Γ_0 definiert sind, z.B. dem Dirichlet- oder Neumannrand bzw. auch Räume, die nur stückweise glatte Funktionen enthalten.

Definition 14. Sei $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ein offenes Randstück. Die Sobolev-Räume der Ordnung $s \geq 0$ auf Γ_0 werden durch

$$\begin{aligned} H^s(\Gamma_0) &= \{u = \tilde{u}|_{\Gamma_0} : \tilde{u} \in H^s(\Gamma)\}, \\ \tilde{H}^s(\Gamma_0) &= \{u = \tilde{u}|_{\Gamma_0} : \tilde{u} \in H^s(\Gamma) \text{ und } \text{supp } \tilde{u} \subset \bar{\Gamma}_0\} \end{aligned}$$

definiert, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(\Gamma_0)} = \inf \left\{ \|\tilde{u}\|_{H^s(\Gamma)} : \tilde{u} \in H^s(\Gamma) \text{ und } \tilde{u}|_{\Gamma_0} = u \right\}.$$

Über die Dualität

$$H^s(\Gamma_0) = (\tilde{H}^{-s}(\Gamma_0))' \text{ und } \tilde{H}^s(\Gamma_0) = (H^{-s}(\Gamma_0))'$$

werden für $s < 0$ die Sobolev-Räume negativer Ordnung definiert. Für einen geschlossenen und stückweise glatten Rand Γ mit Zerlegung (7) mit $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ für $i \neq j$ wird über

$$H_{\text{pw}}^s(\Gamma) = \{u \in L_2(\Gamma) : u|_{\Gamma_i} \in H^s(\Gamma_i), i = 1, \dots, J\}$$

der Raum der stückweise glatten Funktionen mit der Norm

$$\|u\|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^J \|u|_{\Gamma_i}\|_{H^s(\Gamma_i)}^2 \right)^{1/2}$$

definiert.

Für die Betrachtung von Randwertproblemen ist es erforderlich, die normale Restriktion $u|_{\Gamma}$ einer Funktion $u \in H^s(\Omega)$ auf den Rand Γ zu verallgemeinern. Für hinreichend glatte Oberflächen lassen sich Funktion aus $H^s(\Omega)$ stets auf Γ definieren, wobei der Differentiationsindex um eine halbe Ordnung reduziert wird:

Definition 15 (Spur). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein $C^{l-1,1}$ -Gebiet. Für $1/2 < s \leq l$ ist

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}} : H^s(\Omega) &\rightarrow H^{s-1/2}(\Gamma) \\ \gamma_0^{\text{int}} u(x) &= \lim_{\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \Gamma} u(\tilde{x}) \end{aligned}$$

ein beschränkter linearer Operator mit

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)} \leq c \|u\|_{H^s(\Omega)} \text{ für alle } u \in H^s(\Omega).$$

Die Abbildung γ_0^{int} wird innerer Spuroperator genannt.

Eine Erweiterung auf vektorwertige Funktionen kann wie folgt vollzogen werden:

Definition 16. Sei $d \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Mit

$$(H^s(\Omega))^d = \left\{ f = (f_1, \dots, f_d)^\top : f_i \in H^s(\Omega), i = 1, \dots, d \right\}$$

wird der vektorwertige Sobolev-Raum bezeichnet, versehen mit der Norm

$$\|f\|_{(H^s(\Omega))^d} = \left(\sum_{i=1}^d \|f_i\|_{H^s(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

2.2 Formulierung für Laplace-Gleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit fast überall gegebener äußerer Normale $n(x)$ für $x \in \Gamma = \partial\Omega$. Die Laplace-Gleichung für eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lautet

$$-\Delta u = 0 \text{ für } x \in \Omega.$$

Die Multiplikation der Gleichung mit einer Testfunktion v und anschließender Integration über Ω liefert

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(y))v(y)dy = \int_{\Omega} (\nabla u(y), \nabla v(y))dy - \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{int}} u(y) \gamma_0^{\text{int}} v(y) ds_y, \quad (9)$$

wobei die innere Konormalenableitung gegeben ist durch

$$\gamma_1^{\text{int}} u(y) = \lim_{\Omega \ni \tilde{y} \rightarrow y \in \Gamma} (n(y), \nabla u(\tilde{y})).$$

Die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u(y), \nabla v(y))dy$$

auf der rechten Seite ist dabei symmetrisch. Die Formel (9) wird erste Greensche-Formel genannt. Vertauscht man die Rollen von u und v so erhält man daraus die zweite Greensche-Formel

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(y))v(y)dy + \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{int}} u(y) \gamma_0^{\text{int}} v(y) ds_y = \int_{\Omega} (-\Delta v(y))u(y)dy + \int_{\Gamma} \gamma_1^{\text{int}} v(y) \gamma_0^{\text{int}} u(y) ds_y.$$

Durch Einsetzen der Fundamentallösung

$$u^* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$u^*(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}$$

des Laplace-Operators erhält man die Darstellungsformel

$$u(x) = \int_{\Gamma} u^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) \gamma_0^{\text{int}} u(y) ds_y, \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Die Anwendung des Spuoperators γ_0^{int} auf die Darstellungsformel liefert

$$\gamma_0^{\text{int}} u(x) = \gamma_0^{\text{int}} \int_{\Gamma} u^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) ds_y - \gamma_0^{\text{int}} \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) \gamma_0^{\text{int}} u(y) ds_y \quad (11)$$

für fast alle $x \in \Gamma$.

Das Einfachschichtpotential für $x \in \Omega$

$$\tilde{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega), \quad (\tilde{V}w)(x) = \int_{\Gamma} u^*(x, y)w(y)ds_y, \quad x \in \Omega$$

ist beschränkt. Mit Hilfe des Spuoperators erhält man den entsprechenden Integraloperator $V = \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1/2(\Gamma)$.

Lemma 17 ([59, 65]). *Das Einfachschichtpotential*

$$V = \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

ist beschränkt mit

$$\|Vw\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \text{ für alle } w \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

und $H^{-1/2}$ -elliptisch

$$\langle Vw, w \rangle \geq c \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2, \text{ für alle } w \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Für Funktionen $w \in L_\infty(\Gamma)$ gilt die Darstellung

$$(Vw)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{w(y)}{|x-y|} ds_y, \quad x \in \Gamma.$$

Das Doppelschichtpotential

$$W : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$$

$$(Wv)(x) = \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x,y) v(y) ds_y, \quad x \in \Omega$$

ist beschränkt. Die Anwendung des Spuoperators liefert den Integraloperator

$$\gamma_0^{\text{int}} W : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma).$$

Lemma 18 ([59, 65]). *Der Integraloperator*

$$\gamma_0^{\text{int}} W : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

ist beschränkt mit

$$\|\gamma_0^{\text{int}} Wv\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \text{ für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Für Funktionen $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt die Darstellung

$$\gamma_0^{\text{int}}(Wv)(x) = (-1 + \sigma(x))v(x) + (Kv)(x), \quad x \in \Gamma,$$

mit

$$(Kv)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Gamma \setminus B_\epsilon(x)} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x,y) v(y) ds_y$$

und

$$\sigma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{\substack{y \in \Omega \\ |x-y|=\epsilon}} 1 ds_y, \quad x \in \Gamma.$$

Der Beitrag von σ zu dem Operator ist von der Geometrie abhängig. Betrachtet man ein glattes Randstück, so ist nach Definition $\sigma = 1/2$. Im Folgenden wird dies ohne Einschränkung stets angenommen. Gleichung (11) schreibt sich nun in folgender Form

$$\gamma_0^{\text{int}} u(x) = (V\gamma_1^{\text{int}} u)(x) + \frac{1}{2} \gamma_0^{\text{int}} u(x) - (K\gamma_0^{\text{int}} u)(x). \quad (12)$$

Eine Anwendung der inneren Konormalenableitung auf die Darstellungsformel (10) liefert

$$\gamma_1^{\text{int}} u(x) = \gamma_1^{\text{int}} \int_{\Gamma} u^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) ds_y - \gamma_1^{\text{int}} \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) \gamma_0^{\text{int}} u(y) ds_y. \quad (13)$$

Der erste Integraloperator wird als das adjungierte Doppelschichtpotential bezeichnet:

$$\gamma_1^{\text{int}} \tilde{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

Es besitzt die Darstellung

$$\gamma_1^{\text{int}}(\tilde{V}w)(x) = \sigma(x)w(x) + (K'w)(x),$$

wobei

$$(K'w)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Gamma \setminus B_\epsilon(x)} \gamma_{1,x}^{\text{int}} u^*(x, y) w(y) dy$$

und ist beschränkt mit

$$\left\| \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}w \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c \|w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \quad w \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Insbesondere gilt die adjungierte Darstellung für $\sigma = 1/2$

$$\left\langle \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}w, v \right\rangle_{\Gamma} = \frac{1}{2} \langle w, v \rangle_{\Gamma} + \langle w, Kv \rangle_{\Gamma}$$

für alle $v \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Der zweite Operator wird als hypersingulärer Operator bezeichnet:

$$D = -\gamma_1^{\text{int}} W : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

Eine explizite Darstellung als Cauchy-Hauptwertintegral ist nicht mehr möglich. Für die Galerkin-Formulierung genügt eine Darstellung als Bilinearform

$$\langle Du, v \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(\text{curl}_{\Gamma} u(y), \text{curl}_{\Gamma} v(x))}{|x - y|} ds_y ds_x, \quad u, v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap C(\Gamma),$$

wobei

$$\text{curl}_{\Gamma} u(x) = n(x) \times \nabla_x \tilde{u}(x), \quad x \in \Gamma$$

und \tilde{u} eine in der Umgebung von Γ definierte Fortsetzung von u ist. Der Integraloperator D ist beschränkt mit

$$\|Dv\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^{1/2}}, \quad \text{für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma)$$

und $H^{1/2}(\Gamma)$ -semi-elliptisch

$$\langle Dv, v \rangle_{\Gamma} \geq c |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2$$

bzw. es gilt für den Raum

$$H_*^{1/2}(\Gamma) = \{v \in H^{1/2}(\Gamma) : \langle V^{-1}v, 1 \rangle_{\Gamma} = 0\}.$$

Lemma 19 ([59, 65]). *Der hypersinguläre Operator D ist $H_*^{-1/2}(\Gamma)$ -elliptisch, d.h. es gilt*

$$\langle Dv, v \rangle_{\Gamma} \geq c \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \text{für alle } v \in H_*^{1/2}(\Gamma).$$

Gleichung (13) schreibt sich jetzt in der Form

$$\gamma_1^{\text{int}}u(x) = \frac{1}{2}\gamma_1^{\text{int}}u(x) + (K'\gamma_1^{\text{int}}u)(x) + (D\gamma_0^{\text{int}}u)(x) \quad (14)$$

im Sinne von $H^{-1/2}(\Gamma)$. Aus den Gleichungen (12) und (14) erhält man den Calderon-Projektor

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}u \\ \gamma_1^{\text{int}}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K & V \\ D & \frac{1}{2}I + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}u \\ \gamma_1^{\text{int}}u \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Mit Hilfe des Calderon-Projektors können Relationen der Integraloperatoren hergeleitet werden.

Lemma 20 ([65]). *Für die Randintegraloperatoren gelten die Relationen*

$$\begin{aligned} VD &= \left(\frac{1}{2}I + K\right) \left(\frac{1}{2}I - K\right), \\ DV &= \left(\frac{1}{2}I + K'\right) \left(\frac{1}{2}I - K'\right), \\ KV &= VK', \\ DK &= K'D. \end{aligned}$$

Da das Einfachschicht-Potential $H^{-1/2}(\Gamma)$ -elliptisch ist, ist es nach Lax-Milgram invertierbar. Das System (15) kann nach $\gamma_1^{\text{int}}u(x)$ aufgelöst werden. Der entstehende Operator

$$\begin{aligned} S^{\text{int}} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \\ (S^{\text{int}}\gamma_0^{\text{int}}u)(x) &= V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K\right) \gamma_0^{\text{int}}u(x) \end{aligned}$$

heißt Steklov-Poincaré-Operator. Erneutes Einsetzen in die 2. Zeile von System (15) liefert die symmetrische Form des Steklov-Poincaré-Operators

$$S^{\text{int}} = D + \left(\frac{1}{2}I + K'\right) V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K\right). \quad (16)$$

Dabei werden die Eigenschaften der Beschränktheit und der Elliptizität in den entsprechenden Räumen von dem hypersingulären Operator vererbt. Der Steklov-Poincaré-Operator für die Lamé-Gleichung wird in der Betrachtung des gekoppelten Problems eine entscheidende Rolle spielen.

2.3 Formulierung für die Lamé-Gleichungen

Die Gleichgewichtsgleichungen der linearen Elastostatik lauten

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u, x) = 0, \quad \text{für } x \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

wobei $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ der Spannungstensor und $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Verschiebung ist. Weiter gilt für ein homogenes und isotropes Material mit dem Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν das Hookesche Gesetz in der Form

$$\sigma_{ij}(u, x) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 e_{kk}(u, x) + \frac{E}{1+\nu} e_{ij}(u, x), \quad (18)$$

für $i, j = 1, 2, 3$ mit dem linearisierten Dehnungstensor

$$e_{ij}(u, x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i(x) \right), \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Durch Einsetzen des Spannungs- und Dehnungstensors in die Gleichgewichtsgleichungen erhält man die Lamé-Gleichung

$$-\mu \Delta u(x) - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u(x) = 0, \quad \text{für } x \in \Omega$$

mit den Lamé-Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Die Multiplikation der Gleichgewichtsgleichungen mit einer Testfunktion und anschließender Integration über Ω liefert die erste Bettische Formel

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}(u, y) v_i(y) dy = a(u, v) - \int_{\Gamma} (\gamma_1^{\operatorname{int}} u(y), \gamma_0^{\operatorname{int}} v(y)) ds_y,$$

wobei die innere Konormalenableitung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \gamma_1^{\operatorname{int}} u(y) &= \sigma(u, y) n(y) \\ &= \lambda \operatorname{div} u(y) n(y) + 2\mu \frac{\partial}{\partial n(y)} u(y) + \mu n(y) \times \operatorname{curl} u(y), \quad \text{für } y \in \Gamma. \end{aligned}$$

Die Bilinearform

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u, y) e_{ij}(v, y) dy \\ &= 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}(u, y) e_{ij}(v, y) dy + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} u(y) \operatorname{div} v(y) dy \end{aligned}$$

auf der rechten Seite ist dabei symmetrisch. Wie im Falle der Laplace-Gleichung wird durch Vertauschen der Rollen von u und v und Gleichsetzen der Bilinearform die zweite Bettische Formel

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}(v, y) u_i(y) dy + \int_{\Gamma} (\gamma_1^{\operatorname{int}} v(y), \gamma_0^{\operatorname{int}} u(x)) ds_y \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}(u, y) v_i(y) dy + \int_{\Gamma} (\gamma_1^{\operatorname{int}} u(y), \gamma_0^{\operatorname{int}} v(y)) ds_y \end{aligned}$$

erzeugt. Der Raum der Starrkörperbewegungen wird mit

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\}$$

bezeichnet. Die Funktionen aus \mathcal{R} sind Lösungen des folgenden homogenen Neumann-Randwertproblems

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(v, x) = 0, \text{ für } x \in \Omega, \\ (\gamma_1^{\text{int}} v)_i(x) = 0, \text{ für } x \in \Gamma,$$

für $i = 1, 2, 3$ und $v \in \mathcal{R}$. Durch Einsetzen der Fundamentallösung, genannt Kelvin-Tensor,

$$u_{kl}^* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ u_{kl}^*(x, y) = \frac{1 + \nu}{8\pi E (1 - \nu)} \left((3 - 4\nu) \frac{\delta_{kl}}{|x - y|} + \frac{(x_k - y_k)(x_l - y_l)}{|x - y|^3} \right),$$

für $k, l = 1, 2, 3$ in die zweite Bettische Formel als Testfunktion v liefert die komponentenweise Darstellungsformel

$$u_l(x) = \int_{\Gamma} (u_l^*(x, y), \gamma_1^{\text{int}} u(y)) \, ds_y - \int_{\Gamma} (\gamma_{1,y}^{\text{int}} u_l^*(x, y), \gamma_0^{\text{int}} u(y)) \, ds_y, \quad (20)$$

für $x \in \Omega$ und $l = 1, 2, 3$. Mit u_l^* wird die l -te Spalte von u^* bezeichnet. Dabei ist die Randspannung $\gamma_{1,y}^{\text{int}} u_k^*(x, y) = T_k^*(x, y)$ von $u^*(x, y)$ für fast alle $y \in \Gamma$ durch

$$T_k^*(x, y) = \lambda \text{div}_y u_k^*(x, y) n(y) + 2\mu \frac{\partial}{\partial n_y} u_k^*(x, y) + \mu n(y) \times \text{curl}_y u_k^*(x, y) \\ = -\frac{1}{4\pi} \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{y_k - x_k}{|x - y|^3} + \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial}{\partial n_y} u_k^*(x, y) + \frac{E}{2(1 + \nu)} n(y) \times \text{curl}_y u_k^*(x, y),$$

für $k = 1, 2, 3$ gegeben³. Durch Anwenden des inneren Spurooperators auf die Darstellungsformel erhält man das Einfachschicht- und das Doppelschichtpotential. Das Einfachschichtpotential ist gegeben durch

$$(\tilde{V}^{\text{Lame}} w)_k(x) = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^3 u_{kj}^*(x, y) w_j(y) \, ds_y \\ = \frac{1 + \nu}{2E(1 + \nu)} \left((3 - 4\nu)(\tilde{V} w_k)(x) + \sum_{l=1}^3 (\tilde{V}_{kl} w_l)(x) \right), \quad x \in \Omega,$$

wobei \tilde{V} das Einfachschichtpotential des Laplace-Operators und

$$(\tilde{V}_{kl} w_l)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{(x_k - y_k)(x_l - y_l)}{|x - y|^3} \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} w_l(y) (x_k - y_k) \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{1}{|x - y|} \, ds_y, \text{ für } k, l = 1, 2, 3$$

sind.

³ $\frac{\partial}{\partial n_x} (u_1, u_2, u_3) = ((\partial_{x_i} u_i) n_i)_{i=1}^3$

Lemma 21 ([58, 65]). *Das Einfachschichtpotential*

$$V^{\text{Lame}} = \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V}^{\text{Lame}} : (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^{1/2}(\Gamma))^3$$

ist ein beschränkter linearer Operator mit

$$\|V^{\text{Lame}} w\|_{(H^{1/2}(\Gamma))^3} \leq c \|w\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^3}$$

für alle $w \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$. Für $\nu \in (0, 1/2)$ ist $V^{\text{Lame}} : (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^{1/2}(\Gamma))^3$ -elliptisch

$$\langle V^{\text{Lame}} w, w \rangle_{\Gamma} \geq c \|w\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^3}^2$$

für alle $w \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$, wobei

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} (u(y), v(y)) \, ds_y.$$

Für $w \in (L_{\infty}(\Gamma))^3$ gilt die Darstellung

$$(V^{\text{Lame}} w)_k(x) = \frac{1 + \nu}{2E(1 - \nu)} \left((3 - 4\nu)(V w_k)(x) + \sum_{l=1}^3 (V_{kl} w_l)(x) \right),$$

wobei V das Einfachschichtpotential des Laplace-Operators ist und

$$(V_{kl} w_l)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} w_l(y) (x_k - y_k) \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{1}{|x - y|} \, ds_y$$

für $k, l = 1, 2, 3$ sind.

Das Doppelschichtpotential ist eine stetige Abbildung gegeben durch

$$\begin{aligned} W^{\text{Lame}} : (H^{1/2}(\Gamma))^3 &\rightarrow (H^1(\Omega))^3, \\ (W^{\text{Lame}} v)_l(x) &= \int_{\Gamma} (\gamma_{1,y}^{\text{int}} u_l^*(x, y), v(y)) \, ds_y, \end{aligned}$$

für $l = 1, 2, 3$.

Lemma 22 ([58, 65]). *Der Integraloperator*

$$\gamma_0^{\text{int}} W^{\text{Lame}} : (H^{1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^{1/2}(\Gamma))^3$$

ist ein beschränkter linearer Operator mit

$$\|\gamma_0^{\text{int}} W^{\text{Lame}} v\|_{(H^{1/2}(\Gamma))^3} \leq c \|v\|_{(H^{1/2}(\Gamma))^3}$$

für alle $v \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$. Für stetige $v \in (H^{1/2}(\Gamma) \cap C(\Gamma))^3$ gilt die Darstellung

$$(\gamma_0^{\text{int}} W^{\text{Lame}} v)(x) = -\frac{1}{2} v(x) + (K^{\text{Lame}} v)(x), \quad x \in \Gamma$$

und dem Doppelschichtpotential

$$\begin{aligned} (K^{\text{Lame}}v)(x) &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Gamma \setminus B_\epsilon(x)} v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} ds_y \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} (Mu)(y) ds_y + \frac{E}{1+\nu} (V^{\text{Lame}}(Mu))(x) \\ &= (Kv)(x) - (VM(\partial, n)v)(x) + \frac{E}{1+\nu} (V^{\text{Lame}}M(\partial, n)v)(x), \end{aligned}$$

mit der Definition

$$M_{ij}(\partial_y, n(y)) = n_j(y) \frac{\partial}{\partial y_i} - n_i(y) \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

wobei K und V das Doppelschicht- und das Einfachschichtpotential des Laplace-Operators sind. Für alle Starrkörperbewegungen $v \in \mathcal{R}$ gilt

$$\left(\frac{1}{2}I + K^{\text{Lame}} \right) v(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Eine Anwendung der Konormalenableitung auf die Darstellungsformel (20) liefert

$$\gamma_1^{\text{int}} u(x) = \gamma_1^{\text{int}} (\tilde{V}^{\text{Lame}} \gamma_1^{\text{int}} u)(x) - \gamma_1^{\text{int}} (W^{\text{Lame}} \gamma_0^{\text{int}} u)(x)$$

für $x \in \Gamma$.

Lemma 23 ([58, 65]). *Der Integraloperator*

$$\gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}^{\text{Lame}} : (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^{-1/2}(\Gamma))^3$$

ist ein beschränkter linearer Operator mit

$$\left\| \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}^{\text{Lame}} w \right\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^3} \leq c \|w\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^3}$$

für alle $w \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$. Für $w \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$ gilt die Darstellung

$$(\gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}^{\text{Lame}} w)(x) = \frac{1}{2} w(x) + ((K^{\text{Lame}})' w)(x)$$

im Sinne von $(H^{-1/2}(\Gamma))^3$. Insbesondere gilt für die Bilinearform

$$\langle \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}^{\text{Lame}} w, v \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{2} \langle w, v \rangle_{\Gamma} + \langle w, K^{\text{Lame}} v \rangle_{\Gamma}, \quad v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Lemma 24 ([58, 65]). *Der hypersinguläre Integraloperator*

$$D^{\text{Lame}} = -\gamma_1^{\text{int}} W^{\text{Lame}} : (H^{1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^{-1/2}(\Gamma))^3$$

ist ein beschränkter linearer Operator mit

$$\left\| D^{\text{Lame}} v \right\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^3} \leq c \|v\|_{(H^{1/2}(\Gamma))^3},$$

sowie $H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch

$$\langle D^{\text{Lame}} v, v \rangle \geq c \|v\|_{(H^{1/2}(\Gamma))^3}^2, \quad \text{für alle } v \in H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma),$$

wobei

$$H_{\mathcal{R}}^{1/2}(\Gamma) = \{v \in (H^{1/2}(\Gamma))^3 : \langle v, w \rangle_{\Gamma} = 0 \text{ für } w \in \mathcal{R}\}.$$

Für stetige $u, v \in (H^{1/2}(\Gamma) \cap C(\Gamma))^3$ gilt für die Darstellung der Bilinearform, [31],

$$\begin{aligned} & \langle D^{\text{Lame}} u, v \rangle_{\Gamma} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial S_k(y)} u(y) \frac{\partial}{\partial S_k(x)} v(x) \right) ds_y ds_x \\ &+ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (M(\partial_x, n(x))v(x))^{\top} \left(\frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{|x-y|} - 4\mu^2 u^*(x, y) \right) M(\partial_y, n(y))u(y) ds_y ds_x \\ &+ \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \sum_{i,j,k=1}^3 M_{kj}(\partial_x, n(x))v_i(x) \frac{1}{|x-y|} M_{ki}(\partial_y, n(y))u_j(y) ds_y ds_x, \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial S_1(x)} = M_{32}(\partial_x, n(x)), \quad \frac{\partial}{\partial S_2(x)} = M_{13}(\partial_x, n(x)), \quad \frac{\partial}{\partial S_3(x)} = M_{21}(\partial_x, n(x)).$$

Wie im Falle der Laplace-Gleichung folgt aus der Anwendung des inneren Spuroperators bzw. der Konormalenableitung das System mit dem Calderon-Projektor. Die Aussagen von Lemma 20 bleiben erhalten.

Diskretisierung der Variationsformulierung

Sei $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand eines Lipschitz-Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und

$$\Gamma_h = \bigcup_{j=1}^N \bar{\tau}_l$$

die Diskretisierung des Randes in N ebene Dreiecke. Die dabei durch die Diskretisierung auftretenden Geometriefehler werden nicht berücksichtigt. Bei den folgenden Randdiskretisierungen wird stets Zulässigkeit, Formregularität und Gleichmäßigkeit vorausgesetzt.

Definition 25. Die Randdiskretisierung heißt zulässig, wenn zwei benachbarte Randelemente entweder einen Knoten oder eine Kante gemeinsam haben. Eine Familie von Randdiskretisierungen $\{\Gamma_h\}$ heißt formregulär, wenn eine Konstante c_B unabhängig von N existiert, so dass

$$d_l \leq c_B h_l, \quad d_l = \sup_{x,y \in \tau_l} |x-y|, \quad h_l = \left(\int_{\tau_l} 1 ds_x \right)^{1/2},$$

für alle $l = 1, \dots, N$ und quasi-uniform oder global gleichmäßig, wenn eine Konstante c_G unabhängig von N und h_{\max} existiert, so dass

$$\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \leq c_G,$$

wobei

$$h_{\min} = \min_{l=1, \dots, N} h_l \text{ und } h_{\max} = \max_{l=1, \dots, N} h_l$$

ist.

Bezüglich der Randdiskretisierung Γ_h ist der Raum $S_h^0(\Gamma)$ der stückweise konstanten Basisfunktionen

$$\psi_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \tau_l, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $l = 1, \dots, N$ gegeben durch

$$S_h^0(\Gamma) = \text{span} \{ \psi_l \}_{l=1}^N.$$

Es gilt $\dim S_h^0(\Gamma) = N$, wobei N die Anzahl der Dreiecke ist. Eine Funktion $u \in L_2(\Gamma)$ kann mittels L_2 -Projektion als

$$u_h = Q_h u = \sum_{l=1}^N u_l \psi_l \in S_h^0(\Gamma)$$

dargestellt werden, wobei $Q_h u$ den L_2 -Fehler

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Gamma)}^2$$

minimiert. Sei weiter $\{x_j\}_{j=1}^M$ die Menge aller zu Γ_h gehörigen Knoten. Der Raum der global stetigen und stückweise linearen Basisfunktionen wird mit

$$S_h^1(\Gamma) = \{ \varphi_j \}_{j=1}^M$$

bezeichnet und hat Dimension M , wobei

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_j, \\ 0 & \text{für } x = x_i \neq x_j, \\ \text{stückw. linear} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Eine Funktion $u \in L_2(\Gamma)$ kann wieder mittels L_2 -Projektion dargestellt werden.

Lemma 26 ([59, 64]). *Seien $\sigma \in [-1, 0]$ und $u \in H^s(\Gamma)$ mit $s \in [\sigma, 1]$. Dann gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{u_h \in S_h^0(\Gamma)} \|u - u_h\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq ch^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Gamma)}.$$

Lemma 27 ([59, 64]). *Seien $\Gamma = \partial\Omega$ ein $C^{1,s,1}$ -Rand, $\sigma \in [0, 1]$, $s \in [\sigma, 2]$ und $u \in H^s(\Gamma)$. Dann gilt die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{u_h \in S_h^1(\Gamma)} \|u - u_h\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq ch^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Gamma)}.$$

Für die Variationsformulierung sei X ein reeller Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_X$. Der Dualraum sei über das Dualitätsprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert, so dass für $f \in X'$ gilt

$$\|f\|_{X'} = \sup_{0 \neq u \in X} \frac{|\langle f, u \rangle|}{\|u\|_X}.$$

Sei $f \in X'$ gegeben und $A : X \rightarrow X'$ ein selbstadjungierter, beschränkter und X -elliptischer linearer Operator. Für gegebenes $f \in X'$ sei $u \in X$ als Lösung der Variationsformulierung

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \text{ für alle } v \in X \quad (21)$$

zu bestimmen.

Satz 28 ([64]). *Sei der Operator $A : X \rightarrow X'$ beschränkt und X -elliptisch. Dann besitzt die Gleichung (21) eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in X$ und es gilt*

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{c} \|f\|_{X'},$$

wobei c die Elliptizitätskonstante von A ist.

Für die Galerkin-Formulierung des Variationsproblems wird ein Ansatzraum

$$X_M = \text{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^M \subset X$$

gewählt und $u_M, v_M \in X_M$ in Gleichung (21) eingesetzt. Es ergibt sich das endlich dimensionale Variationsproblem

$$A_M u_M = f_M, \quad (A_M)_{lk} = \langle A\varphi_k, \varphi_l \rangle, \quad f_{M,l} = \langle f, \varphi_l \rangle.$$

Theorem 29 (Lemma von Cea und Strang, [59, 65]). *Sei A wie im vorangegangenen Satz. Für die eindeutige Lösung $u_M \in X_M$ der Variationsformulierung gilt die Stabilitätsabschätzung*

$$\|u_M\|_X \leq \frac{1}{c} \|f\|_{X'}$$

und die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_M\|_X \leq \frac{\|A\|}{c} \inf_{v_M \in X_M} \|u - v_M\|_X,$$

wobei

$$\|A\| = \sup_{u \in X} \frac{\|Au\|_{X'}}{\|u\|_X}$$

die Operatornorm von A ist. Sei weiter der gestörte Operator \tilde{A} von A mit Elliptizitätskonstante \tilde{c} gegeben. Dann ist das gestörte Variationsproblem

$$\langle \tilde{A} \tilde{u}_M, v_M \rangle = \langle f, v_M \rangle \quad \text{für alle } v_M \in X_M$$

eindeutig lösbar mit der Fehlerabschätzung

$$\|u - \tilde{u}_M\|_X \leq \left(1 + \tilde{c}^{-1}(\|A\| + \|\tilde{A}\|)\right) \frac{\|A\|}{c} \inf_{v_M \in X_M} \|u - v_M\|_X + \tilde{c}^{-1} \|(A - \tilde{A})u\|_{X'}.$$

Das vorherige Theorem ist für die Approximation der Integraloperatoren mit den Methoden aus dem nächsten Kapitel wichtig. Es garantiert die Lösbarkeit der approximierten Variationsformulierung auch im Falle eines gestörten Operators \tilde{A} , insbesondere auch unter Quadraturfehlern.

Das gemischte Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u, x) &= 0 && \text{für } x \in \Omega, \\ \gamma_0^{\text{int}} u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u, x) n_j(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$ wird nun als Variationsformulierung geschrieben. Die fehlenden Cauchy-Daten $\gamma_0 u$ auf Γ_N und $\gamma_1 u$ auf Γ_D sind zu bestimmen.

Gesucht sind Funktionen $\tilde{u} \in (\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N))^3$ und $\tilde{t} \in (\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D))^3$, wobei die Funktionen außerhalb von Γ_D bzw. Γ_N durch 0 fortgesetzt werden. Für die gegebenen Dirichlet- und Neumann-Daten werden geeignete Fortsetzungen $\tilde{g}_D \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$ und $\tilde{g}_N \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$ definiert, so dass

$$\tilde{u} = \gamma_0^{\text{int}} u - \tilde{g}_D \in (\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_N))^3 \text{ und } \tilde{t} = \gamma_1^{\text{int}} u - \tilde{g}_N \in (H^{-1/2}(\Gamma_D))^3$$

gesucht sind. Durch Einsetzen in die Integralgleichungen schreibt sich das System in der Form

$$\begin{aligned} (V^{\text{Lame}} \tilde{t})(x) - (K^{\text{Lame}} \tilde{u})(x) &= \frac{1}{2} g_D(x) + (K^{\text{Lame}} \tilde{g}_D)(x) - (V^{\text{Lame}} \tilde{g}_N)(x), \quad x \in \Gamma_D, \\ (D^{\text{Lame}} \tilde{u})(x) + ((K^{\text{Lame}})' \tilde{t})(x) &= \frac{1}{2} g_N(x) - ((K^{\text{Lame}})' \tilde{g}_N)(x) - (D^{\text{Lame}} \tilde{g}_D)(x), \quad x \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

Die Variationsformulierung lautet:

Finde $(\tilde{t}, \tilde{u}) \in (H^{-1/2}(\Gamma_D))^3 \times (H^{1/2}(\Gamma_N))^3$, so dass

$$\begin{aligned} &\langle V^{\text{Lame}} \tilde{t}, w \rangle_{\Gamma_D} - \langle K^{\text{Lame}} \tilde{u}, w \rangle_{\Gamma_D} + \langle \tilde{t}, K^{\text{Lame}} v \rangle_{\Gamma_N} + \langle D^{\text{Lame}} \tilde{u}, v \rangle_{\Gamma_N} \\ &= \frac{1}{2} \langle g, w \rangle_{\Gamma_D} + \langle K^{\text{Lame}} \tilde{g}_D, w \rangle_{\Gamma_D} - \langle V^{\text{Lame}} \tilde{g}_N, w \rangle_{\Gamma_D} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle g_N, v \rangle_{\Gamma_N} - \langle \tilde{g}_N, K^{\text{Lame}} v \rangle_{\Gamma_N} - \langle D^{\text{Lame}} \tilde{g}_D, v \rangle_{\Gamma_N}, \end{aligned} \quad (22)$$

für alle $(w, v) \in (H^{-1/2}(\Gamma_D))^3 \times (H^{1/2}(\Gamma_N))^3$ erfüllt ist.

Für die Diskretisierung der Variationsformulierung werden vektorwertige Testfunktionen durch komponentenweise Verwendung von $S_h^0(\Gamma)$ bzw. $S_h^1(\Gamma)$ definiert:

$$\begin{aligned} S_h^0(\Gamma_{D,i}) &= S_h^0(\Gamma) \cap \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{D,i}) = \text{span}\{\psi_l^i\}_{l=1}^{N_{D,i}}, \\ S_h^1(\Gamma_{N,i}) &= S_h^1(\Gamma) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_{N,i}) = \text{span}\{\varphi_l^i\}_{l=1}^{M_{N,i}}, \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$. Die Variationsformulierung lautet somit:

Finde $\tilde{t}_{h,i} \in S_h^0(\Gamma_{D,i})$ und $\tilde{u}_{h,i} \in S_h^1(\Gamma_{N,i})$, so dass

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \left(\langle (V^{\text{Lame}} \tilde{t}_h)_i, w_{h,i} \rangle_{\Gamma_D} - \langle (K^{\text{Lame}} \tilde{u}_h)_i, w_{h,i} \rangle_{\Gamma_D} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left(\langle \tilde{t}_{i,h}, (K^{\text{Lame}} v_h)_i \rangle_{\Gamma_N} + \langle (D^{\text{Lame}} \tilde{u}_h)_i, v_{h,i} \rangle_{\Gamma_N} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \langle g_i, w_{h,i} \rangle_{\Gamma_D} + \langle (K^{\text{Lame}} \tilde{g}_D)_i, w_{h,i} \rangle_{\Gamma_D} - \langle (V^{\text{Lame}} \tilde{g}_N)_i, w_{h,i} \rangle_{\Gamma_D} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \langle g_{N,i}, v_{h,i} \rangle_{\Gamma_N} - \langle \tilde{g}_{N,i}, (K^{\text{Lame}} v_h)_i \rangle_{\Gamma_N} - \langle (D^{\text{Lame}} \tilde{g}_D)_i, v_{h,i} \rangle_{\Gamma_N} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

für alle $w_{h,i} \in S_h^0(\Gamma_{D,i})$ und $v_{h,i} \in S_h^1(\Gamma_{N,i})$ für $i = 1, 2, 3$ erfüllt ist. Um aus den Räumen $S_h^0(\Gamma)$ und $S_h^1(\Gamma)$ auf die entsprechenden Teile abzubilden, werden Projektionen auf Dreiecke und Knoten definiert:

$$\begin{aligned} P_i &: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_{D,i}}, \\ P_i w &= w^i \end{aligned}$$

und

$$Q_i : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{M_{N,i}},$$

$$Q_i v = v^i,$$

für $i = 1, 2, 3$. Die Projektion für auf $\Gamma_{D,i}$ ist gegeben durch

$$w_{h,i}(x) = \sum_{l=1}^{N_{D,i}} w_l^i \psi_l^i(x) \in S_h^0(\Gamma_{D,i}), \quad w_h = \sum_{l=1}^N w_l \psi_l \in S_h^0(\Gamma)$$

und die Projektion auf $\Gamma_{N,i}$ durch

$$v_{h,i}(x) = \sum_{l=1}^{M_{N,i}} v_j^i \varphi_j^i(x) \in S_h^1(\Gamma_{N,i}), \quad v_h = \sum_{l=1}^M v_l \varphi_l \in S_h^1(\Gamma).$$

Die Anwendung der Randintegraloperatoren auf die entsprechenden Einschränkungen werden unter Verwendung von der Projektionen P und Q mit Hilfe der ursprünglich aus der Galerkin-Diskretisierung stammenden Matrizen V_h^{Lame} , K_h^{Lame} und D_h^{Lame} beschrieben:

$$\tilde{V}_h^{\text{Lame}} = P V_h^{\text{Lame}} P^\top, \quad \tilde{K}_h^{\text{Lame}} = P K_h^{\text{Lame}} Q^\top, \quad \tilde{D}_h^{\text{Lame}} = Q D_h^{\text{Lame}} Q^\top.$$

Das System (23) schreibt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_h^{\text{Lame}} & -K_h^{\text{Lame}} \\ (\tilde{K}_h^{\text{Lame}})^\top & \tilde{D}_h^{\text{Lame}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t}_h \\ \tilde{u}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{D,h} \\ \tilde{g}_{N,h} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{g}_{D,h}$ und $\tilde{g}_{N,h}$ die entsprechenden Anteile der rechten Seite des Systems (23) auf Γ_D und Γ_N darstellen.

Die Berechnung der Einträge der Integraloperatoren bezüglich den Räumen $(S_h^0(\Gamma))^3$ und $(S_h^1(\Gamma))^3$ des Einfachschicht- und Doppelschichtpotentials

$$(V_h)_{k,l} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_k} \int_{\tau_l} \frac{1}{|x-y|} ds_y ds_x \quad \text{für } k, l = 1, \dots, N,$$

$$((V_{ij})_h)_{k,l} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_k} \int_{\tau_l} (x_i - y_i) \frac{\partial}{\partial y_j} (x_j - y_j) ds_y ds_x \quad \text{für } k, l = 1, \dots, N \text{ und } i, j = 1, 2, 3,$$

$$(K_h)_{k,l} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_k} \int_{\Gamma} \frac{(x-y, n(y))}{|x-y|^3} \varphi_l(y) ds_y ds_x \quad \text{für } k = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, M,$$

wird durch eine analytische Integration des inneren Integrals durch Koordinatentransformation und anschließender adaptiver numerischer Integration des äußeren Integrals realisiert. Eine Symmetrisierung der Einträge des Einfachschichtpotentials erfolgt durch Bilden einer Halbsumme.

Die Anwendung von K_h^{Lame} und D_h^{Lame} erfordert das Einfachschicht- und das Doppelschichtpotential sowohl der Laplace-Gleichung als auch der Lamé-Gleichung. Dabei ist zu beachten, dass die generierten Einträge von V_h , $V_{ij,h}$ und K_h nicht von ν und E abhängig sind und so auch bei Änderung der Parameter weiter verwendet werden können. Für die Fehler in den Randdaten zeigt sich folgendes:

Satz 30 ([65]). *Die Variationsformulierung (22) habe die Lösungen $\tilde{u} \in (\tilde{H}^{s+1}(\Gamma_N))^3$ und $\tilde{t} \in (H_{\text{pw}}^s(\Gamma_D))^3$. Für die Ansatzräume $(S_h^0(\Gamma))^3$ und $(S_h^1(\Gamma))^3$ ist die Diskretisierung ((?)-(?)) der Variationsformulierung eindeutig lösbar. Bei hinreichend regulären Fortsetzungen $\tilde{g}_D \in (H^{s+1}(\Gamma))^3$ und $\tilde{g}_N \in (H_{\text{pw}}^s(\Gamma))^3$ der Randdaten gilt für $-1/2 \leq s \leq 1$ die Fehlerabschätzung*

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{(H^{1/2}(\Gamma))^3}^2 + \|\tilde{t} - \tilde{t}_h\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^3}^2 \leq ch^{2s+1} \left(\|\tilde{u}\|_{(H^{s+1}(\Gamma))^3}^2 + \|\tilde{t}\|_{(H_{\text{pw}}^s(\Gamma))^3}^2 \right).$$

Eine alternative Formulierung des gemischten Randwertproblems ist mittels der symmetrischen Darstellung des Steklov-Poincaré-Operators (16) möglich. Für $x \in \Gamma$ und $g \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$ gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} S^{\text{Lame}} g(x) &= D^{\text{Lame}} g(x) + \left(\frac{1}{2}I + (K^{\text{Lame}})' \right) (V^{\text{Lame}})^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K^{\text{Lame}} \right) g(x) \\ &= D^{\text{Lame}} g(x) + \left(\frac{1}{2}I + (K^{\text{Lame}})' \right) w(x), \end{aligned}$$

wobei $w \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$ die eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\langle V^{\text{Lame}} w, \tilde{w} \rangle_{\Gamma} = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K^{\text{Lame}} \right) g, \tilde{w} \right\rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } \tilde{w} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \quad (24)$$

ist. Eine analytische Berechnung der Einträge von S_h^{Lame} ist nicht möglich, sondern nur in numerischer Form. Sei dazu $w_h \in (S_h^0(\Gamma))^3 \subset (H^{-1/2}(\Gamma))^3$. Durch die Diskretisierung der Variationsformulierung (24)

$$\langle V_h^{\text{Lame}} w_h, \tilde{w}_h \rangle_{\Gamma} = \left\langle \left(\frac{1}{2}I + K_h^{\text{Lame}} \right) g_h, \tilde{w}_h \right\rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } \tilde{w}_h \in (S_h^0(\Gamma))^3$$

wird eine Näherungslösung w_h bestimmt und durch

$$\tilde{S}^{\text{Lame}} g = D^{\text{Lame}} g + \left(\frac{1}{2}I + (K^{\text{Lame}})' \right) w_h$$

eine Approximation definiert. Dabei ist \tilde{S}^{Lame} beschränkt und $\tilde{H}^{1/2}$ -elliptisch und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\left\| (S^{\text{Lame}} - \tilde{S}^{\text{Lame}})g \right\|_{(H^{1/2}(\Gamma))^3} \leq c \inf_{w_h \in (S_h^0(\Gamma))^3} \|S^{\text{Lame}} g - w_h\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^3}.$$

Die so definierte Approximation garantiert dabei, dass die Konvergenzordnung erhalten bleibt.

2.4 Gebietszerlegung

Das Gebiet Ω sei in p nicht überlappende Teilgebiete Ω_i zerlegt, wobei

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^p \bar{\Omega}_k \quad \text{und} \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad \text{für } k \neq l.$$

Weiterhin seien $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ Lipschitz-Ränder. Die Ränder Γ_k , $k > 1$ werden als Koppelränder bezeichnet. Ausgeschlossen ist dabei der Fall, dass sich zwei Ränder Γ_k für $k > 2$ berühren. Die Gesamtheit aller Koppelränder und $\Gamma_0 = \partial\Omega$ wird mit

$$\Gamma_S = \Gamma_0 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_p$$

bezeichnet. Der Rand Γ_1 bestehe aus Γ_S , d.h. alle Ω_k , $k = 2, \dots, p$ liegen vollständig innerhalb von Ω . Anstelle des gemischten Randwertproblems werden nun auf den einzelnen Gebieten Ω_k lokale Probleme

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^1(u^1, x) &= 0 & \text{für } x \in \Omega_1, \\ \gamma_0^{1,\text{int}} u^1(x) &= g_D(x) & \text{für } x \in \Gamma_0 = \Gamma_D, \end{aligned}$$

und

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^k(u^k, x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega_k,$$

für $i = 1, 2, 3$ und $k = 2, \dots, p$ gestellt, wobei der Rand Γ_D der Rand des Gebietes Ω ist. Für die Koppelränder werden dabei die entsprechenden Übergangsbedingungen

$$\gamma_0^{1,\text{int}} u^1(x) = \gamma_0^{l,\text{int}} u^l(x) \quad (25)$$

und

$$\gamma_1^{1,\text{int}} u^1(x) = -\gamma_1^{l,\text{int}} u^l(x) \quad (26)$$

für $x \in \Gamma_l$ und $l = 2, \dots, p$ gestellt. Durch Bestimmen einer Lösung u auf ganz Γ_S , welche die Dirichlet-Bedingungen und die einzelnen Übergangsbedingungen erfüllt, können die einzelnen Probleme lokal gelöst werden.

Das gekoppelte Problem lautet: Finde $u \in (H^{1/2}(\Gamma_S))^3$ mit $u(x) = g_D(x)$ für $x \in \Gamma_0$ und

$$\begin{aligned} u^k(x) &= u|_{\Gamma_k}(x) & \text{für } x \in \Gamma_k, k = 1, \dots, p, \\ S^{\text{Lame},1} u^1(x) + S^{\text{Lame},l} u^l(x) &= 0 & \text{für } x \in \Gamma_l, l = 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Zunächst werden die Übergangsbedingungen aufgeteilt: Die Forderung (25) wird durch die Definition

$$u^k(x) = u(x), \quad x \in \Gamma_k,$$

für $k = 1, \dots, p$ und $u \in (H^{1/2}(\Gamma_S))^3$ mit $u = g_D$ auf Γ_D erfüllt. Die Forderung (26) lautet in schwacher Formulierung

$$\int_{\Gamma_l} \left(S^{\text{Lame},1} u|_{\Gamma_l}(x) + S^{\text{Lame},l} u|_{\Gamma_l}(x) \right) v_l(x) ds_x = 0,$$

für alle $v_l \in (H^{1/2}(\Gamma_{kl}))^3$ und $l = 2, \dots, p$.

Der Raum

$$H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D) = \{v \in H^{1/2}(\Gamma_S) : v(x) = 0 \text{ für alle } x \in \Gamma_D\}$$

definiert die Testfunktionen für die Variationsformulierung: Finde $\tilde{u} \in (H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D))^3$, so dass

$$\int_{\Gamma_1} (\tilde{S}^{\text{Lame},1} \tilde{u}|_{\Gamma_1})(x) v|_{\Gamma_1}(x) ds_x = - \sum_{k=2}^p \int_{\Gamma_k} (\tilde{S}^{\text{Lame},k} g_D|_{\Gamma_k})(x) v|_{\Gamma_k}(x) ds_x \quad (27)$$

für alle $v \in (H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D))^3$ erfüllt ist. Die Bilinearform auf der linken Seite von Gleichung (27) ist dabei beschränkt und $H_0^{1/2}(\Gamma_S, \Gamma_D)$ -elliptisch mit Konstante $c^{\tilde{S}}$. Die entsprechenden Konstanten werden von den lokalen Steklov-Poincaré-Operatoren vererbt. Die eindeutige Lösbarkeit ergibt sich wieder aus dem Lemma von Lax-Milgram.

Satz 31 ([64]). *Seien $u, \tilde{u} \in (H^{1/2}(\Gamma_S))^3$ die Lösungen des gekoppelten Systems bzw. der Formulierung (27). Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|u - \tilde{u}\|_{(H^{1/2}(\Gamma_S))^3} \leq \frac{1}{(c\tilde{S})^2} \sum_{k=1}^p \left\| (S^{\text{Lame},k} - \tilde{S}^{\text{Lame},k})u|_{\Gamma_k} \right\|_{(H^{-1/2}(\Gamma_k))^3}^2.$$

Für die Diskretisierung werden die Ränder $\Gamma_0, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$ trianguliert. Als Ansatzraum für u_h wird $(S_h^1(\Gamma_S))^3$ gewählt und die Abbildung $A : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{M_2+\dots+M_p}$ als Projektion auf die inneren Knoten definiert. Die diskretisierte Formulierung lautet

$$A^\top \tilde{S}_h^{\text{Lame},1} A u_h + \begin{pmatrix} \tilde{S}_h^{\text{Lame},2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}_h^{\text{Lame},p} \end{pmatrix} u_h = A^\top \tilde{S}_h^{\text{Lame},1} \tilde{g}_D, \quad (28)$$

wobei $u_h \in (S_h^1(\Gamma_S \setminus \Gamma_0))^3$ ist und \tilde{g}_D die Fortsetzung von g_D auf die inneren Ränder durch Null. Die Lösung auf Γ_S ergibt sich zu $\tilde{u}_h = u_h + \tilde{g}_D$.

Satz 32 ([64]). *Sei $\tilde{u}_h \in (S_h^1(\Gamma_S))^3$ die Lösung der diskretisierten Variationsformulierung und $u \in (H^{1/2}(\Gamma_S))^3$ des gekoppelten Systems. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_h\|_{(H^{1/2}(\Gamma_S))^3}^2 &\leq c_1 \inf_{v_h \in (S_h^1(\Gamma_S))^3} \|u - \tilde{g}_D - v_h\|_{(H^{1/2}(\Gamma_S))^3}^2 \\ &+ c_2 \sum_{i=1}^p \inf_{w_h^i \in (S_h^0(\Gamma_i))^3} \|S^{\text{Lame},i} u|_{\Gamma_i} - w_h^i\|_{(H^{-1/2}(\Gamma_i))^3}^2. \end{aligned}$$

2.5 Inhomogenität

Die in der Randelementmethode benutzte Fundamentallösung führt die auf einem Gebiet formulierten Differentialgleichungen zurück auf Randintegralgleichungen. Ein Problem ist, dass für die meisten Differentialgleichungen keine Fundamentallösung in geschlossener analytischer Form gefunden wurde, z.B. für nichtlineare, oder die Verwendung dieser zu aufwendig ist. Allgemein haben Malgrange und Ehrenpreis, [67, Proposition 1, Seite 458], nachgewiesen, dass jeder nicht überall verschwindende partielle Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten der Form

$$\sum_{j_1, j_2, j_3=0}^N \beta_{j_1, j_2, j_3} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \frac{\partial^{j_2}}{\partial x_2^{j_2}} \frac{\partial^{j_3}}{\partial x_3^{j_3}}, \quad N \in \mathbb{N} \text{ fixiert}$$

eine Fundamentallösung im Raum der Distributionen besitzt.

Allerdings ist es möglich, auch ohne eine entsprechende Fundamentallösung die Randelementmethode anzuwenden. Betrachtet man das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= 0, \text{ in } \Omega, \\ u &= g, \text{ auf } \Gamma_D \\ u &= f, \text{ auf } \Gamma_N \end{aligned} \quad (29)$$

wobei \mathcal{L} ein nichtlinearer Operator mit variablen Koeffizienten der Form

$$\mathcal{L}u(x) = - \sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i} (a_{ij}(u, x) \partial_{x_j} u(x))$$

ist. Findet man einen linearen Differentialoperator \mathcal{L}_l mit konstanten Koeffizienten, für dessen adjungierten \mathcal{L}_l^* die Fundamentallösung bekannt ist, so wird

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_l + \mathcal{L}'$$

in einen linearen Teil \mathcal{L}_l und einen Rest \mathcal{L}' aufgeteilt. \mathcal{L}' enthält alle variablen Koeffizienten und Nichtlinearitäten. Die Differentialgleichung schreibt sich dann in der Form

$$\mathcal{L}_l u = -\mathcal{L}' u = -b.$$

Die Darstellungsformel erhält ein zusätzliches Volumenintegral

$$u(x) = \int_{\Gamma} u^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) \gamma_0^{\text{int}} u(y) ds_y + \int_{\Omega} u^*(x, y) b(y) dy, \quad x \in \Omega,$$

wobei u^* die Fundamentallösung des adjungierten Operators \mathcal{L}_l^* ist. Genauso verhält es sich, wenn anstelle von (29)

$$\mathcal{L} u = b$$

betrachtet wird. Sei \mathcal{L} der Laplace-Operator.

Lemma 33 ([59, 64]). *Das Newton-Potential*

$$\tilde{N}_0 : \tilde{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega), \quad (\tilde{N}_0 b)(x) = \int_{\Omega} u^*(x, y) b(y) dy$$

ist eine stetige Abbildung mit

$$\|\tilde{N}_0 b\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|b\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Die Anwendung des inneren Spuoperators liefert eine Abbildung

$$N_0 = \gamma_0^{\text{int}}(\tilde{N}_0 b) : \tilde{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma).$$

Lemma 34 ([59, 64]). *Die Abbildung N_0 ist ein linearer und beschränkter Operator mit*

$$\|N_0 b\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c \|b\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}, \quad b \in \tilde{H}^{-1}(\Omega).$$

Für $b \in L_{\infty}(\Omega)$ gilt die Darstellung

$$(N_0 b)(x) = \int_{\Omega} u^*(x, y) b(y) dy, \quad x \in \Gamma.$$

Die Anwendung der inneren Konormalenableitung liefert eine Abbildung

$$N_1 = \gamma_1^{\text{int}}(\tilde{N}_0 b) : \tilde{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

Lemma 35 ([59, 64]). *Die Abbildung N_1 ist ein linearer und beschränkter Operator mit*

$$\|N_1 b\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c \|b\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Der Operator $\tilde{N}_0 b$ ist die verallgemeinerte Lösung von

$$-\Delta \tilde{N}_0 b(x) = b(x), \quad x \in \Omega.$$

Für die in Abschnitt 2.4 formulierte Gebietszerlegung ist es von Vorteil, das Newtonpotential als Lösung einer Variationsaufgabe zu formulieren, um die starke Kopplung der Dirichlet-Daten zu gewährleisten. Die Methode ist dabei nicht beschränkt auf das Newtonpotential, sondern ist auch mit den im folgenden Abschnitt 2.5.1 erwähnten Methoden durchführbar. Dazu wird das Problem

$$-\Delta u = b, \quad x \in \Omega$$

mit Nullrandbedingungen

$$u|_{\Gamma} = 0$$

betrachtet. Für das Randwertproblem gilt die Darstellungsformel

$$u(x) = \int_{\Gamma} u^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) ds_y + \int_{\Omega} u^*(x, y) b(y) dy,$$

für $x \in \Omega$. Eine Anwendung des inneren Spuoperators liefert

$$\int_{\Gamma} u^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) = - \int_{\Omega} u^*(x, y) b(y) dy,$$

für $x \in \Gamma$. Definiert man

$$Nb(x) = \gamma_1^{\text{int}} u(x) = -V^{-1} N_0 b(x),$$

so erhält man die entsprechenden Neumann-Daten. Die so definierte partikuläre Lösung besitzt auf dem Rand per Definition den Wert Null, d.h. die Kopplung des Systems aus Abschnitt 2.4 formuliert sich analog, nur dass der verwendete Operator S in der Form

$$S_b g_D = S g_D - Nb$$

modifiziert werden muss.

2.5.1 Ansätze zur Eliminierung des Volumenpotentials

Die Inhomogenität mittels eines Volumenpotentials auszudrücken wurde als ein Problem der Randelementmethode angesehen. Verschiedene Vorgehensweisen wurden entwickelt um den Volumenterm in ein Randintegral umzuformen. Zu der in Abschnitt 5.2.2 neu entwickelten Methode, sind die folgenden historisch erwähnenswert.

Fundamentallösungen höherer Ordnung

Betrachtet wird die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = b, \quad x \in \Omega \tag{30}$$

mit einer harmonischen rechten Seite b auf einem Gebiet Ω mit entsprechenden Randbedingungen. In diesem Fall lässt sich der Volumenterm in der Darstellungsformel in ein

Randintegral umformen, so dass eine Diskretisierung von Ω vermieden wird. Dazu definiert man eine neue Fundamentallösung \bar{u}^* der biharmonischen Gleichung mit

$$u^* = -\Delta \bar{u}^*.$$

Durch Einsetzen in die zweite Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (b(y)\Delta \bar{u}^*(x, y) - \bar{u}^*(x, y)\Delta b(y))dy = \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} b(y)\gamma_{1,y}^{\text{int}} \bar{u}^*(x, y) - \gamma_1^{\text{int}} b(y)\gamma_{0,y}^{\text{int}} \bar{u}^*(x, y))ds_y$$

wird die Darstellung des Volumenterms

$$\int_{\Omega} b(y)u^*(x, y)dy = - \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} b(y)\gamma_{1,y}^{\text{int}} \bar{u}^*(x, y) - \gamma_1^{\text{int}} b(y)\gamma_{0,y}^{\text{int}} \bar{u}^*(x, y))ds_y$$

mittels eines Randintegrals ermöglicht. Die Fundamentallösung \bar{u}^* wird Fundamentallösung höherer Ordnung genannt.

Dual Reciprocity Methode

Für die Poisson-Gleichung (30) entwickelte Brebbia, [53], ein Verfahren für eine allgemeine Funktion b . Die Dual Reciprocity Methode teilt die Lösung in einen partikulären und einen homogen Teil auf. Dabei wird die partikuläre Lösung als Summe von partikulären Lösungen dargestellt. Die rechte Seite b wird approximiert mit

$$b \approx \sum_{j=1}^{M+L} \alpha_j f_j,$$

wobei $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und f_j geeignete Funktionen sind, z.B. radiale Basisfunktionen. M ist dabei die Anzahl der Randknoten und L die Anzahl der inneren Knoten der Diskretisierung des Gebietes. Die partikuläre Lösung wird in der Form

$$u_p = \sum_{j=1}^{M+L} \alpha_j \hat{u}_j,$$

mit Funktionen \hat{u}_j dargestellt. Die zu den f_j passenden \hat{u}_j werden durch

$$\Delta \hat{u}_j = f_j$$

definiert. Die Darstellungsformel hat die Form

$$u(x) = \int_{\Gamma} u^*(x, y)\gamma_1^{\text{int}} u(y)ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y)\gamma_0^{\text{int}} u(y)ds_y - \sum_{j=1}^{M+L} \alpha_j \int_{\Omega} \Delta \hat{u}_j(y) u^*(x, y)dy,$$

für $x \in \Omega$. Durch Einsetzen in die zweite Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (\hat{u}_j(y)\Delta u^*(x, y) - u^*(x, y)\Delta \hat{u}_j(y))dy = \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} \hat{u}_j(y)\gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) - \gamma_1^{\text{int}} \hat{u}_j(y)\gamma_{0,y}^{\text{int}} u^*(x, y))ds_y$$

wird die Darstellung des Volumenterms

$$- \int_{\Omega} \Delta \hat{u}_j(y)u^*(x, y) = \hat{u}_j(x) + \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} \hat{u}_j(y)\gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) - \gamma_1^{\text{int}} \hat{u}_j(y)\gamma_{0,y}^{\text{int}} u^*(x, y))ds_y$$

für $j = 1, \dots, M + L$ erhalten. Die Dual Reciprocity Darstellungsformel lautet dann

$$u(x) = \int_{\Gamma} u^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) \gamma_0^{\text{int}} u(y) ds_y \\ + \sum_{j=1}^{M+L} \alpha_j \left(\hat{u}_j(x) + \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} \hat{u}_j(y) \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) - \gamma_1^{\text{int}} \hat{u}_j(y) \gamma_{0,y}^{\text{int}} u^*(x, y)) ds_y \right)$$

für $x \in \Omega$.

Multiple Reciprocity Methode

Als weitere Methode die Volumenintegrale als Randintegrale zu formulieren, wurde die MRM von Neves und Brebbia, [51], vorgeschlagen. Sie ist eine Weiterentwicklung der DRM bzw. der Verwendung von Fundamentallösungen höherer Ordnung.

Für die Poisson-Gleichung (30) mit einer Funktion b werden nun Fundamentallösungen definiert durch

$$\Delta u^{*(1)} = u^* = u^{*(0)}, \\ \Delta u^{*(i)} = u^{*(i-1)}, \quad i = 2, \dots$$

und die zugehörigen Funktionen

$$b^{(0)} = b \\ b^{(1)} = \Delta b, \\ b^{(i)} = \Delta b^{(i-1)}, \quad i = 2, \dots$$

Der Volumenterm

$$\text{DR}^{(0)} = \int_{\Omega} b^{(0)}(y) u^{*(0)}(x, y) dy = \int_{\Omega} b^{(0)}(y) \Delta u^{*(1)}(x, y) dy$$

kann mittels der Greenschen Formel geschrieben werden als

$$\text{DR}^{(0)} = \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} b^{(0)}(y) \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^{*(1)}(x, y) - \gamma_1^{\text{int}} b^{(0)}(y) \gamma_{0,y}^{\text{int}} u^{*(1)}(x, y)) ds_y \\ + \int_{\Omega} u^{*(1)}(x, y) b^{(1)}(y) dy.$$

Der letzte Term hat die Form

$$\text{DR}^{(1)} = \int_{\Omega} u^{*(1)}(x, y) b^{(1)}(y) dy$$

und kann wiederum mittels Greenscher Formel in Randintegrale und Volumenintegrale umgeschrieben werden. Das ursprüngliche Volumenintegral $D^{(0)}$ lässt sich in Form der Reihe

$$\text{DR}^{(0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} b^{(i)}(y) \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^{*(i+1)}(x, y) - \gamma_1^{\text{int}} b^{(i)}(y) \gamma_{0,y}^{\text{int}} u^{*(i+1)}(x, y)) ds_y \quad (31)$$

ausdrücken. Die Multiple Reciprocity Darstellungsformel lautet dann

$$u(x) = \int_{\Gamma} u^*(x, y) \gamma_1^{\text{int}} u(y) ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^*(x, y) \gamma_0^{\text{int}} u(y) ds_y \\ + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}} b^{(i)}(y) \gamma_{1,y}^{\text{int}} u^{*(i+1)}(x, y) - \gamma_1^{\text{int}} b^{(i)}(y) \gamma_{0,y}^{\text{int}} u^{*(i+1)}(x, y)) ds_y$$

für $x \in \Omega$. Die Konvergenz dieser Reihe wurde unter geeigneten Skalierungsbedingungen von Nowak und Brebbia, [52], gezeigt. Im Falle einer harmonischen Funktion b stimmen die MRM und die Verwendung einer Fundamentallösung höherer Ordnung überein. Für allgemeine b muss die Fehlerabschätzung für das Residuum $\text{DR}^{(L+1)}$ einer nach L Gliedern abgebrochenen Reihe so gewählt werden, dass die Konvergenzordnung der Randelementmethode nicht beeinflusst wird. Dabei ist zu beachten, dass die Integration der in (31) verwendeten Reihe aufwendiger sein kann als den entsprechenden Volumenterm

$$\int_{\Omega} b^{(0)}(y) u^{*(0)}(x, y) dy$$

direkt numerisch zu berechnen. Als weiteres Problem erweist sich die Berechnung der entsprechenden Fundamentallösungen $u^{*(i)}$ im Falle der linearen Elastizität. Ist zusätzlich b eine Funktion von u , so wird auch die Berechnung der $b^{(i)}$ numerisch instabil und die Methode ist nicht mehr anwendbar.

3 Hierarchische Matrizen

Viele großdimensionierte Probleme rühren von der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen her. Gängige Methoden sind unter anderem die Randelementmethode oder auch die Kollokationsmethode mit radialen Basisfunktionen. Typischerweise entstehen dabei wegen der Nichtlokalität der Kernfunktion vollbesetzte Gleichungssysteme. Im Sinne der Komplexitätstheorie bedeutet dies jedoch einen Aufwand der quadratisch oder sogar kubisch mit der Anzahl der Unbekannten wächst, sowohl in Bezug auf den Speicher also auch auf den Rechenaufwand. Um diesen Nachteil auszugleichen entwickelte man zahlreiche Methoden, zu denen Ansätze mit Hilfe von Wavelets, radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger oder Panel-Cluster und Multipole Methoden gehören. Die letzten beiden haben das Ziel, die Kernfunktion in eine „degenerierte“ Form zu zerlegen und sind nahe mit den H -Matrizen verwandt. Weitere Fortschritte wurden auch beim iterativen Lösen der dabei entstehenden Gleichungssysteme erzielt. So wird bei Krylov-Unterraum-Methoden nur die Approximation der zugehörigen Matrix-Vektor-Multiplikation benötigt und eben nicht die voll abgespeicherte Matrix.

Als erster stellte Hackbusch, [26], 1999 seine Idee von H -Matrizen als eine Erweiterung der Panel-Cluster Methode vor. So beschrieb er allgemein eine H -Matrix als eine komprimierte Matrix, in der bestimmte Blöcke mit Hilfe einer Niedrigrangapproximation abgespeichert werden. Das Gerüst einer H -Matrix stützt sich dabei auf bestimmte Baumstrukturen, den Clustern und Block-Clustern, wobei letzteres im Sinne einer hierarchischen Zerlegung der Matrix in Blöcke zu verstehen ist, welche adaptiv mit Hilfe einer (oder mehrerer) „Zulässigkeitsbedingung“ konstruiert wird. Im zweiten Teil des Artikels, [29], wurde auch gezeigt, dass für elliptische Probleme der Rechen- und Speicheraufwand fast linear sind. Ein weiterer Vorteil gegenüber den Panel-Cluster Methoden ist die einfache Multiplikation, ja sogar Inversion der H -Matrizen, [28], was vor allem bei der FEM häufig eingesetzt wird. In Bebendorf, [8], findet sich eine vollständige Ausführung von Anwendungen auf BEM und FEM Probleme, sowie eine Weiterentwicklung der H -Matrix Rechenoperationen, wie z.B. Cholesky- oder LU -Zerlegung.

Eine konsequente Weiterentwicklung stellten Hackbusch, Khoromskij und Sauter bereits ein Jahr später in Form der H^2 -Matrizen vor, [30]. Dabei werden durch eine geschicktere Niedrigrangapproximation sogenannte Clusterbasen gebildet. Der Speicher- und Rechenaufwand ist in der Regel dabei linear. Häufig wird lineare Komplexität bei einem Algorithmus mit einer großen Konstanten erkauft und Verfahren dieser Art finden deswegen nur selten den Weg in die Anwendung. Im Falle der H^2 -Matrizen ist die Situation jedoch besser.

In den folgenden Jahren wurden hier weitere Verfahren vorgestellt, die es bereits für H -Matrizen gab. Beachtlich ist z.B. die Matrix-Matrix Multiplikation mit linearer Komplexität.

Die Ausführungen in folgenden Abschnitten orientieren sich dabei an den Arbeiten von Hackbusch, [27, 30], Bebendorf, [8] und Börm, [9].

3.1 Grundbegriffe

Der Begriff Indexmenge spielt eine wichtige Rolle. Es wird darunter stets eine endliche, nicht angeordnete Menge verstanden. In der Regel (und auch für die spätere Implementierung) werden intern Listen geführt und so implizit eine Anordnung vorgegeben.

Mit $n = \#I$ bzw. $m = \#J$ wird stets die Kardinalität der Indexmenge I bzw. J bezeichnet. Weiter bezeichne

$$\text{Bild}(M) = \{Mx : x \in \mathbb{R}^m\}$$

das Bild einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und

$$\text{Rang}(M) = \dim \text{Bild}(M)$$

den Rang der Matrix. Die euklidische Norm sei definiert durch

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} |u_i|^2}$$

und die Frobenius Norm durch

$$\|M\|_F = \sqrt{\sum_{\substack{i \in I, \\ j \in J}} |m_{ij}|^2}.$$

Die zugeordnete Matrixnorm ist definiert durch

$$\|M\| = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^m \\ y \neq 0}} \frac{\|My\|_X}{\|y\|_Y},$$

wobei $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ zwei Normen auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m sind.

3.1.1 Rang- k -Matrizen

Im späteren Verlauf dieses Kapitels wird sich die Nützlichkeit der Rang- k -Matrizen zeigen. Sie spielen eine herausragende Rolle, wenn es um die Niedrigrangapproximation geht. Hier soll zunächst eine allgemeine Darstellung gegeben werden. Darauf, wie man diese konstruiert, wird in Kapitel 3.1.3 eingegangen.

Definition 36. Die Menge aller Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit Rang kleiner gleich k ist gegeben durch

$$\mathcal{R}(k, I, J) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times m} : \text{Rang}(M) \leq k\}$$

und werden als Rang- k -Matrizen bezeichnet.

Bemerkung. Man kann die Definition anders auffassen: Es ist die Menge aller Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit höchstens k linear unabhängigen Spalten oder Zeilen.

Man spricht nur von der „Menge“, denn bei $\mathcal{R}(k, I, J)$ handelt es sich um keinen Vektorraum. Im Allgemeinen ist der Rang von $A + B$, $A, B \in \mathcal{R}(k, I, J)$ beschränkt durch

$$\text{Rang}(A + B) \leq \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B) = 2k$$

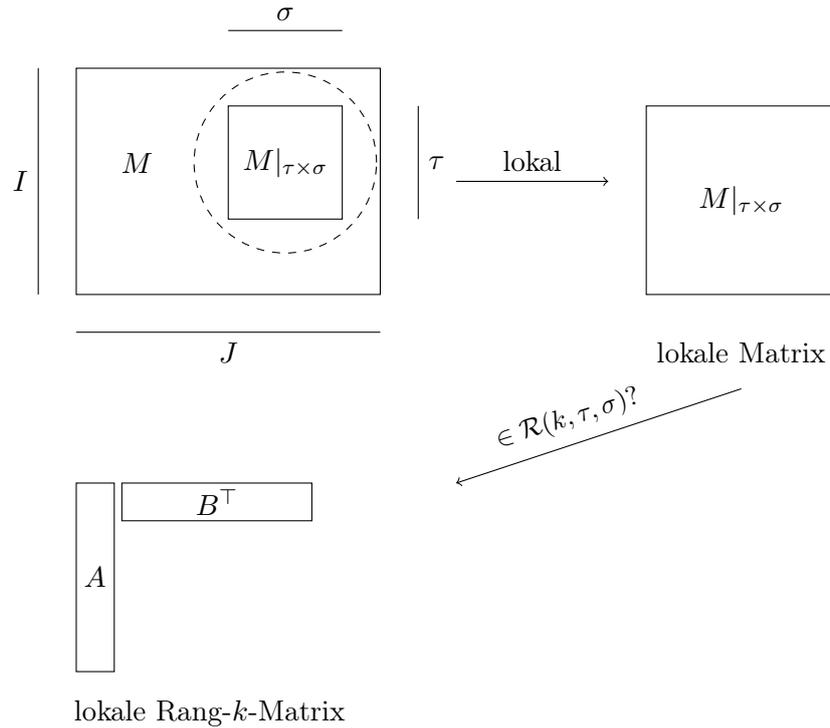
und somit $A + B \in \mathcal{R}(2k, I, J)$.

Um weiter mit diesen Matrizen arbeiten zu können, wird eine effiziente Darstellung der Menge $\mathcal{R}(k, I, J)$ benötigt. Aus der Definition des Ranges einer Matrix leitet sich die Folgende ab:

Korollar 37. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist genau dann eine Rang- k -Matrix, falls M in der Form

$$M = AB^\top$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ faktorisiert.

Abbildung 2: lokale Matrix, lokale Rang- k -Matrix

Folglich ist es möglich die gesamte Matrix M mit Hilfe von A und B darzustellen. Bezüglich des Speicheraufwandes ergibt sich $k(n + m)$. Auf den ersten Blick verringert sich der Speicheraufwand, falls $k \ll n$ bzw. $k \ll m$. Für gewöhnliche Matrizen, beispielsweise eine zufällig erzeugte, wird sich k allerdings im Bereich von n oder m bewegen und im Vergleich zur vollbesetzten Speicherung sogar mehr Speicherplatz benötigen. Die folgende Definition trägt dieser Tatsache Rechnung:

Definition 38. Eine Matrix $M \in \mathcal{R}(k, I, J)$ heißt Matrix mit niedrigem Rang, falls

$$k(n + m) < n \cdot m$$

gilt.

In der Tat ist es so, dass Matrizen dieses Typs leider nur sehr selten anzutreffen sind. Die häufig aus Diskretisierungen stammenden System-Matrizen besitzen vollen Rang, so dass die obige Beschreibung von Rang- k -Matrizen in der Regel keine Anwendung findet. Betrachtet man allerdings gewisse $\tau \subset I$ und $\sigma \subset J$, so stellt sich heraus, dass unter bestimmten Umständen

$$M|_{\tau \times \sigma} = (m_{i,j})_{\substack{i \in \tau \subset I \\ j \in \sigma \subset J}}$$

eine Matrix mit niedrigem Rang ist. Wie τ und σ abhängig von der Problemstellung zu konstruieren bzw. zu wählen sind, wird in Kapitel 3.1.2 erläutert. In diesem Zusammenhang ist die folgende Definition zu sehen.

Definition 39. Es seien I, J Indexmengen und $\tau \subset I$ und $\sigma \subset J$ zwei beliebige Teilmengen von I bzw. J . Es bezeichne b das Produkt $\tau \times \sigma$. Dann bezeichnen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k, b) &= \mathcal{R}(k, \tau, \sigma), \\ \mathcal{R}(\tau, \sigma) &= \{M|_{\tau \times \sigma} : \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } M \in \mathcal{R}(k, \tau, \sigma)\} \end{aligned}$$

die Menge der lokalen Rang- k -Matrizen.

Außer einem verringerten Speicherbedarf besitzen die Rang- k -Matrizen weitere Vorteile, wie z.B. eine schnell durchführbare Matrix-Vektor-Multiplikation.

Seien dazu $k > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ und $M \in \mathcal{R}(k, I, J)$. Weiter sei M in der Form $M = AB^\top$ aus Korollar 3.1.3 gegeben. Dann ergeben sich beispielsweise für

$$y = Mx = A(B^\top)z$$

$k(n + m)$ Multiplikationen.

Viel wichtiger wird es allerdings sein, Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit Hilfe eines $R \in \mathcal{R}(k, I, J)$ zu approximieren. Dabei ist zu beachten, dass dies mit einem kontrollierbaren Fehler passiert. Dazu folgendes:

Korollar 40. Seien $0 < k < \min\{n, m\}$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit Singulärwertzerlegung $M = U\Sigma V^\top$, wobei $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonale Matrizen sind und

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\min\{n, m\}}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

eine rechteckige Diagonalmatrix mit den Singulärwerten in absteigender Reihenfolge auf der Diagonalen ist. Es gilt für eine beliebige unitär-invariante Norm, [16],

$$\min_{R \in \mathcal{R}(k, I, J)} \|M - R\| = \|M - M_k\| = \|\Sigma - \Sigma_k\|,$$

wobei $M_k = U\Sigma_k V^\top$ und

$$(\Sigma_k)_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \text{für } i = j \leq \min\{n, m, k\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Fehler, der bei der Operation entsteht, kann in einfacher Art abgeschätzt werden, z.B. beim Verwenden der Spektralnorm

$$\|M - M_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

oder im Falle der Frobenius Norm

$$\|M - M_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{\min\{n, m\}} \sigma_i^2}.$$

Bei der Suche nach einer geeigneten Approximation ist es nützlich, sich einen relativen

$$\|M - M_k\| < \epsilon \|M\|$$

oder absoluten

$$\|M - M_k\| < \epsilon$$

Fehler ϵ vorzugeben und den Rang k davon abhängig zu wählen.

Definition 41. Seien die Bezeichnungen wie im vorherigen Korollar und $\epsilon > 0$. Es bezeichnen

$$k^M(\epsilon) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \sigma_{k+1} \leq \epsilon \sigma_1\}$$

$$k_{\text{abs}}^M(\epsilon) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \sigma_{k+1} \leq \epsilon\}$$

den relativen und absoluten ϵ -Rang der Matrix M bezüglich der Spektralnorm.

Bemerkung. In den später betrachteten Aufgabenstellungen wird ein weiterer Fehler hinzukommen, der Quadraturfehler. Betrachtet man eine Matrix M und seine gestörte Version \tilde{M} mit $\|M - \tilde{M}\| < \delta$. Der Fehler ist in diesem Fall nur noch dann absolut kontrollierbar, falls $\epsilon \gtrsim \delta$. Es gilt dann auch $k_{\text{abs}}^M(\epsilon) \approx k_{\text{abs}}^{\tilde{M}}(\epsilon)$. Eine Angabe für den relativen Fehler ist nicht mehr exakt möglich.

Für die spätere Anwendung bedeutet dies vor allem, dass Fehler bei den Matrixeinträgen immer deutlich unter dem des vorgegebenen ϵ liegen müssen. Eine Quadratur niedriger Ordnung könnte dazu führen, dass eine Matrix mit eigentlich niedrigem Rang voll gespeichert werden müsste.

3.1.2 Matrixpartition

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Rang- k -Matrix als effiziente Approximation einer Matrix mit niedrigem Rang eingeführt. Der einfachste Weg wäre es, eine Matrix global in dieser Form zu approximieren. Allerdings ist dies in der Praxis selten möglich. Ein Ausweg bieten hier die lokalen Rang- k -Matrizen, welche sich auf einzelne Blöcke der Form $\tau \times \sigma$, $\tau \subset I$, $\sigma \subset J$ beschränken. Solche Blöcke haben in einer Vielzahl von Problemstellungen einen niedrigen Rang. Ziel ist es, eine Zerlegung der Matrix in einzelne Blöcke zu realisieren, also eine sogenannte Blockpartition P von $I \times J$ mit bestimmten Eigenschaften anzugeben. So soll P z.B. möglichst wenige Blöcke enthalten, um den Speicheraufwand gering zu halten. Auf der einen Seite ist also eine natürliche Forderung, möglichst große Blöcke zu erzeugen, um den Speicheraufwand mit den Rang- k -Matrizen gering zu halten, andererseits sollten die Blöcke allerdings nicht so groß sein, dass ein zu großes k gewählt werden muss, um eine bestimmte Genauigkeit zu garantieren. Ein Ausweg wird die spätere Angabe einer „Zulässigkeitsbedingung“ bieten. Eine zu komplexe Blockpartition würde wiederum eine Matrix-Vektor-Multiplikation aufwendig machen.

Clusterbaum

Essentiell für die spätere Konstruktion der Blockpartition ist der Clusterbaum. Dazu sei I eine nichtleere und endliche Menge. S sei eine Abbildung von I in die Potenzmenge $\mathcal{P}(I)$.

Definition 42. 1. Sei $i \in I$ und $j \in S(i)$. Dann heißt j Sohn von i , bzw. i Vater von j .

2. Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und eine Folge $(v_i)_{i=0, \dots, k} \in I^{k+1}$. Dann heißt die Folge Pfad der Länge k , falls

$$v_{i+1} = S(v_i)$$

für alle $i = 0, \dots, k-1$ gilt. v_k wird als Nachfolger von v_0 bezeichnet.

Definition 43. Es sei I eine nichtleere Menge und $S : I \rightarrow \mathcal{P}(I)$ eine Abbildung. Das Tupel $T = (I, S)$ heißt Baum, falls die Eigenschaften (1)-(3) erfüllt sind:

1. Es existiert genau ein $r \in I$ mit

$$I \setminus \{r\} = \bigcup_{j \in I} S(j)$$

und wird als Wurzel des Baumes mit $\text{root}(T)$ bezeichnet.

2. Alle $j \in I$ sind Nachfolger von $\text{root}(T)$.

3. Alle $j \in I \setminus \{\text{root}(T)\}$ besitzen genau einen Vater.

Die Menge $\mathcal{L}(T) = \{i \in I : S(i) = \emptyset\}$ bezeichnet die Menge der Blätter von T .

Bemerkung. Ein Baum kann per Definition keine Pfade in Form von endlosen Schleifen enthalten und garantiert einen eindeutigen Pfad von $\text{root}(T)$ zu einem beliebigen $i \in T \setminus \{\text{root}(T)\}$, so dass eine Level-Funktion definiert werden kann. Im Folgenden wird T mit I identifiziert.

Definition 44. Sei T ein Baum mit Wurzel r . Sei weiter $i \in T \setminus \{r\}$. Die Abbildung

$$\text{stufe} : T \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad k = \text{stufe}(i),$$

die jedem $i \in T$ die eindeutige Pfadlänge des Pfades $(r, v_2, \dots, v_{k-1}, i)$ zuordnet, heißt Stufen-Funktion. Die Baumtiefe ist

$$\text{tiefe}(T) = \max\{\text{stufe}(i) : i \in T\}.$$

Der Grad eines Knotens ist definiert durch

$$\text{grad}(i) = \#S(i), \quad i \in T,$$

und der des Baumes

$$\text{grad}(T) = \max_{i \in T} \text{grad}(i).$$

Das Konstrukt eines Baumes eignet sich, um eine Menge zu zerlegen. Gibt es eine Abbildung $\mu : T \rightarrow \mathcal{P}(I)$ so heißt der Baum bezeichneter Baum. Eine geeignete Definition ist:

Definition 45. Sei I eine Menge. Ein Baum T mit $\mu : T \rightarrow \mathcal{P}(I) \setminus \{\emptyset\}$ heißt Zerlegungsbaum zu I , falls die Eigenschaften

1. $\mu(\text{root}(T)) = I$,
2. für alle $i \in I$ und $j, j' \in S(i)$ mit $j \neq j'$, dann gilt $\mu(j) \cap \mu(j') = \emptyset$,
3. für alle $i \in T \setminus \mathcal{L}(T)$ gilt

$$\dot{\bigcup}_{j \in S(i)} \mu(j) = \mu(i)$$

erfüllt sind, wobei $\dot{\bigcup}$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

Mit Hilfe eines Zerlegungsbaumes kann I in geeignete Cluster zerlegt werden; deshalb der Name Clusterbaum. Für spätere Betrachtungen sei hier zusätzlich gefordert, dass

$$\#S(\tau) \neq 1$$

gilt. Um den am Anfang geäußerten Eigenschaften der späteren Zerlegung Rechnung zu tragen, kann man eine zusätzliche Bedingung an die Clusterung stellen, z.B. in der Form der Abbildung

$$\text{mincs}_{T(I)} : \mathcal{P}(I) \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$$

mit den Eigenschaften $\text{mincs}_{T(I)}(\tau) = \text{wahr}$ impliziert, dass für alle $\tau' \supset \tau$ gilt

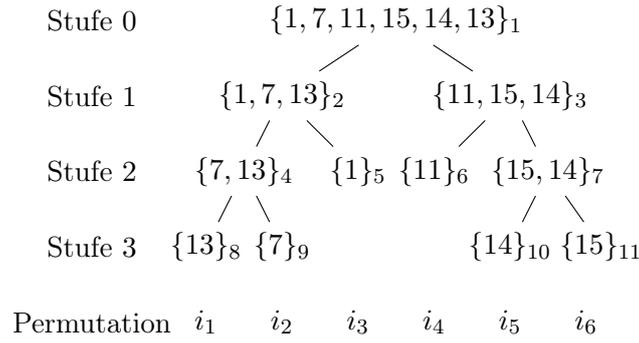
$$\text{mincs}_{T(I)}(\tau') = \text{wahr},$$

sowie

$$\text{mincs}_{T(I)}(\tau) = \text{falsch}$$

für alle $\tau \in \mathcal{L}(T(I))$. Sie sorgt für den Erhalt einer minimalen Clustergröße, um eine allzu komplexe Partitionierung der Matrix später zu vermeiden.

Für den Speicheraufwand eines Clusterbaumes ergibt sich insgesamt ein linearer Aufwand.



| Speicherung der Knoten des Baumes | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Index _{min} | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 5 | 6 |
| Index _{max} | 6 | 3 | 6 | 2 | 3 | 4 | 6 | 1 | 2 | 5 | 6 |

Abbildung 3: Speicherung eines Clusterbaumes

Lemma 46. *Sei T ein Zerlegungsbaum der Indexmenge I . Weiter gelte $\#S(i) \geq 2$ für alle $i \in T(I) \setminus \mathcal{L}(T(I))$. Dann hat der Baum T höchstens $2\mathcal{L}(T(I)) - 1$ Knoten, wobei Gleichheit für $\#S(i) = 2$ gilt.*

Weiterhin sei angemerkt, dass es, um später den Baum effizient zu beschreiben, zum einen genügt, die Cluster $\tau \in \mathcal{L}(T(I))$ anzuordnen, da diese rekursiv eine Anordnung der Cluster $\tau' \in T(I) \setminus \mathcal{L}(T(I))$ induzieren und zweitens die Eigenschaft

$$I = \dot{\bigcup}_{i \in \mathcal{L}(T(i))} \tau_i$$

garantiert, dass diese Beschreibung genügt. Zu diesem Zweck wird I neu angeordnet. Falls $\tau \subset I$ z.B. in zwei Söhne τ_1 und τ_2 geteilt wird, werden die entsprechenden Indizes so angeordnet, dass $\max \tau_1 \leq \max \tau_2$. Aufgrund der Eigenschaften des Zerlegungsbaumes wird dadurch der Vater nicht geändert. Es wird letztendlich pro Knoten des Baumes eine konstante Anzahl an Informationen gespeichert; insgesamt ergibt sich ein Speicheraufwand von höchstens $\mathcal{O}(2\mathcal{L}(T(I)) - 1)$ für die Knoten und nochmal zusätzlich ein Vektor der Länge $\#I$ für die entsprechende Permutation.

Weiter ist es mögliche mit folgender Definition zu garantieren, dass die Baumtiefe höchstens logarithmisch zu $\#I$ steht.

Definition 47. Sei $T(I)$ ein Zerlegungsbaum. Er wird balanciert genannt, falls

$$\min_{i \in T(I) \setminus \mathcal{L}(T(I))} \left\{ \frac{\#i_1}{\#i_2}, i_1, i_2 \in S(i) \right\}$$

unabhängig von n nach unten beschränkt ist.

Lemma 48 ([8]). *Sei $T(I)$ ein balancierter Zerlegungsbaum der Indexmenge I . Weiter gelte $\#S(i) \geq 2$ für alle $i \in T(I) \setminus \mathcal{L}(T(I))$. Dann gilt*

$$\text{tiefe}(T(I)) \leq c \log(n),$$

wobei c eine von n unabhängige Konstante ist.

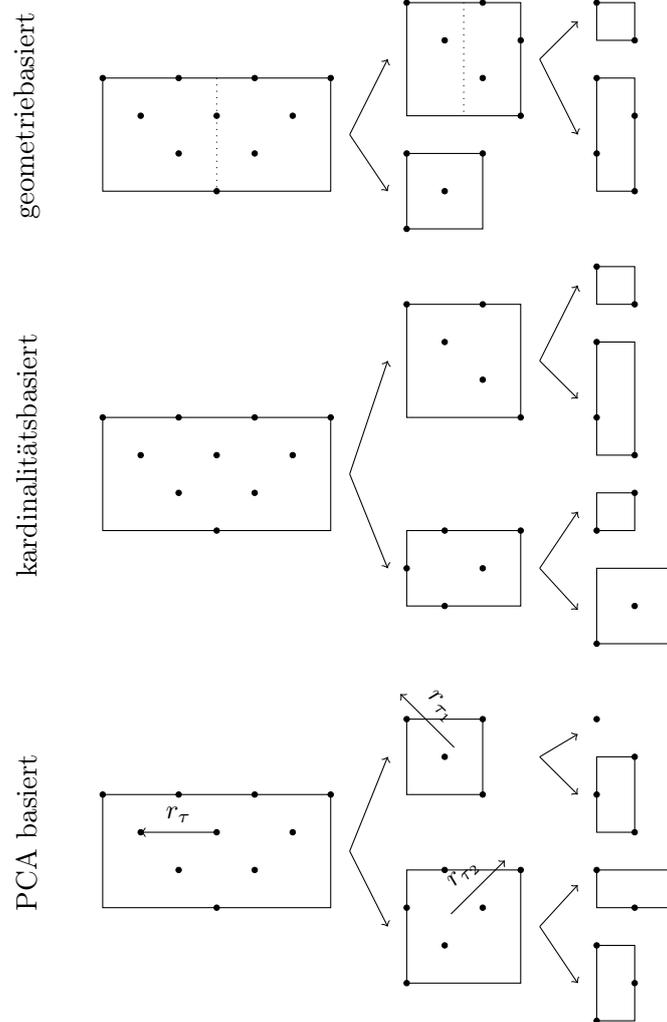


Abbildung 4: Zerlegung in Minimalquader

Konstruktion des Clusterbaumes

Für die Konstruktion eines Baumes gibt es mehrere Möglichkeiten. Je nach späterer Anwendung kann die eine oder andere Clustermethode günstiger sein.

Sei dazu $\tau \subset I$ nichtleer. Jedem $i \in \tau$ wird eine Teilmenge $X_i \subset \mathbb{R}^d$ zugeordnet, wobei

$$X_i \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

ist. Typischerweise handelt es sich dabei um den Träger der i -ten Basisfunktion. Den Träger eines Clusters τ setzt man dementsprechend auf

$$X_\tau = \bigcup_{i \in \tau} X_i.$$

Definition 49. (vgl. [8, S. 33 ff.]). Seien die Bezeichnungen wie oben. X_i , $i \in I$ werden quasi-uniform genannt, falls es eine Konstante c_U gibt, mit

$$\max_{i \in I} \mu(X_i) \leq c_U \min_{i \in I} \mu(X_i).$$

Die Konstruktion mittels Minimalquader ist die einfachste Methode.

Definition 50. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$. Der Minimalquader zu X ist der kleinste Quader mit

$$Q = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i] \supset X.$$

Die oben definierten X_i ersetzt man durch Knoten, also $\hat{X}_i = \{\xi_i\}$ und definiert $\hat{X}_\tau = Q_\tau$, wobei Q_τ der Minimalquader der Q_i , $i \in \tau$ ist. Als ξ_i bietet sich z.B. das Massenzentrum X_i an. Die einfachste Idee ist Q_τ entlang der längsten Seite zu halbieren. Auf die Verteilung der Punkte wird keine Rücksicht genommen. Weiterhin ist es möglich die Teilung des Quaders entlang der längsten Seite so zu wählen, dass die beiden neu entstehenden Cluster die gleiche Kardinalität besitzen. Im Gegensatz zum geometriebasierten Teilen erhält man einen balancierten Baum.

Eine weitere Methode geht auf Pearson, [54], aus dem Jahr 1901 zurück. Zunächst benötigt man das Massenzentrum m_τ von X_τ und berechnet damit die Hauptrichtung, also eine Richtung r_τ mit $\|r_\tau\|_2 = 1$ und

$$\sum_{i \in \tau} \left\| r_\tau^\top (\xi_i - m_\tau) \right\|_2^2 = \max_{\|v\|_2=1} \sum_{i \in \tau} \left\| v^\top (\xi_i - m_\tau) \right\|_2^2.$$

Die Aufgabe reduziert sich darauf, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Korrelationsmatrix

$$K_\tau = \sum_{i \in \tau} (\xi_i - m_\tau)(\xi_i - m_\tau)^\top$$

zu berechnen. Der normierte Eigenvektor zum größten Eigenwert löst dabei das Maximierungsproblem und gibt die Hauptrichtung an. Die Teilung des Clusters τ kann mit Hilfe einer Trennung an der Hyperebene bestimmt werden zu

$$\tau_1 = \{i \in \tau : r_\tau^\top (\xi_i - m_\tau) > 0\}, \quad (32)$$

$$\tau_2 = \tau \setminus \tau_1. \quad (33)$$

Dies entspricht der Idee der geometriebasierten Teilung der Minimalquader.

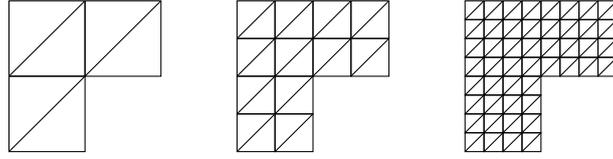


Abbildung 5: uniforme Familie von Diskretisierungen.

Eine andere Idee ist es, die Menge mit Hilfe der Größe $r_\tau^\top(\xi_i - m_\tau)$ in der Form

$$r_\tau^\top(\xi_i - m_\tau) \leq r_\tau^\top(\xi_j - m_\tau), \quad \text{für alle } i < j, \quad i, j \in \{1, \dots, \#\tau\}$$

neu zu sortierten. Als Definition für die neuen Cluster ergeben sich

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \{\xi_i : i = 1, \dots, \lceil \#\tau/2 \rceil\}, \\ \tau_2 &= \tau \setminus \tau_1. \end{aligned}$$

Der entstehende Clusterbaum ist dabei balanciert. Wie die geometriebasierte und kardinalitätsbasierte PCA-Clustering zueinander stehen, erklärt sich wie folgt.

Definition 51. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit gegeben und mit μ das m -dimensionale Maß bezeichnet. Weiter seien eine Folge $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Diskretisierungen und die jeweils dazu assoziierte Indexmenge I_j und $X_{i,j}$ gegeben. Dann nennt sich eine Clustering geometrisch balanciert, falls es Konstanten $c_g, c_G > 0$ für alle $l = 0, \dots, \text{tiefe}(T(I_j))$ gibt mit

$$(\text{diam} X_{\tau_j})^m \leq c_g 2^{-l_j} \quad \text{und} \quad \mu(X_{\tau_j}) c_G \geq 2^{-l_j} \quad \text{für alle } \tau_j \in T^{(l_j)}(I_j)$$

für alle Elemente der Folge.

Definition 52. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit gegeben. Weiter seien eine Folge $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Diskretisierungen und die jeweils dazu assoziierte Indexmenge I_j und $X_{i,j}$ gegeben. Dann wird die Familie der Diskretisierungen quasi-gleichmäßig genannt, falls es eine Konstante $c_U > 0$ gibt mit

$$\max_{i \in I_j} \mu(X_{i,j}) \leq c_U \min_{i \in I_j} \mu(X_{i,j}), \quad \text{für alle } j.$$

Die Familie $(\Omega_j, I_j, (X_{i,j})_{i \in I_j})_{j \in \mathbb{N}}$ wird formregulär genannt, falls es ein $c_R > 0$ gibt mit

$$\mu(X_{i,j}) \geq c_R (\text{diam} X_{i,j})^m, \quad i \in I_{i,j}$$

für alle Mitglieder der Familie.

In Theorem 1.25 und Lemma 1.26 in [8] wird gezeigt, dass eine kardinalitätsbasierte PCA-Clustering einer uniformen Familie von Diskretisierungen einen geometrisch balancierten Baum erzeugt und umgekehrt die geometriebasierte PCA-Clustering auf balancierte Bäume führt. In diesem Spezialfall sind die Begriffe also äquivalent. In Abbildung 5 findet sich die uniforme Diskretisierung einer Geometrie. Die obigen Begriffe sind nicht auf ein einzelnes Gitter anwendbar, sondern nur auf eine Folge von Diskretisierungen.

In Abbildung 4 sind alle Verfahren im Vergleich zu sehen. Man erkennt das unterschiedliche Verhalten von geometriebasierten und kardinalitätsbasierten Verfahren.

Blockclusterbaum

Als nächstes wird der Clusterbaum benutzt, um eine Blockstruktur zu zerteilen. Zunächst eine

Definition 53. Seien I und J endliche Indexmengen. Sei $P = \{b_1, \dots, b_p\} \subset \mathcal{P}(I \times J) \setminus \{\emptyset\}$. Dann heißt P Blockpartition von $I \times J$, wenn

1. für alle $i \in \{1, \dots, p\}$ ist $b_i = \tau \times \sigma$ mit $\tau \subset I$, $\sigma \subset J$,
2. der Schnitt zweier Blöcke $b_i \cap b_j$ ist leer,
- 3.

$$\bigcup_{i=1}^p b_i = I \times J$$

erfüllt sind.

Problematisch bleibt die Konstruktion der b_i . Eine direkte Anwendung der Verfahren für Clusterbäume auf $I \times J$ ist zwar möglich, jedoch gilt $\#(I \times J) = \#I \#J$. Eine Einschränkung der Struktur ist in der Definition nicht vorgegeben, so dass eine Art Tensorblockstruktur mit Hilfe des Clusterbaumes aufgebaut werden kann. Mit Hilfe der Angabe einer speziellen Sohnabbildung lässt sich ein spezieller Blockclusterbaum definieren.

Definition 54. Seien I, J Indexmengen und $T(I)$ und $T(J)$ die entsprechenden Clusterbäume mit den Sohnabbildungen $S_{T(I)}$ bzw. $S_{T(J)}$. Die Sohnabbildung $S_{T(I \times J)}$ sei definiert durch

$$S_{T(I \times J)}(\tau \times \sigma) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } S_{T(I)}(\tau) = \emptyset \text{ oder } S_{T(J)}(\sigma) = \emptyset, \\ \{\tau' \times \sigma' : \tau' \in S_{T(I)}(\tau), \sigma' \in S_{T(J)}(\sigma)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der durch die Sohnabbildung $S_{T(I \times J)}$ definierte Baum mit der Wurzel $I \times J$ wird stufentreuer Blockclusterbaum genannt. Er hat die folgenden Eigenschaften

1. Es gilt

$$\text{tiefe}(T(I \times J)) = \min\{\text{tiefe}(T(I)), \text{tiefe}(T(J))\}.$$
2. Alle $b \in T(I \times J) \setminus \mathcal{L}(T(I \times J))$ lassen sich als disjunkte Vereinigung ihrer Söhne darstellen.
3. Die Eigenschaften der Funktion mincs übertragen sich auf $T(I \times J)$.
4. $T(I \times J)$ ist stufentreu, d.h. für alle $\tau \times \sigma \in T(I \times J)$ gilt

$$\text{level}(\tau \times \sigma) = \text{level}(\tau) = \text{level}(\sigma).$$

Eine Modifikation der Sohnabbildung zu

$$S_{T(I \times J)}(\tau \times \sigma) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } S_{T(I)}(\tau) = \emptyset \text{ und } S_{T(J)}(\sigma) = \emptyset, \\ \{\tau' \times \sigma : \tau' \in S_{T(I)}(\tau)\} & \text{falls } S_{T(I)}(\tau) \neq \emptyset \text{ und } S_{T(J)}(\sigma) = \emptyset, \\ \{\tau \times \sigma' : \sigma' \in S_{T(J)}(\sigma)\} & \text{falls } S_{T(I)}(\tau) = \emptyset \text{ und } S_{T(J)}(\sigma) \neq \emptyset, \\ \{\tau' \times \sigma' : \tau' \in S_{T(I)}(\tau), \sigma' \in S_{T(J)}(\sigma)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

induziert auch eine Blockpartition und wird für die Konstruktion der H^2 -Matrizen von Interesse sein.

Für die Einführung des Begriffes Matrixpartition wird zusätzlich eine Zulässigkeitsbedingung benötigt.

Definition 55. Die Funktion

$$\text{Adm} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$$

heißt Zulässigkeitsbedingung, falls für alle $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ mit $\text{Adm}(X, Y) = \text{wahr}$ folgt, dass auch $\text{Adm}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{wahr}$ ist für alle $\tilde{X} \subset X$ und $\tilde{Y} \subset Y$. Adm heißt symmetrische Zulässigkeitsbedingung, falls zusätzlich die Symmetrie

$$\text{Adm}(X, Y) = \text{Adm}(Y, X)$$

gilt.

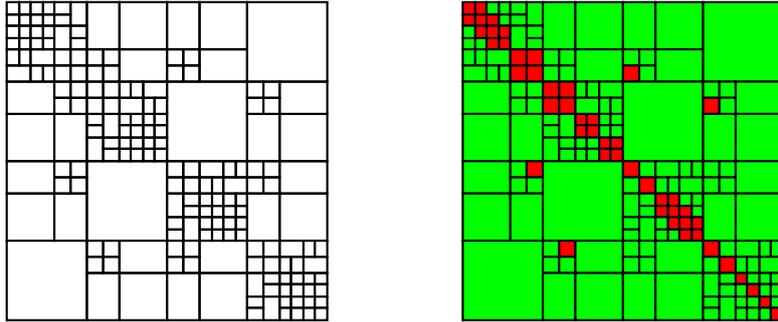


Abbildung 6: Blockclusterbaum (links) mit symmetrischer Adm Bedingung (rechts, zulässige Blöcke mit grün gekennzeichnet).

Die eigentliche Aufgabe dieser Kontrollfunktion ist es schon a priori, die Blöcke zu markieren, welche eine Niedrigrangapproximation besitzen. Dabei spielt es zunächst keine Rolle, welche konkrete Form die Zulässigkeitsbedingung annimmt, sondern nur, dass sie bestimmte Eigenschaften erfüllt.

Definition 56 (zulässige Partition, Matrixpartition). Seien I, J Indexmengen, Adm eine Zulässigkeitsbedingung und $T(I \times J)$ ein Blockclusterbaum. P heißt eine Partition von $I \times J$, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $P \subset T(I \times J)$,
2. alle Blöcke der Partition disjunkt sind,
3. die disjunkte Vereinigung der Blöcke $I \times J$ ergibt.

P heißt Adm zulässige Partition, falls für alle Blöcke $\tau \times \sigma \in \mathcal{L}(P)$ gilt:

$$\text{Adm}(\tau, \sigma) = \text{wahr oder mincs}(\tau \times \sigma) = \text{falsch}.$$

In Abbildung 6 ist beispielhaft ein Blockclusterbaum zu sehen, für den eine symmetrische Zulässigkeitsbedingung verwendet wurde.

3.1.3 Niedrigrangapproximation

Für die Niedrigrangapproximation werden Teilblöcke $A|_{\tau \times \sigma}$, $\tau \subset I$, $\sigma \subset J$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ betrachtet. Dabei stammt die Matrix aus der Diskretisierung eines Kernes

$$k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{N}$$

oder eines Integraloperators $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$

$$(\mathcal{A}v)(y) = \int_{\Gamma} k(x, y)v(x)ds_x$$

bzw.

$$(\mathcal{A}v)(y) = \int_{\Omega} k(x, y)v(x)dx.$$

Hierbei bezeichnen Ω und Γ die jeweiligen Integrationsgebiete. Unter bestimmten Voraussetzungen kann k approximiert werden und daraus eine Niedrigrangapproximation der Matrix gewonnen werden.

Definition 57. Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ Teilmengen. Jede Funktion $k : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, die in der Form

$$k(x, y) = \sum_{\nu=1}^l \varphi_{\nu}^{(l)}(x)\psi_{\nu}^{(l)}(y)$$

für $x \in X$ und $y \in Y$ geschrieben werden kann, heißt degeneriert in $X \times Y$ mit Grad l . Lässt sich die Funktion in der Form

$$k(x, y) = \sum_{\nu=1}^l \varphi_{\nu}^{(l)}(x)\psi_{\nu}^{(l)}(y) + R_l(x, y) \quad (34)$$

für $x \in X$ und $y \in Y$ schreiben, so heißt diese Entwicklung degenerierte Approximation vom Grad l mit Restglied R_l .

Da die einzelnen Komponenten des Einfachschichtpotentials der Lamé-Gleichungen Ableitungen des Kernes des Einfachschichtpotentials der Laplace-Gleichung beinhalten, kann mit Hilfe des folgenden Lemmas eine degenerierte Entwicklung übertragen werden.

Lemma 58 ([27]). *1. Die degenerierten Funktionen bilden einen Ring, d.h. Summen und Produkte sind degeneriert.*

2. Polynome in x und y sind degeneriert.

3. Soweit die auftretenden Funktionen differenzierbar sind, sind auch die Ableitungen einer degenerierten Funktion wieder degeneriert. Gleiches gilt für Stammfunktionen bezüglich x oder y .

Von einer degenerierten Approximation wird zusätzlich folgende Eigenschaft gefordert:

Definition 59. Die degenerierte Approximation (34) heißt exponentiell konvergent bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$, falls es Konstanten $c_1, c_2 \geq 0$ und $\alpha > 0$ gibt, so dass

$$\|R_l\| \leq c_1 \exp(-c_2 l^\alpha)$$

gilt. Dabei darf α von der Dimension des Raumes abhängen.

Die degenerierten Entwicklungen werden anschließend zur Erzeugung der Rang- k -Matrizen in der zulässigen Blockpartition benutzt. Für die einzelnen Einträge der Matrix, der aus \mathcal{A} stammenden Diskretisierung, entstehen im Falle einer Galerkin-Formulierung Einträge der Form

$$A_{ij} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(x, y)\psi_i(y)\psi_j(x)ds_x ds_y, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

bzw.

$$A_{ij} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(x, y) \varphi_i(y) \psi_j(x) ds_x ds_y, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N$$

im Falle einer Galerkin-Petrov-Formulierung. Ist der Kern degeneriert, bzw. ist eine degenerierte Approximation verfügbar, so folgt für einen Block $b = \tau \times \sigma$ und $i \in \tau, j \in \sigma$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(x, y) \psi_i(y) \psi_j(x) ds_x ds_y \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\sum_{\nu=1}^l \tilde{\varphi}_{\nu}^{(l)}(y) \tilde{\psi}_{\nu}^{(l)}(x) \right) \psi_i(y) \psi_j(x) ds_x ds_y \\ &= \sum_{\nu=1}^l \int_{\Gamma} \tilde{\varphi}_{\nu}^{(l)}(y) \psi_i(y) ds_y \int_{\Gamma} \tilde{\psi}_{\nu}^{(l)}(x) \psi_j(x) ds_x \\ &= \sum_{\nu=1}^l a_{i\nu} b_{j\nu} \end{aligned} \tag{35}$$

oder im Falle verschiedener Basis- und Testfunktionen

$$\begin{aligned} (A)_{ij} &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(x, y) \varphi_i(y) \psi_j(x) ds_x ds_y \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\sum_{\nu=1}^l \tilde{\varphi}_{\nu}^{(l)}(y) \tilde{\psi}_{\nu}^{(l)}(x) \right) \varphi_i(y) \psi_j(x) ds_x ds_y \\ &= \sum_{\nu=1}^l \int_{\Gamma} \tilde{\varphi}_{\nu}^{(l)}(y) \varphi_i(y) ds_y \int_{\Gamma} \tilde{\psi}_{\nu}^{(l)}(x) \psi_j(x) ds_x \\ &= \sum_{\nu=1}^l a_{i\nu} b_{j\nu}. \end{aligned}$$

Der Block besitzt folglich einen niedrigen Rang.

Für die Erzeugung einer degenerierten Darstellung gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine, die später in der Theorie der radialen Basisfunktionen angewandt wird, bietet das Theorem von Mercer.

Satz 60 ([19, 45]). Sei $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiger, symmetrischer positiv definiten Kern, d.h.

$$\sum_{i,j=1}^n c_i c_j k(x_i, x_j) > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ paarweise disjunkt und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit wenigstens einem $c_i \neq 0$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\{\varphi_i\}_i$ von $L_2([a, b])$ aus Eigenfunktionen des linearen Operators

$$M[k]\varphi(x) = \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy,$$

so dass die zugehörigen Eigenwerte $\{\lambda_i\}$ nicht negativ sind. Die Eigenfunktionen zu den positiven Eigenwerten sind stetig auf $[a, b]$ und der Kern k hat die Darstellung

$$k(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(x) \varphi_j(y).$$

Die Reihe konvergiert absolut für jedes $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $[a, b]$.

Beispiel. Der Kern

$$k(x, y) = \exp(-\epsilon^2(x - y)^2)$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes (siehe Teil 3). Bezüglich des mit

$$\rho(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2), \quad \alpha > 0$$

gewichteten Raumes $L_2(\mathbb{R}, \rho)$ schreibt sich der Kern in der Form

$$k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \delta^2 + \epsilon^2}} \left(\frac{\epsilon^2}{\alpha^2 + \delta^2 + \epsilon^2} \right)^{n-1} \\ \times \gamma_n \exp(-\delta^2 x^2) H_{n-1}(\alpha \beta x) \gamma_n \exp(-\delta^2 y^2) H_{n-1}(\alpha \beta y),$$

wobei

$$\beta = \left(1 + \left(\frac{2\epsilon}{\alpha} \right) \right)^{1/4}, \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{\beta}{2^{n-1}(n-1)!}}, \quad \delta_n = \frac{\alpha^2}{2}(\beta^2 - 1),$$

α ein entsprechend gewählter Skalierungsfaktor ist und H_{n-1} die Hermite-Polynome vom Grad $n - 1$ sind.

Anstelle für jeden Kern einzeln eine degenerierte Approximation zu entwickeln, sind auch allgemeinere Verfahren denkbar. Sei die Kernfunktion $k : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ analytisch in der zweiten Variable. Eine Taylorentwicklung liefert

$$k(x, y) = \sum_{|\alpha| < p} \frac{1}{\alpha!} \partial_y^\alpha k(x, y_0) (y - y_0)^\alpha + R_p(x, y),$$

wobei das Restglied die Darstellung

$$R_p(x, y) = \sum_{|\alpha| \geq p} \frac{1}{\alpha!} \partial_y^\alpha k(x, y_0) (y - y_0)^\alpha$$

besitzt. Dabei ist

$$T_p[k](x, y) = \sum_{|\alpha| < p} \frac{1}{\alpha!} \partial_y^\alpha k(x, y_0) (y - y_0)^\alpha$$

ein Polynom vom Grad höchstens $p - 1$ in y und somit eine degenerierte Approximation von k mit höchsten p^d Termen. Da die Konstruktion Ableitungen der Kernfunktion beinhaltet, ist ein solches Verfahren für die praktische Anwendung kaum brauchbar. Einen Ausweg liefert die Approximation des Kernes durch eine geeignete Interpolation. Betrachtet wird eine Kernfunktion der Form $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Verwendung von Tschebyscheff-Knoten x_1, \dots, x_l im Intervall $[a, b]$ liefert

$$k^{(l)}(x, y) = \sum_{\nu=1}^l L_\nu(x) k(x_\nu, y)$$

eine degenerierte Approximation der Kernfunktion, wobei

$$L_\nu(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^l \frac{x - x_j}{x_\nu - x_j}$$

die zugehörigen Lagrange-Polynome sind.

Über die Konvergenz der degenerierten Approximation lässt sich ohne weitere Forderungen an den Kern sowie an X und Y keine Aussage treffen. Eine wichtige Eigenschaft eines Kernes ist die asymptotische Glattheit.

Definition 61 ([27]). Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ Teilmengen, sodass der Kern $k(x, y)$ für $x \in X$ und $y \in Y$, $x \neq y$, definiert und beliebig oft differenzierbar ist. Dabei heißt k asymptotisch glatt in $X \times Y$, falls für $(x, y) \in X \times Y$, $x \neq y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\alpha + \beta \neq 0$

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x, y)| \leq c(\nu) |x - y|^{-|\alpha| - |\beta| - s}$$

mit einem $s \in \mathbb{R}$ und

$$c(\nu) = C \nu! |\nu|^r \gamma^{|\nu|}, \quad \nu = \alpha + \beta \in \mathbb{N}_0^d$$

gilt, wobei C , r und γ geeignete Konstanten sind.

Lemma 62 ([27]). Sei k ein asymptotisch glatter Kern. Wird die Zulässigkeitsbedingung (Definition 55) in der Form $\text{diam}(Y) \leq \eta \text{dist}(X, Y)$ mit $\eta < 1/\gamma$ gefordert, so gilt für die Taylorentwicklung die Fehlerabschätzung

$$\|k(x, \cdot) - T_p[k](x, \cdot)\|_{\infty, X} \leq c_1 (\gamma \eta)^p$$

und somit exponentielle Konvergenz.

Lemma 63 ([27]). Sei k ein asymptotisch glatter Kern mit den Konstanten aus Definition 61. Wird die Zulässigkeitsbedingung (Definition 55) in der Form $\text{diam}_\infty(X) \leq \eta \text{dist}(X, Y)$ für eine Tensorprodukt-Interpolation mit $l - 1$ Tschebycheff-Stützstellen in jeder Koordinatenrichtung gefordert, dann gilt für $l + s \geq 0$ die Fehlerabschätzung

$$\|k(\cdot, y) - k^{(l)}(\cdot, y)\|_{\infty, X} \leq c_1 (c_2 \eta)^l$$

mit Konstanten c_1 und c_2 unabhängig von l .

Um den Fehler bei der Approximation des Kernes genauer zu untersuchen, wird ein gestörter Operator

$$(\tilde{\mathcal{A}}(v))(y) = \int_{\Gamma} \tilde{k}(x, y) v(x) ds_x$$

definiert. Die Operatoren $\Lambda_{1, \tau} : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ und $\Lambda_{2, \sigma} : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, $\tilde{n} = \#\tau$, $\tilde{m} = \#\sigma$ sind für die Galerkin-Formulierung definiert durch

$$(\Lambda_{1, \tau} f)_i = \int_{\Gamma} f(x) \psi_i(x) ds_x, \quad i \in \tau \quad \text{und} \quad (\Lambda_{2, \sigma} f)_j = \int_{\Gamma} f(x) \varphi_j(x) ds_x, \quad j \in \sigma.$$

Die Träger der entsprechenden Basisfunktionen werden mit X_τ und X_σ benannt und das entsprechende Maß auf Γ mit μ (siehe Seite 54) bezeichnet. Weiterhin gebe es Konstanten c_{Λ_1} , $c_{\Lambda_2} > 0$ mit

$$\|\Lambda_{1, \tau} f\|_2 \leq c_{\Lambda_1} \|f\|_{L_2(X_\tau)}, \quad f \in L_2(X_\tau)$$

und

$$\|\Lambda_{2, \sigma} f\|_2 \leq c_{\Lambda_2} \|f\|_{L_2(X_\sigma)}, \quad f \in L_2(X_\sigma).$$

Satz 64 ([8]). Seien P eine Blockpartition von $I \times J$, $b = \tau \times \sigma$, $\tau \subset I$, $\sigma \subset J$ und eine Approximation der Kernfunktion \tilde{k} gegeben mit

$$|k(x, y) - \tilde{k}(x, y)| < \epsilon, \quad x \in X_\tau, \quad y \in X_\sigma.$$

Dann gilt die Komponentenweise Fehlerabschätzung der Galerkin-Matrix

$$a_{ij} - \tilde{a}_{ij} = \int_{X_\tau} \int_{X_\sigma} (k(x, y) - \tilde{k}(x, y)) \psi_i(y) \varphi_j(x) ds_x ds_y$$

$$|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| \leq \epsilon \|\psi_i\|_{L_1(X_\tau)} \|\varphi_j\|_{L_1(X_\sigma)}, \quad i \in \tau, \quad j \in \sigma,$$

bzw.

$$\left\| A|_{\tau \times \sigma} - \tilde{A}|_{\tau \times \sigma} \right\|_F \leq \epsilon c_{\Lambda_1} c_{\Lambda_2} (\mu(X_\sigma) \mu(X_\tau))^{1/2}$$

in der Frobenius-Norm. Für die globale Matrix gilt die Fehlerabschätzung

$$\left\| A - \tilde{A} \right\|_2 \leq \epsilon c_{\Lambda_1} c_{\Lambda_2} \left(\sum_{\tau \times \sigma \in P} \mu(X_\tau) \mu(X_\sigma) \right)^{1/2}.$$

Die Ausführungen in [8], Kapitel 3, zeigen, dass jeder Kern, der bei einer elliptischen partiellen Differentialgleichung auftreten kann, stets asymptotisch glatt ist. Die Kernfunktion im Falle der Lamé-Gleichungen ist asymptotisch glatt und ihre degenerierte Approximation konvergiert exponentiell.

Die Approximation der Kernfunktion durch Interpolation liefert in zwei Dimensionen akzeptable Ergebnisse. In drei Dimensionen aber besitzt die degenerierte Approximation einen deutlich zu großen Rang.

3.2 Definition und Eigenschaften hierarchischer Matrizen

Die allgemeine H -Matrix benutzt bei der Speicherung der zulässigen Blöcke eine Rang- k -Matrix in faktorisierter Form.

Definition 65. Es seien I und J Indexmengen und P eine zulässige Partition von $I \times J$. Der Rang der zulässigen Blöcke sei mit $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann besteht die Menge der hierarchischen Matrizen $H(k, P)$ aus allen $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit

$$\text{rang}(M|_{\tau \times \sigma}) \leq k$$

für alle $\tau \times \sigma \in P^+$, wobei

$$P^+ = \{b \in P : \text{mincs}(b) = \text{wahr}\}.$$

Auf eine Charakterisierung der Blöcke von $P^- = P \setminus P^+$ wurde in der Definition verzichtet. Am gebräuchlichsten ist es, die Blöcke voll abzuspeichern, denn eine Umwandlung in Rang- k -Format würde den Speicheraufwand vergrößern. Anstelle eines fixierten Ranges k kann auch eine adaptive Wahl pro Block getroffen werden.

Für die Abschätzung des gesamten Speicheraufwandes einer $H(k, P)$ -Matrix sei kurz die Größe c_{sp} erwähnt.

Definition 66. Das Schwachbesetztheitsmaß c_{sp} ist definiert durch

$$c_{sp}(P) = \max \left\{ \max_{\tau \in T(I)} c_{sp,l}(\tau), \max_{\sigma \in T(J)} c_{sp,r}(\sigma) \right\},$$

wobei

$$\begin{aligned} c_{sp,l} &= \# \{ \sigma \in T(J) : \tau \times \sigma \in P \}, \\ c_{sp,r} &= \# \{ \tau \in T(I) : \tau \times \sigma \in P \}. \end{aligned}$$

Die Größen $c_{sp,l}$ und $c_{sp,r}$ beschreiben wie häufig die Cluster τ und σ als Spalten- bzw. Zeilenblock, in der Partition P enthalten sind. Werden die Cluster mittels PCA erzeugt, so ist das Schwachbesetztheitsmaß konstant. Verwendet man allerdings die Konstruktion mittels Minimalquader, so kann bereits für einfache Beispiele gezeigt werden, dass c_{sp} nicht beschränkt ist.

Lemma 67 ([8]). *Die minimale Clustergröße (siehe Seite 51) sei mit n_{\min} gegeben. Dann beträgt der Speicheraufwand für Matrizen aus $H(k, P)$ höchstens*

$$c_{sp}(P) \max\{n_{\min}, k\} ((\text{tiefe}(T(I)) + 1)n + (\text{tiefe}(T(J)) + 1)m).$$

Beispiel 68. Betrachtet wird die Laplace-Gleichung aus Kapitel 2 auf einem Würfel der Kantenlänge 1. Weiter wird eine uniforme Verfeinerung des Gitters vorgenommen. In Tabelle 1 sind die Ergebnisse für die Approximation der Galerkin-Matrizen des Einfach- und Doppelschichtpotentials der Laplace-Gleichung aufgelistet.

| Netz | Knoten | Dreiecke | V in MB | Kompr. | pro DOF | K in MB | Kompr |
|------|--------|----------|-----------|--------|---------|-----------|-------|
| 0 | 8 | 12 | 0.001 | 1.08 | 103 | 0.007 | 9.86 |
| 1 | 26 | 48 | 0.02 | 1.09 | 419 | 0.01 | 1.10 |
| 2 | 98 | 192 | 0.32 | 1.13 | 1748 | 0.16 | 1.08 |
| 3 | 386 | 768 | 2.54 | 0.57 | 3475 | 1.93 | 0.85 |
| 4 | 1538 | 3072 | 16.4 | 0.23 | 5613 | 13.10 | 0.36 |
| 5 | 6146 | 12288 | 89.3 | 0.078 | 7621 | 71.73 | 0.12 |
| 6 | 24578 | 49152 | 449.2 | 0.024 | 9584 | 606.47 | 0.066 |
| 7 | 98306 | 196608 | 2149.8 | 0.007 | 11466 | 6134.62 | 0.042 |

Tabelle 1: Ergebnisse für die Approximation der Galerkin-Matrizen des Einfach- und Doppelschichtpotentials der Laplace-Gleichung mit $\epsilon = 10^{-4}$.

Rekompression der Niedrigrangblöcke

Die Erzeugung der Niedrigrangblöcke mittels der oben beschriebenen Verfahren führt häufig zu einem zu großen Rang. Um den optimalen Rang eines Blockes zu erhalten, wäre eine Singulärwertzerlegung des Blockes notwendig. Ist eine Matrix in Form von $M = AB^T$ gegeben, so kann mit Hilfe zweier QR - und einer gekürzten Singulärwertzerlegung eine bessere Approximation gefunden werden:

1. Berechne die QR -Zerlegung von $A = Q_A R_A$ und $B = Q_B R_B$,
2. Berechne die Singulärwertzerlegung von $R_A R_B^T = \hat{U} \Sigma \hat{V}^T$,
3. Setze $U = Q_A \hat{U}$ und $V = Q_B \hat{V}$.

Dann ist $U\Sigma V^\top$ die Singulärwertzerlegung von M und kann zur Bestimmung einer Bestapproximation benutzt werden.

In der Tabelle 2 wurde die Tensorinterpolation benutzt und anschließend eine Rekompresion angewandt. Im direkten Vergleich erkennt man eine deutlich bessere Kompression.

| Verfeinerung | Knoten | Dreiecke | V_{ohne} | V/V_{ohne} |
|--------------|--------|----------|-------------------|---------------------|
| 0 | 8 | 12 | 0.001 | 1 |
| 1 | 26 | 48 | 0.02 | 1 |
| 2 | 98 | 192 | 11.42 | 0.026 |
| 3 | 386 | 768 | 124.14 | 0.017 |
| 4 | 1538 | 3072 | 794.28 | 0.021 |
| 5 | 6146 | 12288 | 5078.76 | 0.018 |
| 6 | 24578 | 49152 | 28261.6 | 0.016 |
| 7 | 98306 | 196608 | > 143 GB | - |

Tabelle 2: Ergebnisse für die Approximation des Einfachschichtpotentials der Laplace-Gleichung mit und ohne Rekompresion.

3.3 Definition und Eigenschaften von H^2 -Matrizen

Für die Definition des H^2 -Formates werden zunächst Matrizen aus $M \in \mathcal{R}(k, \tau, \sigma)$ betrachtet. Eine geeignetere Darstellung der ursprünglichen Form

$$M = AB^\top$$

wird durch die Verwendung von Tensorprodukträumen motiviert.

Zu einem zulässigen Block $b = \tau \times \sigma \in P^+$ werden die Vektorräume

$$\mathcal{V}_b = \{v_1^b, \dots, v_{k_b, \mathcal{V}}^b\} \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}}, \quad \tilde{n} = \#\tau,$$

mit $\dim \mathcal{V}_b = k_{b, \mathcal{V}}$ und

$$\mathcal{W}_b = \{w_1^b, \dots, w_{k_b, \mathcal{W}}^b\} \subset \mathbb{R}^{\tilde{m}}, \quad \tilde{m} = \#\sigma$$

mit $\dim \mathcal{W}_b = k_{b, \mathcal{W}}$ fixiert. Die Basiselemente von \mathcal{V}_b und \mathcal{W}_b erzeugen die zugeordneten Matrizen

$$V_b = \left(v_1^b | \dots | v_{k_b, \mathcal{V}}^b \right) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times k_{b, \mathcal{V}}} \quad \text{und} \quad W_b = \left(w_1^b | \dots | w_{k_b, \mathcal{W}}^b \right) \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times k_{b, \mathcal{W}}}.$$

Der aufgespannte Vektorraum ist

$$\mathcal{V}_b \otimes \mathcal{W}_b = \text{span} \left\{ v_i^b \left(w_j^b \right)^\top : 1 \leq i \leq k_{b, \mathcal{V}}, 1 \leq j \leq k_{b, \mathcal{W}} \right\}.$$

Der Block ist nun durch

$$M|_b = V_b K_b W_b^\top, \quad K_b \in \mathbb{R}^{k_{b, \mathcal{V}} \times k_{b, \mathcal{W}}}$$

darstellbar.

Die uniformen H -Matrizen sind über diese Darstellung der $\mathcal{R}(k)$ -Matrizen gegeben.

Definition 69 ([27]). Sei $P \subset T(I \times J)$ eine Partition. Für alle $b \in P^+$ seien die Vektorräume \mathcal{V}_b und \mathcal{W}_b gegeben. Dann besteht die Menge der uniformen hierarchischen Matrizen $H(P, \{\mathcal{V}_b, \mathcal{W}_b\}_{b \in P^+})$ aus allen $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so dass für alle $b = \tau \times \sigma \in P^+$ gilt

$$M|_{\tau \times \sigma} \in \mathcal{V}_b \otimes \mathcal{W}_b.$$

Uniforme H -Matrizen sind folglich H -Matrizen und eine H -Matrix kann in eine uniforme umgewandelt werden. Der Speicherbedarf wird nicht verringert, da für jeden Block eine blockabhängige Basis abgespeichert werden muss.

Für die H^2 -Matrizen werden zu dem Block $b = \tau \times \sigma \in P^+$ die Vektorräume

$$\mathcal{V}_\tau = \{v_1^\tau, \dots, v_{k_{\tau,\nu}}^\tau\} \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}}$$

mit $\dim \mathcal{V}_\tau = k_{\tau,\nu}$ und

$$\mathcal{W}_\sigma = \{w_1^\sigma, \dots, w_{k_{\sigma,\omega}}^\sigma\} \subset \mathbb{R}^{\tilde{m}}$$

mit $\dim \mathcal{W}_\sigma = k_{\sigma,\omega}$ fixiert. Die Basiselemente von \mathcal{V}_τ und \mathcal{W}_σ erzeugen die zugeordneten Matrizen V_τ und W_σ . Der Block ist nun durch

$$M|_{\tau \times \sigma} = V_\tau K_b W_\sigma^\top, \quad K_b \in \mathbb{R}^{k_{\tau,\nu} \times k_{\sigma,\omega}}$$

darstellbar.

Definition 70 ([27]). Sei $P \subset T(I \times J)$ eine Partition. Für alle $\tau \in T(I)$ und $\sigma \in T(J)$ seien die Vektorräume \mathcal{V}_τ und \mathcal{W}_σ gegeben. Dann besteht die Menge $H(P, \{\mathcal{V}_\tau\}_{\tau \in T(I)}, \{\mathcal{W}_\sigma\}_{\sigma \in T(J)})$ aus allen $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so dass für alle $b = \tau \times \sigma \in P^+$

$$M|_{\tau \times \sigma} \in \mathcal{V}_\tau \otimes \mathcal{W}_\sigma$$

gilt. Die Menge der links uniformen hierarchischen Matrizen $H(P, \{\mathcal{V}_\tau\}_{\tau \in T(I)}, \{\mathcal{W}_b\}_{b \in P})$ besteht aus allen $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so dass für alle $b = \tau \times \sigma \in P^+$

$$M|_{\tau \times \sigma} \in \mathcal{V}_\tau \otimes \mathcal{W}_b$$

gilt. Die Menge der rechts uniformen Matrizen wird analog definiert.

Der Speicheraufwand hat sich gegenüber den uniformen H -Matrizen verringert. Es müssen anstelle von $\{V_b, W_b\}_{b \in P^+}$ nur die Basen $\{\mathcal{V}_\tau\}_{\tau \in T(I)}$ und $\{\mathcal{W}_\sigma\}_{\sigma \in T(J)}$ abgespeichert werden. Weiter sei die Einschränkung eines Teilvektorraumes \mathcal{U} von \mathbb{R}^n definiert durch

$$\mathcal{U}|_\tau = \{v|_\tau : v \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}}.$$

Sei τ' ein Sohn von $\tau \in T(I)$ und σ' ein Sohn von $\sigma \in T(J)$. Gilt für alle $\tau' \in S(\tau)$ und $\sigma' \in S(\sigma)$

$$\mathcal{V}_\tau|_{\tau'} \subset \mathcal{V}_{\tau'} \quad \text{und} \quad \mathcal{W}_\sigma|_{\sigma'} \subset \mathcal{W}_{\sigma'},$$

so wird die Basis geschachtelt genannt. Es gibt daher Matrizen $E_{\tau'}^V \in \mathbb{R}^{k_{\tau,\nu} \times k_{\tau',\nu}}$ und $E_{\sigma'}^W \in \mathbb{R}^{k_{\sigma,\omega} \times k_{\sigma',\omega}}$ mit

$$V_\tau = \sum_{\tau' \in S(\tau)} (V_{\tau'} E_{\tau'}^V) |^{\tau \times k_{\tau,\nu}}$$

und

$$W_\sigma = \sum_{\sigma' \in S(\sigma)} (W_{\sigma'} E_{\sigma'}^W) |^{\tau \times k_{\sigma,\omega}}.$$

Definition 71. Sind $\{\mathcal{V}_\tau\}_{\tau \in T(I)}$ und $\{\mathcal{W}_\sigma\}_{\sigma \in T(J)}$ geschachtelte Basen, dann wird die Menge $H(P, \{\mathcal{V}_\tau\}_{\tau \in T(I)}, \{\mathcal{W}_\sigma\}_{\sigma \in T(J)})$ als

$$H^2(P, \{\mathcal{V}_\tau\}_{\tau \in T(I)}, \{\mathcal{W}_\sigma\}_{\sigma \in T(J)})$$

bezeichnet. Ist die Anzahl der Basiselemente durch $k \in \mathbb{N}_0$ beschränkt, so wird die Menge mit

$$H^2(k, P, \{\mathcal{V}_\tau\}_{\tau \in T(I)}, \{\mathcal{W}_\sigma\}_{\sigma \in T(J)})$$

bezeichnet.

Lemma 72 ([27]). *Der Speicherbedarf der geschachtelten Basen ergibt sich zu*

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau \in \mathcal{L}(T(I))} \#\tau k_{\tau, \mathcal{V}} + \sum_{\tau \in \mathcal{L}(T(I)) \setminus \{I\}} k_{\text{Vater}(\tau), \mathcal{V}} k_{\tau, \mathcal{V}} \\ & + \sum_{\sigma \in \mathcal{L}(T(J))} \#\sigma k_{\sigma, \mathcal{W}} + \sum_{\sigma \in \mathcal{L}(T(J)) \setminus \{J\}} k_{\text{Vater}(\sigma), \mathcal{W}} k_{\sigma, \mathcal{W}}. \end{aligned}$$

Der Speicherbedarf der geschachtelten Basis einer $H^2(k, P, \{\mathcal{V}_\tau\}_{\tau \in T(I)}, \{\mathcal{W}_\sigma\}_{\sigma \in T(J)})$ ergibt sich zu

$$(n + m)k + 2k^2(\#\mathcal{L}(T(I)) + \#\mathcal{L}(T(J)) - 2).$$

Der gesamte Speicherbedarf ist von der Ordnung $(n + m)k$.

Beispiel 73. Die geschachtelten Basen sind bei der Vorgabe der Kernfunktion als eine degenerierte Approximation bzw., falls die Kernfunktion

$$k(x, y) = \sum_{\nu=1}^l \varphi_\nu^{(l)}(x) \psi_\nu^{(l)}(y)$$

selbst degeneriert ist, einfach zu erhalten. Für jeden Block $b = \tau \times \sigma \in P^+$ seien die entsprechenden Vektorräume

$$\mathcal{V}_\tau^k = \text{span}\{\varphi_\nu^{(\tau)} : 1 \leq \nu \leq k_{\tau, \mathcal{V}}\}$$

und

$$\mathcal{W}_\sigma^k = \text{span}\{\psi_\nu^{(\sigma)} : 1 \leq \nu \leq k_{\sigma, \mathcal{W}}\}$$

gegeben. Für die Eigenschaft der Schachtelung übertragen sich die obigen Bedingungen analog zu

$$\mathcal{V}_\tau^k|_{X_{\tau'}} \subset \mathcal{V}_{\tau'}^k, \quad \tau' \in S(\tau)$$

und

$$\mathcal{W}_\sigma^k|_{X_{\sigma'}} \subset \mathcal{W}_{\sigma'}^k, \quad \sigma' \in S(\sigma).$$

Die kontinuierlichen Funktionenräume implizieren, dass die entsprechend definierten

$$\mathcal{V}_\tau = \text{span}\{(a_{i\nu})_{i \in \tau} : 1 \leq \nu \leq k_{\tau, \mathcal{V}}\}$$

und

$$\mathcal{W}_\sigma = \text{span}\{(b_{i\nu})_{i \in \tau} : 1 \leq \nu \leq k_{\sigma, \mathcal{W}}\}$$

diese Eigenschaft erben (siehe Gleichung (35) für $a_{i\nu}$ und $b_{j\nu}$). Auf den Integraloperator

$$(\mathcal{A}v)(y) = \int_{\Gamma} k(x, y)v(x)ds_x$$

wird das Galerkin-Verfahren angewandt. Dann haben die Matrixeinträge die Form

$$A_{ij} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(x, y)\phi_i(y)\phi_j(x)ds_x ds_y, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Zur Vereinfachung sei Γ ein Intervall und $b = \tau \times \sigma \in P^+$ und die degenerierte Approximation des Kernes sei gegeben durch

$$k(x, y) = \sum_{\nu=1}^l \sum_{\mu=1}^l k(x_\nu^\tau, x_\mu^\sigma) L_\nu^\tau(x) L_\mu^\sigma(y), \quad (x, y) \in X_\tau \times X_\sigma \subset \Gamma \times \Gamma.$$

Die Lagrangepolynome erfüllen $L_\nu^\tau(x_\mu^\tau) = \delta_{\nu\mu}$ und besitzen deswegen die Schachtelungseigenschaft.

Die Approximation durch Interpolation liefert, wie in Kapitel 3.2 am numerischen Beispiel gezeigt wurde, häufig zu große Ränge bei größer werdender Dimension. Die wesentliche Frage ist die der Konstruktion der geschachtelten Basis aus einer H -Matrix.

Im Unterschied zum Beispiel können die geschachtelten Basen nicht aufgrund von bestimmten Basisfunktionen gebaut werden. Diese Information geht in der H -Matrix aufgrund der Darstellung der Niedrigrangblöcke verloren. Um dennoch an eine Basis zu kommen, werden zunächst links uniforme hierarchische Matrizen gebildet, für die bereits eine totale Clusterbasis vorliegt.

Definition 74. Sei $\tau \in T(I)$. Dann ist die Menge aller Nachfolger gegeben durch

$$S^*(\tau) = \begin{cases} \{\tau\} \cup \bigcup_{\tau' \in S(\tau)} S^*(\tau') & , \text{ falls } S(\tau) \neq \emptyset, \\ \{\tau\} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

und die Menge aller Vorgänger

$$\text{vorg}(\tau) = \{\tau' \in T(I) : \tau \in S^*(\tau')\}.$$

Für eine Blockpartition P zu $T(I)$ und $T(J)$ werden zulässige Blockzeilen und Blockspalten definiert durch

$$\text{zeile}^+(P, \tau) = \{\sigma \in T(J) : (\tau, \sigma) \in P^+\}$$

und

$$\text{spalte}^+(P, \sigma) = \{\tau \in T(I) : (\tau, \sigma) \in P^+\},$$

sowie deren erweiterte Version

$$\text{zeile}^*(P, \tau) = \bigcup_{\tau' \in \text{vorg}(\tau)} \text{zeile}^+(P, \tau').$$

Definition 75 (Totale Clusterbasis). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Die Menge $(V_\tau)_{\tau \in T(I)}$

$$V_\tau = \sum_{\sigma \in \text{zeile}^*(P, \tau)} \chi_\tau A \chi_\sigma = \sum_{\tau' \in \text{vorg}(\tau)} \sum_{\sigma \in \text{zeile}^+(P, \tau')} \chi_\tau A \chi_\sigma$$

heißt totale Clusterbasis und ist geschachtelt. Die Abbildung $\chi_\tau : T(I) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die Darstellung

$$(\chi_\tau)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } i = j \in \tau, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung χ_σ wird analog definiert.

Für die geschachtelte totale Basis seien Matrizen $C_\tau \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und $D_\tau \in \mathbb{R}^{m \times k}$ gegeben, so dass

$$V_\tau - C_\tau D_\tau^\top$$

in einer geeigneten Norm klein genug ist für alle $\tau \in T(I)$. Die Konstruktion einer orthogonalen geschachtelten Clusterbasis funktioniert wie folgt: Wenn τ ein Blatt von $T(I)$ ist, wird C_τ mittels QR -Zerlegung in die Form

$$C_\tau = Q_\tau R_\tau$$

gebracht. Sei $\tau \in T(I)$ kein Blatt. Dann gibt es Söhne $\{\tau_1, \dots, \tau_t\}$ und vorher konstruierte $Q_{\tau_i} \in \mathbb{R}^{n \times \#\tau_i}$ für alle $i = 1, \dots, t$. Die Projektion von C_τ wird definiert durch

$$\tilde{C}_\tau = U_\tau U_\tau^\top C_\tau = U_\tau \underbrace{\begin{pmatrix} Q_{\tau_1}^\top C_\tau \\ \vdots \\ Q_{\tau_t}^\top C_\tau \end{pmatrix}}_{\hat{C}_\tau \in \mathbb{R}^{\#\tau \times k}} = \sum_{\tau' \in S(\tau)} Q_{\tau'} Q_{\tau'}^\top C_\tau = U_\tau \hat{C}_\tau.$$

Eine weitere QR -Zerlegung von $\hat{C}_\tau = \hat{Q}_\tau R_\tau$ liefert die gesuchte Faktorisierung

$$C_\tau = Q_\tau R_\tau$$

mit

$$Q_\tau = U_\tau \hat{Q}_\tau = (Q_{\tau_1} | \dots | Q_{\tau_t}) \begin{pmatrix} E_{\tau_1}^V \\ \vdots \\ E_{\tau_t} \end{pmatrix},$$

wobei $E_{\tau_i}^V = \hat{Q}_\tau|_{\tau_i \times \tau}$. Somit wurde eine geschachtelte orthogonale Clusterbasis $V_\tau = Q_\tau$ für alle $\tau \in T(I)$ konstruiert. Die Matrix wird als links uniforme H -Matrix dargestellt.

Analog wird das Verfahren auf A^\top angewandt, um eine Clusterbasis für W zu erhalten. Die entsprechenden K_b werden aus den R_τ und R_σ erhalten. Für Darstellung der Matrix in Form einer H^2 -Matrix sind nun alle Voraussetzungen erfüllt.

Eine optimierte Version dieses Vorgehens für hierarchische Matrizen findet sich in [9, Kapitel 6]. Eine weitere effektive Strategie um eine Clusterbasis zu erhalten ist, diese durch Abschneiden von Singulärwerten zu gewinnen. Die Konstruktion einer H^2 -Matrix, ohne den Umweg über eine bereits erstellte H -Matrix, ist möglich und wird ebenfalls in [9] beschrieben.

3.4 Vergleich H - und H^2 -Matrix

H -Matrizen besitzen durch ihre einfache Struktur der Blöcke aus P^+ grundsätzlich den Vorteil, dass Operationen wie die Matrix-Vektor-Multiplikation, einfacher ausgeführt und parallelisiert werden können.

Matrix-Vektor-Multiplikation

Sei A eine $H(k, P)$ -Matrix zu der Blockpartition $P \subset T(I \times J)$, wobei $n = \#I$, $m = \#J$. Für $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$ zerfällt das Produkt $y = Ax$ in die Matrix-Vektor-Multiplikation der einzelnen Blöcke. Es gilt

$$y = \sum_{\tau \times \sigma \in P} A|_{\tau \times \sigma} x|_\sigma.$$

Lemma 76. *Die Anzahl an Operationen N_{MV} lässt sich durch den Speicheraufwand $S_H(k, P)$ angeben mit*

$$S_H(k, P) \leq N_{MV} \leq 2S_H(k, P).$$

Eine direkte Übertragung auf eine $H^2(k, P)$ -Matrix ist möglich, liefert allerdings ein nicht optimales Vorgehen. Stattdessen wird die Multiplikation in drei Schritte zerlegt. Zunächst werden für $\sigma \in \mathcal{L}(T(J))$

$$\hat{x}_\sigma = W_\sigma^\top x|_\sigma \in \mathbb{R}^{k_{\sigma, \mathcal{W}}}$$

berechnet und anschließend mit Hilfe der Transfermatrizen

$$\hat{x}_\sigma = W_\sigma^\top x|_\sigma = \sum_{\sigma' \in S(\sigma)} \left((W_{\sigma'} E_{\sigma'}^W) |^{\tau \times k_{\sigma, \mathcal{W}}} \right)^\top x|_{\sigma'} = \sum_{\sigma' \in S(\sigma)} \left((E_{\sigma'}^W) |^{\tau \times k_{\sigma, \mathcal{W}}} \right)^\top \hat{x}_{\sigma'}$$

für $\sigma \in T(J) \setminus \mathcal{L}(T(J))$ bestimmt. Anschließend wird mittels

$$\hat{y}_\tau = \sum_{\substack{\sigma \in T(J) \\ \tau \times \sigma \in P^+}} K_{\tau \times \sigma} \hat{x}_\sigma$$

für alle $\tau \in T(I)$ berechnet. Analog zum ersten Schritt wird mit Hilfe der Transfermatrizen

$$y|_\tau = \sum_{\tau' \in S(\tau)} (V_{\tau'}(\hat{y}_{\tau'} + E_{\tau'}^V \hat{y}_\tau)) |^{\tau \times k_{\tau, \mathcal{V}}}$$

für $\tau \in T(I) \setminus \mathcal{L}(T(I))$ und

$$y|_\tau = V_\tau \hat{y}_\tau$$

für $\tau \in \mathcal{L}(T(I))$ bestimmt. Die Multiplikation der Blöcke aus P^- wird anschließend ausgeführt.

Korollar 77. *Die Anzahl der Operationen für die Matrix-Vektor-Multiplikation mit einer H^2 -Matrix entspricht dem Speicherbedarf der Clusterbasen, Kopplungsmatrizen und aller vollbesetzten Blöcke und ist von der Ordnung $(n + m)k$.*

Beispiel 78. Betrachtet wird die Laplace-Gleichung aus Kapitel 2 auf einem Würfel der Kantenlänge 1. Weiter wird eine uniforme Verfeinerung des Gitters vorgenommen. In Tabelle 3 sind die Ergebnisse der Matrix-Vektor-Multiplikation des Einfach- und Doppelschichtpotentials der Laplace-Gleichung aufgeführt.

H -Matrix

| Verfeinerung | Knoten | Dreiecke | Zeit V | pro DOF | Zeit K |
|--------------|--------|----------|----------|---------|----------|
| 0 | 26 | 48 | 0.0002 | 0.4 | 0.0001 |
| 1 | 98 | 192 | 0.0042 | 2.18 | 0.001 |
| 2 | 386 | 768 | 0.066 | 8.55 | 0.032 |
| 3 | 1538 | 3072 | 0.30 | 9.84 | 0.33 |
| 4 | 6146 | 12288 | 1.61 | 13.13 | 2.02 |
| 5 | 24578 | 49152 | 7.93 | 16.14 | 11.42 |

H^2 -Matrix

| Verfeinerung | Knoten | Dreiecke | Zeit V | pro DOF | Zeit K |
|--------------|--------|----------|----------|---------|----------|
| 0 | 26 | 48 | 0.003 | 6.25 | 0.002 |
| 1 | 98 | 192 | 0.23 | 118.38 | 0.22 |
| 2 | 386 | 768 | 0.23 | 29.60 | 0.21 |
| 3 | 1538 | 3072 | 0.31 | 10.12 | 0.33 |
| 4 | 6146 | 12288 | 0.98 | 7.98 | 1.14 |
| 5 | 24578 | 49152 | 3.59 | 7.31 | 4.44 |

Tabelle 3: Ergebnisse der Matrix-Vektor-Multiplikation der Galerkin-Matrizen des Einfach- und Doppelschichtpotentials der Laplace-Gleichung. Angabe der Zeit in 10^{-2} Sekunden. Angabe pro DOF in 10^{-5} . Die Genauigkeit der Approximation betrug stets 10^{-4} .

Speicheraufwand

Den Speicheraufwand kann man grundsätzlich auf zwei Arten vergleichen. Bei fixiertem ϵ -Rang wird der Speicheraufwand bei einer uniformen Verfeinerung des Gitters angegeben. Hier erwartet man bei den H -Matrizen einen Anstieg mit etwa $N \log N$ und bei den H^2 -Matrizen mit N . Die Ergebnisse des Speicheraufwandes für das Einfach- und Doppelschichtpotential sind in Tabelle 4 angegeben.

| Verfeinerung | Knoten | Dreiecke | V | pro DOF | K |
|--------------|--------|----------|--------|---------|--------|
| 0 | 26 | 48 | 0.02 | 0.4 | 0.01 |
| 1 | 98 | 192 | 0.33 | 1.73 | 0.15 |
| 2 | 386 | 768 | 3.80 | 5.07 | 2.53 |
| 3 | 1538 | 3072 | 24.92 | 8.31 | 22.98 |
| 4 | 6146 | 12288 | 147.13 | 12.26 | 157.85 |
| 5 | 24578 | 49152 | 769.65 | 16.03 | 958.51 |

| Verfeinerung | Knoten | Dreiecke | V | pro DOF | K |
|--------------|--------|----------|--------|---------|--------|
| 0 | 26 | 48 | 0.02 | 0.4 | 0.01 |
| 1 | 98 | 192 | 0.33 | 1.74 | 0.18 |
| 2 | 386 | 768 | 2.28 | 3.04 | 1.96 |
| 3 | 1538 | 3072 | 9.75 | 3.25 | 9.43 |
| 4 | 6146 | 12288 | 38.81 | 3.23 | 33.99 |
| 5 | 24578 | 49152 | 151.21 | 3.15 | 111.39 |

Tabelle 4: Ergebnisse für die Approximation des Einfach- und Doppelschichtpotentials der Laplace-Gleichung bei einer vorgegebenen Genauigkeit von 10^{-4} . Angabe pro DOF in KB.

Andererseits kann der Speicheraufwand bei fixiertem Gitter in Abhängigkeit der Genauigkeit betrachtet werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zu finden.

| ϵ | V | | K | |
|------------|--------|--------|--------|-------|
| | H | H^2 | H | H^2 |
| 10^{-3} | 61.74 | 25.00 | 54.89 | 21.68 |
| 10^{-4} | 88.07 | 38.81 | 75.26 | 33.99 |
| 10^{-5} | 118.39 | 60.48 | 99.79 | 51.32 |
| 10^{-6} | 155.22 | 85.35 | 124.3 | 71.99 |
| 10^{-7} | 193.74 | 116.91 | 150.86 | 96.71 |

Tabelle 5: Ergebnisse für die Approximation des Einfach- und Doppelschichtpotentials der Laplace-Gleichung bei vorgegebener Genauigkeit. Verwendet wurde das Gitter der 4. Verfeinerung.

Teil II

Radiale Basisfunktionen

Gitterfreie Methoden stehen in letzter Zeit im Fokus der aktuellen Forschung. So wurden zum Thema radiale Basisfunktionen (RBF) zahlreiche Paper zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen (siehe z.B. [17]) bzw. zur Rekonstruktion von Oberflächen (siehe z.B. Grzibovskis [24]) veröffentlicht. Den Grundstein der Theorie für radiale Basisfunktionen legte Zongming, [72], woraufhin sich das Interesse signifikant steigerte. Bereits 1994 trug Wendland in seiner Diplomarbeit, [68], einen wesentlichen Teil zur Entwicklung bei und veröffentlichte 2004 sein Buch, [69], über “Scattered Data Approximation”. Einen beträchtlichen Anteil leistete zu dieser Zeit auch Fasshauer, welcher sich zu Beginn näher mit der Hermite-Interpolation auf Kugeloberflächen beschäftigte.

Auf diesen Ergebnissen bauen die Arbeiten [22] und [23] von Fuselier auf. Er beschäftigt sich dort mit der Konstruktion von divergenz- und rotationsfreien matrixwertigen radialen Basisfunktionen, deren nativen Räumen und Erweiterungen, nebst Eigenwerten der Interpolationsmatrix.

Ziel des Kapitels ist es, mit Hilfe der Basisfunktionen für vektorwertige elliptische partielle Differentialgleichungen näherungsweise partikuläre Lösungen herzuleiten und für diese Fehler- und Stabilitätsabschätzungen zu gewinnen.

Im Verlauf des Kapitels wird eine weitere Klasse von matrixwertigen radialen Basisfunktionen behandelt, deren Eigenschaften es ermöglichen partikuläre Lösungen für elliptische Differentialgleichungen anzugeben, vorausgesetzt die gesuchte Lösung erfüllt gewisse Eigenschaften.

Für die Anwendung auf das Schädigungsmodell im Konzept der BEM wird in Kapitel 7.4 die Kopplung mit der BEM zusammen mit der entsprechenden Gebietszerlegung diskutiert. Auf der numerischen Seite wurde ein Krylov-Verfahren entwickelt, welches sowohl im Kontext der radialen Basisfunktionen als auch zur Invertierung der Galerkin-Matrix des Einfachschichtpotentials der BEM Einsatz findet. Die Anwendung der hierarchischen Matrizen wird ebenfalls auf den RBF-Kontext durchgeführt. Mit Hilfe der asymptotischen Glattheit kann gezeigt werden, dass eine Niedrigrangapproximation möglich ist.

4 Grundbegriffe

Mit X wird stets eine Menge von N Punkten $x_j \in \mathbb{R}^d$ bezeichnet sowie die Werte einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit c_j , also $f(x_j) = c_j$, $j = 1, \dots, N$. Aus welchem Raum die Funktion stammt, spielt hier zunächst keine Rolle.

Eine reelle Funktion $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ wird als radiale Basisfunktion bezeichnet, falls der Wert der Funktion nur vom Abstand des Punktes vom Ursprung abhängt. Es muss also eine Funktion $\tilde{\phi} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = \tilde{\phi}(r)$, $r = \|x\|_2$ existieren. Es gibt einige Vertreter mit mehr oder weniger großen Vorteilen:

- Die Gauß'sche radiale Basisfunktion

$$\tilde{\phi}(r) = e^{-\alpha r^2}$$

mit Parameter $\alpha > 0$. Als C^∞ -Funktion eignet sie sich insbesondere zur Interpolation von C^∞ -Funktionen.

- Wendland-Funktionen $\phi_{n,k}$, welche definiert sind durch

$$\tilde{\phi}_l(r) = (1 - r)_+^l, \quad l \in \mathbb{N}$$

und

$$\tilde{\phi}_{n,k}(r) = \mathcal{I}^k \tilde{\phi}_{\lfloor n/2 \rfloor + k + 1}(r), \quad k \in \mathbb{N}$$

mit

$$\mathcal{I}\tilde{\phi}(r) = \begin{cases} \int_r^\infty s\tilde{\phi}(s)ds & , r > 0 \\ \int_r^0 s\tilde{\phi}(s)ds & , r < 0 \end{cases}.$$

Diese Funktionen haben einen kompakten Träger und liegen in C^{2k} .

- Hardy Multiquadrics

$$\tilde{\phi}(r) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} (c^2 + r^2)^\beta,$$

$\beta > 0$ und $\beta \notin \mathbb{N}$.

- Inverse Multiquadrics

$$\tilde{\phi}(r) = (c^2 + r^2)^{-\beta},$$

$\beta > d/2$.

- Thin Plate Spline

$$\tilde{\phi}(r) = (-1)^{k+1} r^{2k} \log(r), \quad k \in \mathbb{N}.$$

- einfache Potenzen

$$\tilde{\phi}(r) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} r^\beta, \quad \beta > 0 \text{ und } \beta \notin \mathbb{N}.$$

Definition 79 (Gitternorm). Es sei X eine Menge von N Punkten und Ω ein beschränktes Gebiet mit $X \subset \Omega$. Die Gitternorm von X bezüglich Ω ist definiert durch

$$h_{X,\Omega} = \sup_{x \in \Omega} \inf_{x_j \in X} \|x - x_j\|_2.$$

Bemerkung. Definition 79 macht nur für beschränkte Gebiete Sinn, da sonst $h_{X,\Omega}$ unendlich ist.

Die Gitternorm kann vielfach geometrisch interpretiert werden. Eine mögliche Veranschaulichung ist die folgende: Für alle $x \in \Omega$ existiert ein Punkt $x_{j^*} \in X$, welcher höchstens $h_{X,\Omega}$ von x entfernt ist.

Definition 80 (Separationsradius). Es sei X eine Menge von N Punkten. Der Separationsradius von X ist definiert durch

$$q_X = \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|_2.$$

Es gilt stets $q_X \leq h_{X,\Omega}$. Viel wichtiger ist jedoch das Verhältnis

$$\rho_{X,\Omega} = \frac{h_{X,\Omega}}{q_X} \geq 1.$$

Bemerkung. $\rho_{X,\Omega}$ ist ein Maß dafür, wie gleichmäßig die Punkte in Ω verteilt sind. Existiert z.B. ein „Loch“, so gilt beispielsweise $\rho_{X,\Omega} \gg 1$.

Nativer Raum

Definition 81 (reproduzierender Kern). Es sei H ein Hilbertraum von Funktionen

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$. Eine Funktion $\Phi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wird reproduzierender Kern für H genannt, falls

1. $\Phi(\cdot, y) \in H$ für alle $y \in \Omega$,
2. $f(y) = (f, \Phi(\cdot, y))_H$ für alle $f \in H$ und alle $y \in \Omega$.

Das folgende Korollar liefert Existenz und Eindeutigkeit eines reproduzierenden Kernes.

Korollar 82 ([69]). *Es sei H ein Hilbertraum von Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit Dualraum H^* .*

1. *Falls Φ ein reproduzierender Kern für H ist, so ist er eindeutig.*
2. *H besitzt einen reproduzierenden Kern genau dann, wenn die Punktauswertungen $\delta_y(f) = f(y)$ für $f \in H$ in H^* liegen für alle $y \in \Omega$.*
3. *Falls H den reproduzierenden Kern Φ besitzt, gilt*

$$\Phi(x, y) = (\Phi(\cdot, x), \Phi(\cdot, y))_H = (\delta_x, \delta_y)_{H^*}.$$

Die Eigenschaft „positiv definit“ aus dem vorangegangenen Kapitel überträgt sich in diesem Fall auf natürliche Weise:

Definition 83. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Φ ist positiv definit, falls für alle $N \in \mathbb{N}$ die Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, bestehend aus paarweise verschiedenen Punkten und für alle $\alpha \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \Phi(x_i, x_j) > 0$$

gilt.

Die Definition besagt insbesondere, dass die Matrix $A_{\Phi, X} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, definiert durch

$$(A_{\Phi, X})_{ij} = \Phi(x_i, x_j)$$

positiv definit ist.

Betrachtet man für eine Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, bestehend aus N paarweise verschiedenen Punkten, die Definition 83, so folgt für $\alpha \in \mathbb{R}^N$ mit Korollar 82

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \Phi(x_i, x_j) = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{x_i}, \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} \right)_{H^*} = \left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \delta_{x_j} \right\|_{H^*}^2 \geq 0,$$

dass der reproduzierende Kern positiv semidefinit ist. Die Ungleichung ist sogar strikt, falls zusätzlich gefordert wird, dass die Punktauswertungen δ_{x_j} linear unabhängig sind. Demzufolge wäre der reproduzierende Kern positiv definit.

Korollar 84. *Es sei H ein Hilbertraum von Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit reproduzierendem Kern $\Phi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Φ ist positiv definit genau dann, wenn die Punktauswertungen linear unabhängig sind.*

Die Konstruktion des sogenannten nativen Raumes für einen Kern Φ erfolgt zunächst über eine Zwischenstufe. Sei Hilbertraum H mit einem stetigen, symmetrisch positiv definiten reproduzierendem Kern Φ . Dann sind Elemente der Form

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot, x_j)$$

in H enthalten mit $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$, denn

$$\|f\|_H^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k (\Phi(\cdot, x_j), \Phi(\cdot, x_k))_H = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j, x_k) < \infty. \quad (36)$$

Es liegt folglich nahe, den Raum

$$F_\Phi(\Omega) = \text{span} \{ \Phi(\cdot, y) : y \in \Omega \}$$

zu definieren und mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{F_\Phi(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{N_f} \alpha_j \Phi(\cdot, x_j), \sum_{k=1}^{N_g} \beta_k \Phi(\cdot, y_k) \right)_{F_\Phi(\Omega)} = \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_g} \alpha_j \beta_k \Phi(x_j, y_k),$$

mit $X = \{x_1, \dots, x_{N_f}\} \subset \Omega$ und $Y = \{y_1, \dots, y_{N_g}\} \subset \Omega$ zu verstehen (Korollar 84).

Durch den Abschluss von $F_\Phi(\Omega)$ bezüglich der von $(\cdot, \cdot)_{F_\Phi(\Omega)}$ induzierten Norm wird ein entsprechender Raum $\mathcal{F}_\Phi(\Omega)$ konstruiert. Um eine Funktion $f \in \mathcal{F}_\Phi(\Omega)$ punktweise auswerten zu können, wird

$$f(x) = (f, \Phi(\cdot, x))_{F_\Phi(\Omega)}, \text{ für alle } f \in \mathcal{F}_\Phi(\Omega)$$

definiert und die zugehörige Abbildung durch

$$R : \mathcal{F}_\Phi(\Omega) \rightarrow C(\Omega), \quad = (f, \Phi(\cdot, x))_{F_\Phi(\Omega)}$$

bezeichnet.

Definition 85. Es sei $\Phi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein symmetrischer und positiv definit Kern. Der zu Φ gehörige native Hilbertraum ist durch

$$\mathcal{N}_\Phi(\Omega) = R\mathcal{F}_\Phi(\Omega)$$

definiert, mit innerem Produkt

$$(f, g)_{\mathcal{N}_\Phi(\Omega)} = (Rf, R^{-1}g)_{F_\Phi(\Omega)}.$$

Satz 86. *Es seien $\Phi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein symmetrischer und positiv definit Kern und H ein Hilbertraum mit Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ist Φ der reproduzierende Kern für H , dann ist $H = \mathcal{N}_\Phi(\Omega)$ und das innere Produkt ist gleich.*

Der native Raum spielt eine wesentliche Rolle bei Fehlerabschätzungen, ist aber auf der anderen Seite sehr restriktiv und ist als Funktionenraum sehr eng. Deswegen wurde von H. Wendland in [69] ein Verfahren entwickelt, den nativen Raum zu verlassen, um so auch Funktionen aus Sobolev-Räumen interpolieren zu können und Fehlerabschätzungen anzugeben.

5 Matrixwertige radiale Basisfunktionen

Matrixwertige radiale Basisfunktionen sind ein neues Gebiet der Theorie der radialen Basisfunktionen. Zu den in Abschnitt 5.1 bereits bekannten divergenz- und rotationsfreien matrixwertigen radialen Basisfunktionen wird ein neuer Typ, passend zum Lamé-Operator, konstruiert. Für diesen wird in Kapitel 5.2 die Stabilitätsaussage hergeleitet, und soweit möglich, der native Raum charakterisiert. Da aber im Kontext der Aufgabe eine partikuläre Lösung zu konstruieren auch Fehlerabschätzungen bezüglich einer Sobolev-Norm wünschenswert sind, wird die Aufgabe aus der Sicht einer verallgemeinerten Hermite-Interpolation betrachtet. Die Eindeutigkeit der partikulären Lösung wird durch zusätzliche Randbedingungen gesichert.

5.1 Grundbegriffe und Konstruktion

Zunächst wird unter einer matrixwertigen Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine gewöhnliche Funktion verstanden, deren einzelne Komponenten in einer Funktionenklasse liegen. Die Einschränkung auf \mathbb{R}^3 ist dabei rein problembezogen; es wären auch andere Fälle denkbar. Die Definition der positiven Definitheit überträgt sich in folgender Weise:

Definition 87. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine stetige symmetrische matrixwertige Funktion. Φ ist positiv semidefinit, falls für alle $N \in \mathbb{N}$ die Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, bestehend aus paarweise verschiedenen Punkten, und für alle $\alpha_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j^\top \Phi(x_j - x_k) \alpha_k \geq 0 \quad (37)$$

gilt. Ist Gleichung (37) strikt für $\alpha = (\alpha_1^\top, \dots, \alpha_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{3N} \setminus \{0\}$, so wird Φ positiv definit genannt.

In Narcowich und Ward, [48], wurden erstmals divergenzfreie Interpolanten eingeführt. Die Konstruktion erfolgte über eine entsprechende inverse Fouriertransformation. Es stellte sich heraus, dass die Konstruktion selbst einfach ist:

$$\Phi_{\text{div}} = (-\Delta I + \nabla \nabla^\top) \phi,$$

wobei ∇ der Gradient, und $\Delta = \nabla^\top \nabla$ der Laplace-Operator und $\phi \in C^2$ eine gewöhnliche radiale Basisfunktion ist. Die konstruierte Funktion ist eine matrixwertige Funktion

$$\Phi_{\text{div}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit divergenzfreien Spalten. Ein Interpolant der Form

$$g(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_{\text{div}}(x - x_i) \alpha_i \quad (38)$$

ist folglich divergenzfrei. Divergenzfreie Interpolanten mit Funktionen mit kompakten Trägern wurden von S. Lowitzsch, [41, 42], eingeführt. Anstelle von globalen radialen Basisfunktionen fanden Wendland-Funktionen Verwendung.

In Fuselier, [22, 23], werden zusätzlich rotationsfreie matrixwertige RBF definiert. Ähnlich wie im Fall der divergenzfreien matrixwertigen radialen Basisfunktionen wird über

$$\Phi_{\text{curl}} = \nabla \nabla^\top \phi$$

eine matrixwertige radiale Basisfunktion definiert, deren Spalten rotationsfrei sind. Ein Interpolant in der Form

$$g(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_{\text{curl}}(x - x_i) \alpha_i$$

ist rotationsfrei.

Für beide Typen ist es möglich unter bestimmten Voraussetzungen die positive Definitheit nach Definition 87 zu zeigen.

Satz 88 ([23, 40]). *Es sei $\phi \in C^2$ eine positive definite radiale Basisfunktion auf \mathbb{R}^3 . Zusätzlich seien ϕ und $-\Delta\phi$ in $L_1(\mathbb{R}^3)$. Dann sind Φ_{div} und Φ_{curl} positiv definit.*

Als Folgerung erhält man direkt, dass das Interpolationsproblem eindeutig lösbar ist. Die Definition 81 überträgt sich in natürlicher Weise.

Definition 89. Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und H ein Hilbertraum von Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Eine Funktion $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ wird reproduzierender Kern für H genannt, falls

1. $\Phi(\cdot - y)c \in H$ für alle $y \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}^3$,
2. $c^\top f(y) = (f, \Phi(\cdot - y)c)_H$ für alle $f \in H$ und alle $y \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}^3$.

In der Definition des nativen Raumes wird die Abbildung R zu

$$R : \mathcal{F}_\Phi(\Omega) \rightarrow C(\Omega), R(f)_j(x) = (f, \Phi(\cdot - x)e_j)_\Phi, j = 1, 2, 3$$

abgeändert und überträgt sich danach in analoger Weise. Für die beiden Klassen von matrixwertigen radialen Basisfunktionen ergeben sich folgende Charakterisierungen der nativen Räume:

Satz 90 ([22, 40]). *Es sei $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ eine positiv definite Funktion mit $\phi, -\Delta\phi \in L_1(\mathbb{R}^3)$. Es sei*

$$\mathcal{G}_{\text{div}} = \left\{ f \in (L_1(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3))^3 : \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)^* \widehat{\Phi_{\text{div}}}(\xi)^+ \hat{f}(\xi) \, d\xi < \infty \text{ und } e_\xi^\top \hat{f}(\xi) = 0 \text{ f.ü.} \right\}$$

mit der Bilinearform

$$(f, g)_{\mathcal{G}_{\text{div}}} = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi)^* \widehat{\Phi_{\text{div}}}(\xi)^+ \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

versehen, wobei e_ξ der Einheitsvektor in Richtung ξ und $\widehat{\Phi_{\text{div}}}(\cdot)^+$ die pseudoinverse Matrix ist. Dann ist \mathcal{G}_{div} ein Hilbertraum mit Bilinearform $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{G}_{\text{div}}}$ und reproduzierendem Kern Φ_{div} und es gilt

$$\mathcal{N}_{\Phi_{\text{div}}} = \mathcal{G}_{\text{div}}.$$

Es sei

$$\mathcal{G}_{\text{curl}} = \left\{ f \in (L_2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3))^3 : \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)^* \widehat{\Phi_{\text{curl}}}(\xi)^+ \hat{f}(\xi) \, d\xi < \infty \right. \\ \left. \text{und } \hat{f}(\xi) = e_\xi h(\xi), h \in L_2(\mathbb{R}^3) \right\}$$

mit der Bilinearform

$$(f, g)_{\mathcal{G}_{\text{curl}}} = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi)^* \widehat{\Phi_{\text{curl}}}(\xi)^+ \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

versehen, wobei e_ξ der Einheitsvektor in Richtung ξ und $\widehat{\Phi_{\text{curl}}}(\cdot)^+$ die pseudoinverse Matrix ist. Dann ist $\mathcal{G}_{\text{curl}}$ ein Hilbertraum mit Bilinearform $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{G}_{\text{curl}}}$ und reproduzierendem Kern Φ_{curl} und es gilt $\mathcal{N}_{\Phi_{\text{curl}}} = \mathcal{G}_{\text{curl}}$. Sei weiter $s > 3/2$ und $\hat{\phi}$ erfülle zusätzlich die Abklingbedingung

$$c_1(1 + \|\xi\|_2^2)^{-(s+1)} \leq \hat{\phi}(\xi) \leq c_2(1 + \|\xi\|_2^2)^{-(s+1)}. \quad (39)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{div}} &= \{f \in (H^s(\mathbb{R}^3))^3 : \exists g \in (H^{s+1}(\mathbb{R}^3))^3 \text{ mit } \nabla \times g = f\}, \\ \mathcal{G}_{\text{curl}} &= \{f \in (H^s(\mathbb{R}^3))^3 : \exists g \in H^{s+1}(\mathbb{R}^3) \text{ mit } \nabla g = f\}. \end{aligned}$$

Die Charakterisierung der nativen Räume als Sobolev-Räume ist der erste Schritt, um geeignete Fehlerabschätzungen formulieren zu können. Um diese Identifizierung zu ermöglichen, ist die algebraische Abklingbedingung (39) unerlässlich für den folgenden Satz.

Satz 91 ([23]). *Es seien k eine positive ganze Zahl, $0 \leq \tau < 1$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ und α ein Multiindex mit $k > |\alpha| + 3/p$ oder $p = 1$ und $k \geq |\alpha| + 3$. Weiter seien $X \subset \Omega$ eine Menge von Punkten mit Gitternorm $h_{X,\Omega}$, $s = k + \tau$ und β eine positive ganze Zahl mit $3/2 < \beta \leq s$. Wenn $f \in (H^\beta(\Omega))^3$ eine divergenzfreie Funktion ist, dann gilt*

$$\|f - s_{f,X}\|_{(W_q^\mu(\Omega))^3} \leq Ch_{X,\Omega}^{\beta-\mu-3(1/2-1/q)_+} \rho_{X,\Omega}^{s-\beta} \|f\|_{(H^\beta(\Omega))^3},$$

wobei μ eine reelle Zahl mit $0 \leq \mu \leq \beta$ und

$$(x)_+ = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist.

Sind $[\beta] > 3/2$ und $\beta \leq s$ und $f \in (H^\beta(\Omega))^3$ eine rotationsfreie Funktion, dann gilt

$$\|f - s_{f,X}\|_{(W_q^\mu(\Omega))^3} \leq Ch_{X,\Omega}^{\beta-\mu-3(1/2-1/q)_+} \rho_{X,\Omega}^{s-\beta} \|f\|_{(H^\beta(\Omega))^3}.$$

Für die Stabilität des Interpolationsprozesses genügt die Untersuchung des kleinsten Eigenwertes um die Konditionszahl der Interpolationsmatrix zu erhalten. Betrachtet werden hierbei eine gegebene Menge von Punkten $\{x_i\}_{i=1}^N = X \subset \Omega$, gegebene $c_k \in \mathbb{R}^3$ und Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{R}^3$ für $k = 1, \dots, N$. Das Interpolationsproblem lautet: Finde α_k mit

$$\sum_{i=1}^N \Phi(x_j - x_i) \alpha_i = c_j, \quad \text{für } j = 1, \dots, k$$

oder in Matrixform

$$A_{\Phi,X} \alpha = d$$

mit $\alpha = (\alpha_1^\top, \dots, \alpha_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{3N}$ und $c = (c_1^\top, \dots, c_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{3N}$. Der größte Eigenwert der Matrix $A_{\Phi,X}$ lässt sich mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin nach oben durch $N \|\Phi(0)\|$ abschätzen. Um die Konditionszahl

$$\text{cond}(A_{\Phi,X}) = \|A_{\Phi,X}\|_2 \left\| A_{\Phi,X}^{-1} \right\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A_{\Phi,X})}{\lambda_{\min}(A_{\Phi,X})}$$

abschätzen zu können, wird also nur der kleinste Eigenwert benötigt.

Satz 92 ([22]). *Es seien ϕ eine gerade, positiv definite Funktion mit positiver Fourier-transformierter $\hat{\phi} \in C(\mathbb{R}^3)$ und*

$$M(\sigma) = \inf_{\|\xi\|_2 \leq \sigma} \hat{\phi}(\xi).$$

Für den kleinsten Eigenwert der Interpolationsmatrix gilt

$$\lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{div}}}) \geq \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{5/2} \frac{M(\sigma)\pi}{(4\pi)^n \Gamma(5/2)},$$

*wobei $\sigma \geq \tilde{C}/q_X$ für eine von ϕ und X unabhängige Konstante \tilde{C} .
Für den kleinsten Eigenwert der Interpolationsmatrix gilt*

$$\lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{curl}}}) \geq \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{5/2} \frac{M(\sigma)\pi}{(4\pi)^n \Gamma(5/2)},$$

wobei $\sigma \geq \tilde{C}/q_X$ für eine von ϕ und X unabhängige Konstante \tilde{C} .

In der Arbeit [40] von Lowitzsch, werden die Konstanten für die Wendland-Funktionen $\phi_{3,k}$ explizit hergeleitet. Es ergibt sich als Schranke für den kleinsten Eigenwert

$$\lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{div}}}) \geq c q_X^{2k-1},$$

wobei c von der Dimension des Raumes d abhängig ist.

Für die in Kapitel 5.2 vorgestellten matrixwertigen radialen Basisfunktionen des Lamé-Operators können ähnliche Abschätzungen hergeleitet werden.

5.2 Konstruktion partikulärer Lösungen für die Lamé-Gleichungen

Im Folgenden werden zwei Methoden zur Konstruktion einer partikulären Lösung vorgestellt.

5.2.1 Konstruktion mittels Φ_{div} und Φ_{curl}

Sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Funktion und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit genügend glattem Rand. Betrachte die Gleichung der linearen Elastizität

$$\mathcal{L}u(x) = -\mu \Delta u(x) - (\lambda + \mu) \text{grad div } u(x) = f(x)$$

für $x \in \Omega$ mit den Lamé-Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Die divergenz- und rotationsfreien RBF aus den vorherigen Kapiteln sind

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{div}}(\phi) &:= (-\Delta I + \nabla \nabla^\top) \phi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \\ \Phi_{\text{curl}}(\phi) &:= -\nabla \nabla^\top \phi \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \end{aligned}$$

bzw. ihre vektorwertigen Pendanten $\Phi_{\text{div}}(\phi)c$ und $\Phi_{\text{curl}}(\phi)c$ mit $c \in \mathbb{R}^3$ konstant und ϕ eine genügend differenzierbare RBF. Die zusätzliche Kennzeichnung der generierenden Funktion ϕ bietet für die Herleitung die bessere Notation. Es gilt weiterhin

$$\text{div}(\Phi_{\text{div}}(\phi)c) = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}^3 \tag{40}$$

und

$$\operatorname{curl}(\Phi_{\operatorname{curl}}(\phi)c) = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}^3. \quad (41)$$

Ziel ist es nun eine partikuläre Lösung für die spezielle rechte Seite

$$f = \Phi_{\operatorname{div}}(\phi)c \text{ bzw. } f = \Phi_{\operatorname{curl}}(\phi)c$$

herzuleiten.

Herleitung für $\Phi_{\operatorname{div}}(\phi)c$

Betrachte als Ansatz für u eine Funktion der Form

$$u = \Phi_{\operatorname{div}}(\psi)c$$

für eine genügend differenzierbare Funktion ψ , so folgt

$$-\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} u = -\mu\Delta u.$$

Weiter gilt

$$\Delta(\Phi_{\operatorname{div}}(\psi)c) = \Phi_{\operatorname{div}}(\Delta\psi)c \quad (42)$$

wegen

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi_{\operatorname{div}}(\psi)c) &= \left(\Delta \sum_{j=1}^3 (-\delta_{ij} \Delta\psi + \partial_{x_i} \partial_{x_j} \psi) c_j \right)_{i=1}^3 \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 (-\delta_{ij} \Delta(\Delta\psi) + \partial_{x_i} \partial_{x_j} (\Delta\psi)) c_j \right)_{i=1}^3 \\ &= \Phi_{\operatorname{div}}(\Delta\psi)c \end{aligned}$$

und somit

$$-\mu\Delta u = -\mu\Phi_{\operatorname{div}}(\Delta\psi)c = \Phi_{\operatorname{div}}(\phi)c.$$

Falls nun gilt

$$\Delta\psi(x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

so folgt

$$\mathcal{L} \left(-\frac{1}{\mu} u \right) = \Phi_{\operatorname{div}}(\phi)c.$$

Herleitung für $\Phi_{\operatorname{curl}}(\phi)c$

Betrachte als Ansatz für u eine Funktion der Form

$$u = \Phi_{\operatorname{curl}}(\psi)c$$

für eine genügend differenzierbare Funktion ψ , so folgt wegen der Identität

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} u = \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \Delta u = 0$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} u &= -(\lambda + 2\mu)\Delta u - (\lambda + \mu)(\operatorname{grad} \operatorname{div} u - \Delta u) \\ &= -(\lambda + 2\mu)\Delta u. \end{aligned}$$

Falls nun wie oben

$$\Delta\psi(x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

gilt, so folgt

$$\mathcal{L}\left(-\frac{1}{2\mu + \lambda}u\right) = \Phi_{\text{curl}}(\phi)c.$$

Satz 93. *Seien in*

$$\mathcal{L}u(x) = -\mu\Delta u(x) - (\lambda + \mu)\text{grad div } u(x) = f(x)$$

die Funktion f gegeben durch

$$f = \Phi_{\text{div}}(\phi)c \text{ bzw. } f = \Phi_{\text{curl}}(\phi)c,$$

dann sind die Funktionen

$$u = -\frac{1}{\mu}\Phi_{\text{div}}(\psi)c \text{ bzw. } u = \frac{-1}{2\mu + \lambda}\Phi_{\text{curl}}(\psi)c$$

Lösungen der Gleichung $\mathcal{L}u = f$, falls $\Delta\psi = \phi$ gilt.

Die Forderung nach einer Lösung von $\Delta\psi = \phi$ kann auf die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r) = \phi(r)$$

für radiale Funktionen ψ und ϕ überführt werden.

Konkrete RBF

Betrachtet man die inversen Multiquadrics

$$\phi_c(r) = (1 + (cr)^2)^{-3/2},$$

so ist

$$\Delta\psi_c = \phi_c$$

zu lösen. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ohne Randbedingungen liefert eventuell auch singuläre Lösungen. Um dies zu vermeiden, seien die Funktion ψ eine radiale Funktion und die Ableitungen in 0 entsprechend vorgegeben, so dass keine Singularität in 0 entstehen kann. Man erhält z.B.

$$\psi_c(r) = \frac{-\text{arcsinh}(cr)}{c^3 r}.$$

Es ergeben sich die Funktionen

$$\Phi_{\text{div}}(\psi_c) = \begin{cases} \frac{x_i x_j}{c^3} \left(\frac{c(4c^2 r^2 + 3)}{r^4 (c^2 r^2 + 1)^{3/2}} - \frac{3 \text{arcsinh}(cr)}{r^5} \right) & i \neq j, \\ \frac{cr(2c^2 x_i^4 - (r^2 - x_i^2)(2c^2(r^2 - x_i^2) + 1) + 2x_i^2) - (3x_i^2 - r^2)(c^2 r^2 + 1)^{3/2} \text{arcsinh}(cr)}{c^3 r^5 (c^2 r^2 + 1)^{3/2}} & i = j, \end{cases}$$

$$\Phi_{\text{curl}}(\psi_c) = \begin{cases} -\Phi_{\text{div}}(\psi_c) & i \neq j, \\ - \left(\frac{c(3c^2 x_i^4 + 2x_i^2(c^2(r^2 - x_i^2) + 1) - (r^2 - x_i^2)(c^2(r^2 - x_i^2) + 1))}{c^3 r^4 (c^2 r^2 + 1)^{3/2}} \right. \\ \left. + \frac{(r^2 - 3x_i^2) \text{arcsinh}(cr)}{c^3 r^5} \right) & i = j. \end{cases}$$

Konstruktion der partikulären Lösung

Man geht wieder von der Gleichung

$$-\mu\Delta u(x) - (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} u(x) = f(x)$$

aus und sucht eine partikuläre Lösung u für f . Ist eine Helmholtz-Zerlegung von f in der Form

$$f = f_{\operatorname{div}} + f_{\operatorname{curl}},$$

wobei f_{div} und f_{curl} in den entsprechenden Sobolev-Räumen für die matrixwertigen radialen Basisfunktionen $\Phi_{\operatorname{div}}$ und $\Phi_{\operatorname{curl}}$ liegen, gegeben, so ist eine Interpolation möglich.

Satz 94. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit genügend glattem Rand, k eine positive ganze Zahl, $0 \leq \tau < 1$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ und α ein Multiindex mit $k > |\alpha| + 3/p$ oder $p = 1$ und $k \geq |\alpha| + 3$. Weiter seien $X \subset \Omega$ eine Menge von Punkten mit Gitternorm $h_{X,\Omega}$, $s = k + \tau$ und β eine positive ganze Zahl mit $3/2 < \beta \leq s$. f sei in einer Zerlegung der Form $f = f_{\operatorname{div}} + f_{\operatorname{curl}}$ mit $f_{\operatorname{div}} \in (H^\beta(\Omega))^3$ divergenzfrei und $f_{\operatorname{curl}} \in (H^\beta(\Omega))^3$ rotationsfrei gegeben. Dann gilt

$$\|f - s_{f,X}\|_{(W_q^\mu(\Omega))^3} \leq Ch_{X,\Omega}^{\beta-\mu-3(1/2-1/q)_+} \rho_{X,\Omega}^{s-\beta} \|f\|_{(H^\beta(\Omega))^3},$$

wobei μ eine reelle Zahl mit $0 \leq \mu \leq \beta$ und

$$(x)_+ = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind. Die entsprechende partikuläre Lösung ist nach Satz 93 gegeben.

Beweis. Verwendet man Satz 91 mit den entsprechenden Fehlerabschätzungen und den Voraussetzung an das Gebiet, erhält man die Fehlerabschätzung für den Interpolanten. Danach wird Satz 93 benutzt, um eine partikuläre Lösung anzugeben. \square

Bemerkung. Die in Satz 94 hergeleitete Fehlerabschätzung bezieht sich auf den Interpolanten. Für eine Fehlerabschätzung der partikulären Lösung selbst fehlt in diesem Fall die Eindeutigkeit. Seien u_1 eine exakte partikuläre Lösung zu $\mathcal{L}u_1 = f$ und u_2 eine nach Satz 93 konstruierte partikuläre Lösung. Das Beste, was man in diesem Fall erwarten könnte, wäre eine Abschätzung der Form

$$\inf_{u \in \operatorname{Kern}(\mathcal{L})} \|u_1 - u_2 + u\| \leq Ch_{X,\Omega}^{\alpha_1} \rho_{X,\Omega}^{\alpha_2} \inf_{u \in \operatorname{Kern}(\mathcal{L})} \|u_1 + u\|.$$

5.2.2 Konstruktion mittels $\Phi_{\operatorname{Lamé}}$

Die in [22, 40] eingeführten matrixwertigen radialen Basisfunktionen sind mittels Differentialoperatoren konstruiert worden. Definiert man

$$\Phi_{\operatorname{triv}} = \begin{pmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix}$$

als die triviale matrixwertige radiale Basisfunktion, als Erweiterung des skalarwertigen Falles, und lässt den Lamé-Operator

$$-\mu\Delta\Phi_{\operatorname{triv}}(x)c - (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} \Phi_{\operatorname{triv}}(x)c, \quad c \in \mathbb{R}^3$$

auf diesen wirken, so wird

$$(\Phi_{\text{Lamé}})_{ij} = -\delta_{ij}\mu\Delta\phi - (\lambda + \mu)\partial_{ij}\phi, \quad i, j = 1, 2, 3$$

eine aus dem Differentialoperator generierte matrixwertige radiale Basisfunktion konstruiert. Für diese Stellen sich zunächst die Fragen, ob das Interpolationsproblem eindeutig lösbar ist und ob die Interpolation stabil ist. Weitere Fragestellungen liefern die nativen Räumen und die Fehlerabschätzungen.

Eindeutigkeit der Interpolation

Eine der wichtigsten Eigenschaften einer matrixwertigen radialen Basisfunktion ist die positive Definitheit. Im Allgemeinen kann diese Eigenschaft für die Klasse $\Phi_{\text{Lamé}}$ nicht hergeleitet werden. Betrachtet man jedoch eine positiv definite radiale Basisfunktion, kann die Eigenschaft unter bestimmten Voraussetzungen gefolgert werden.

Satz 95. *Es sei $\phi \in C^2$ eine positive definite radiale Basisfunktion auf \mathbb{R}^3 . Zusätzlich seien ϕ und $-\Delta\phi$ in $L_1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $\Phi_{\text{Lamé}}$ positiv definit im Sinne von Definition 87.*

Beweis. Zu zeigen ist Definition 87. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge von Punkten und $\alpha_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$. Ziel ist es $\Phi_{\text{Lamé}}$ mit Hilfe der inversen Fouriertransformation darzustellen. Zunächst gilt nach dem Satz von Bochner, [69], dass mit ϕ auch $-\Delta\phi$ positiv definit ist. Weiter ist $-\Delta\phi$ stetig und nach Voraussetzung in $L_1(\mathbb{R}^3)$. Die Voraussetzungen von Korollar 6.12 aus [69] sind erfüllt. Die Fouriertransformation ist somit nicht negativ und liegt in $L_1(\mathbb{R}^3)$. Für die Fouriertransformation ergibt sich

$$\widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi) = \left(\mu \|\xi\|_2^2 \widehat{\phi} \delta_{ij} + (\lambda + \mu) \xi_i \xi_j \widehat{\phi} \right)_{i,j=1,2,3}.$$

Betrachtet man

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-3} \alpha^\top A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}} \alpha &= (2\pi)^{-3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^\top \Phi_{\text{Lamé}}(x_i - x_j) \alpha_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^\top \left(\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi) \exp(ix_i^\top \xi) \exp(-ix_j^\top \xi) d\xi \right) \alpha_j \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^\top \left((\lambda + \mu) \xi \xi^\top \widehat{\phi}(\xi) + \mu \|\xi\|_2^2 I \widehat{\phi}(\xi) \right) \exp(ix_i^\top \xi) \exp(-ix_j^\top \xi) \alpha_j d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sqrt{\lambda + \mu} \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right)^* \xi \xi^\top \widehat{\phi}(\xi) \left(\sqrt{\lambda + \mu} \sum_{j=1}^N \alpha_j \exp(-ix_j^\top \xi) \right) d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sqrt{\mu} \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right)^* \|\xi\|_2^2 I \widehat{\phi}(\xi) \left(\sqrt{\mu} \sum_{j=1}^N \alpha_j \exp(-ix_j^\top \xi) \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sqrt{\lambda + \mu} \sum_{i=1}^N \xi^\top \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right|^2 \widehat{\phi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \|\xi\|_2^2 \left\| \sqrt{\mu} \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right\|_2^2 \widehat{\phi}(\xi) d\xi \geq 0, \end{aligned}$$

so erkennt man, dass die erste Forderung der Definition erfüllt ist. Es muss noch gezeigt werden, dass aus $\alpha^\top A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}} \alpha = 0$ direkt $\alpha_i = (0, 0, 0)^\top$ folgt. Für den ersten Summanden wird [69, Lemma 6.7] verwendet und für den zweiten [22, Lemma 1]. Die Lemmata sagen aus, dass falls Terme der Form

$$\sum_{i=1}^N \xi^\top \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi)$$

auf einer offenen Menge des \mathbb{R}^3 verschwinden, bereits $\alpha_i = 0$ gelten muss. Um eine offene Menge zu finden wählt man ein $\xi_0 \neq 0$ mit $\hat{\phi}(\xi_0) > 0$. Es folgt, dass eine offene Umgebung U von ξ_0 existiert, in der $\hat{\phi}(\xi) > 0$ gilt. Es muss

$$\left| \sqrt{\lambda + \mu} \sum_{i=1}^N \xi^\top \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right| = 0 \quad \text{und} \quad \left\| \sqrt{\mu} \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right\| = 0 \quad \text{für alle } \xi \in U$$

gelten. Aus den Lemmata folgt $\alpha_i = 0$. □

Satz 96. *Seien die Voraussetzung aus Satz 95 erfüllt. Das Interpolationsproblem zu gegebenen Werten $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}^3$ und Stützstellen $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^3$ einen Interpolanten der Form*

$$s_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^N \Phi_{\text{Lamé}}(x - x_j) \alpha_j$$

zu finden, wobei die Koeffizient $\{\alpha_j\}_{j=1, \dots, N} \subset \mathbb{R}^3$ aus dem Gleichungssystem

$$s_{f,X}(x_i) = f_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

bestimmt werden, ist eindeutig lösbar.

Stabilität

In Kapitel 5.1 wurde eine Abschätzung für den kleinsten Eigenwert der Interpolationsmatrix für divergenz- und rotationsfreie radiale Basisfunktionen gegeben. Den Arbeiten von Wendland und Fuselier, [22, 69], folgend wird eine Funktion Ψ gesucht, für welche

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j^\top \Phi(x_j - x_k) \alpha_k \geq \sum_{j,k=1}^N \alpha_j^\top \Psi(x_j - x_k) \alpha_k \geq \theta \|\alpha\|_2^2 \quad \text{für alle } \alpha_j \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1^\top, \dots, \alpha_N^\top)^\top$ ist und das θ einfacher zu bestimmen ist. Ein solches θ ist offensichtlich eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert. Wegen

$$\begin{aligned} & \alpha^\top A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}} \alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sqrt{\lambda + \mu} \sum_{i=1}^N \xi^\top \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right|^2 \hat{\phi}(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^3} \|\xi\|_2^2 \left\| \sqrt{\mu} \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right\|^2 \hat{\phi}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

genügt es ein ψ zu finden mit $\hat{\phi} \geq \hat{\psi}$, mit dessen Hilfe das entsprechende Ψ konstruiert wird. Ein Weg dieses $\hat{\psi}$ zu konstruieren, ist die charakteristische Funktion der Kugel der Dimension d mit Radius $\sigma/2$ um 0, genannt $\chi_{\frac{\sigma}{2}, d}$, gefaltet mit sich selbst. Um die Funktion

ψ zu erhalten, wird die inverse Fouriertransformation angewandt. Eine allgemeinere Beschreibung der Anforderung an $\hat{\psi}$ bzw. ψ findet sich beispielsweise in [46]. In [69], Kapitel 12, wird die inverse Fouriertransformation berechnet zu

$$\check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d}(x) = \left(\frac{\sigma}{4\pi \|x\|_2} \right)^{d/2} J_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)$$

mit der Bessel-Funktion erster Gattung

$$J_{\frac{d}{2}}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + r + 1\right) r!}.$$

Satz 97. Seien $\psi_{\sigma} = \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d}^2$ bzw. $\widehat{\psi}_{\sigma} = \chi_{\frac{\sigma}{2},d} * \chi_{\frac{\sigma}{2},d}$ und die auf den d -dimensionalen Raum erweiterte matrixwertige radiale Basisfunktion

$$(\Psi_{\text{Lamé}})_{ij} = -(\lambda + \mu)\partial_{ij}\psi_{\sigma} - \delta_{ij}\mu\Delta\psi_{\sigma}, \quad i, j = 1, \dots, d$$

gegeben. Dann gilt die Darstellung

$$\Psi_{\text{Lamé}} = -B(x)((\lambda + \mu)xx^{\top} + d\mu \|x\|_2^2 I) - A(x)(\lambda + (d+1)\mu)I,$$

wobei

$$B(x) = 8\pi^2 \left(\left(\check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d+2} \right)^2 + \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d} \cdot \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d+4} \right),$$

$$A(x) = -4\pi \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d} \cdot \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d+2}.$$

Für die Eigenwerte von $\Psi_{\text{Lamé}}$ gilt

$$\begin{cases} -\mu d \|x\|_2^2 B(x) - A(x)(\lambda + (d+1)\mu) & , \text{Vielfachheit } d-1, \\ -(B(x) \|x\|_2^2 + A(x))(\lambda + (d+1)\mu) & , \text{Vielfachheit } 1. \end{cases}$$

Beweis. Zunächst werden die partiellen Ableitungen von ψ_{σ} berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\frac{\sigma}{4\pi \|x\|_2} \right)^{d/2} J_{d/2} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d/2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-d/2} J_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d/2} \left(- \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-d/2} J_{\frac{d+2}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right) \frac{x_k \sigma}{2 \|x\|_2} \right) \\ &= -x_k \frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d/2} \left(\left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-(d+2)/2} J_{\frac{d+2}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right) \right) \\ &= -x_k 2\pi \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{(d+2)/2} \left(\left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-(d+2)/2} J_{\frac{d+2}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right) \right) \\ &= -x_k 2\pi \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d+2}. \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \psi_{\sigma} = -x_k 4\pi \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d} \cdot \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2},d+2}.$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \psi_\sigma = -4\pi \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d} \cdot \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d+2} + x_k^2 8\pi^2 \left(\left(\check{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d+2} \right)^2 + \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d} \cdot \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d+4} \right)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \psi_\sigma = x_j x_k 8\pi^2 \left(\left(\check{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d+2} \right)^2 + \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d} \cdot \check{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d+4} \right)$$

für $j \neq k$. Durch Einsetzen in die Darstellung

$$\begin{aligned} (\Psi_{\text{Lamé}})_{ij} &= -(\lambda + \mu) \partial_{ij} \psi_\sigma - \delta_{ij} \mu \Delta \psi_\sigma \\ &= -(1 - \delta_{ij})(\lambda + \mu) x_i x_j B(x) - \delta_{ij} (\lambda + \mu) (A(x) + x_i^2 B(x)) - \delta_{ij} d\mu (A(x) + \|x\|_2^2 B(x)) \\ &= -(\lambda + \mu) x_i x_j B(x) - \delta_{ij} d\mu \|x\|_2^2 B(x) - \delta_{ij} (\lambda + (d+1)\mu) A(x) \end{aligned}$$

oder in Matrix-Form

$$\Psi_{\text{Lamé}} = -B(x)((\lambda + \mu)xx^\top + d\mu \|x\|_2^2 I) - A(x)(\lambda + (d+1)\mu)I.$$

Die Eigenwerte der Matrix berechnen sich durch Multiplikation der Matrix mit Vektoren aus

$$x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^d : (y, x) = 0\}$$

und x . □

Lemma 98. *Es gilt*

$$\begin{aligned} |A(x)| &\leq 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-d-2}, \\ \|x\|_2^2 |B(x)| &\leq 2^{d+7} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-d-1}. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis folgt durch Abschätzen der Ableitungen. Zusätzlich wird das folgende Ergebnis benötigt, [47]: Für $d = 1, 2, \dots$ und für alle $z > 0$ gilt

$$J_{\frac{d}{2}}^2(z) \leq \frac{2^{d+2}}{z\pi}.$$

Ein Vorgehen wie in [21] liefert:

$$\begin{aligned} |B(x)| &= 4\pi \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-d-1} \left| J_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right) J_{\frac{d+2}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right) \right| \\ &\leq 4\pi \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-d-1} \left(\frac{2^{d+3}}{\pi \|x\|_2 \frac{\sigma}{2}} \right) \\ &= 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2} \right)^{-d-2}. \end{aligned}$$

Für $|B(x)|$ folgt

$$\begin{aligned}
8\pi^2 \|x\|_2^2 \tilde{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d+2}^2 &= 8\pi^2 \|x\|_2^2 \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+2} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-2} J_{\frac{d+2}{2}}^2 \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right) \\
&\leq 8\pi^2 \|x\|_2^2 \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+2} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-2} \left(\frac{2^{d+4}}{\pi \|x\|_2 \frac{\sigma}{2}}\right) \\
&= 2^{d+7} \pi \|x\|_2^2 \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+2} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-3} \\
&= 2^{d+6} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+1} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-1}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
8\pi^2 \|x\|_2^2 \tilde{\chi}_{\frac{\sigma}{2}, d+4}^{\frac{\sigma}{2}} &= 8\pi^2 \|x\|_2^2 \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+2} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-2} \\
&\quad \cdot J_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right) J_{\frac{d+4}{2}} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right) \\
&\leq 8\pi^2 \|x\|_2^2 \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+2} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-2} \left(\frac{2^{d+4}}{\pi \|x\|_2 \frac{\sigma}{2}}\right) \\
&= 2^{d+6} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+1} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-1}
\end{aligned}$$

und somit

$$\|x\|_2^2 B(x) \leq 2^{d+7} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+1} \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-1}.$$

□

Für das angewendete Verfahren werden zunächst die Eigenwerte von $\Psi_{\text{Lamé}}$ nach oben abgeschätzt. Betrachtet wird der betragsmäßig größte Eigenwert

$$-(B(x) \|x\|_2^2 + A(x))(\lambda + (d+1)\mu).$$

Korollar 99. Sei

$$\Lambda(x) = (\lambda + (d+1)\mu)(|B(x)| \|x\|_2^2 + |A(x)|)$$

gegeben. Dann gilt

$$\Lambda(x) \leq (\lambda + (d+1)\mu) 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi}\right)^{d+1} \left(\left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-2} + 4 \left(\frac{\|x\|_2 \sigma}{2}\right)^{-d-1} \right).$$

Beweis. Mit den Abschätzungen von Lemma 98 folgt das Ergebnis. □

Für die nächste Aussage wird ein Hilfslemma benötigt.

Lemma 100 ([46]). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige skalarwertige Funktion. X eine Menge von Punkten im \mathbb{R}^d mit Separationsradius q_X . Dann gilt

$$\sum_{j \neq k} f(\|x_j - x_k\|_2) \leq 3^d \sum_{m=1}^{\infty} m^{d-1} \kappa_{f,m},$$

wobei

$$\kappa_{f,m} = \sup \{ |f(\|x\|_2)| : mq_X \leq \|x\|_2 \leq (m+1)q_X \}.$$

Satz 101. Sei

$$\sigma \geq \max \left\{ \frac{2}{q_X}, \frac{\tilde{C}}{q_X} \right\}$$

mit

$$\tilde{C} = \left(\frac{2d(d+2)5\pi}{8(d-1)} \Gamma^2 \left(\frac{d+2}{2} \right) \right)^{1/(d+1)}.$$

Dann gilt

$$\max_k \sum_{j \neq k} \Lambda(x_j - x_k) \leq \frac{-(\lambda + (d+1)\mu)}{2d} A(0).$$

Beweis. Es gilt wegen Lemma 100

$$\max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j \neq k} \Lambda(x_j - x_k) \leq 3^d \sum_{m=1}^{\infty} m^{d-1} \kappa_{\Lambda, m}.$$

Für die Summanden gilt wegen den Voraussetzung an σ und Korollar 99 die Abschätzung

$$\begin{aligned} m^{d-1} \kappa_{\Lambda, m} &\leq m^{d-1} (\lambda + (d+1)\mu) 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\left(\frac{mq_X \sigma}{2} \right)^{-d-2} + 4 \left(\frac{mq_X \sigma}{2} \right)^{-d-1} \right) \\ &\leq m^{d-1} (\lambda + (d+1)\mu) 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \\ &\quad \times \left(\frac{q_X \sigma}{2} \right)^{-d-1} \left(\left(\frac{q_X \sigma}{2} \right)^{-1} m^{-d-2} + 4m^{-d-1} \right) \\ &\leq m^{d-1} (\lambda + (d+1)\mu) 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{q_X \sigma}{2} \right)^{-d-1} (m^{-d-1} + 4m^{-d-1}) \\ &\leq 5(\lambda + (d+1)\mu) 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{q_X \sigma}{2} \right)^{-d-1} m^{d-1} m^{-d-1} \\ &\leq 5(\lambda + (d+1)\mu) 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{q_X \sigma}{2} \right)^{-d-1} m^{-2}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j \neq k} \Lambda(x_j - x_k) &\leq 3^d \sum_{m=1}^{\infty} m^{d-1} \kappa_{\Lambda, m} \\ &\leq 3^d 5(\lambda + (d+1)\mu) 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{8\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{q_X \sigma}{2} \right)^{-d-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} \\ &= 3^d 5(\lambda + (d+1)\mu) 2^{d+5} \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{q_X \sigma}{4} \right)^{-d-1} \frac{\pi^2}{6} \\ &\leq 5\pi^2 (\lambda + (d+1)\mu) \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{d+1} \left(\frac{q_X \sigma}{24} \right)^{-d-1}. \end{aligned}$$

Für den Wert von

$$A(0) = -4\pi \frac{\left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{d/2} \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{d/2+1}}{\Gamma((d+2)/2) \Gamma((d+4)/2)} = - \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{d+1} \frac{8\pi}{(d+2) \Gamma^2((d+2)/2)}$$

zusammen mit $\sigma q_X \geq \tilde{C}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \max_k \sum_{j \neq k} \Lambda(x_j - x_k) &\leq 5\pi^2(\lambda + (d+1)\mu) \left(\frac{\sigma^2}{16\pi}\right)^{d+1} \left(\frac{\tilde{C}}{24}\right)^{-d-1} \\ &= \frac{(\lambda + (d+1)\mu)}{2d} \left(\frac{\sigma^2}{16\pi}\right)^{d+1} \frac{8\pi(d-1)}{(d+2)\Gamma^2((d+2)/2)} \\ &= \frac{(\lambda + (d+1)\mu)}{2d} A(0) \end{aligned}$$

□

Satz 102. *Es seien ϕ eine gerade, positiv definite Funktion mit positiver Fouriertransformierter $\hat{\phi} \in C(\mathbb{R}^d)$ und es gelten die Voraussetzung von Satz 95. Weiter sei*

$$M(\sigma) = \inf_{\|\xi\|_2 \leq \sigma} \hat{\phi}(\xi).$$

Für den kleinsten Eigenwert der Interpolationsmatrix gilt

$$\lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}}) \geq \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\sigma^2}{16\pi}\right)^{(d+2)/2} \frac{M(\sigma)4\pi}{(4\pi)^d \Gamma(d/2 + 1)},$$

wobei $\sigma \geq \tilde{C}/q_X$ für eine von λ , μ , ϕ und X unabhängige Konstante \tilde{C} ist.

Beweis. Zunächst wird nach [69, 22] die Funktion ψ definiert durch

$$\psi = C_\sigma \psi_\sigma$$

mit ψ_σ aus Satz 97 und

$$C_\sigma = \frac{M(\sigma)\Gamma(d/2 + 1)}{\sigma^d \pi^{d/2}}.$$

Für das definierte positiv definite ψ liegt der Träger der Fouriertransformierten in der Kugel mit Radius σ . Für den Fall $\|\xi\|_2 \geq \sigma$ gilt folglich $\hat{\phi}(\xi) \geq \hat{\psi}(\xi)$. Im Falle $\|\xi\|_2 \leq \sigma$ gilt wegen der Definition von C_σ auch $\hat{\psi}(\xi) \leq M(\sigma) \leq \hat{\phi}(\xi)$. Betrachtet man

$$\begin{aligned} \alpha^\top A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}} \alpha &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^\top \Phi_{\text{Lamé}}(x_i - x_j) \alpha_j \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sqrt{\lambda + \mu} \sum_{i=1}^N \xi^\top \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right|^2 \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \|\xi\|_2^2 \left\| \sqrt{\mu} \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right\|_2^2 \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sqrt{\lambda + \mu} \sum_{i=1}^N \xi^\top \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right|^2 \hat{\psi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \|\xi\|_2^2 \left\| \sqrt{\mu} \sum_{i=1}^N \alpha_i \exp(-ix_i^\top \xi) \right\|_2^2 \hat{\psi}(\xi) d\xi \\ &= C_\sigma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^\top \Psi_{\text{Lamé}}(x_i - x_j) \alpha_j, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_j \in \mathbb{R}^d$. Der Wert von $\Psi_{\text{Lamé}}(0)$ berechnet sich zu

$$\Psi_{\text{Lamé}}(0) = -A(0)(\lambda + (d+1)\mu)I.$$

Zusammen mit Lemma 101 wird

$$\begin{aligned} C_\sigma \sum_{j,k=1}^N \alpha_j^\top \Psi_{\text{Lamé}}(x_j - x_k) \alpha_k &\geq -\|\alpha\|_2^2 C_\sigma (\lambda + (d+1)\mu) A(0) \\ &\quad - C_\sigma \sum_{j \neq k} \left| \alpha_j^\top \Psi_{\text{Lamé}}(x_j - x_k) \alpha_k \right| \\ &\geq -\|\alpha\|_2^2 C_\sigma (\lambda + (d+1)\mu) A(0) \\ &\quad - d \|\alpha\|_2^2 \max_k \sum_{j \neq k} C_\sigma \Lambda(x_j - x_k) \\ &= -\|\alpha\|_2^2 \left(C_\sigma (\lambda + (d+1)\mu) A(0) - C_\sigma \frac{(\lambda + (d+1)\mu)}{2} A(0) \right) \\ &= -\frac{1}{2} C_\sigma (\lambda + (d+1)\mu) A(0) \|\alpha\|_2^2 \end{aligned}$$

erhalten. Durch Einsetzen des Wertes von $A(0)$ folgt

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}}) &\geq -\frac{1}{2} C_\sigma (\lambda + (d+1)\mu) A(0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{M(\sigma) \Gamma((d+2)/2)}{\sigma^d \pi^{d/2}} (\lambda + (d+1)\mu) \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{d+1} \frac{8\pi}{(d+2) \Gamma^2((d+2)/2)} \\ &= \frac{4\pi(\lambda + (d+1)\mu)}{d+2} \frac{1}{\sigma^d \pi^{d/2}} \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{d+1} \frac{M(\sigma)}{\Gamma((d+2)/2)} \\ &= \frac{4\pi(\lambda + (d+1)\mu)}{d+2} \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{(d+2)/2} \frac{M(\sigma)}{(4\pi)^d \Gamma((d+2)/2)} \\ &\geq \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{(d+2)/2} \frac{M(\sigma) 4\pi}{(4\pi)^d \Gamma((d+2)/2)}. \end{aligned}$$

□

Für den Fall von Interesse erhält man für $d = 3$

$$\lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}}) \geq \frac{4\pi(\lambda + 4\mu)}{5} \left(\frac{\sigma^2}{16\pi} \right)^{5/2} \frac{M(\sigma)}{(4\pi)^3 \Gamma(5/2)}.$$

Für den Fall der Gauß'schen radialen Basisfunktion $\phi(x) = \exp(-\alpha \|x\|_2^2)$, $\alpha > 0$ erhält man das folgende Ergebnis:

Satz 103. Sei $\phi(x) = \exp(-\alpha \|x\|_2^2)$ mit $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}}) \geq C e^{-\frac{c^2}{4\alpha q_X^2}} q_X^{-5},$$

mit einer von \tilde{C} , λ , μ und α abhängigen Konstanten.

Beweis. Die Fouriertransformation von ϕ ist gegeben durch

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\alpha)^{-3/2} \exp\left(\frac{-\|\xi\|_2^2}{4\alpha}\right).$$

Für die Funktion

$$M(\sigma) = \inf_{\|\xi\|_2 \leq \sigma} \hat{\phi}(\xi) = (2\alpha)^{-3/2} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{4\alpha}\right)$$

folgt zusammen mit

$$\sigma \geq \max\left\{\frac{2}{q_X}, \frac{\tilde{C}}{q_X}\right\} = \frac{\tilde{C}}{q_X} \approx \frac{2.69}{q_X} \text{ für } d = 3,$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}}) &\geq \frac{M(\sigma) (\sigma^2)^{5/2} (\lambda + 4\mu)}{61440\pi^5} \\ &= \frac{(2\sigma)^{-3/2} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{4\alpha}\right) (\sigma^2)^{5/2} (\lambda + 4\mu)}{61440\pi^5} \\ &= \frac{\left(\frac{\tilde{C}^2}{q_X^2}\right)^{5/2} (\lambda + 4\mu) e^{-\frac{\tilde{C}^2}{4\alpha q_X^2}}}{122880\sqrt{2}\pi^5\alpha^{3/2}} \\ &= C e^{-\frac{c^2}{4\alpha q^2}} q_X^{-5}. \end{aligned}$$

□

Satz 104. Sei ϕ die (Inverse) Multiquadric $\phi(x) = (c^2 + \|x\|_2^2)^\beta$. Dann gilt

$$\lambda_{\min}(A_{X, \Phi_{\text{Lamé}}}) \geq C q_X^{\beta-3} \exp\left(\frac{-c\tilde{C}}{q_X}\right),$$

mit einer von c , \tilde{C} , λ und μ abhängigen Konstanten.

Beweis. Die Fouriertransformation von ϕ ist gegeben durch, [69, Theorem 8.15],

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{2^{1+\beta}}{\Gamma(-\beta)} \left(\frac{\|\xi\|_2}{c}\right)^{-\beta-3/2} K_{3/2+\beta}(c\|\xi\|_2), \quad \xi \neq 0,$$

wobei $K_{3/2+\beta}$ die modifizierte Besselfunktion ist. Weiterhin gilt nach [69, Crollary 5.12]

$$\hat{\phi}(\xi) \geq \left(\frac{\|\xi\|_2}{c}\right)^{-\beta-3/2} C(\beta) \frac{\exp(-c\|\xi\|_2)}{\sqrt{c\|\xi\|_2}}$$

für $c\|\xi\|_2 \geq 1$ und $\hat{\phi}$ ist nicht wachsend. Es folgt

$$M(\sigma) = \inf_{\|\xi\|_2 \leq \sigma} \hat{\phi}(\xi) = C(\beta) \left(\frac{\sigma}{c}\right)^{-\beta-3/2} \frac{\exp(-c\sigma)}{\sqrt{c\sigma}}.$$

Für

$$\sigma \geq \max\left\{\frac{2}{q_X}, \frac{\tilde{C}}{q_X}\right\} = \frac{\tilde{C}}{q_X} \approx \frac{2.69}{q_X}$$

folgt

$$\lambda_{\min}(A_{X,\Phi_{\text{Lamé}}}) \geq \frac{M(\sigma) (\sigma^2)^{5/2} (\lambda + 4\mu)}{61440\pi^5} \geq C(\beta, c, \tilde{C}) q_X^{\beta-3} \exp\left(\frac{-c\tilde{C}}{q_X}\right).$$

□

Satz 105. Sei ϕ die Wendland-Funktion $\phi_{3,k}$. Dann gilt

$$\lambda_{\min}(A_{X,\Phi_{\text{Lamé}}}) \geq C q_X^{2k-1}$$

mit einer von \tilde{C} , λ und μ abhängigen Konstanten.

Beweis. Für die Fouriertransformation der Wendland-Funktion ist nur eine Abschätzung der Form

$$\hat{\phi}_{3,k}(\xi) \geq C \|\xi\|^{-3-2k-1}$$

für genügend große $\|\xi\|_2$ bekannt, [69]. Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A_{X,\Phi_{\text{Lamé}}}) &\geq \frac{M(\sigma) (\sigma^2)^{5/2} (\lambda + 4\mu)}{61440\pi^5} \\ &= CM(\sigma)\sigma^5 \\ &= C \|\sigma\|^{-2k+1} \\ &= C q_X^{2k-1}. \end{aligned}$$

□

Nativer Raum

Für den Fall eines auf ganz \mathbb{R}^3 betrachteten nativen Raumes ist für skalarwertige radiale Basisfunktionen eine Charakterisierung vorhanden, [69, Theorem 10.12].

Satz 106. Sei $\phi \in C(\mathbb{R}^3) \cap L_1(\mathbb{R}^3)$ eine reellwertige positiv definite radiale Basisfunktion. Der Raum

$$\mathcal{G} = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3) : \frac{\hat{f}}{\sqrt{\hat{\phi}}} \in L_2(\mathbb{R}^3) \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{\mathcal{G}} = (2\pi)^{-3/2} \left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\hat{\phi}}}, \frac{\hat{g}}{\sqrt{\hat{\phi}}} \right)_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

ist ein Hilbertraum mit innerem Produkt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{G}}$ und reproduzierendem Kern $\phi(\cdot - \cdot)$. Weiter ist $\mathcal{G} = \mathcal{N}_{\phi}(\mathbb{R}^3)$.

Eine direkte Übertragung auf den Fall der divergenz- oder rotationsfreien matrixwertigen radialen Basisfunktionen führt auf die inverse Matrix. Allerdings sind deren Fouriertransformierten nach Konstruktion nicht invertierbar. Als Ersatz für $\Phi(x)^{-1}$ wird die pseudoinverse Matrix verwendet. Das Skalarprodukt schreibt sich dann als

$$(f, g)_{\mathcal{N}_{\Phi}(\mathbb{R}^3)} = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi)^* \hat{\Phi}(\xi)^+ \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Als Problem erweist sich die pseudoinverse Matrix, da bestimmte Funktionen im Kern liegen. Im Falle divergenz- und rotationsfreier matrixwertiger radialer Basisfunktionen fallen gerade die Funktionen der anderen Klasse in der Kern. Im Falle von $\Phi_{\text{Lamé}}$ ist die Matrix $\hat{\Phi}_{\text{Lamé}}$ invertierbar.

Korollar 107. Für die Inverse von $\hat{\Phi}_{\text{Lamé}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{\text{Lamé}}^{-1} &= \left(\left((\lambda + \mu)\xi_i\xi_j\hat{\phi}(\xi) + \delta_{ij}\mu\|\xi\|_2^2\hat{\phi}(\xi) \right)_{i,j=1,\dots,3} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)\hat{\phi}(\xi)\|\xi\|_2^2} \left((\lambda + 2\mu)I - (\lambda + \mu)e_\xi e_\xi^\top \right)\end{aligned}$$

für $i, j = 1, 2, 3$ mit den Eigenwerten $(\lambda + 2\mu)^{-1}$ und μ^{-1} (doppelt).

Satz 108 ([69]). Falls $\phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ positiv definit ist, dann liegt ihre nicht negative Fouriertransformierte in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Mit diesem Ergebnis kann der native Raum für $\Phi_{\text{Lamé}}$ angegeben werden.

Satz 109. Es sei $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ eine positiv definite Funktion mit $\phi, -\Delta\phi \in L_1(\mathbb{R}^3)$. Es sei

$$\mathcal{G}_{\text{Lamé}} = \left\{ f \in (C(\mathbb{R}^3) \cap L_1(\mathbb{R}^3))^3 : \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)^* \widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) \, d\xi < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi)^* \widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

versehen. Dann ist $\mathcal{G}_{\text{Lamé}}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}}$ und reproduzierendem Kern $\Phi_{\text{Lamé}}$ und es gilt

$$\mathcal{N}_{\Phi_{\text{Lamé}}} = \mathcal{G}_{\text{Lamé}}.$$

Beweis. Zunächst zeigt man die Eigenschaft, dass $\Phi_{\text{Lamé}}$ der reproduzierende Kern für $\mathcal{G}_{\text{Lamé}}$ ist. Nach Definition von $\mathcal{G}_{\text{Lamé}}$ ist die erste Eigenschaft des reproduzierenden Kernes immer erfüllt. Es seien nun $c, y \in \mathbb{R}^3$ Vektoren. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f, \Phi_{\text{Lamé}}(\cdot - y)c) &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi) c e^{-i\xi^\top y} \right)^* \widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) \, d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} c^\top \widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi) \widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) e^{i\xi^\top y} \, d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} c^\top \hat{f}(\xi) e^{i\xi^\top y} \, d\xi \\ &= c^\top \left((2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi) e^{i\xi^\top y} \, d\xi \right) = c^\top f(y).\end{aligned}$$

Die Linearität von $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}}$ ist offensichtlich, genauso wie die Symmetrie. Es sei nun $(f, f)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} (f, f)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)^* \widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) \, d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)^* \frac{(\lambda + 2\mu)I - (\lambda + \mu)e_\xi e_\xi^\top}{\mu(\lambda + 2\mu)\hat{\phi} \|\xi\|_2^2} \hat{f}(\xi) \, d\xi \\ &\geq (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\hat{f}(\xi)\|_2^2}{(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \end{aligned}$$

folgt direkt $f = 0$, wobei die Abschätzung der Eigenwerte aus Korollar 107 benutzt wurde. Es muss noch gezeigt werden, dass $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}}$ reellwertig ist. Für eine reellwertige Funktion f gilt $\overline{\hat{f}(\xi)} = \hat{f}(-\xi)$ fast überall. Es gilt weiter mit

$$\widehat{\Phi_{\text{Lamé,part}}}(\xi)^{-1} = (\lambda + 2\mu)I - (\lambda + \mu)e_\xi e_\xi^\top, \quad \xi = |\xi|e_\xi, \quad e_\xi \in S^2$$

$$\begin{aligned} (f, g)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi)^* \widehat{\Phi_{\text{Lamé}}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) \, d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\xi_1 > 0} \left(\frac{\overline{\hat{g}(\xi)}^\top \widehat{\Phi_{\text{Lamé,part}}}(\xi) \hat{f}(\xi)}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} + \frac{\overline{\hat{g}(-\xi)}^\top \widehat{\Phi_{\text{Lamé,part}}}(-\xi) \hat{f}(-\xi)}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \right) \, d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\xi_1 > 0} \left(\frac{\overline{\hat{g}(\xi)}^\top \widehat{\Phi_{\text{Lamé,part}}}(\xi)^{1/2} \widehat{\Phi_{\text{Lamé,part}}}(\xi)^{1/2} \hat{f}(\xi)}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \right) \, d\xi \\ &\quad + (2\pi)^{-3} \int_{\xi_1 > 0} \left(\frac{\hat{g}(\xi)^\top \widehat{\Phi_{\text{Lamé,part}}}(\xi)^{1/2} \widehat{\Phi_{\text{Lamé,part}}}(\xi)^{1/2} \overline{\hat{f}(\xi)}}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \right) \, d\xi \\ &= 2(2\pi)^{-3} \int_{\xi_1 > 0} \frac{\text{Re} \left(\overline{\hat{g}(\xi)}^\top \widehat{\Phi_{\text{Lamé,part}}}(\xi) \hat{f}(\xi) \right)}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi. \end{aligned}$$

Durch dieselbe Argumentation wie in Satz 95 folgt, dass $\hat{\phi}$ positiv ist. Somit ist $(f, g)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} \in \mathbb{R}$ gezeigt.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{G}_{\text{Lamé}}$ vollständig ist. Dazu eine kurze Vorbetrachtung: Nach Voraussetzung ist ϕ positiv definit. Der Charakterisierung von Bochner zufolge ist $-\Delta\phi$ ebenfalls positiv definit. Mit Hilfe von Satz 108 erhalten wir, dass $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^3)$ ist für alle $f \in \mathcal{G}_{\text{Lamé}}$, denn

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{f}_j(\xi)| \, d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{f}_j(\xi)|^2}{\|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi) \, d\xi \right)^{1/2}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{f}_j(\xi)|^2}{\|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\hat{f}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \leq \mu(\lambda + 2\mu)^2 (f, f)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}}.$$

Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{G}_{\text{Lamé}}$. Nach Definition ist

$$\left\{ \frac{\hat{f}_n}{\sqrt{\|\cdot\|_2^2 \hat{\phi}}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathbb{R}^3)$. Demzufolge konvergiert sie gegen ein $g \in L_2(\mathbb{R}^3)$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| g_j(\xi) \sqrt{\|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \right| d\xi \leq \|g_j\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \|\|\cdot\|_2^2 \hat{\phi}\|_{L_1(\mathbb{R}^3)}^{1/2}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| g_j(\xi) \sqrt{\|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \right|^2 d\xi \leq \|g_j\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\|\cdot\|_2^2 \hat{\phi}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)},$$

für alle $j = 1, \dots, 3$. Also ist $g \sqrt{\|\cdot\|_2^2 \hat{\phi}} \in L_2(\mathbb{R}^3) \cap L_1(\mathbb{R}^3)$. Die durch

$$f(x) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(g(\xi) \sqrt{\|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \right) e^{ix^\top \xi} d\xi.$$

definierte Funktion f ist wohldefiniert, stetig und $f \in L_1(\mathbb{R}^3)$. Außerdem gilt die Gleichung

$$\hat{f} \left(\|\cdot\|_2^2 \hat{\phi} \right)^{-1/2} = g \in L_2(\mathbb{R}^3).$$

Mit

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}}^2 &\leq (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)\|_2^2}{\mu \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} d\xi \\ &\leq \mu^{-1} (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} d\xi \\ &= \mu^{-1} (2\pi)^{-3} \left\| \hat{f}_n(\|\cdot\|_2^2 \hat{\phi})^{-1/2} - \hat{f}(\|\cdot\|_2^2 \hat{\phi})^{-1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \mu^{-1} (2\pi)^{-3} \left\| \hat{f}_n(\|\cdot\|_2^2 \hat{\phi})^{-1/2} - g \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$ folgt $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{G}_{\text{Lamé}}$. Somit ist $\mathcal{G}_{\text{Lamé}}$ vollständig. \square

Die Identifizierung des nativen Raumes mit einem Sobolev-Raum benötigt allerdings mehr Voraussetzungen. Zum einen muss die Abklingbedingung (39) erfüllt sein. Zum anderen wird die Identifizierung mit dem nativen Raum erst durch den Fortsetzungsoperator von Stein möglich (siehe dazu Formel (43)). Sei dazu der Raum $\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3)$ definiert mit

$$(\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3))^3 = \left\{ f \in (L_2(\mathbb{R}^3))^3 : \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\hat{f}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} (1 + \|\xi\|_2^2)^{s+1} d\xi < \infty \right\}.$$

Satz 110. Die Normen von $\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3)$ und $\mathcal{G}_{\text{Lamé}}$ sind äquivalent, falls ϕ zusätzlich die Abklingbedingung aus Ungleichung (39) erfüllt.

Beweis. Die positiv definite Matrix

$$\widehat{\Phi}_{\text{Lamé,part}}(\xi)^{-1} = (\lambda + 2\mu)I - (\lambda + \mu)e_\xi e_\xi^\top$$

besitzt die Eigenwerte $(\lambda + 2\mu)$ und μ . Es folgt für $f \in \mathcal{G}_{\text{Lamé}}$

$$\begin{aligned} (f, f)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)^* \widehat{\Phi}_{\text{Lamé}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) \, d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\hat{f}(\xi)}^\top \widehat{\Phi}_{\text{Lamé,part}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi)}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left\| \widehat{\Phi}_{\text{Lamé,part}}(\xi)^{-1/2} \hat{f}(\xi) \right\|_2}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\lambda + 2\mu) \left\| \hat{f}(\xi) \right\|_2^2}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \\ &\leq c_1 (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left\| \hat{f}(\xi) \right\|_2^2}{\mu \|\xi\|_2^2} (1 + \|\xi\|_2^2)^{s+1} \, d\xi = c_1 (2\pi)^{-3} \|f\|_{(\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3))^3}^2, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (f, f)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)^* \widehat{\Phi}_{\text{Lamé}}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) \, d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left\| \widehat{\Phi}_{\text{Lamé,part}}(\xi)^{-1/2} \hat{f}(\xi) \right\|_2}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \\ &\geq (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu \left\| \hat{f}(\xi) \right\|_2^2}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2 \hat{\phi}(\xi)} \, d\xi \\ &\geq c_2 (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left\| \hat{f}(\xi) \right\|_2^2}{(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2} (1 + \|\xi\|_2^2)^{s+1} \, d\xi = c_2 (2\pi)^{-3} \|f\|_{(\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3))^3}^2. \end{aligned}$$

□

Die Identifizierung von $(\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3))^3$ als Teil des Raumes $(H^s(\mathbb{R}^3))^3$ ermöglicht folgendes Lemma:

Lemma 111 ([21]). *Die Norm von $(\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3))^3$ ist äquivalent zur durch*

$$\|f\|_*^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left\| \hat{f}(\xi) \right\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} \, d\xi + \|f\|_{(H^s(\mathbb{R}^3))^3}^2$$

definierten Norm.

Beweis. Man findet Konstanten c_1 und c_2 mit

$$c_1 \left(\frac{1}{\|\xi\|_2^2} + \left(1 + \|\xi\|_2^2\right)^s \right) \leq \frac{\left(1 + \|\xi\|_2^2\right)^{s+1}}{\|\xi\|_2^2} \leq c_2 \left(\frac{1}{\|\xi\|_2^2} + \left(1 + \|\xi\|_2^2\right)^s \right).$$

□

Bemerkung. Das bedeutet, es gilt $(\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3))^3 \subset (H^s(\mathbb{R}^3))^3$.

Für die Fehlerabschätzungen wird zusätzlich ein Fortsetzungsoperator benötigt, um Funktionen von $H^s(\Omega)$ auf $\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3)$ fortzusetzen. Dazu wird der Fortsetzungsoperator von Stein, [63], benötigt. Zusätzlich muss das Gebiet beschränkt sein und einen glatten Rand besitzen. Dann definiert der Fortsetzungsoperator

$$\tilde{\mathfrak{F}}g(x) = \mathfrak{E}g(x) - \mathfrak{E}g(x - x_0) \quad (43)$$

eine Fortsetzung auf $(\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3))^3$, wobei \mathfrak{E} der Fortsetzungsoperator von Stein ist und das x_0 so gewählt ist, dass der Schnitt der Träger von $\mathfrak{E}g$ und $\mathfrak{E}g(\cdot - x_0)$ leer ist. Dies ist möglich, da $\bar{\Omega}$ kompakt in einer Kugel mit genügend großem Radius liegt, und der Fortsetzungsoperator von Stein so definiert ist, dass der Träger der Funktion innerhalb dieser Kugel bzw. Quader liegt. Sei nun $g \in (H^s(\Omega))^3$. Da $g \in L_2(\mathbb{R}^3)$ ist und einen kompakten Träger besitzt, gilt $g \in L_1(\mathbb{R}^3)$. Ebenso folgt, dass der Träger von $\tilde{\mathfrak{F}}g$ in einer kompakten Menge liegt. Infolgedessen ist $\widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}$ stetig und $\widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}(0)$ ist wohldefiniert und 0 nach Konstruktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathfrak{F}}g\|_{(\tilde{H}^s(\Omega))^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} d\xi + \|\tilde{\mathfrak{F}}g\|_{(H^s(\mathbb{R}^3))^3}^2 \\ &= \int_{\|\xi\| \leq 1} \frac{\|\widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} d\xi + \int_{\|\xi\| > 1} \frac{\|\widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} d\xi + \|\tilde{\mathfrak{F}}g\|_{(H^s(\mathbb{R}^3))^3}^2 \\ &\leq \int_{\|\xi\| \leq 1} \frac{\|\widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}(\xi)\|_{L_1(\mathbb{R}^3)}^2 \|\xi\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} d\xi + \|\tilde{\mathfrak{F}}g\|_{(H^s(\mathbb{R}^3))^3}^2 + \|\tilde{\mathfrak{F}}g\|_{(H^s(\mathbb{R}^3))^3}^2 \\ &\leq C \|\tilde{\mathfrak{F}}g\|_{(H^s(\mathbb{R}^3))^3}^2, \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}(\xi) - 0 \right| &= \left| \widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}(\xi) - \widehat{\tilde{\mathfrak{F}}g}(0) \right| \\ &= \left| \int_{\substack{\text{supp}(g) \subset \mathbb{R}^3 \\ \text{kompakt}}} \tilde{\mathfrak{F}}g(x) (1 - \exp(-i\xi^\top x)) dx \right| \\ &\leq \int_{\substack{\text{supp}(g) \subset \mathbb{R}^3 \\ \text{kompakt}}} |\tilde{\mathfrak{F}}g(x)| \|\xi\|_2 \|x\|_2 dx \leq \|\xi\|_2 \left\| \tilde{\mathfrak{F}}g(x) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^3)} \sup_{\substack{x \in \text{supp}(g) \subset \mathbb{R}^3 \\ \text{kompakt}}} \|x\|_2 \end{aligned}$$

für $\|\xi\|_2 \leq 1$.

Als direkte Folgerung erhält man zusammen mit Lemma 111 das Resultat, dass Funktionen aus $H^s(\Omega)$ nichts anderes sind als Einschränkungen von Funktionen aus $\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3)$.

Satz 112. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann gilt*

$$H^s(\Omega) = \left\{ f|_{\Omega} : f \in \tilde{H}^s(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

Der zentrale Satz zur Herleitung von Fehlerabschätzungen sowohl innerhalb als auch außerhalb des nativen Raumes ist der in [49, 69, Theorem 11.32] formulierte Satz für Funktionen mit „scattered zeros“.

Satz 113. *Es seien $k > 0$ eine ganze Zahl, $0 < s \leq 1$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ und $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ein Multiindex mit $k > |\alpha| + d/p$ oder $p = 1$ und $k \geq |\alpha| + d$. Weiter seien Ω ein beschränktes Gebiet mit $\bar{\Omega}$ kompakt, dessen Rand eine innere Kegelbedingung erfüllt und $X \subset \Omega$ eine Menge aus paarweise verschiedenen Punkten mit Norm $h_{X,\Omega}$. Dann gibt es eine Konstante C_{Ω} , welche nur von Ω abhängt. Falls nun $h_{X,\Omega} \leq C_{\Omega}$ gilt, dann gilt für alle Funktionen $u \in W_p^{k+s}(\Omega)$ mit $u|_X = 0$*

$$|u|_{W_q^{|\alpha|}(\Omega)} \leq C_{k,d,p,q,|\alpha|} h_{X,\Omega}^{k+s-|\alpha|-d(1/p-1/q)_+} |u|_{W_p^{k+s}(\Omega)}.$$

Die Konstante C ist unabhängig von $h_{X,\Omega}$ und u . Dabei ist

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

die Halbnorm des Raumes $W_p^k(\Omega)$.

Bemerkung. Im Falle von $u \in (W_p^{k+s}(\Omega))^3$ gilt wegen

$$\begin{aligned} |u|_{(W_q^m(\Omega))^3} &= \left(\sum_{j=1}^3 |u_j|_{W_q^m(\Omega)}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C h_{X,\Omega}^{k+s-m-3(1/p-1/q)_+} \left(\sum_{j=1}^3 |u_j|_{W_p^{k+s}(\Omega)}^q \right)^{1/p} \\ &\leq C d^{(1/q-1/p)_+} h_{X,\Omega}^{k+s-m-3(1/p-1/q)_+} \left(\sum_{j=1}^3 |u_j|_{W_p^{k+s}(\Omega)}^p \right)^{1/p} \\ &= C h_{X,\Omega}^{k+s-m-3(1/p-1/q)_+} |u|_{(W_p^{k+s}(\Omega))^d} \end{aligned}$$

die gleiche Abschätzung.

Das in [46, Lemma 4.1] formulierte Lemma überträgt sich auf den Fall der matrixwertigen radialen Basisfunktionen.

Lemma 114. *Seien $s > 3/2$, $f \in (H^{\tau}(\Omega))^3$ und $X \subset \Omega$ eine Menge von N Punkten in einem beschränkten Gebiet mit Lipschitz-Rand und bezeichnen mit $s_{f,X}$ den eindeutigen Interpolanten von f bezüglich X und $\Phi_{\text{Lamé}}$. Falls $\hat{\phi}$ die algebraische Abklingbedingung aus Ungleichung (39) erfüllt, dann gibt es eine von Ω und ϕ abhängige Konstante $C_{\Omega,\phi}$, so dass*

$$\|f - s_{f,X}\|_{(H^{\tau}(\Omega))^3} \leq C_{\Omega,\Phi_{\text{Lamé}}} \|f\|_{(H^{\tau}(\Omega))^3}$$

gilt. Sind weiterhin die Voraussetzungen von Satz 113 erfüllt, so gilt für die Halbnorm

$$|f - s_{f,X}|_{W_q^{|\alpha|}} \leq C_{k,q,|\alpha|,\Omega,\Phi_{\text{Lamé}}} h^{\tau-|\alpha|-3(1/2-1/q)_+} \|f\|_{(H^{\tau}(\Omega))^3}$$

und es gilt

$$\min_{v \in V_{X, \Phi_{\text{Lamé}}}} \|f - v\|_{(L_2(\Omega))^3} \leq C_{k, \Omega, \Phi_{\text{Lamé}}} h^\tau \|f\|_{(H^\tau(\Omega))^3},$$

wobei

$$V_{X, \Phi_{\text{Lamé}}} = \text{span}\{\Phi_{\text{Lamé}}(\cdot - x), x \in X\}.$$

Beweis. Der Fortsetzungsoperator von Stein, der bei der Konstruktion von $\tilde{\mathfrak{F}}$ verwendet wurde, gilt zunächst nur für ganzzahlige, positive τ . Brenner und Scott, [10, S. 280], zeigten, dass die Verwendung der Ergebnisse von DeVore und Sharpely, [14, Theorem 6.1 und 6.7], die Existenz von \mathfrak{E} auch für gebrochen rationale τ für $1 \leq p < \infty$ liefert.

Wegen $\tilde{\mathfrak{F}}f = f$ in Ω gilt ebenfalls $s_{f, X} = s_{\tilde{\mathfrak{F}}f, X}$. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} \|f - s_{f, X}\|_{(H^\tau(\Omega))^3} &= \left\| \tilde{\mathfrak{F}}f - s_{\tilde{\mathfrak{F}}f, X} \right\|_{(H^\tau(\Omega))^3} \\ &\leq \left\| \tilde{\mathfrak{F}}f - s_{\tilde{\mathfrak{F}}f, X} \right\|_{(H^\tau(\mathbb{R}^3))^3} \\ &\leq c \left\| \tilde{\mathfrak{F}}f - s_{\tilde{\mathfrak{F}}f, X} \right\|_{\mathcal{N}_{\Phi_{\text{Lamé}}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq c \left\| \tilde{\mathfrak{F}}f \right\|_{\mathcal{N}_{\Phi_{\text{Lamé}}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq c \left\| \tilde{\mathfrak{F}}f \right\|_{(H^\tau(\mathbb{R}^3))^3} \\ &\leq c \left\| \tilde{\mathfrak{F}} \right\| \|f\|_{(H^\tau(\Omega))^3}. \end{aligned}$$

Eine Anwendung von Satz 113 auf $u = f - s_{f, X}$ für $p = 2$ liefert zusammen mit dem vorherigen Teil die zweite Aussage. Mit

$$\min_{v \in V_{X, \Phi_{\text{Lamé}}}} \|f - v\|_{(L_2(\Omega))^3} \leq \|f - s_{f, X}\|_{(L_2(\Omega))^3} \leq C_{k, \Omega, \Phi_{\text{Lamé}}} h^{\tau - 0 - 3(1/2 - 1/2)_+} \|f\|_{(H^\tau(\Omega))^3}$$

folgt der letzte Teil. □

Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt, um mit dem aus [23] bzw. in [50] benutzten Verfahren Fehlerabschätzungen für Funktionen außerhalb des nativen Raumes herzuleiten.

Bandbeschränkte Funktionen

In diesem Abschnitt werden zunächst Eigenschaften bandbeschränkter Funktionen behandelt und deren Approximationseigenschaften gezeigt. Zunächst sei \mathcal{B}_σ der Raum

$$\mathcal{B}_\sigma = \left\{ f \in (L_2(\mathbb{R}^3))^3 : \text{supp}(\hat{f}) \in B(0, \sigma) \right\}$$

der bandbeschränkten Funktionen definiert, wobei $\sigma > 0$ und $B(0, \sigma)$ die Kugel mit Radius σ in \mathbb{R}^3 ist. Für die Definition bandbeschränkter Funktionen in $(\tilde{H}^s(\mathbb{R}^3))^3$ muss die zusätzliche Eigenschaft aus Lemma 111 verwendet werden. Der entsprechende Raum definiert sich über

$$\tilde{\mathcal{B}}_\sigma = \left\{ f \in \mathcal{B}_\sigma : \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\hat{f}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} d\xi < \infty \right\}.$$

Lemma 115. *Es seien $t \geq r \geq 0$. Falls $f \in \tilde{H}^r(\mathbb{R}^3)$, dann gibt es für jedes $\sigma > 0$ eine Funktion $g_\sigma \in \tilde{\mathcal{B}}_\sigma$ mit*

$$\|f - g_\sigma\|_{\tilde{H}^r(\mathbb{R}^3)} \leq \sigma^{r-t} \|f\|_{\tilde{H}^t(\mathbb{R}^3)}.$$

Beweis. Die durch $\hat{g}_\sigma = \hat{f}\chi_\sigma$ definierte Funktion besitzt die gewünschte Eigenschaft, denn

$$\begin{aligned} \|f - g_\sigma\|_{\tilde{H}^r(\mathbb{R}^3)}^2 &= \int_{\|\xi\| \geq \sigma} \frac{\|\hat{f}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} (1 + \|\xi\|_2^2)^{r+1} d\xi \\ &= \int_{\|\xi\| \geq \sigma} \frac{\|\hat{f}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} (1 + \|\xi\|_2^2)^{t+1} (1 + \|\xi\|_2^2)^{r-t} d\xi \\ &\leq \sigma^{2(r-t)} \int_{\|\xi\| \geq \sigma} \frac{\|\hat{f}(\xi)\|_2^2}{\|\xi\|_2^2} (1 + \|\xi\|_2^2)^{t+1} d\xi \\ &\leq \sigma^{2(r-t)} \|f\|_{\tilde{H}^t(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

□

Zusätzlich werden Eigenschaften des Raumes $\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3)$ benötigt. Der Raum ist ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern \mathcal{K} für $\tau > 3/2$. Der Kern \mathcal{K} wird dabei über die Fouriertransformierte definiert, um die Abschätzungen aus Ungleichung (39) benutzen zu können und so die folgenden Ergebnisse unabhängig von der konkret verwendeten radialen Basisfunktion ϕ zu halten. Es gilt

$$\hat{\mathcal{K}}^\tau = ((\lambda + \mu)\xi\xi^\top + \mu\|\xi\|_2^2 I)(1 + \|\xi\|_2^2)^{-(\tau+1)}.$$

Die inverse Fouriertransformation mit [69, Theorem 6.13] liefert

$$\mathcal{K}^\tau = c_\tau(-\mu\Delta I - (\lambda + \mu)\nabla\nabla^\top) \|x\|_2^{\tau-1/2} K_{\tau-1/2}(\|x\|_2),$$

wobei K die modifizierte Besselfunktion zweiter Art und c_τ konstant ist. Bezüglich dieses Kernes kann die vorherige Theorie für Interpolanten der Form

$$g(x) = \sum_{j=1}^N \mathcal{K}^\tau(x - x_j)c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^3, \quad j = 1, \dots, N$$

mit $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ verwendet werden. Für g ergibt sich

$$\begin{aligned} \|g\|_{\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3)}^2 &= (g, g)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} = \left(\sum_{j=1}^N \mathcal{K}^\tau(x - x_j)c_j, \sum_{j=1}^N \mathcal{K}^\tau(x - x_j)c_j \right)_{\mathcal{G}_{\text{Lamé}}} \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j=1}^N \hat{\mathcal{K}}^\tau(\xi)c_j e^{ix_j^\top \xi} \right)^* \left(\sum_{i=1}^N \widehat{\mathcal{K}}^\tau(\xi)^{-1} \hat{\mathcal{K}}^\tau(\xi)c_i e^{ix_i^\top \xi} \right) d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} (\widehat{\mathcal{K}^\tau(x - x_j)c_j})^* c_j e^{i(x_j - x_i)^\top \xi} d\xi \\ &= \sum_{i,j=1}^N c_j^\top \mathcal{K}^\tau(x_j - x_i)c_i. \end{aligned}$$

Das ist folglich genau die Bilinearform, welche bei der Stabilitätsuntersuchung betrachtet wurde. Es gilt demnach

$$\lambda_{\min}(A_{X, \mathcal{K}^\tau}) \|c\|_2^2 \leq \|g\|_{\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \lambda_{\max}(A_{X, \mathcal{K}^\tau}) \|c\|_2^2.$$

Lemma 116. Für den kleinsten Eigenwert gilt speziell die Abschätzung

$$\lambda_{\min}(A_{X,\mathcal{K}^\tau}) \geq c_{\tau,\lambda,\mu} q_X^{2\tau-3}.$$

Beweis. Das Infimum der Fouriertransformierten berechnet sich zu

$$\inf_{\|\xi\|_2 \leq \sigma} (1 + \|\xi\|_2^2)^{-(\tau+1)} = (1 + \sigma^2)^{-(\tau+1)} \geq \sigma^{-2(\tau+1)}.$$

Zusammen mit Satz 102 folgt die Aussage. \square

Lemma 117. Der Kern \mathcal{K}^τ hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\tau = c_\tau \left(-\mu \left(\|x\|_2^{\nu-1} (-3K_{\nu-1}(\|x\|_2) + K_{\nu-2}(\|x\|_2) \|x\|_2) \right) I \right. \\ \left. - (\lambda + \mu) \|x\|_2^{\nu-2} K_{\nu-2}(\|x\|_2) x x^\top \right) \end{aligned}$$

und besitzt die Eigenwerte

$$-c_\tau \mu \left(\|x\|_2^{\nu-1} (-3K_{\nu-1}(\|x\|_2) + K_{\nu-2}(\|x\|_2) \|x\|_2) \right)$$

und

$$-c_\tau \mu \left(\|x\|_2^{\nu-1} (-3K_{\nu-1}(\|x\|_2) + K_{\nu-2}(\|x\|_2) \|x\|_2) \right) - c_\tau (\lambda + \mu) \|x\|_2^\nu K_{\nu-2}(\|x\|_2).$$

Der Betrag des größten Eigenwertes ist für $\|x\|_2 > 3$ eine monoton fallende Funktion. Weiterhin gilt $0 < \mathcal{K}^\tau(0) < \infty$.

Beweis. Zunächst werden die Ableitungen des Kernes bestimmt. Dazu werden die Komponenten von

$$\mathcal{K}^\tau = c_\tau (-\mu \Delta I - (\lambda + \mu) \nabla \nabla^\top) \|x\|_2^{\tau-1/2} K_{\tau-1/2}(\|x\|_2)$$

einzelnen betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta(\|x\|_2^{\tau-1/2} K_{\tau-1/2}(\|x\|_2)) &= \|x\|_2^{\nu-1} (-3K_{\nu-1}(\|x\|_2) + K_{\nu-2}(\|x\|_2) \|x\|_2), \\ \partial_{x_i} \partial_{x_j}(\|x\|_2^{\tau-1/2} K_{\tau-1/2}(\|x\|_2)) &= x_i x_j \|x\|_2^{\nu-2} K_{\nu-2}(\|x\|_2), \end{aligned}$$

wobei $\nu = \tau - 1/2$. Für den gesamten Term folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\tau = c_\tau \left(-\mu I \left(\|x\|_2^{\nu-1} (-3K_{\nu-1}(\|x\|_2) + K_{\nu-2}(\|x\|_2) \|x\|_2) \right) \right. \\ \left. - (\lambda + \mu) x x^\top \|x\|_2^{\nu-2} K_{\nu-2}(\|x\|_2) \right). \end{aligned}$$

Die Matrix besitzt den doppelten Eigenwert

$$-c_\tau \mu \left(\|x\|_2^{\nu-1} (-3K_{\nu-1}(\|x\|_2) + K_{\nu-2}(\|x\|_2) \|x\|_2) \right)$$

und den einfachen

$$-c_\tau \mu \left(\|x\|_2^{\nu-1} (-3K_{\nu-1}(\|x\|_2) + K_{\nu-2}(\|x\|_2) \|x\|_2) \right) - c_\tau (\lambda + \mu) \|x\|_2^\nu K_{\nu-2}(\|x\|_2).$$

Da der zweite Eigenwert der betragsmäßig größere ist, liefert ein Abschätzung

$$\begin{aligned}
& -c_\tau 3\mu \|x\|_2^{\nu-1} K_{\nu-1}(\|x\|_2) - c_\tau(\lambda + 2\mu) \|x\|_2^\nu K_{\nu-2}(\|x\|_2) \\
& \leq c_{\tau,1} \|x\|_2^{\nu-1} K_{\nu-1}(\|x\|_2) + c_{\tau,2} \|x\|_2^2 \|x\|_2^{\nu-2} K_{\nu-2}(\|x\|_2) \\
& \leq c_{\tau,1} \|x\|_2^{\nu-1} \sqrt{\frac{2\pi}{\|x\|_2}} \exp(-\|x\|_2) \exp\left(\frac{(\nu-1)^2}{2\|x\|_2}\right) \\
& \quad + c_{\tau,2} \|x\|_2^\nu \sqrt{\frac{2\pi}{\|x\|_2}} \exp(-\|x\|_2) \exp\left(\frac{(\nu-2)^2}{2\|x\|_2}\right)
\end{aligned}$$

für $\|x\|_2 > 0$, wobei [69, Lemma 5.13] verwendet wurde. Die Funktion auf der rechten Seite der Ungleichung sei mit $\mathfrak{G}(r, \nu)$ bezeichnet. Beide Summanden sind monoton fallend, denn

$$\begin{aligned}
& \partial_r \left(r^{\nu-1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \exp(-r) \exp\left(\frac{(\nu-1)^2}{2r}\right) \right) \\
& = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{r}} e^{\frac{(\nu-1)^2}{2r}-r} r^{\nu-3} ((\nu-1)^2 + 2r^2 + (3-2\nu)r) < 0
\end{aligned}$$

für alle $\nu \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}
& \partial_r \left(r^\nu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \exp(-r) \exp\left(\frac{(\nu-2)^2}{2r}\right) \right) \\
& = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{r}} e^{\frac{(\nu-2)^2}{2r}-r} r^{\nu-2} ((\nu-2)^2 + 2r^2 - 2\nu r + r) < 0
\end{aligned}$$

für $\nu > 7/2 + 3/\sqrt{2}$ bzw. für ν beliebig und $r > 3$. Für die Bessel-Funktion ergibt sich aus [69, Lemma 5.14] ein asymptotisches Verhalten von $r^{-\nu}$, so dass der Term $\mathcal{K}^\tau(0)$ auswertbar ist. \square

Für die Abschätzung des Fehlers bei der Interpolation bandbeschränkter Funktionen wird wie in [50] vorgegangen.

Lemma 118. *Es sei*

$$g = \sum_{j=1}^N \mathcal{K}^\tau(\cdot - x_j) c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^3$$

und g_σ ihre bandbeschränkte Version, definiert durch $\hat{g}_\sigma = \hat{g}\chi_\sigma$. Dann existiert eine von X und c_j , $j = 1, \dots, N$ unabhängige Konstante $\kappa > 0$, so dass für $\sigma = \kappa/q_X$ die Ungleichung

$$I_\sigma = \|g - g_\sigma\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3} \leq \frac{1}{2} \|g\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3}$$

gilt.

Beweis. Zunächst betrachte die Variablensubstitution $\omega = \sigma\xi$ und

$$\begin{aligned}
\|g - g_\sigma\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3} &= (2\pi)^{-3} \int_{\|\xi\| \geq \sigma} \hat{g}(\xi)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\xi)^{-1} \hat{g}(\xi) d\omega \\
&= (2\pi)^{-3} \sigma^3 \int_{\|\xi\| \geq 1} \hat{g}(\sigma\xi)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\sigma\xi)^{-1} \hat{g}(\sigma\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-3} \sigma^3 \int_{\|\xi\| \geq 1} \left(\sum_{j=1}^N \mathcal{K}^\tau(\cdot - x_j) c_j \right)^{\widehat{\cdot}^*} \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\sigma\xi)^{-1} \left(\sum_{j=1}^N \mathcal{K}^\tau(\cdot - x_j) c_j \right)^{\widehat{\cdot}} d\xi \\
&= (2\pi)^{-3} \sigma^3 \int_{\|\xi\| \geq 1} \left(\sum_{j=1}^N c_j e^{-ix_j^\top \xi \sigma} \right)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\sigma\xi) \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{-ix_k^\top \xi \sigma} \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Für $\|\xi\|_2 \geq 1$ gilt die Ungleichung

$$(1 + \sigma^2 \|\xi\|_2^2)^{-(\tau+1)} \leq \frac{2^{\tau+1}}{\sigma^{2\tau+2}} (1 + \|\xi\|_2^2)^{-(\tau+1)}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\|g - g_\sigma\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3} \\
&= (2\pi)^{-3} \sigma^3 \int_{\|\xi\| \geq 1} \left(\sum_{j=1}^N c_j e^{-ix_j^\top \xi \sigma} \right)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\sigma\xi) \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{-ix_k^\top \xi \sigma} \right) d\xi \\
&= (2\pi)^{-3} \sigma^5 \int_{\|\xi\| \geq 1} \left(\sum_{j=1}^N c_j e^{-ix_j^\top \xi \sigma} \right)^* \frac{((\lambda + \mu)\xi\xi^\top + \mu \|\xi\|_2^2 I)}{(1 + \sigma^2 \|\xi\|_2^2)^{(\tau+1)}} \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{-ix_k^\top \xi \sigma} \right) d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-3} \sigma^{3-2\tau} 2^{\tau+1} \int_{\|\xi\| \geq 1} \left(\sum_{j=1}^N c_j e^{-ix_j^\top \xi \sigma} \right)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\xi) \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{-ix_k^\top \xi \sigma} \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Da $\widehat{\mathcal{K}^\tau}(\cdot)$ positiv definit ist, gilt folglich

$$\begin{aligned}
\|g - g_\sigma\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3} &\leq (2\pi)^{-3} \sigma^{3-2\tau} 2^{\tau+1} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j=1}^N c_j e^{-ix_j^\top \xi \sigma} \right)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\xi) \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{-ix_k^\top \xi \sigma} \right) d\xi \\
&= (2\pi)^{-3} \sigma^{3-2\tau} 2^{\tau+1} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j=1}^N c_j e^{-ix_j^\top \xi \sigma} \right)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\xi)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\xi)^{-1} \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\xi) \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{-ix_k^\top \xi \sigma} \right) \\
&= \sigma^{3-2\tau} 2^{\tau+1} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j^* \mathcal{K}^\tau(\sigma x_j - \sigma x_k) c_k \\
&\leq \sigma^{3-2\tau} 2^{\tau+1} \lambda_{\max}(A_{\sigma X, \mathcal{K}^\tau}) \|c\|_2^2.
\end{aligned}$$

Aus der Abschätzung

$$\lambda_{\min}(A_{X, \mathcal{K}^\tau}) \geq c_{\tau, \lambda, \mu} q_X^{2\tau-3}$$

von Lemma 116 erhält man

$$\|c\|_2^2 \leq \|g\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3}^2 c_{\tau,\lambda,\mu}^{-1} q_X^{3-2\tau}$$

und

$$\|g - g_\sigma\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3} \leq \sigma^{3-2\tau} 2^{\tau+1} \|g\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3}^2 c_{\tau,\lambda,\mu}^{-1} q_X^{3-2\tau} \lambda_{\max}(A_{\sigma X, \mathcal{K}^\tau}).$$

Es gilt $q_{\sigma X} = \sigma q_X$. Die Funktion \mathfrak{G} aus dem Beweis von Lemma 117 ist monoton fallend für $\|x\|_2 \geq 3$. Sei σ so gewählt, dass $q_{\sigma X} \geq 3$ gilt und sei $c \in \mathbb{R}^{3N}$ der normierte Eigenvektor zu $\lambda_{\max}(A_{\sigma X, \mathcal{K}^\tau})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(A_{\sigma X, \mathcal{K}^\tau}) &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j^\top \mathcal{K}^\tau(\sigma x_j - \sigma x_k) c_k \\ &\leq \|\mathcal{K}^\tau(0)\|_2 + 3 \sum_{j \neq k} c_j^\top \mathcal{K}^\tau(\sigma x_j - \sigma x_k) c_k \\ &\leq \|\mathcal{K}^\tau(0)\|_2 + 3 \sum_{j \neq k} \|\mathcal{K}^\tau(\sigma x_j - \sigma x_k)\|_2 \\ &\leq \|\mathcal{K}^\tau(0)\|_2 + 3 \sum_{j \neq k} \mathfrak{G}(\sigma x_j - \sigma x_k). \end{aligned}$$

Lemma 100 angewendet auf

$$\sum_{j \neq k} \mathfrak{G}(\sigma x_j - \sigma x_k)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(A_{\sigma X, \mathcal{K}^\tau}) &\leq \|\mathcal{K}^\tau(0)\|_2 + 3 \cdot 3^3 c_{\tau,\lambda,\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \mathfrak{G}(m \sigma q_X) \\ &\leq \|\mathcal{K}^\tau(0)\|_2 + 3 \cdot 3^3 c_{\tau,\lambda,\lambda} \sum_{m=3}^{\infty} m^2 \mathfrak{G}(m) = \tilde{c}_{\tau,\lambda,\mu} \end{aligned}$$

eine Konstante unabhängig von q_X . Die Reihe über $m^2 \mathfrak{G}(m)$ ist wegen der exponentiellen Konvergenz gegen 0 von \mathfrak{G} gesichert. Schließlich schreibt sich die Abschätzung in der Form

$$\|g - g_\sigma\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3} \leq \sigma^{3-2\tau} 2^{\tau+1} \tilde{c}_{\tau,\lambda,\mu} c_{\tau,\lambda,\mu}^{-1} q_X^{3-2\tau} \|g\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3}^2.$$

Durch die Wahl von σ kann der Faktor $q_X^{3-2\tau}$ so gewählt werden, dass

$$\sigma^{3-2\tau} 2^{\tau+1} \tilde{c}_{\tau,\lambda,\mu} c_{\tau,\lambda,\mu}^{-1} q_X^{3-2\tau} \leq \frac{1}{4}$$

gilt. Bezeichne dann $\sigma q_X = \kappa$. □

Das folgende Theorem liefert nun die Grundlage zur Approximation mit Hilfe bandbeschränkter Funktionen. Eine ähnliche Version findet sich in [50, 23].

Satz 119. *Es seien $\tau, t \in \mathbb{R}$ mit $\tau > 3/2$ und $t > 0$. Sei $f \in (\tilde{H}^{\tau+t}(\mathbb{R}^3))^3$ und eine Menge $X = \{x_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ mit Separationsradius q_X gegeben. Dann gibt es eine Funktion $f_\sigma \in \tilde{\mathcal{B}}_\sigma(\mathbb{R}^3)$, so dass*

$$f|_X = f_\sigma|_X$$

und

$$\|f - f_\sigma\|_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3} \leq 5 \operatorname{dist}_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3}(f, \tilde{\mathcal{B}}_\sigma) \leq 5 \kappa^{-t} q_X^t \|f\|_{(\tilde{H}^{\tau+t}(\mathbb{R}^3))^3}.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt wie in [50, Theorem 3.4], in dem an den entsprechenden Stellen die Bezeichnungen abgeändert werden. Für den zweiten Teil der Ungleichung muss Folgendes betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
& \text{dist}_{(\tilde{H}^\tau(\mathbb{R}^3))^3}(f, \tilde{\mathcal{B}}_\sigma(\mathbb{R}^3))^2 \\
&= (2\pi)^{-3} \int_{\|\xi\|_2 \geq \sigma} \hat{f}(\xi)^* \widehat{\mathcal{K}^\tau}(\xi)^{-1} \hat{f}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-3} \int_{\|\xi\|_2 \geq \sigma} \hat{f}(\xi)^* \frac{(\lambda + 2\mu)I - (\lambda + \mu)e_\xi e_\xi^\top}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2} (1 + \|\xi\|_2^2)^{\tau+1} \hat{f}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-3} \int_{\|\xi\|_2 \geq \sigma} \hat{f}(\xi)^* \frac{(\lambda + 2\mu)I - (\lambda + \mu)e_\xi e_\xi^\top}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2} \frac{(1 + \|\xi\|_2^2)^{\tau+t+1}}{(1 + \|\xi\|_2^2)^t} \hat{f}(\xi) d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-3} \sigma^{-2t} \int_{\|\xi\|_2 \geq \sigma} \hat{f}(\xi)^* \frac{(\lambda + 2\mu)I - (\lambda + \mu)e_\xi e_\xi^\top}{\mu(\lambda + 2\mu) \|\xi\|_2^2} (1 + \|\xi\|_2^2)^{\tau+t+1} \hat{f}(\xi) d\xi \\
&\leq \sigma^{-2t} \|f\|_{(\tilde{H}^{\tau+t}(\mathbb{R}^3))^3}.
\end{aligned}$$

□

Für die gesamte Approximation gilt schließlich der folgende Satz:

Satz 120. *Seien die Voraussetzungen von Satz 113 erfüllt und $\beta \leq \tau$. Für $f \in (H^\beta(\Omega))^3$ gilt die Abschätzung*

$$\|f - s_{f,X}\|_{(H^\mu(\Omega))^3} \leq C h_{X,\Omega}^{\beta-\mu} \rho_{X,\Omega}^{\tau-\beta} \|f\|_{(H^\beta(\Omega))^3}$$

für alle $0 \leq \mu \leq \beta$.

Beweis. Mit Hilfe des mit Formel (43) definierten Fortsetzungsoperators und des Satzes 119 können die entsprechenden Teile im Beweis von [23, Theorem 1] bzw. in [50, Theorem 4.2] ersetzt werden. □

Zusammen folgt eine Abschätzung für die Interpolation der partikulären Lösung wie in Satz 91.

Korollar 121. *Seien die Voraussetzung von Satz 120 erfüllt. Sei weiter eine Interpolation von $f \in (H^\beta(\Omega))^3$ in der Form*

$$\sum_{j=1}^N \Phi_{\text{Lamé}}(\cdot - x_j) c_j$$

gegeben. Dann gilt die Abschätzung aus Satz 120 und die partikuläre Lösung ist in der Form

$$\sum_{j=1}^N \Phi_{\text{triv}}(\cdot - x_j) c_j$$

gegeben.

Bemerkung 122. Die Konstruktionsweise von $\Phi_{\text{Lamé}}$ ist nicht nur auf den Lamé-Operator beschränkt, sondern ist für alle elliptischen partiellen Differentialgleichungen (ohne enthaltene erste Ableitungen) möglich. Aus der Elliptizität kann direkt geschlossen werden, dass die Fouriertransformierte des Kernes positiv definit ist und somit ein Skalarprodukt für den nativen Raum induziert. An der Art des Vorgehens ändert sich dabei nichts, es müssen nur die Konstanten in den einzelnen Beweisen abgeändert werden.

Auch im Falle skalarer elliptischer partieller Differentialgleichungen können die Argumente in ähnlicher Weise übertragen werden. Im Falle des Laplace-Operators ergeben sich die gleichen Räume.

Für nicht konstante Koeffizienten ist eine Verallgemeinerung in der Regel nicht möglich.

6 Numerische Verfahren für matrixwertige RBF

Die bisherigen Verfahren für radiale Basisfunktionen beschränken sich auf den skalaren Fall. Ziel des Abschnittes ist, bestimmte, später verwendete Verfahren auf den Fall der matrixwertigen radialen Basisfunktionen zu erweitern. Bestimmte Verfahren, die explizit die Eigenschaft „radial“ benutzen, sind nicht direkt übertragbar, so z.B. bestimmte Verfahren zur schnellen Auswertung mittels Interpolation auf einem Grobgitter.

6.1 Matrix-Vektor-Multiplikation und schnelle Auswertung

Obwohl die radialen Basisfunktion schon ein breites Anwendungsspektrum aufweisen, so hindert doch der numerische Aufwand. Tatsächlich benötigt das Lösen eines Interpolationsproblems in der Regel Gleitpunktoperationen in der Ordnung N^3 bzw. die Auswertung in M verschiedenen Stellen bei N Stützpunkten von der Ordnung MN . Ein erster Ansatz die Rechenkosten der Auswertung zu reduzieren, wurde von Powell, [55], unternommen. Dabei wurden bestimmte Minimierungseigenschaften der Thin-Plate Splines zur Auswertung des Interpolanten genutzt und daraus eine Methode entwickelt. In Arad, [4], wurden für dieses Problem Tensorgitter betrachtet, mit dem es möglich wurde, eine direkte Auswertung mit einem reduziertem Aufwand zu realisieren. Genutzt wurde dabei, dass Abstände und damit auch Auswertungen auf dem Tensorgitter vorberechnet werden können. Im Falle eines Tensorgitters entstehen rekursive Töplitz-Matrizen, deren Struktur mit Hilfe der FFT ausgenutzt werden kann, [36].

Ein neues Vorgehen stellten Beatson und Newsam, [7], vor: Sie erkannten Gemeinsamkeiten des N -Körperproblems und der Auswertung von Thin-Plate Splines. Die Fast-Multipole-Methode in Beatson, [7], verwendet Taylorreihen. Powell verwendete diese Ergebnisse und schuf daraus einen Algorithmus zur schnellen Auswertung von Thin-Plate-Splines, [56], mit einer Komplexität von $N \log N$ für uniform verteilte Punktmengen. Für andere radiale Basisfunktionen wurde die FMM in [6, 11] umgesetzt.

Als eines der neusten Verfahren ist die Multilevel Auswertung, [39], ein Verfahren mit einem Aufwand von der Ordnung N . Ein Problem stellt hier die Auswertung auf dem Grobgitter dar, die wesentlich dazu beiträgt, dass das Verfahren in drei Dimension erst ab ca. 10^7 Punkten rentabel wird. Verwendet man als Grobgitter ein Tensorgitter, so kann mit Hilfe von [36] der Aufwand in höheren Dimensionen deutlich reduziert werden. In numerischen Tests, konnte für den zwei- und dreidimensionalen Fall die Ordnung $O(N)$ nachvollzogen werden. Bei der Übertragung des Verfahrens auf den matrixwertigen Fall stellte sich jedoch heraus, dass der Interpolationsoperator radiale Funktionen benötigt, d.h. dass Terme der Form $x_i x_j$ nicht schnell ausgewertet werden können.

Die schnelle Auswertung ist essenziell um große Probleme handhaben zu können. Die Kondition der Matrix spielt bei diesen Verfahren eine wesentliche Rolle. Hier wird ein Verfahren mittels H^2 -Matrizen beschrieben.

Die Einträge $(\Phi_{\text{Lamé}})_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ sind Ableitungen der Kernfunktion ϕ . Um in der Theorie die H^2 -Matrix-Struktur zu verwenden, werden bestimmte Eigenschaften an den Kern ϕ gestellt, wie z.B. die asymptotische Glattheit. Im Falle positiv definiten Kerne ϕ ist es möglich über die Charakterisierung positiv definiten Funktionen eine degenerierte Darstellung zu erzeugen.

Satz 123 ([69]). *Für eine Funktion $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\phi(\|\cdot\|_2)$ ist positiv definit auf \mathbb{R}^d , für alle $d \in \mathbb{N}$,

2. $\phi(\sqrt{\cdot})$ ist vollständig monoton, d.h.

$$(-1)^l \frac{d^l}{dx^l} \phi(\sqrt{x}) > 0, \quad l \in \mathbb{N},$$

auf $[0, \infty)$ und nicht konstant,

3. Es existiert ein nicht auf die 0 konzentriertes endliches Borelmaß μ auf $[0, \infty)$, so dass

$$\phi(r) = \int_0^\infty \exp(-r^2 t) d\mu(t).$$

Dabei hat μ in fast allen relevanten Fällen eine Lebesgue-Dichte und kann für relevante radiale Basisfunktionen direkt angegeben werden z.B. hat $\phi(r) = (c^2 + r^2)^{-\beta}$ die Darstellung

$$\phi(r) = \int_0^\infty \exp(-r^2 t) \frac{1}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} \exp(-c^2 t) dt.$$

Für die Darstellung der Summe bleibt

$$\sum_{j=1}^N c_j \phi(\|x - x_j\|_2) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^N c_j \exp(-\|x - x_j\|_2^2 t) d\mu(t).$$

Nimmt man z.B. $\phi(r) = (1 + r^2)^{-1/2}$, so bleibt die Aufgabe ein Integral der Form

$$\int_0^\infty f(t) t^{-3/2} \exp(-t) dt$$

mit Hilfe der Gauss-Laguerre Quadratur

$$\int_0^\infty t^{-3/2} \exp(-t) f(t) dt = \sum_{k=1}^p w_k f(t_k) + \frac{p! \Gamma(p - 3/2 + 1)}{(2p)!} f^{(2p)}(\xi),$$

wobei $\xi \in (0, \infty)$, die t_k die Nullstellen der Laguerre-Polynome sind, zu approximieren. Es folgt

$$\sum_{j=1}^N c_j \phi(\|x - x_j\|) \approx \sum_{k=1}^p \omega_k \left(\frac{1}{\Gamma(1/2)} \sum_{j=1}^N c_j \exp(-\|x - x_j\|_2^2 t_k) \right),$$

d.h. es bleibt stets eine Summe von exp-Funktionen übrig, die mit Hilfe von [69, Theorem 15.6] in eine degenerierte Darstellung umgeschrieben werden kann. Für den Fehler der degenerierten Approximation gilt unter geeigneten Skalierungsbedingungen Definition 59.

Korollar 124. *Für alle relevanten Fälle positiv definiter radialer Basisfunktionen existiert eine degenerierte Approximation und erfüllt unter geeigneten Skalierungsbedingungen Definition 59.*

Um eine konkrete degenerierte Approximation zu erhalten, muss das Verfahren einzeln auf verschiedene Kerne angewandt werden. Ein weiterer Nachteil, wie im Falle der Taylorentwicklung, ist der zu große Rang, der erst durch anschließende Kürzung eine verwendbare

| Anzahl [10 ³] | Speicher | Kompression |
|---------------------------|----------|-------------|
| 1 | 5.8 | 0.76 |
| 4 | 37.6 | 0.31 |
| 8 | 84.9 | 0.17 |
| 16 | 173.3 | 0.092 |
| 32 | 344.6 | 0.044 |
| 64 | 650.0 | 0.021 |

Tabelle 6: Kompression bei zufällig verteilten Punkten in $[-1, 1]^3$ für die Wendlandfunktion $\phi_{3,1}(r)$ mit einer Genauigkeit von 10^{-8} der Niedrigrangapproximation. Angaben sind Durchschnittswerte.

Größe annimmt. Deshalb wird das von M. Bebendorf, [8], entwickelte ACA-Verfahren angewandt.

Die Kompression und damit der Aufwand einer Matrix-Vektor-Multiplikation sind in Tabelle 6 dargestellt.

Für die Anwendung auf matrixwertige radiale Basisfunktionen werden einzelne Matrizen aus den Einträgen der Matrix erzeugt. Es bleiben aufgrund der Symmetrie von $\Phi_{\text{Lamé}}$ nur 6 symmetrische Matrizen. Die Matrix-Vektor-Multiplikation wird durch eine Sortierung der Unbekannten nach der Dimension durchgeführt: Seien die Punkte $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben und ein Koeffizientenvektor $\alpha = (\alpha_1^\top, \dots, \alpha_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{3N}$. In der Form

$$\begin{pmatrix} (\Phi_{\text{Lamé}})_{11} & (\Phi_{\text{Lamé}})_{12} & (\Phi_{\text{Lamé}})_{13} \\ (\Phi_{\text{Lamé}})_{12} & (\Phi_{\text{Lamé}})_{22} & (\Phi_{\text{Lamé}})_{23} \\ (\Phi_{\text{Lamé}})_{13} & (\Phi_{\text{Lamé}})_{23} & (\Phi_{\text{Lamé}})_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\alpha}_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$(\Phi_{\text{Lamé}})_{kl} = ((\Phi_{\text{Lamé}})_{kl}(x_i - x_j))_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad k, l = 1, \dots, 3$$

und

$$\tilde{\alpha}_i = (\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{N,i})^\top \in \mathbb{R}^N$$

kann die Matrix-Vektor-Multiplikation mit den Methoden aus Abschnitt 3 durchgeführt werden.

6.2 Schnelle Löser für das Interpolationsproblem

Die Auswahl an schnellen Lösungsverfahren ist im Vergleich zu den Algorithmen zur schnellen Matrix-Vektor-Multiplikation recht begrenzt. Zu nennen sind vor allem das iterative Verfahren, [5], und der Countour-Padé bzw. RBF-QR-Algorithmus, [20]. Hier wird ein Krylov-Verfahren von Faul und Powell, [18], auf den Fall von matrixwertigen radialen Basisfunktionen erweitert. Das Verfahren nutzt dabei nur einen selbstadjungierten Operator und die von ihm induzierten Norm, wobei auch eine Ausweitung auf positiv-semidefinite radiale Basisfunktionen möglich ist. Die allgemeine Form macht es zusätzlich möglich, dieses Verfahren auch zur Invertierung des Einfachschichtpotentials der BEM-Formulierung der Lamé-Gleichungen zu verwenden.

Induzierte Norm

Sei ein Interpolant in der Form

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \Phi(x - x_j) c_j, \quad (44)$$

mit $c_j \in \mathbb{R}^3$ und $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Mit

$$M = (\Phi(x_i - x_j))_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$$

werde die entsprechende Interpolationsmatrix der matrixwertigen radialen Basisfunktion bezeichnet, welche aus Blöcken

$$(\Phi_{kl}(x_i - x_j))_{k,l=1,2,3}$$

für $i, j = 1, \dots, N$ besteht. Der Koeffizientenvektor c sei definiert durch

$$c = (c_1^\top, \dots, c_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{3N}.$$

Das Interpolationsproblem ist dann gegeben durch

$$Mc = f,$$

zu gegebenen Werten einer Funktion $f(x_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$. Der Raum aller Funktionen s der Form (44) werde mit \mathcal{S} bezeichnet. Für zwei Funktionen $s, t \in \mathcal{S}$ mit

$$t(x) = \sum_{i=1}^N \Phi(x - x_i) d_i$$

definiert

$$\langle s, t \rangle = c^\top M d$$

eine Bilinear-Form auf \mathcal{S} mit induzierter Norm

$$\|s\|_{\mathcal{S}} = \langle s, s \rangle^{1/2}.$$

Die Eigenschaften einer Norm folgen direkt aus der positiven Definitheit der matrixwertigen radialen Basisfunktion.

Korollar 125. Für $s, t \in \mathcal{S}$ gilt

$$\langle s, t \rangle = \sum_{i=1}^N c_j^\top t(x_i) = \sum_{i=1}^N s(x_i)^\top d_j.$$

Beweis. Seien s und t gegeben. Dann gilt

$$\langle s, t \rangle = \sum_{i=1}^N c_j^\top \sum_{j=1}^N \Phi(x_i - x_j) d_j = \sum_{i=1}^N c_j^\top t(x_i) = \sum_{i=1}^N s(x_i)^\top d_j.$$

□

Die Berechnung der Bilinear-Form benötigt folglich die Matrix M nicht. Sei weiter s^* der gesuchte Interpolant des Interpolationsproblems. Es ist somit möglich das Skalarprodukt zu berechnen, ohne den gesuchten Interpolanten zu kennen, denn es gilt:

$$\langle s, s^* \rangle = \sum_{i=1}^N c_j^\top s^*(x_i) = \sum_{i=1}^N c_j^\top f(x_i).$$

Krylov-Unterraummethode

Die Krylov-Unterraummethode ist ein iteratives Verfahren und baut auf den Eigenschaften eines linearen Operators A , gesehen als Abbildung von \mathcal{S} nach \mathcal{S} auf. Sei k die Iterationsnummer und \mathcal{S}_k der lineare Unterraum von \mathcal{S} , welcher von $A^j s^*$, $j = 1, \dots, k$ aufgespannt wird, wobei s^* der gesuchte Interpolant ist. Ziel ist im nächsten Schritt einen Interpolanten s_{k+1} zu finden mit

$$\|s^* - s_{k+1}\|_{\mathcal{S}} < \|s^* - s_k\|_{\mathcal{S}}. \quad (45)$$

Die Folge $\|s^* - s_j\|_{\mathcal{S}}$, $j = 1, \dots$ fällt streng monoton. Die Koeffizienten von $A^j s^*$ werden wie bei einem normalen Krylov-Unterraumverfahren wegen der Instabilität nicht explizit berechnet. Stattdessen werden orthogonale Suchrichtungen d_k verwendet und s_{k+1} mit Hilfe einer entsprechenden Skalierung α_k durch

$$s_{k+1} = s_k + \alpha_k d_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \quad (46)$$

berechnet. Die Suchrichtung selber muss die Orthogonalitätsbedingung $\langle d_k, d_{k-1} \rangle = 0$ erfüllen und schreibt sich in der Form

$$d_k = A(s^* - s_k) + \beta_k d_{k-1}, \quad \beta_k \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

Aus Ungleichung (45) und der Orthogonalitätsbedingung werden die Parameter

$$\alpha_k = \frac{\langle s^* - s_k, d_k \rangle}{\langle d_k, d_k \rangle} \quad \text{und} \quad \beta_k = -\frac{\langle d_{k-1}, z_k \rangle}{\langle d_{k-1}, d_{k-1} \rangle}$$

bestimmt. Für $k = 0$ wird $s_0 = 0$ und $d_0 = A(s^* - s_0)$ gesetzt.

Satz 126. Falls der Operator A die Eigenschaften

1. $\langle s, As \rangle > 0$ für $s \in \mathcal{S}$ mit $s \neq 0$,
2. Es gilt $\langle t, As \rangle = \langle At, s \rangle$ für $s, t \in \mathcal{S}$.

erfüllt, konvergiert das Verfahren.

Beweis. Die Vorgehensweise aus [18, Section 3] überträgt sich auf den vektorwertigen Fall. \square

Herleitung von A

Sei ψ_j , $j = 1, \dots, 3N$ eine Basis von \mathcal{S} . Die Anwendung von A auf $s \in \mathcal{S}$ sei definiert durch

$$As = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\langle \psi_j, s \rangle}{\langle \psi_j, \psi_j \rangle} \psi_j.$$

Lemma 127. A erfüllt die Eigenschaften aus Lemma 126.

Beweis. Seien $t, s \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\langle t, As \rangle = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\langle \psi_j, s \rangle \langle \psi_j, t \rangle}{\langle \psi_j, \psi_j \rangle} = \langle At, s \rangle.$$

Sei weiter

$$\langle s, As \rangle = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\langle \psi_j, s \rangle^2}{\langle \psi_j, \psi_j \rangle} = 0.$$

Es folgt $\langle \psi_j, s \rangle = 0$ für alle $j = 1, \dots, 3N$. Da ψ_j eine Basis von \mathcal{S} ist, besitzt es eine Darstellung der Form

$$s = \sum_{j=1}^{3N} \theta_j \psi_j.$$

Somit folgt $s = 0$ wegen

$$\|s\|_{\mathcal{S}}^2 = \langle s, s \rangle = \sum_{j=1}^{3N} \theta_j \langle \psi_j, s \rangle = 0.$$

□

Idealerweise werden die ψ_j so gewählt, dass sie bezüglich des auf \mathcal{S} definierten Skalarproduktes orthogonal sind. In diesem Fall erhält man $A\psi_j = \psi_j$ für alle $j = 1, \dots, 3N$. Für die Suchrichtung ergibt sich direkt $d_1 = \alpha_1 s^*$ mit $\alpha_1 = 1$.

Werden die ψ_j als Lagrange-Basis gewählt, also

$$\psi_j = \sum_{l=1}^N \Phi(x - x_l) \lambda_{jl}, \quad \lambda_{jl} \in \mathbb{R}^3$$

und

$$\psi_j(x_i) = \delta_{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor, i} e_k, \quad k = j \bmod 3 + 1, \quad i = 1, \dots, N,$$

wobei $e_k \in \mathbb{R}^3$ der k -te Einheitsvektor ist, dann gilt $A\psi_j = \psi_j$ und $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Der numerische Aufwand, diese Basis zu erstellen, ist dabei wesentlich größer als das System direkt zu lösen. Deshalb wird die Basis zunächst in folgender Weise abgeändert:

$$\psi_j = \sum_{l=\lfloor \frac{j}{3} \rfloor}^N \Phi(x - x_l) \lambda_{jl}, \quad \lambda_{jl} \in \mathbb{R}^3 \quad (48)$$

und

$$\psi_j(x_i) = \delta_{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor, i} e_k, \quad k = j \bmod 3 + 1, \quad i = \left\lfloor \frac{j}{3} \right\rfloor + 1, \dots, N.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \psi_k, \psi_m \rangle &= \sum_{i=1}^N \lambda_{ki}^\top \sum_{j=1}^N \Phi(x_i - x_j) \lambda_{mj} = \sum_{i=1}^N \lambda_{ki}^\top \psi_m(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^N \psi_k(x_j)^\top \lambda_{mj}, \end{aligned}$$

wobei die fehlenden λ_{mj} bzw. λ_{ki} durch 0 ergänzt werden. Aus dieser Darstellung folgt

$$\langle \psi_k, \psi_m \rangle = \delta_{km}.$$

Der numerische Aufwand ist allerdings mit dem der vollen Lagrange-Basis vergleichbar, so dass eine weitere Modifikation nötig ist. Die Idee der approximierten Lagrange-Basis stammt dabei aus [Powell 1994]. Statt die volle Indexmenge $\{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor, 3, \dots, N\}$ für den Summationsindex l in Gleichung (48) zu verwenden, werden Mengen der Form

$$\text{In}_j \subset \left\{ \left\lfloor \frac{j}{3} \right\rfloor, \dots, N \right\}$$

verwendet, welche die $q \in \mathbb{N}$ nächsten Nachbarn aus $\{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor, \dots, N\}$ enthält bzw. falls $N - j + 1 \leq q$ einfach die folgenden Indizes.

Lemma 128. *Die approximierte Lagrange-Basis ist eine Basis von \mathcal{S} .*

Beweis. Sei $C \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$ die Matrix mit den Koeffizienten λ_{jl} in den Spalten, wobei die fehlenden λ_{jl} durch 0 ergänzt werden. C ist nach Konstruktion eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge positiv sind, denn es gilt

$$(\lambda_{kk})_{k \bmod 3 + 1} = \sum_{j=1}^N \psi_k(x_j)^\top \lambda_{kj} = \langle \psi_k, \psi_k \rangle > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, 3N.$$

Die letzte Ungleichung ist strikt, da $\psi_k \neq 0$ gilt. □

Der Operator A hat für $s \in \mathcal{S}$ die Form

$$As = \sum_{j=1}^{3(N-q)} \frac{\langle \psi_j, s \rangle}{\langle \psi_j, \psi_j \rangle} \psi_j + Hs,$$

wobei

$$Hs = \sum_{j=3(N-q)+1}^{3(N-q)} \frac{\langle \psi_j, s \rangle}{\langle \psi_j, \psi_j \rangle} \psi_j.$$

Dabei bildet H Funktionen $s \in \mathcal{S}$ auf Funktionen des $3q$ -dimensionalen Teilraumes

$$\mathcal{S}' = \left\{ s : \sum_{j=N-q+1}^N \Phi(x - x_j) c_j, c_j \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

von \mathcal{S} ab. Es gilt weiterhin $Hs = s$ für alle Funktionen $s \in \mathcal{S}'$. Wegen

$$\langle \psi_k, s \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_{ki}^\top s(x_i)$$

hängt die Anwendung von H auf ein $s \in \mathcal{S}$ nur von den Werten $s(x_i)$ für $i = N - q + 1, \dots, N$ ab. Daher gilt folglich $Hs = Ht$ für ein eindeutiges $t \in \mathcal{S}'$ mit

$$t(x_i) = s(x_i) \text{ für alle } i = N - q + 1, \dots, N.$$

Hs für $s \in \mathcal{S}$ ist folglich die Lösung des Interpolationsproblems in \mathcal{S}' .

Lemma 129. *Der über die approximierte Lagrange-Basis definierte Operator A erfüllt die Eigenschaften aus Lemma 126.*

Algorithmus

Als Eingabe wird die entsprechende matrixwertige RBF, die Punkte $X = \{x_i\}_{i=1}^N$, die Größe der Indexmengen q und die rechte Seite entgegengenommen.

1. Zunächst werden die Indizes In_j erzeugt. Dabei ist zu beachten, dass sich zwei Mengen In_j und In_k nicht unterscheiden falls, $\lfloor \frac{j}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ gilt.

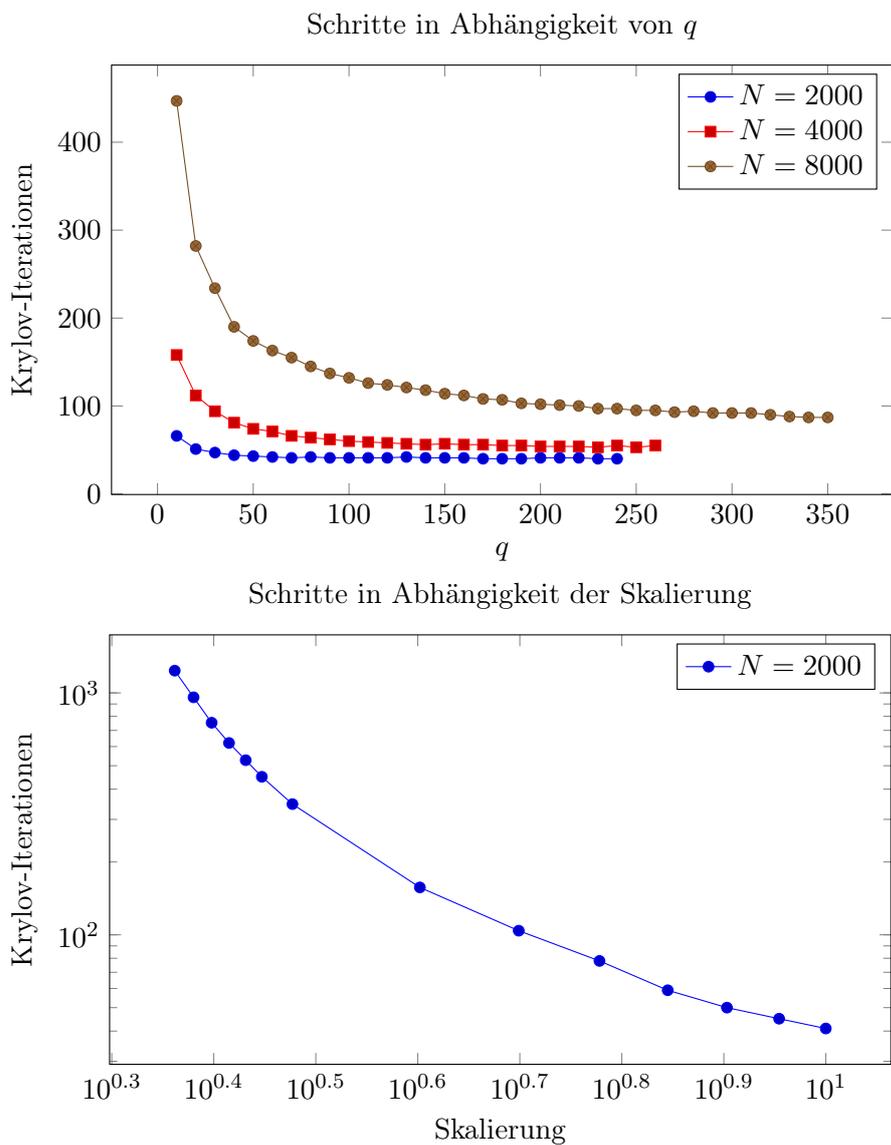


Abbildung 7: Anzahl der Krylov-Iterationen in Abhängigkeit verschiedener Parameter.

2. Lösen der Interpolationsprobleme für

$$\psi_j(x_i) = \delta_{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor, i} e_k, \quad k = j \bmod 3 + 1, \quad i = 1, \dots, N,$$

wobei hier die Faktorisierung bei gleichen Indexmengen wiederverwendet werden kann.

3. Faktorisierung der Matrix zur Lösung des Interpolationsproblems von H .

| N | CG | Krylov ($q = 100$) |
|------|--------|----------------------|
| 1000 | 170 | 29 |
| 2000 | 542 | 41 |
| 3000 | 954 | 49 |
| 4000 | 1308 | 60 |
| 5000 | $> 3N$ | 70 |

Tabelle 7: Vergleich mit CG-Verfahren, Skalierung 10.0.

Mit $\underline{c}(s) \in \mathbb{R}^{3N}$ wird der Koeffizientenvektor einer Funktion $s \in \mathcal{S}$ bezeichnet. Im k -ten Iterationsschritt wird das Residuum $r_{k,i} \in \mathbb{R}^3$

$$r_{k,i} = f_i - s_k(x_i)$$

für $i = 1, \dots, N$ berechnet. Für $k = 1$ wird $r_{1,i} = f_i$ verwendet. Die Anwendung von A auf $s^* - s_k$ liefert

$$\underline{c}(d_k) = \underline{c}(A(s^* - s_k)) + \beta_k \underline{c}(d_{k-1}), \quad k \geq 2,$$

wobei für $k = 1$ die Suchrichtung d_{k-1} entfernt wird. Es folgt aus der Orthogonalitätsbedingung der d_k und der Definition des Skalarproduktes auf \mathcal{S}

$$\beta_k = -\frac{\sum_{i=1}^N \underline{c}(A(s^* - s_k))_i^\top d_{k-1}(x_i)}{\sum_{i=1}^N \underline{c}(d_{k-1})_i^\top d_{k-1}(x_i)}$$

sowie

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^N \underline{c}(d_k)_i^\top r_{k,i}}{\sum_{i=1}^N \underline{c}(d_k)_i^\top d_k(x_i)},$$

wobei $\underline{c}(s)_i$ der Vektor bestehend aus den $3i$, $3i + 1$ und $3i + 2$ Komponenten von $\underline{c}(s)$ ist.

Numerisches Beispiel

In den Tests wurden zufällig in $[0, 1]^3$ verteilte Punkte verwendet. Als matrixwertige RBF wurde Φ_{curl} verwendet, erzeugt aus einer inversen Multiquadric. Die Skalierung der RBF wurde dabei fixiert, d.h. insbesondere nicht an die Anzahl der Punkte angepasst. Die Abhängigkeit der Anzahl der Krylov-Iterationen in Abhängigkeit verschiedener Parameter findet sich in Abbildung 7.

Es zeigt sich, dass das Verfahren wesentlich effizienter als ein CG-Verfahren ist, welches nicht immer konvergierte (siehe Tabelle 7). Allerdings ist auch zu beobachten, dass im Falle einer steigenden Konditionszahl, d.h. bei steigender Problemgröße oder anderer Skalierung, eine Vergrößerung der Indexmengen notwendig ist.

Teil III

Anwendung auf das Schädigungsmodell und numerische Ergebnisse

7 Einbettung in das Konzept des Multiscale Modellings

Industriell gefertigte, als auch aus der Natur stammende, Materialien sind in der Regel heterogen, zumindest ab einer bestimmten Größenskala. Typische Vertreter finden sich in Abschnitt 1.2. Viele ihrer Eigenschaften werden durch das Vorhandensein von Mikrostruktur verursacht. Dabei spielen Größe, Aussehen und Verteilung der beteiligten Stoffe eine erhebliche Rolle. Ein ebenfalls wichtiger Faktor sind die Grenzschichten zwischen zwei Materialien. Die Bestimmung der makroskopischen Eigenschaften von heterogenen Materialien spielt eine wichtige Rolle in ingenieurtechnischen Anwendungen. Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Phänomenen auf der mikroskopischen und der makroskopischen Ebene erlaubt es, das Materialverhalten vorherzusagen, oder auch ein Material entsprechend zu designen, um bestimmten Anforderungen gerecht zu werden.

7.1 Vorstellung der Methode

Eine Reihe von Methoden zur Homogenisierung eines heterogenen Materials wurden entwickelt. Die einfachste Methode ist die gewünschten Eigenschaften über die Bestandteile und deren Volumina zu mitteln. Der große Nachteil ist dabei, dass außer dem Verhältnis der Volumina der Bestandteile keine Eigenschaften einer Mikrostruktur verwendet werden und ein Einbringen zusätzlicher Parameter in die Mikrostruktur keine Auswirkungen auf die Homogenisierung hat.

Einen anspruchsvolleren Weg stellt die Methode nach Eshelby dar, welche in Hashin, [32], weiterentwickelt wurde. Entsprechende materielle Eigenschaften werden aus der Lösung eines Randwertproblems für eine sphärische oder ellipsoidale Inklusion innerhalb eines unendlich ausgedehnten Materials entweder in analytischer oder semi-analytischer Form erhalten. Dieses Verfahren liefert eine gute Approximation im Falle, dass das Material eine gewisse geometrische Regularität erfüllt. Hohe Kontraste in den Eigenschaften zwischen den einzelnen Bestandteilen können mit diesem Verfahren nicht abgebildet werden.

In den letzten Jahren entwickelte sich der Ansatz die Homogenisierung mittels Multiskalenmodellierung, auch FE²-Methode genannt, durchzuführen. Dabei handelt es sich um eine Multiskalentechnik, die auf der Ableitung der lokalen makroskopischen Antwort aus der Lösung eines entsprechenden Randwertproblems der zugrunde liegenden Mikrostruktur basiert. Häufig werden dafür FE-Methoden verwendet.

Die Prinzipien der klassischen numerischen Homogenisierung mittels FE-Methoden entwickelten sich aus den Prinzipien der bisherigen Methoden:

1. Definiere ein repräsentatives Volumenelement (RVE), dessen materielle Eigenschaften, wie z.B. Elastizitätsmodul etc., vollständig bekannt sind.
2. Herleitung des Randwertproblems für das RVE, d.h. Erstellung der Randdaten aus den Vorgaben der Makroebene.
3. Lösen des Randwertproblems.
4. Berechnung der nötigen Variablen zur Ausgabe an die Makroebene mit Hilfe des gelösten Randwertproblems.

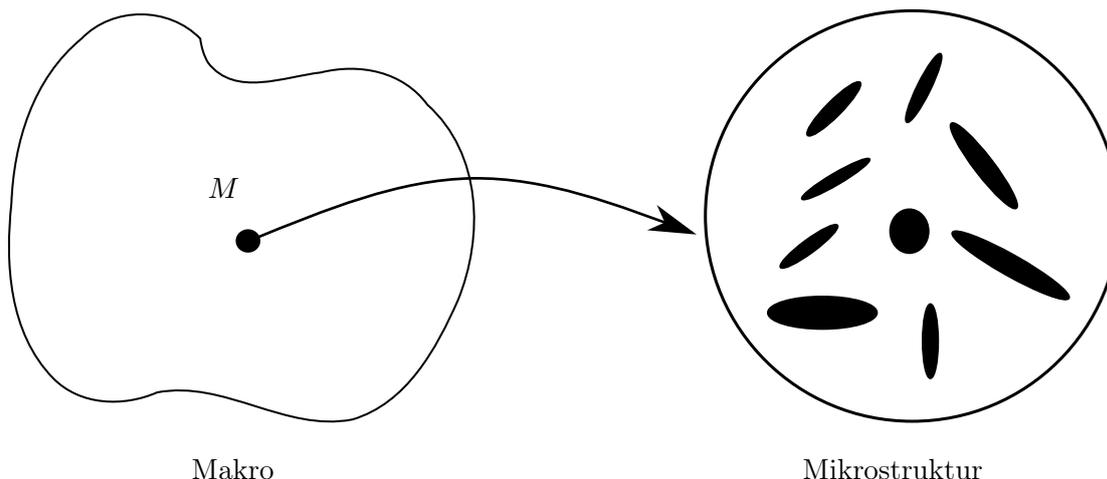


Abbildung 8: Schematische Darstellung einer heterogenen Mikrostruktur in einem makroskopischen Punkt M .

5. Berechnung der Beziehung zwischen den Eingabe- und Ausgabevariablen der Makroebene.

Die wichtigsten Ideen der numerischen Homogenisierung wurden in Suquet, [66], formuliert und in Guedes und Kikuchi, [25], weiterentwickelt.

Unter den Vorteilen der numerischen Homogenisierung sind unter anderem die folgenden erwähnenswert:

- Es wird keine Werkstoffgleichung auf Makroebene benötigt, da das makroskopische Verhalten aus der Lösung eines zugehörigen Randwertproblems auf Mikroebene abgeleitet wird.
- Es besteht die Möglichkeit, auch große Deformationen abzubilden.
- Beliebiges, auch nichtlineares Materialverhalten, ist abbildbar.
- Informationen aus der Mikroebene können in die Analyse auf Makroebene einfließen.
- Auf Mikroebene kann ein beliebiges Lösungsverfahren gewählt werden wie z.B. FE-Methoden, Randelementmethoden, FFT-basierte Methoden etc..

Die Berechnung eines vollständig gekoppelten mikro-makro Problems ist allerdings sehr rechenintensiv. Mittels Parallelisierung wird dabei die Rechenzeit verkürzt. Weiter wird durch eine Vorauswahl von nicht kritischen Regionen des Materials das Verhalten mittels der Materialgleichungen abgeleitet und so der Anteil an Berechnungen auf Mikroebene reduziert.

In diesem Abschnitt wird die Lösungsstrategie auf Mikroebene mittels einer mit matrixwertigen RBF gekoppelten BEM vorgestellt.

7.2 Makroebene

Das betrachtete Material sei makroskopisch homogen, jedoch mikroskopisch betrachtet heterogen, d.h. es bestehe aus unterscheidbaren Komponenten, wie Inklusionen, Löchern etc. wie es in Abbildung 8 schematisch dargestellt ist.

Da die Längenskala der Mikroebene sich immer noch um Größenordnungen von der eines Molekül unterscheidet, ist auch hier ein Ansatz mittels Kontinuumsmechanik gerechtfertigt.

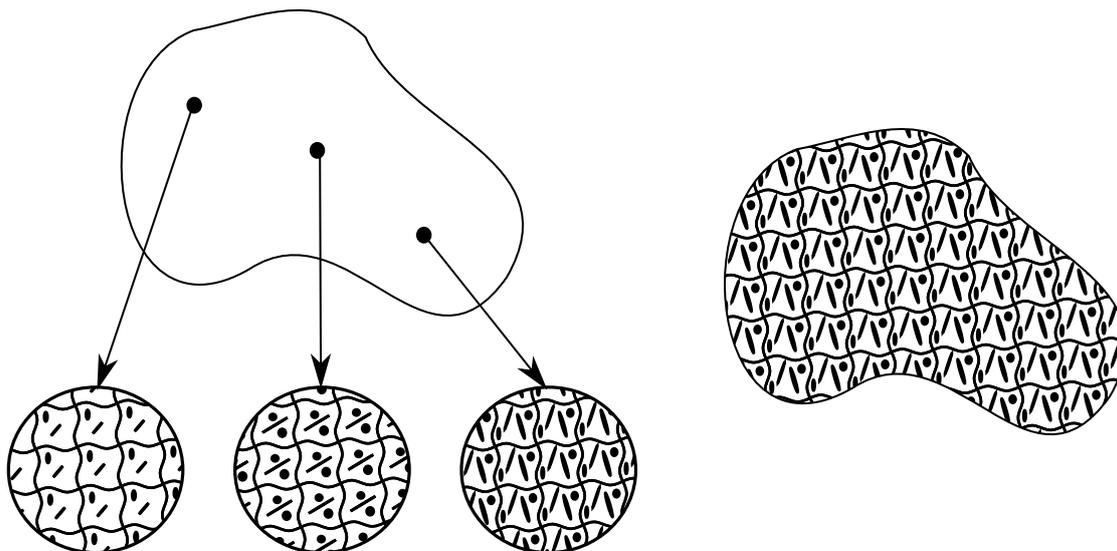


Abbildung 9: Schematische Darstellung einer lokal periodischen (links) und einer global periodischen (rechts) Mikrostruktur.

Weiterhin sollte die Längenskala der Mikroebene wesentlich kleiner als die Längenausdehnung des betrachteten Werkstücks sein.

Die meisten Homogenisierungsansätze gehen davon aus, dass sich das gesamte Werkstück aus periodisch wiederholten RVE zusammensetzt. In dem verwendeten Ansatz können hier jedoch für jeden makroskopischen Punkt unterschiedliche RVE gewählt werden, wie in Abbildung 9 dargestellt ist.

Auf Makroebene wird für jeden makroskopischen Punkt M , d.h. für jeden Integrationspunkt der FE-Methode, der Deformationsgradient bestimmt. Mit Hilfe des Deformationsgradienten werden anschließend für jeden Punkt M die Randdaten für das Randwertproblem auf Mikroebene erzeugt. Wie dies im einzelnen erfolgt, ist Abschnitt 7.3 zu entnehmen. Aus der Lösung des Randwertproblems des entsprechenden RVE wird für jeden Punkt M der Spannungstensor als Mittelung des mikroskopischen Spannungstensor über das Volumen erzeugt. Die Beziehungen zwischen Spannungstensor und Dehnungstensor sind folglich leicht zu ermitteln. Zusätzlich wird die lokale makroskopische konsistente Tangente numerisch aus der Mikrostruktur erzeugt. Schematisch findet sich das Verfahren in Abbildung 10.

Das hier verwendete Verfahren ist deformationsgesteuert, d.h. auf Makroebene lautet das Problem wie folgt: Gegeben ist der Deformationsgradient; bestimme den Spannungstensor und die konsistente Tangente basierend auf der Lösung des Randwertproblems auf Mikroebene. Ebenfalls denkbar, aber nicht in das Konzept der FE-Methode passend, ist ein spannungsgesteuertes Verfahren, d.h. gegeben ist der Spannungstensor und zu bestimmen ist der Deformationsgradient. In Tabelle 8 sind die wichtigsten Schritte der Methode mit Unterscheidung der beiden Ebenen aufgelistet.

7.3 Mikroebene und repräsentatives Volumenelement

Die physikalischen und geometrischen Eigenschaften der Mikrostruktur werden mit Hilfe eines RVE dargestellt. Die tatsächliche Wahl eines RVE bedarf besonderer Sorgfalt. Das RVE sollte groß genug sein, um die Eigenschaften der Mikrostruktur wiederzugeben, ohne dabei nicht vorhandene Effekte, wie z.B. Anisotropie, einzuführen. Andererseits sollte es aber auch so klein sein, dass das gesamte Modell nicht zu rechenintensiv wird. Für die

| Makroebene | Mikroebene |
|--|---|
| Initialisierung | |
| Initialisiere das makroskopische Modell Ordne jedem Integrationspunkt ein RVE zu Schleife über alle Integrationspunkte Speichere Tangenten | \longrightarrow Initialisiere RVE Berechne Randdaten Berechne Tangente |
| Nächstes Inkrement auf Makroebene | |
| Nächste Iteration | |
| Berechne die makroskopische Tangente Löse das System auf Makroebene Schleife über alle Integrationspunkte Berechne Deformationsgradient Speichere Tangenten und Spannungen | \longrightarrow RVE Berechne Randdaten Löse das Randwertproblem Berechne makroskopische Spannung \longleftarrow Berechne Tangente |
| Konvergenz | |
| Keine Konvergenz \implies Nächste Iteration | |
| Konvergenz \implies Nächstes Inkrement | |

Tabelle 8: Lösungsverfahren.

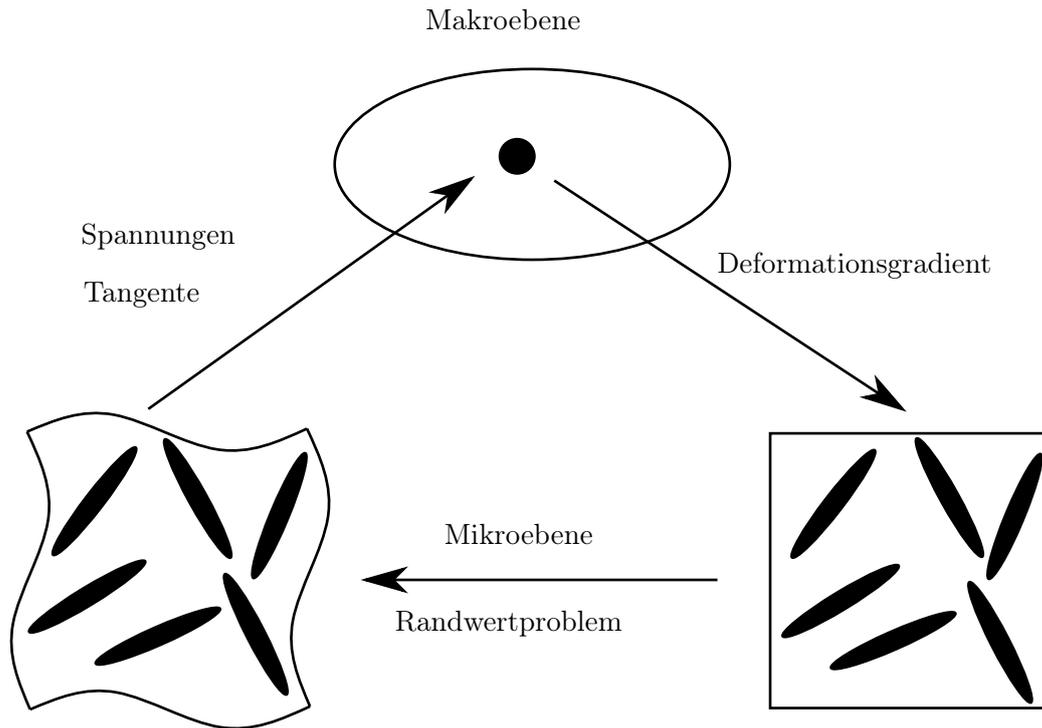


Abbildung 10: Mikro-Makro

Formulierung des Randwertproblems auf Mikroebene geht man demzufolge davon aus, dass bereits ein entsprechendes passendes RVE gewählt wurde.

Ziel ist es, die Mikrostruktur eines Komposites abzubilden. Dabei werden die Inklusionen gemäß eines statistisch ermittelten Faserorientierungstensors in das RVE eingebracht. Einige RVEs finden sich in Abbildung 11.

Grundsätzlich gibt es mehrere Möglichkeiten das Problem auf Mikroebene zu formulieren:

1. Uniforme Verschiebung: Die Verschiebungen aller Knoten werden gemäß

$$u_j = \sum_{i=1}^3 e_{ji} x_i, \quad j = 1, 2, 3,$$

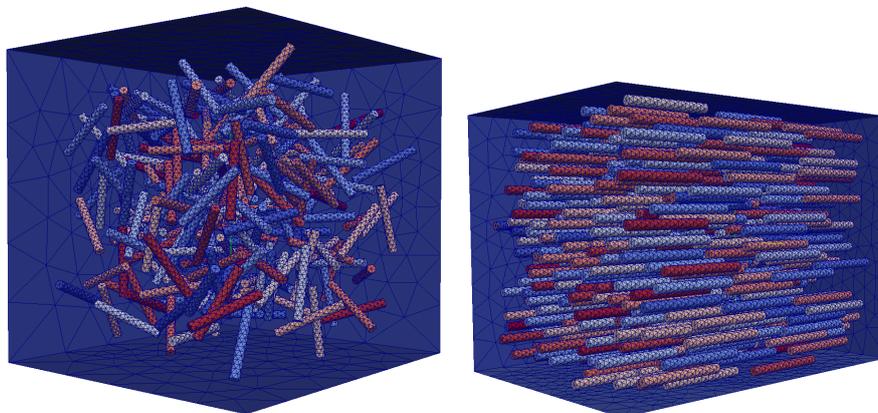


Abbildung 11: RVE mit isotroper und unidirektionaler Faserverteilung.

vorgegeben, wobei x die M Knoten der Diskretisierung der Oberfläche des RVE sind und e_{ji} der Verzerrungstensor aus der Makroebene.

2. Periodische Randbedingungen: Basierend auf der Annahme, dass die Mikrostruktur periodisch ist, werden periodische Randbedingungen auf dem Würfel vorgeschrieben, d.h. die Randspannung t muss antiperiodisch und die Verschiebung periodisch sein. Im Kontext der BEM sind diese Randbedingungen nicht direkt aufzubringen, sondern sie müssen in Form von Nebenbedingungen implementiert werden.
3. Uniforme Spannungen: Die Randspannungen des RVE werden durch die Makroebene vorgegeben.

Das grundsätzliche Problem bei 3. ist, dass das Randwertproblem nicht eindeutig lösbar ist, da Starrkörperbewegungen nicht erfasst werden können. Die Randbedingungen aus 2. ermöglichen eine gute Approximation des Elastizitätstensors und der gemittelten Spannungen. Jedoch passt 2. nicht in das Konzept der BEM. Die Netze müssen zusätzlich periodisch sein und die Randbedingungen müssen über Nebenbedingungen implementiert werden, was zu einer höheren Anzahl an Freiheitsgraden führt. Das in 7.4 beschriebene Verfahren verwendet die Randbedingungen aus 1..

Mittelung

Für die Rückgabe an die Makroebene werden der Cauchy-Spannungstensor und der Elastizitätstensor benötigt. Nach dem Lösen des Randwertproblems auf Mikroebene wird mittels

$$\sigma^* = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \sigma(u, x) dx, \quad V = |\Omega|,$$

der makroskopische Spannungstensor zurückgegeben. Für die Mittelung des Elastizitätstensors wird eine numerische Tangente berechnet: Dazu wird ausgehend von der Lösung σ^* für den von der Makroebene übergebene Dehnungstensor e numerisch

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial e_{kl}}$$

berechnet.

7.4 Kopplung der partikulären Lösung mit der BEM

Das Gebiet Ω sei in p nicht überlappende Teilgebiete Ω_i zerlegt, wobei

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^p \bar{\Omega}_k \quad \text{und} \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad \text{für} \quad k \neq l.$$

Weiterhin seien $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ Lipschitz-Ränder. Die Ränder Γ_k , $k > 1$ werden als Koppelränder bezeichnet. Wie in Abschnitt 2.4 dürfen sich die inneren Ränder nicht . Die Gesamtheit aller Koppelränder und $\Gamma_0 = \partial\Omega$ wird mit

$$\Gamma_S = \Gamma_0 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_p$$

bezeichnet. Der Rand Γ_1 bestehe aus Γ_S , d.h. alle Ω_k , $k = 2, \dots, p$ liegen vollständig innerhalb von Ω . Schematisch zeigt Abbildung 12 die Darstellung eines RVE mit den Bezeichnungen.

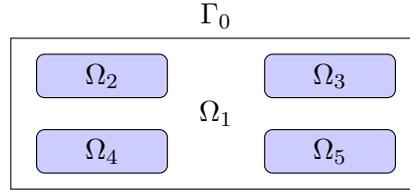
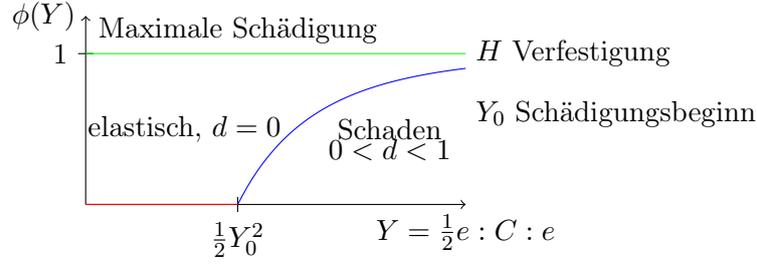


Abbildung 12: Bezeichnungen.

Abbildung 13: Reaktion der Schädigungsvariablen d in Abhängigkeit der spezifischen ungeschädigten Energie.

Ziel ist es, das gekoppelte Problem mit dem Schädigungsmodell im Matrixmaterial aus Abschnitt 1.3 mit Hilfe einer gekoppelten BEM-RBF Methode zu lösen. In Abbildung 13 ist schematisch der Verlauf der Größe

$$\phi(Y) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-H_{\text{hard}}(\sqrt{2Y} - Y_0)\right) & , \sqrt{2Y} - Y_0 > 0, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

abgebildet, die den Schädigungsparameter d bestimmt.

Die Problemstellung lautet:

Bei gegebenen Randbedingungen g_D auf Γ_0 finde u_k , für $k = 1, \dots, p$ mit

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^k(u^k, x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega_k,$$

für $k > 1$ und

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (1-d)\sigma_{ij}^1(u^1, x) &= 0 & \text{für } x \in \Omega_1, \\ \gamma_0^{1,\text{int}} u^1(x) &= g_D(x) & \text{für } x \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1, \end{aligned}$$

zusammen mit den Koppelbedingungen

$$\gamma_0^{1,\text{int}} u^1(x) = \gamma_0^{l,\text{int}} u^l(x) \quad (49)$$

und

$$\gamma_1^{1,\text{int}} u^1(x) = -\gamma_1^{l,\text{int}} u^l(x) \quad (50)$$

für $l = 2, \dots, p$ und $x \in \Gamma_l$. Die Konormalenableitungen für das Matrixmaterial Ω_1 ändern sich für das Modell mit Schädigung zu

$$\gamma_1^{\text{int}} u(y) = (1 - d(u, y)) \sigma(u, y) n(y), \quad y \in \Gamma_1.$$

In Ω_1 wird zunächst eine Aufteilung von u vorgenommen. Mit u_R wird der Teil von u^1 bezeichnet, der mit Hilfe der entwickelten Methode aus Abschnitt 5.2.2 konstruiert wird, mit u_B der Teil, der mittels der Randelementmethode erzeugt wird. Die Lösung u^1 schreibt sich in der Form

$$u^1 = u_R + u_B.$$

Für Ω_1 kann der Differentialoperator umgeschrieben werden. Es folgt

$$-\operatorname{div}((1 - d(u^1, x))\sigma(u^1, x)) = -\operatorname{div}(\sigma(u^1, x)) + \operatorname{div}(d(u^1, x)\sigma(u^1, x)) = 0$$

Die Bedingungen für u_R und u_B lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma(u_R, x)) &= \operatorname{div}(d(u_R + u_B, x, \text{hist})\sigma(u_R + u_B, x)) && \text{für } x \in \Omega_1, \\ \operatorname{div}(\sigma(u_B, x)) &= 0 && \text{für } x \in \Omega_1. \end{aligned} \quad (51)$$

Die Beschreibung des numerischen Verfahrens wird in 3 Abschnitte aufgeteilt.

Das System (51) ist in der ersten Gleichung nicht linear, so dass eine direkte Lösung nicht möglich ist. Daher wird eine Fixpunktiteration verwendet. Die Dirichlet-Daten g_D werden in S einzelne Inkremente

$$g_D^s = \sum_{j=0}^s \omega_j g_D, \quad s = 0, \dots, S,$$

mit den Gewichtungsfaktoren ω_j mit

$$\sum_{j=0}^S \omega_j = 1,$$

aufgeteilt.

Data : RVE, g_D

Result : Lösung u

for $s = 0, \dots, S$ **do**

$$g_D^s = \sum_{j=0}^s \omega_j g_D;$$

$i = 0;$

while $Fehler > Toleranz$ **do**

$u_{R,i}^s$ Lösung der ersten Gleichung von (51);

 Finde $u_{B,i}^s$ Lösung der zweiten Gleichung von (51);

 mit korrigierten Randbedingungen;

 Setze $u_i^s = u_{R,i}^s + u_{B,i}^s;$

 Berechne Fehler;

$i ++;$

end

end

Algorithmus 1 : Schematische Darstellung der Fixpunktiteration.

Algorithmus - Allgemeiner Teil

Für das diskretisierte System müssen die Koppelbedingungen (49) und (50) in jedem Iterationsschritt modifiziert werden. Die partikuläre Lösung u_R erfüllt die Bedingungen (49) und (50) nicht, so dass eine Korrektur der Randdaten nur über die Randelementmethode erfolgen kann.

Algorithmus - RBF Teil

Das Volumen $\bar{\Omega}_1$ wird in diskretisierter Form benötigt. Die Menge

$$X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \bar{\Omega}_1 \subset \mathbb{R}^3$$

bestehe dabei aus den inneren Knoten und den Dreiecksmittelpunkten der diskretisierten Oberfläche Γ_1 . Weiter seien $u_{R,i}$ und $u_{B,i}$ aus der letzten Iteration bekannt. Für die Berechnung der rechten Seite des Systems (51)

$$\text{div}(d(u_R + u_B, x, \text{hist})\sigma(u_R + u_B, x))$$

wird die Auswertung der BEM in inneren Knoten mittels der Darstellungsformel durchgeführt. Die Auswertung von σ auf dem Rand erfordert eine tangentielle Ableitung der Dirichlet-Daten, [71].

Für die Berechnung der Ableitung in den Interpolationspunkten X werden die einzelnen Komponenten des Tensorfeldes

$$d(u_R + u_B, x, \text{hist})\sigma(u_R + u_B, x)$$

mittels einer positiv definiten RBF ϕ interpoliert

$$\begin{aligned} & d(u_R + u_B, x, \text{hist})\sigma(u_R + u_B, x) \\ & \approx \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \alpha_{1,i}\phi(x - x_j) & \alpha_{4,i}\phi(x - x_i) & \alpha_{6,i}\phi(x - x_i) \\ & \alpha_{2,i}\phi(x - x_i) & \alpha_{5,i}\phi(x - x_i) \\ \text{symm} & & \alpha_{3,i}\phi(x - x_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und die Ableitung durch

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (d(u_R + u_B, x, \text{hist})\sigma(u_R + u_B, x))_j \approx \sum_{i=1}^N \alpha_{j,i} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x - x_i), \quad k = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, 6$$

berechnet. Die Divergenz eines Tensorfeldes \mathbf{S} zweiter Ordnung schreibt sich in der Form

$$\text{div } \mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{S}^\top = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{S}_{ik}}{\partial x_k} e_i,$$

wobei e_i der Einheitsvektor in \mathbb{R}^3 ist. Folglich berechnet sich die rechte Seite zu

$$\text{rhs}(x) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x - x_i) + \alpha_{4,i} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x - x_i) + \alpha_{6,i} \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x - x_i) \\ \alpha_{4,i} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x - x_i) + \alpha_{2,i} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x - x_i) + \alpha_{5,i} \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x - x_i) \\ \alpha_{6,i} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x - x_i) + \alpha_{5,i} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x - x_i) + \alpha_{3,i} \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x - x_i) \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{R}^N$. Die Ableitungsmatrizen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x_j - x_i) \right)_{i,j=1, \dots, N}, \quad k = 1, 2, 3$$

sind unabhängig vom Interpolanten und werden mit den Methoden aus Kapitel 3 generiert. Für die Schädigungsvariable d wird ebenfalls ein Interpolant erzeugt und für die L_2 -Projektion der Schädigungsvariable auf die Ränder verwendet.

Die rechte Seite ist folglich apriori weder divergenz- noch rotationsfrei, so dass die in Abschnitt 5.2.2 entwickelte Methode angewendet wird. Das Interpolationsproblem lautet: Finde den Interpolanten in der Form

$$s_{\text{rhs},X}(x) = \sum_{j=1}^N \Phi_{\text{Lamé}}(x - x_j) \beta_j$$

mit gegebenen Werten $\text{rhs}(x_i) \in \mathbb{R}^3$, $x_i \in X$.

Die approximierte partikuläre Lösung u_R ist in der Form

$$u_R(x) = \sum_{j=1}^N \Phi_{\text{triv}}(x - x_j) \beta_j$$

gegeben.

Algorithmus - BEM Teil

Die Einarbeitung der Randbedingungen in die partikuläre Lösung ist im Allgemeinen nicht möglich und muss, nebst den Transmissionsbedingungen durch Korrekturen der Randdaten, eingebunden werden. Die Koppelbedingungen der Dirichlet-Daten

$$\gamma_0^{1,\text{int}} u^1(x) = \gamma_0^{l,\text{int}} u^l(x)$$

schreiben sich mit $u^1 = u_R + u_B$ in der Form

$$\gamma_0^{1,\text{int}}(u_R(x) + u_B(x)) = \gamma_0^{1,\text{int}}(u_R(x)) + \gamma_0^{1,\text{int}}(u_B(x)) = \gamma_0^{l,\text{int}} u^l(x)$$

für $x \in \Gamma_l$, $l = 2, \dots, p$.

Die Koppelbedingungen der Neumann-Daten

$$\gamma_1^{1,\text{int}} u^1(x) = -\gamma_1^{l,\text{int}} u^l(x)$$

für $x \in \Gamma_l$ ist wegen

$$\begin{aligned} \gamma_1^{1,\text{int}} u^1(x) &= \gamma_0^{1,\text{int}}(1 - d)\sigma(u^1, x)n(x) \\ &= \gamma_0^{1,\text{int}}(1 - d)\sigma(u_B, x)n(x) + \gamma_0^{1,\text{int}}(1 - d)\sigma(u_R, x)n(x) \end{aligned}$$

von der Schädigungsvariable d abhängig und bedarf besonderer Sorgfalt. Da d im Algorithmus abhängig von der Lösung ist, müssten bei der Galerkinformulierung die entsprechenden Matrizen des Steklov-Poincaré-Operators neu generiert werden und wäre entsprechend aufwendig. Für den symmetrischen Steklov-Poincaré-Operator wird die Schädigungsvariable in diskretisierter Form in die Galerkinformulierung eingebracht. Für die Diskretisierung werden die Ränder $\Gamma_0, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$ sortiert und trianguliert. Als Ansatzraum für $u_{B,h}$ wird $(S_h^1(\Gamma_S))^3$ gewählt und die Abbildung $A : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{M_2 + \dots + M_p}$ als Projektion auf die inneren

Knoten definiert. Die diskretisierte Formulierung lautet

$$\begin{aligned}
& -\hat{S}_h^{\text{Lame},1} u_{B,h} - \begin{pmatrix} \tilde{S}_h^{\text{Lame},2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}_h^{\text{Lame},p} \end{pmatrix} u_{B,h} \\
& = A^\top M^{-1} H \tilde{S}_h^{\text{Lame},1} \begin{pmatrix} \tilde{g}_D - u_{R,h} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + \left(\gamma_1^{1,\text{int}} u_R \right)_h + \begin{pmatrix} \tilde{S}_h^{\text{Lame},2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}_h^{\text{Lame},p} \end{pmatrix} \left(\gamma_0^{1,\text{int}} u_R(x) \right)_h
\end{aligned}$$

mit

$$\hat{S}_h^{\text{Lame},1} = AM^{-1} H \tilde{S}_h^{\text{Lame},1} A^\top$$

der modifizierte Steklov-Poincaré-Operator, $\tilde{S}_h^{\text{Lame},i}$ die nicht modifizierten Steklov-Poincaré-Operatoren, $\left(\gamma_1^{1,\text{int}} u_R \right)_h$ die L_2 -Projektion der Funktion $(1-d)\sigma(u_R, x)n(x)$ auf die linearen Basisfunktionen, $\left(\gamma_0^{1,\text{int}} u_R(x) \right)_h$ die L_2 -Projektion der Funktion u_R auf die linearen Basisfunktionen, der Massenmatrix M und der dünnbesetzten Matrix

$$H = ((1-d)\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Gamma_S)}.$$

Die neue Systemmatrix

$$-\hat{S}_h^{\text{Lame},1} - \begin{pmatrix} \tilde{S}_h^{\text{Lame},2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}_h^{\text{Lame},p} \end{pmatrix}$$

ist wegen des modifizierten Steklov-Poincaré-Operators nicht mehr symmetrisch. Insbesondere ist ein CG-Verfahren nicht zur Lösung des Systems verwendbar. Anstelle dessen wird das GMRES-Verfahren verwendet.

8 Volumenkraftdichte

Betrachtet man die Volumenkraftdichte f in

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u, x) = f_i(x), \quad x \in \Omega,$$

so beschreibt

$$\int_{V \subset \Omega} f(x) dx$$

die Kraft, die durch das Volumen V auf das Volumen eines Körpers wirkt. Typische Beispiele sind die Gravitation, elektrische oder magnetische Feldkräfte, Zentrifugalkräfte, Corioliskräfte und thermische Kräfte. In den folgenden beiden Abschnitten werden die Gravitation und Zentrifugalkräfte behandelt.

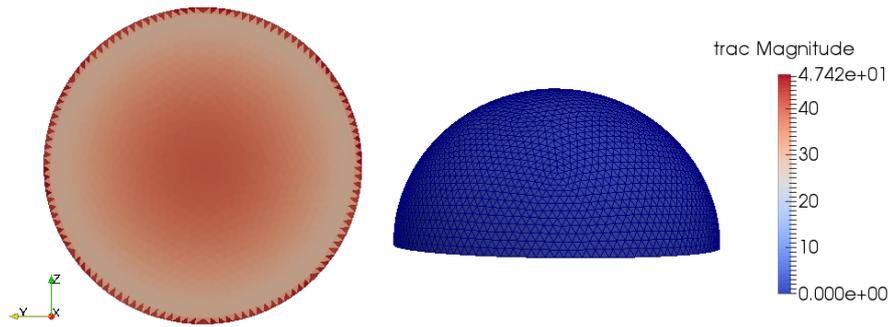


Abbildung 14: Halbsphäre mit Oberflächenspannungen (links) und Geometrie (rechts).

8.1 Gravitation

Die Gravitationskraft wirkt aufgrund des Eigengewichtes des Körpers und spielt vor allem bei der statischen Auslegung von Brücken und Gebäuden eine wesentliche Rolle. Sie hat die Dichte

$$f(x) = -\rho g e_3$$

mit $e_3 = (0, 0, 1)^\top$, wobei ρ die Dichte des Materials bezeichnet. Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$u_p(x) = \left(0, 0, \frac{\rho g x_3^2}{2(\lambda + 2\mu)} \right)^\top.$$

Im Beispiel wird eine Halbsphäre verwendet, d.h.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0, \|x\|_2 < 5\}$$

und die Dirichlet-Daten auf

$$\Gamma_D = \{x \in \Omega : x_3 = 0, \|x\|_2 < 5\}$$

durch

$$(\gamma_0 u)(x) = (0, 0, 0)^\top$$

fixiert. Die restlichen Ränder sind kräftefrei.

Für die Diskretisierung wird eine quasi-uniforme Folge von Tetraeder-Gittern verwendet. In Abbildung 14 sind die Oberflächenspannungen und die Geometrie für die zweite Verfeinerung dargestellt.

Für die Projektion der Dirichlet- und Neumann-Daten wird eine Quadratur der Ordnung 8 je Dreieck verwendet. Anzumerken ist, dass ein Clustern der Oberflächenpunkte der Quadratur gegen die Knoten des Volumennetzes große Blöcke und folglich eine gute Kompression der entsprechenden H^2 -Matrix bei akzeptabler Genauigkeit zulässt. In Tabelle 9 finden sich die Parameter der Netzfolge.

Um einen Vergleich mit einer exakten Lösung herzustellen, wird das Problem wie folgt modifiziert. Betrachtet wird die rechte Seite

$$f(x) = -(0, 0, 10)^\top$$

mit der partikulären Lösung

$$u_p(x) = \left(0, 0, \frac{5x_3^2}{(\lambda + 2\mu)} \right)^\top.$$

| Konten | Elemente | Knoten | Elemente |
|---------|----------|------------|----------|
| Volumen | | Oberfläche | |
| 380 | 1368 | 261 | 518 |
| 2386 | 10944 | 1038 | 2072 |
| 16751 | 87522 | 4146 | 8288 |
| 125197 | 700416 | 16578 | 33152 |

| Nummer | Quadraturpunkte | Kompression | | |
|--------|-----------------|-------------|-----------|-------|
| | | Quadratur | Interpol. | BEM |
| 0 | 33152 | 0.119 | 0.81 | 1.0 |
| 1 | 132608 | 0.023 | 0.50 | 0.365 |
| 2 | 530432 | 0.0158 | 0.27 | 0.205 |
| 3 | 2121728 | 0.002 | - | 0.057 |

Tabelle 9: Parameter der Netzfolge. Für die Approximation der auftretenden Matrizen wurde bei der Randelementmethode eine Genauigkeit von 10^{-6} , bei den Interpolationsmatrizen 10^{-10} und bei den Matrizen zur Auswertung des Interpolanten 10^{-8} verwendet.

Die Randwerte werden mittels

$$(\gamma_0 u)(x) = u_p(x),$$

für

$$x \in \Gamma_D = \{x \in \Gamma : x_3 = 0, \|x\| < 5\}$$

und

$$(\gamma_1 u)(x) = (\gamma_1 u_p)(x),$$

für

$$x \in \Gamma_N = \{x \in \Gamma : x_3 > 0\}$$

gesetzt. Die relativen Fehler der Dirichlet- und Neumann-Daten sind in Abbildung 15 dargestellt.

8.2 Fliehkraft

Die Zentrifugalkraft tritt bei Dreh- oder Kreisbewegungen auf. Sie wirkt dabei radial von der Rotationsachse nach außen. Bei schnellen Rotationen, wie z.B. bei einer Kurbelwelle, entstehen dabei Kräfte, die eine leichte Deformation des Bauteils verursachen. Sie hat die Dichte

$$f(x) = m\omega^2 r,$$

wobei r den Radiusvektor zur Drehachse bezeichnet. Im Beispiel wird eine Kurbelwelle betrachtet, die entlang der x -Achse rotiert. Die Randwerte werden mittels

$$(\gamma_0 u)(x) = 0,$$

für

$$x \in \Gamma_D = \{x \in \Gamma : x_1 = -2 \text{ oder } x_1 = 8.25\}$$

vorgeschrieben. Die restlichen Ränder sind kräftefrei. In Abbildung 16 ist die deformierte Kurbelwelle zu sehen. Für die Materialparameter wurden die Parameter $E = 75$ GPa und $\nu = 0.2$ verwendet.

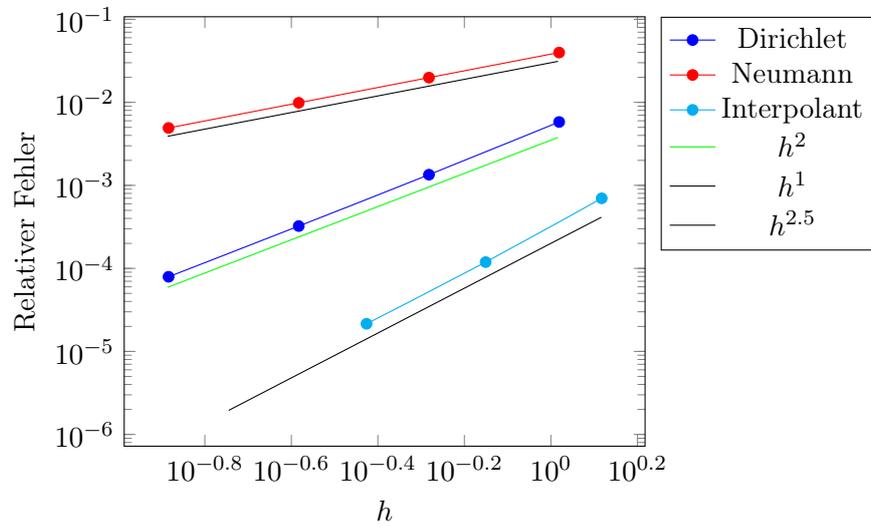


Abbildung 15: Konvergenz der berechneten Dirichlet- und Neumann-Daten im Vergleich mit der exakten Lösung.

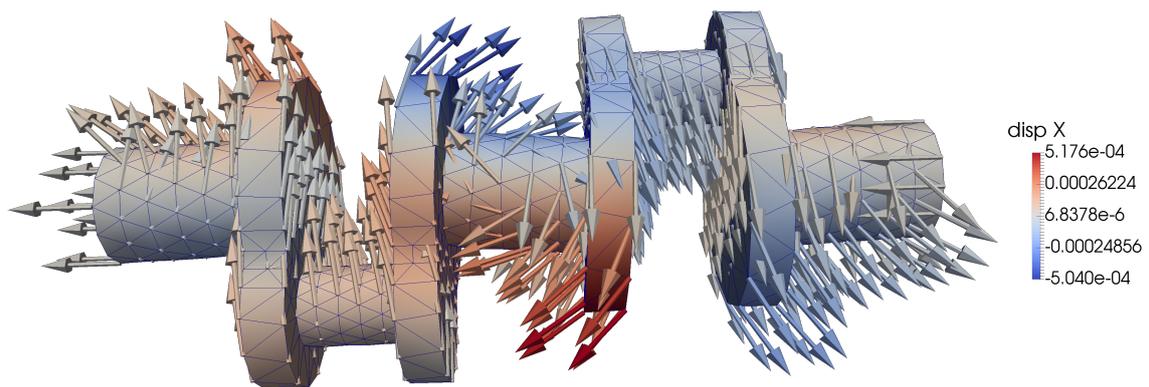


Abbildung 16: Deformierte Kurbelwelle (Faktor 200); aufgetragen sind die Richtung der Verschiebungen, die Farbe der Oberfläche zeigt die Verschiebung in x -Richtung.

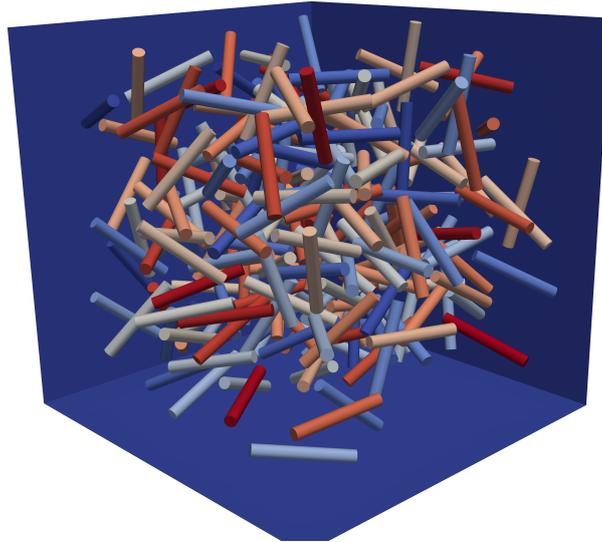


Abbildung 17: RVE mit isotrop verteilten Fasern.

| | 227 | 150 | 100 | 50 | 25 | ungefüllt |
|-----------|-------|-------|-------|-------|------|-----------|
| Dreiecke | 51458 | 34344 | 23204 | 12088 | 6534 | 978 |
| Knoten | 26185 | 17474 | 11804 | 6146 | 3319 | 491 |
| Zeit in h | 2.9 | 1.06 | 0.47 | 0.15 | 0.08 | - |

Tabelle 10: Rechenzeiten und Geometrien der einzelnen RVE.

9 Modell mit und ohne Schädigung

9.1 Ohne Schädigung

In diesem Abschnitt werden zunächst verschiedene RVE untersucht und mittels der Materialtangente

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial e_{kl}}$$

charakterisiert. Die Angabe des Tensors C erfolgt mittels Voigt-Notation als 6×6 Matrix.

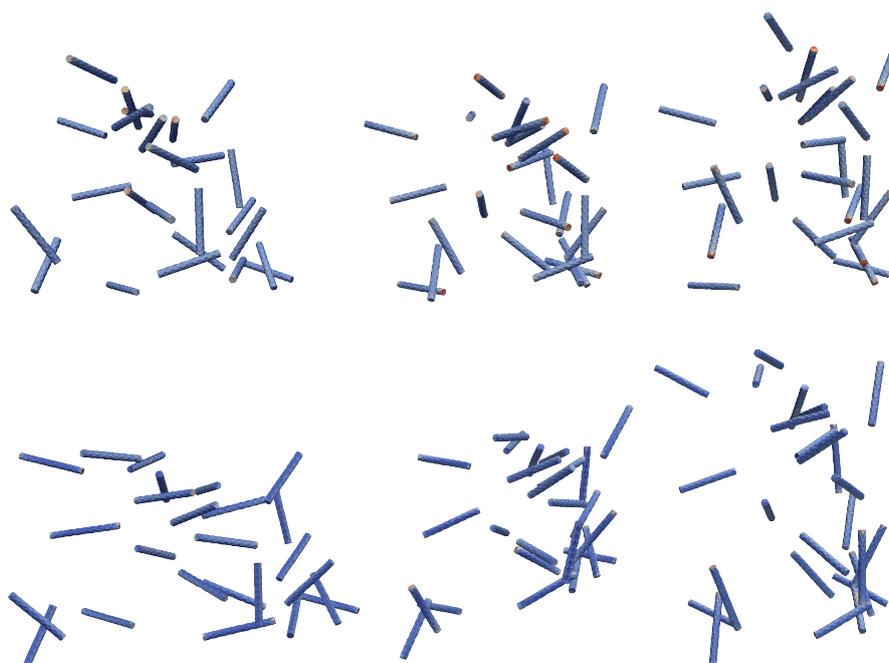
RVE - isotrope Verteilung

Eine isotrope Verteilung liegt vor, wenn die eingebrachten Fasern keine Vorzugsrichtung besitzen, in der sie ausgerichtet sind. In Abbildung 17 ist eine solche Verteilung zu sehen. Um den Einfluss der eingebrachten Fasern auf die Steifigkeit des Materials zu verdeutlichen, wurden in den numerischen Experimenten die Anzahl schrittweise erhöht, bis eine Füllung mit 227 Fasern vorlag. In den Abbildungen 18 bis 23 sind die einzelnen Steifigkeitstensoren mit den zugehörigen 6 Experimenten und deren Oberflächenspannung zu sehen. Die Oberfläche der Box ist dabei herausgeschnitten. Es ist zu erkennen, dass bei steigendem Volumenanteil die Steifigkeit zunimmt. Allerdings bildet sich aufgrund der isotropen Verteilung keine Vorzugsrichtung aus. Man erkennt, dass sich die Oberflächenspannungen auf den Faserenden konzentrieren.

Die Kompression der Einfachschicht- und Doppelschichtpotentiale sind in Tabelle 11 aufgelistet. Es zeigt sich, dass die Kompression für die Geometrie mit den Fasern im Vergleich zu einer Oberfläche ohne Inklusionen bei vergleichbarer Anzahl der Unbekannten deutlich

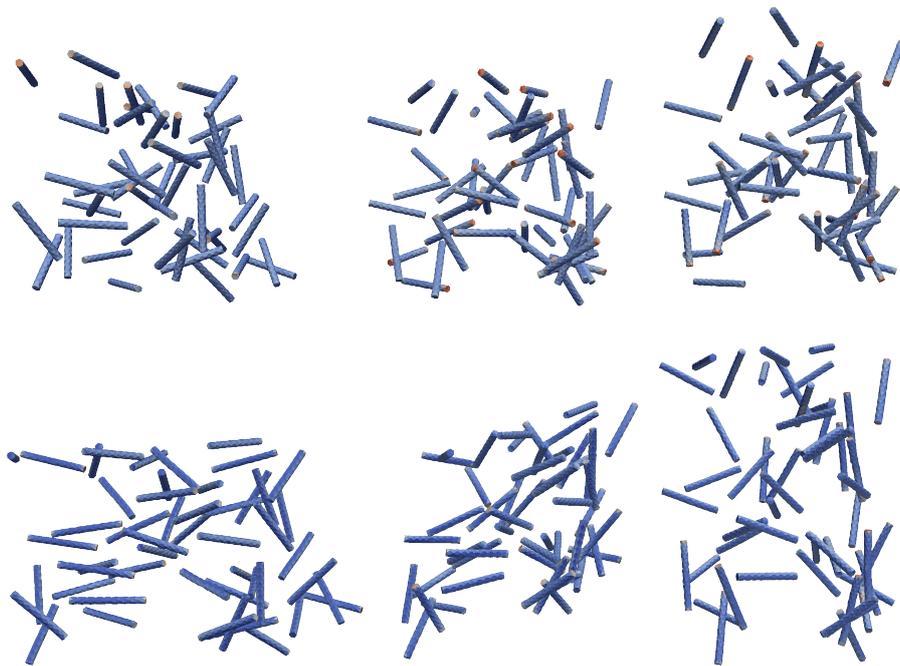
$$C = \begin{pmatrix} 4012.34 & 2160.49 & 2160.49 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 2160.49 & 4012.34 & 2160.49 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 2160.49 & 2160.49 & 4012.34 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 925.93 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 925.92 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 925.93 \end{pmatrix}$$

Abbildung 18: Ungefülltes Material, $E_{\text{mat}} = 2.5 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{mat}} = 0.35$.



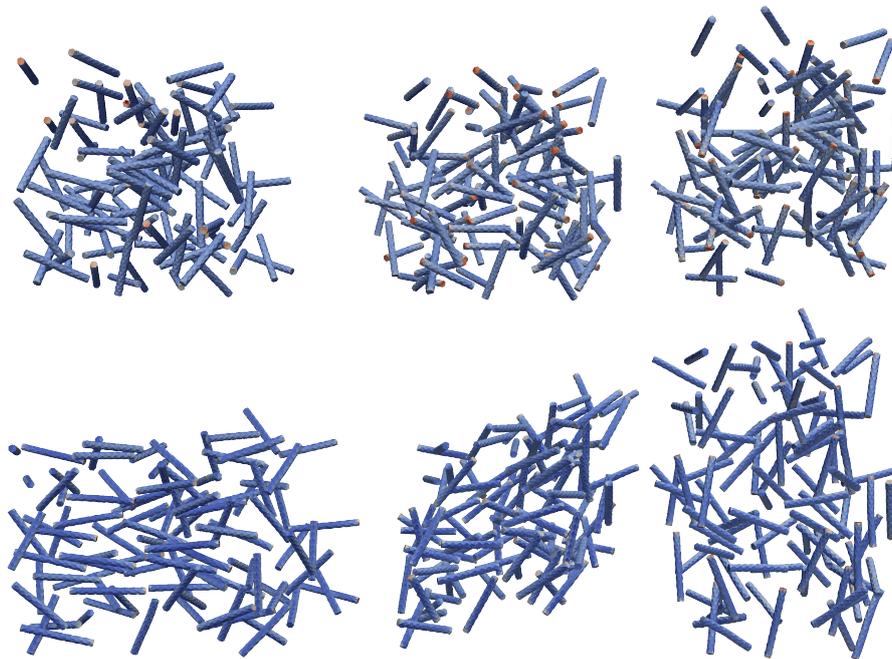
$$C = \begin{pmatrix} 4048.22 & 2173.91 & 2172.39 & 0.09 & -0.64 & -0.84 \\ 2173.89 & 4046.56 & 2172.04 & -0.66 & -0.36 & 1.16 \\ 2172.37 & 2172.05 & 4046.45 & -0.28 & -2.25 & -0.60 \\ 0.11 & -0.63 & -0.30 & 936.00 & -0.55 & -0.49 \\ -0.62 & -0.40 & -2.32 & -0.55 & 936.33 & 0.02 \\ -0.85 & 1.17 & -0.57 & -0.49 & 0.01 & 937.84 \end{pmatrix}$$

Abbildung 19: Gefülltes Material, 25 Fasern,
 $E_{\text{mat}} = 2.5 \text{ GPa}$, $E_{\text{phs}} = 75 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{mat}} = 0.35$, $\nu_{\text{phs}} = 0.2$, Volumenanteil 0.24%.



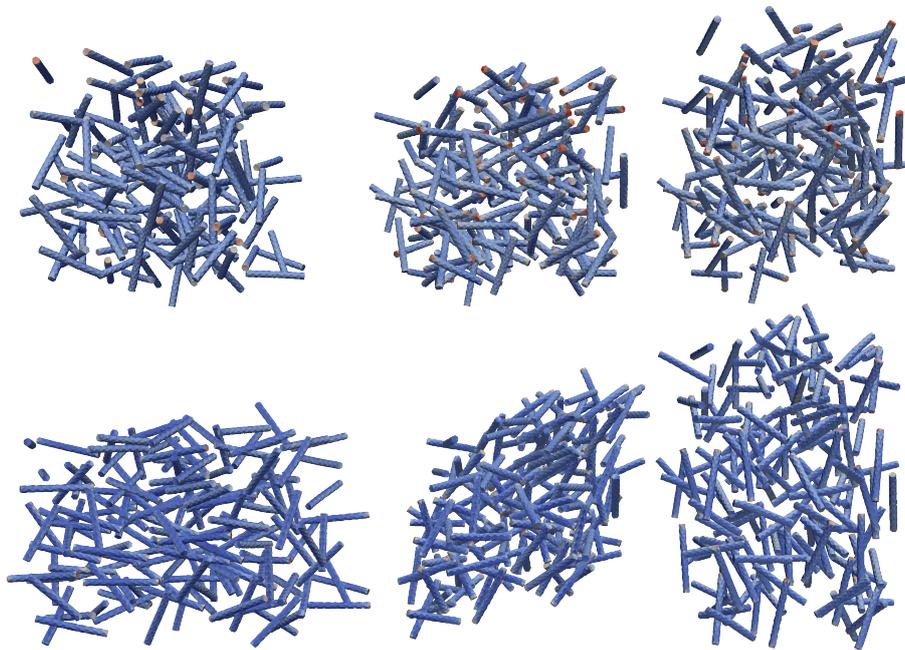
$$C = \begin{pmatrix} 4082.18 & 2185.83 & 2184.25 & 0.37 & 1.18 & -0.91 \\ 2185.82 & 4083.42 & 2184.63 & 0.02 & 1.04 & 0.55 \\ 2184.23 & 2184.65 & 4082.35 & 0.00 & -1.35 & -0.10 \\ 0.39 & 0.05 & -0.02 & 947.61 & -0.08 & 1.02 \\ 1.19 & 1.00 & -1.41 & -0.08 & 947.01 & 0.45 \\ -0.92 & 0.57 & -0.07 & 1.02 & 0.45 & 948.72 \end{pmatrix}$$

Abbildung 20: Gefülltes Material, 50 Fasern,
 $E_{\text{mat}} = 2.5 \text{ GPa}$, $E_{\text{phs}} = 75 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{mat}} = 0.35$, $\nu_{\text{phs}} = 0.2$, Volumenanteil 0.47%.



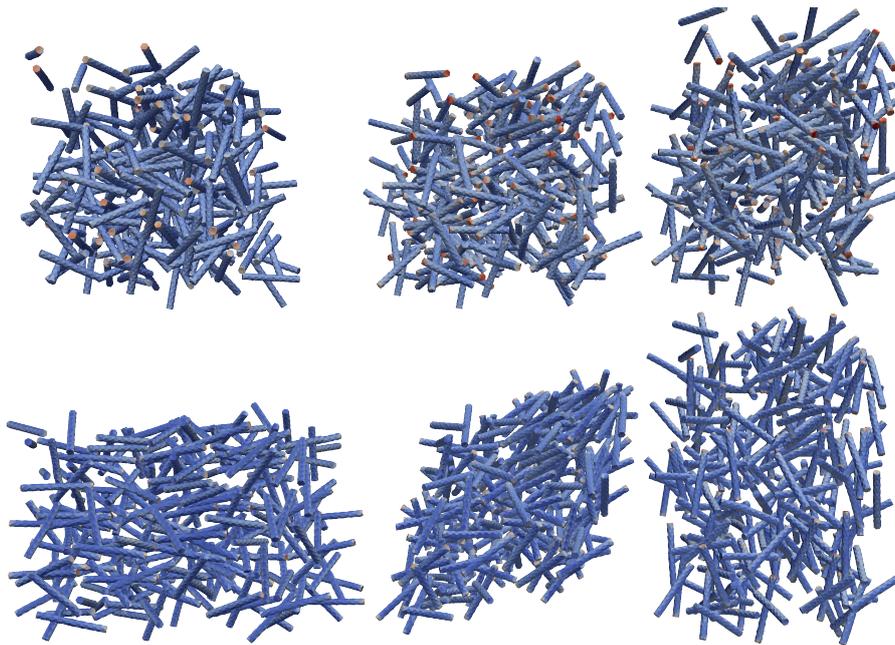
$$C = \begin{pmatrix} 4152.06 & 2210.19 & 2208.29 & -0.47 & 2.65 & -1.58 \\ 2210.18 & 4160.36 & 2209.75 & -1.51 & 1.51 & -3.15 \\ 2208.30 & 2209.79 & 4150.88 & -0.83 & 2.03 & 0.67 \\ -0.45 & -1.49 & -0.88 & 970.37 & 0.29 & 1.43 \\ 2.67 & 1.46 & 1.91 & 0.28 & 968.63 & -0.53 \\ -1.58 & -3.13 & 0.71 & 1.42 & -0.52 & 970.77 \end{pmatrix}$$

Abbildung 21: Gefülltes Material, 100 Fasern,
 $E_{\text{mat}} = 2.5 \text{ GPa}$, $E_{\text{phs}} = 75 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{mat}} = 0.35$, $\nu_{\text{phs}} = 0.2$, Volumenanteil 0.96%.



$$C = \begin{pmatrix} 4231.75 & 2236.32 & 2232.38 & 0.71 & -5.44 & -5.10 \\ 2236.34 & 4232.39 & 2234.63 & -3.22 & -1.11 & -1.66 \\ 2232.43 & 2234.65 & 4222.13 & -5.54 & -3.62 & 0.97 \\ 0.71 & -3.21 & -5.58 & 993.83 & 0.62 & -1.22 \\ -5.43 & -1.12 & -3.65 & 0.63 & 990.95 & 0.41 \\ -5.04 & -1.67 & 0.99 & -1.22 & 0.39 & 994.827 \end{pmatrix}$$

Abbildung 22: Gefülltes Material, 150 Fasern,
 $E_{\text{mat}} = 2.5 \text{ GPa}$, $E_{\text{phs}} = 75 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{mat}} = 0.35$, $\nu_{\text{phs}} = 0.2$, Volumenanteil 1.4%.



$$C = \begin{pmatrix} 4350.70 & 2272.71 & 2270.64 & -0.34 & -6.26 & -5.39 \\ 2272.74 & 4338.37 & 2269.86 & 4.78 & -0.52 & -0.89 \\ 2270.64 & 2269.86 & 4336.34 & -0.08 & -4.20 & 1.66 \\ -0.31 & 4.82 & -0.11 & 1026.68 & 1.44 & -1.16 \\ -6.27 & -0.57 & -4.28 & 1.44 & 1026.18 & -0.10 \\ -5.40 & -0.86 & 1.70 & -1.18 & -0.10 & 1029.87 \end{pmatrix}$$

Abbildung 23: Gefülltes Material,
 227 Fasern, $E_{\text{mat}} = 2.5 \text{ GPa}$, $E_{\text{phs}} = 75 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{mat}} = 0.35$, $\nu_{\text{phs}} = 0.2$, Volumenanteil 2.8%.

| Matrix | K | V_0 | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 | V_5 | V_6 |
|------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Kompression in % | 11.7 | 4.1 | 6.8 | 7.3 | 7.3 | 6.9 | 7.3 | 6.9 |

Tabelle 11: Kompression der BEM-Matrizen bei 227 Fasern, Genauigkeit 10^{-6} .

| Matrix | K | V_0 | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 | V_5 | V_6 |
|------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Kompression in % | 23.6 | 7.8 | 12.1 | 12.9 | 13.1 | 11.8 | 13.1 | 12.1 |

Tabelle 12: Kompression der BEM-Matrizen bei 25 Fasern, Genauigkeit 10^{-6} .

schlechter ist. Der Grund hierfür liegt in der Geometrie selbst, da das Gitter der Fasern dreidimensional innerhalb der Box liegt.

RVE - mit Vorzugsrichtung

Um eine größere Steifigkeit in einer Vorzugsrichtung zu beobachten, wird eine unidirektionale Faserverteilung verwendet. Dazu wird eine Geometrie mit 25 Fasern erzeugt (28918 Dreiecke, 14511 Knoten), deren Hauptachse in z -Richtung zeigt. Die Rechenzeit betrug 0.7 Stunden pro Experiment. Die Kompression der BEM Matrizen findet sich in Tabelle 12.

In dem Steifigkeitstensor zeigt sich folglich ein deutlicher Kontrast in der dritten Diagonalkomponente.

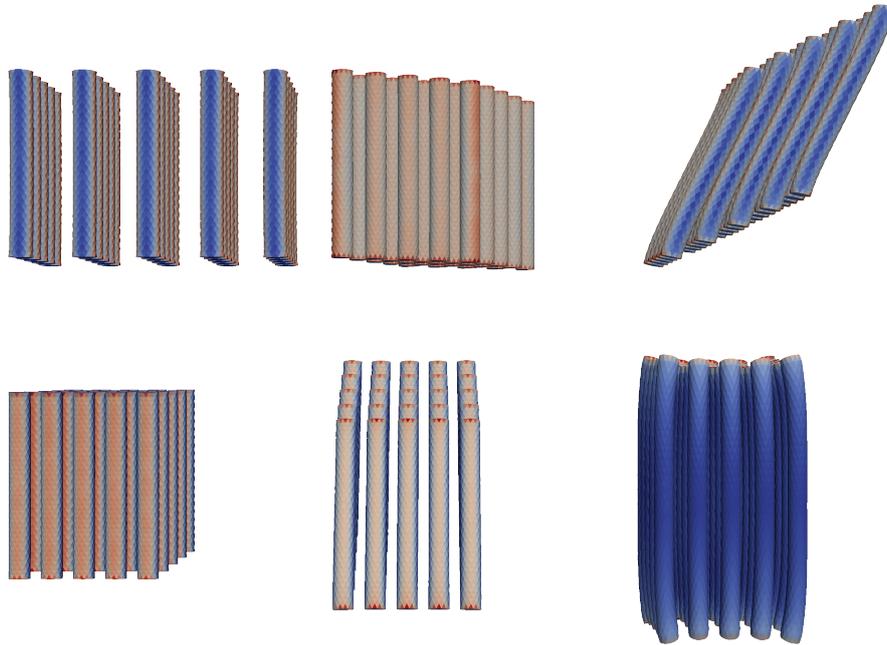
Zugversuche

Im Zugversuch werden die wesentlichen mechanischen Eigenschaften eines Probenmaterials ermittelt. Diese Eigenschaften werden in der Regel für Vergleichszwecke eingesetzt. Dazu zählen unter anderem die Zugspannung (die Kraft bezogen auf den Anfangsquerschnitt der Probe) und die Dehnung (bezogen auf die Änderung der Länge im Vergleich zum Beginn). Der Zugversuch liefert eine gute Basis, um die Veränderung der mechanischen Kennwerte auch unter Beachtung von z.B. Alterung zu charakterisieren.

Auf Makroebene wird für die FEM ein Probekörper mit 224 Elementen diskretisiert und für die Auswertung der Mikroebene jeweils 8 Gaußpunkte verwendet (siehe Abbildung 25). In den Gaußpunkten wird mittels der BEM der Steifigkeitstensor ermittelt. Dabei werden jeweils das RVE mit 227 isotrop verteilten Fasern und deren Abstufungen bzw. unidirektional verteilten Fasern verwendet. Beim RVE mit Vorzugsrichtung liegen die Fasern entlang der Zugrichtung, was zur Folge hat, dass die ermittelte Zugkraft deutlich größer ist als z.B. die beim RVE mit isotrop verteilten Fasern. In Abbildung 26 sind die Kräfte in Kraft-Weg-Diagrammen zusammengefasst.

9.2 Homogenes Material

Betrachtet wird eine RVE, welches nur aus Matrixmaterial besteht. Die BEM-RBF gekoppelte Methode wird auf Mikroebene verwendet. Die Korrekturen auf RBF-Ebene sind allerdings dementsprechend klein, da die Schädigungsvariable näherungsweise konstant ist und somit die rechte Seite $\text{div}(d\sigma(u_B + u_R)) \approx 0$. Das ermöglicht eine Vorberechnung der Schädigung und des Steifigkeitstensors. Der Zugversuch wird wieder mit jeweils acht Gaußpunkten pro Element auf Makroebene durchgeführt. Im Gegensatz zum linearen Fall ist hier ein Abfall der Zugkraft zu erkennen (siehe Abbildung 27).



$$C = \begin{pmatrix} 5947.99 & 2730.95 & 2535.97 & -0.01 & -0.13 & -0.04 \\ 2730.95 & 5947.65 & 2535.88 & 0.05 & 0.01 & 0.07 \\ 2535.66 & 2535.56 & 11812.80 & 0.02 & -0.08 & -0.06 \\ -0.05 & 0.03 & 0.08 & 1509.08 & 0.05 & 0.03 \\ -0.01 & 0.01 & -0.07 & 0.05 & 1508.91 & -0.07 \\ 0.04 & 0.21 & -0.03 & 0.03 & 0.03 & 1335.72 \end{pmatrix}$$

Abbildung 24: Gefülltes Material, 25 Fasern, $E_{\text{mat}} = 2.5 \text{ GPa}$, $E_{\text{phs}} = 75 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{mat}} = 0.35$, $\nu_{\text{phs}} = 0.2$, Volumenanteil 24.9%.

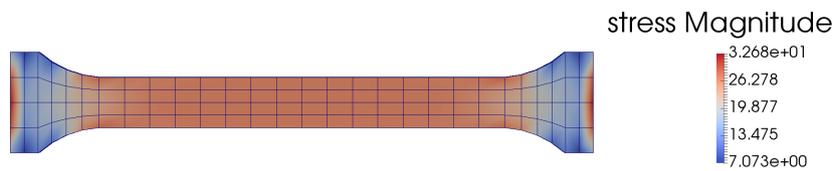


Abbildung 25: Zugprobe. Auf der Oberfläche aufgetragen ist die Norm der Spannung.

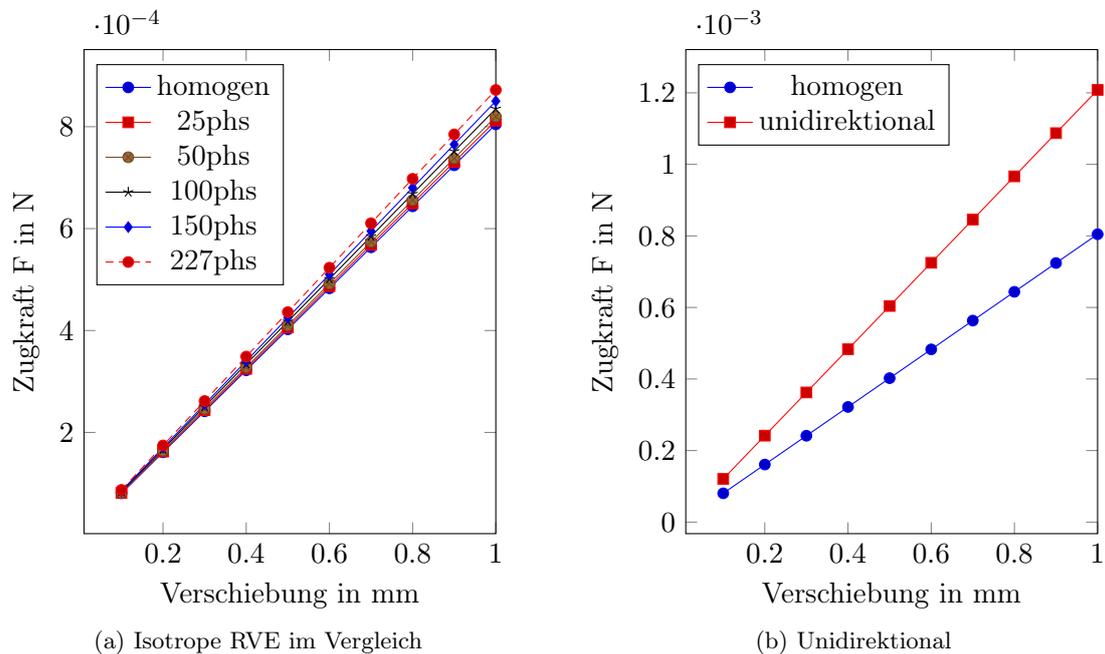


Abbildung 26: Kraft-Weg-Diagramme.

Gemessene Kraft in Abhängigkeit der Verschiebung, $Y_0 = 0.1$

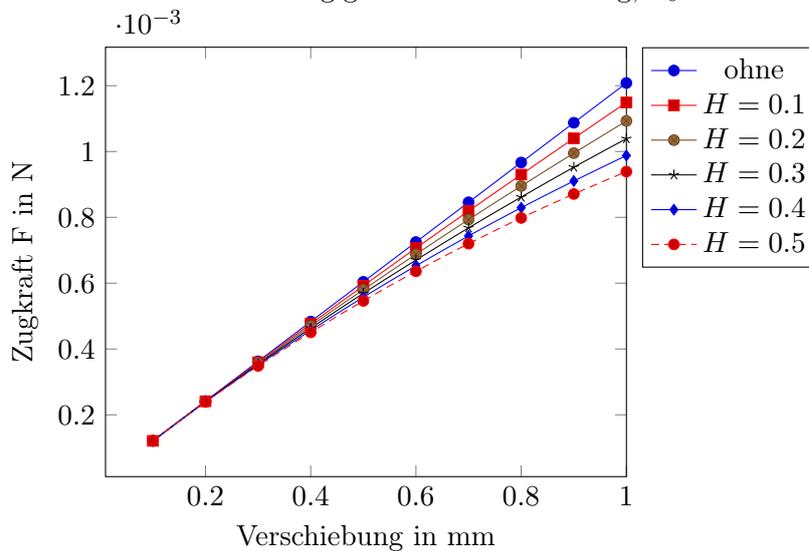


Abbildung 27: Zugversuch homogenes Material mit und ohne Schädigung, verwendet wurden gemittelte Lamé-Parameter, um in etwa das Verhalten des RVE mit unidirektionalen Fasern wiederzugeben.

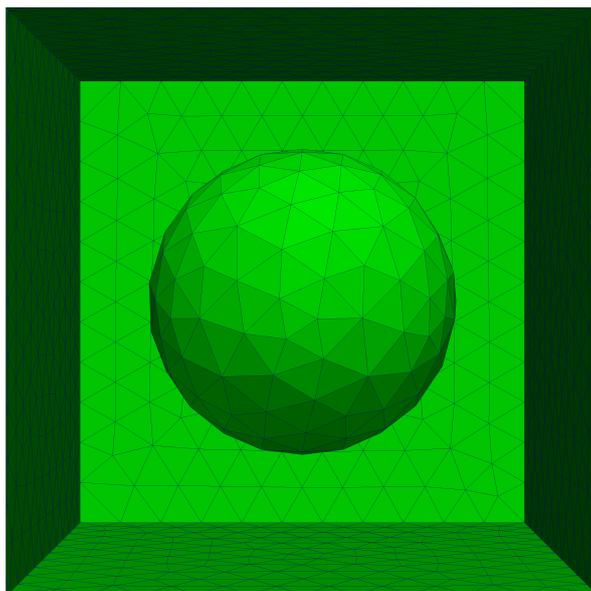


Abbildung 28: Geometrie: RVE mit Kugel.

9.3 RVE - Inklusion - Kugel

Betrachtet wird das Schädigungsmodell angewandt auf ein RVE mit einer Kugel im Inneren (siehe Abbildung 28). Die Diskretisierungsparameter sind wie folgt:

- 312 Dreiecke und 158 Knoten auf der Oberfläche der Kugel,
- 1664 Dreiecke und 834 Knoten auf der Oberfläche der RVE,
- 10979 Tetraeder im Matrixmaterial, davon 1339 Knoten im Inneren,
- 14294 Punkte zur Interpolation
- 126464 Quadraturpunkte zur Projektion der Interpolanten auf die Oberflächen.

Bei der Parameterwahl muss wegen der Differenzierung von $d\sigma(u_R + u_B)$ die Einschränkung $Y_0 = 0$ getroffen werden. In Tests hatte sich gezeigt, dass eine nicht glatte rechte Seite zu Oszillationen und damit zur Erhöhung der Energie und in letzter Konsequenz zu Schädigung führt.

Die Wahl des Parameters H ist kritisch und beeinflusst die Konvergenz des Verfahrens. Im Experiment wurde mit einem elastischen Prädiktor H vorab so eingestellt, dass die folgende Ungleichung

$$d < 0.20$$

für den Schädigungsparameter im ersten Iterationsschritt gilt.

Als Abbruchkriterium wird wie in Spahn, [62],

$$\frac{\|e_{i+1} - e_i\|}{\|e_i\|} < 10^{-6}$$

verwendet, mit der punktweisen Norm des Interpolanten in den Interpolationspunkten. Die Randdaten wurden als uniforme Verschiebungen mittels

$$u = ex, \quad e = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

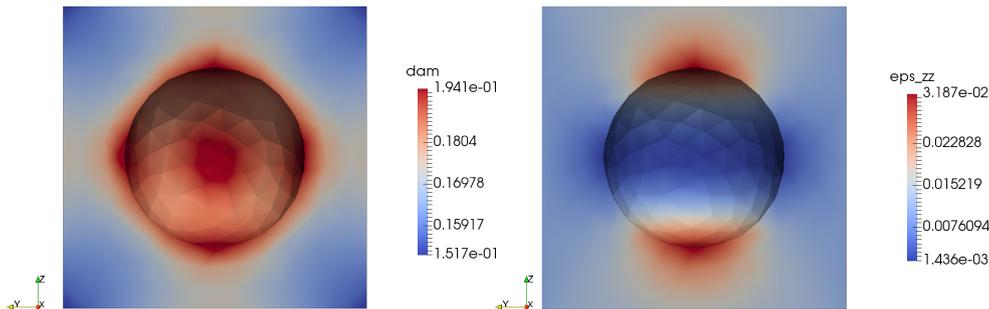


Abbildung 29: Entlang der yz -Ebene geschnittenes RVE ohne Inklusion. Die Farbe der Oberfläche zeigt die Schädigung innerhalb des Matrixmaterials (links) bzw. e_{zz} (rechts).

aufgebracht. Als Parameter für das Schädigungsmodell wurden

$$Y_0 = 0, H = 0.1$$

verwendet. Das Material wurde mittels

$$E_{\text{mat}} = 2.5 \text{ GPa}, E_{\text{phs}} = 75 \text{ GPa}, \nu_{\text{mat}} = 0.35, \nu_{\text{phs}} = 0.2$$

charakterisiert. In Abbildung 29 ist die Lösung nach 13 Schritten abgebildet. Dabei wurde die Inklusion entfernt und die Werte der Schädigungsvariablen bzw. e_{zz} sind zu sehen. Der Rechenaufwand pro Iterationsschritt ist durch die Projektion der Lösung des letzten Schrittes und der partikulären Lösung etc. auf die Ränder enorm hoch. Ein Iterationsschritt benötigte einige Stunden. In Abbildung 30 ist die Fehlergröße

$$\frac{\|e_{i+1} - e_i\|}{\|e_i\|}$$

aufgetragen. Die Fixpunktiteration erreicht nach 13 Schritten eine Genauigkeit von 10^{-7} . Es handelt sich um einen stabilen Fixpunkt.

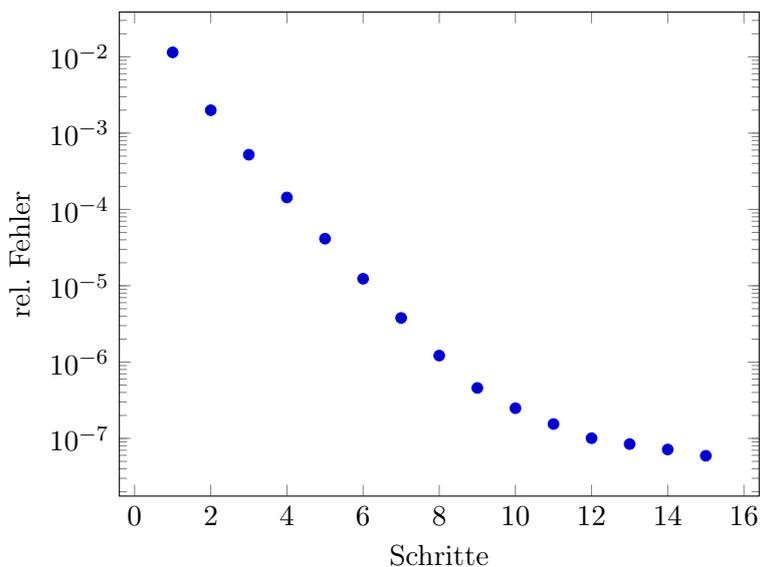
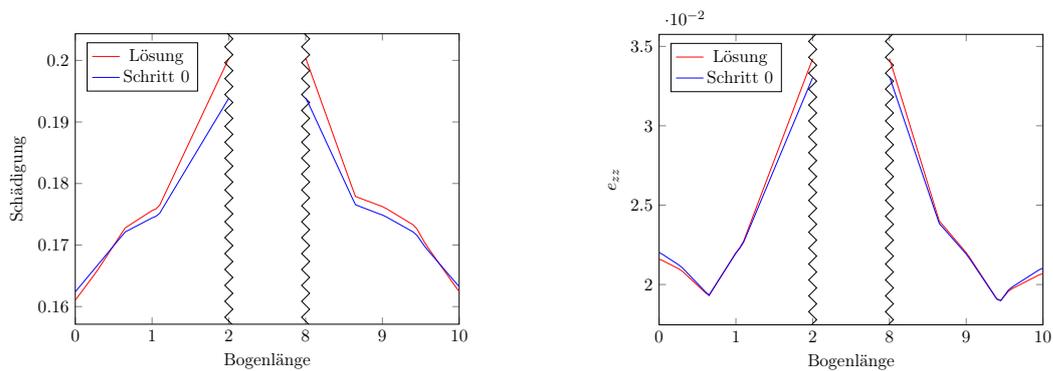


Abbildung 30: Konvergenzgraph zur Fixpunktiteration.

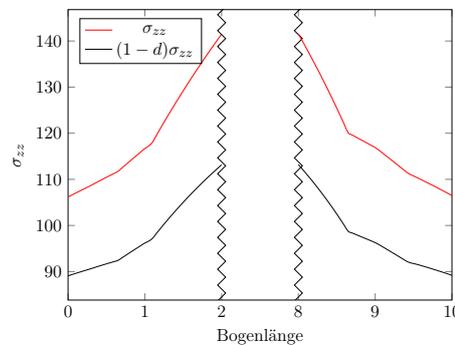
Um die Wirkung der Schädigungsvariablen auf die Konormalenableitung zu verdeutlichen, wurde ein Linienplot durch die Punkte $(0, 0, 5)$ und $(0, 0, -5)$ angefertigt (siehe Abbildung

31). Zu sehen ist dabei, dass im Vergleich zum elastischen Prädiktor (Schritt 0) die Schädigung zum Rand der Box hin etwas abnimmt, jedoch zum Rand der Inklusion deutlich zunimmt. Der Grund hierfür ist, dass der Kontakt zwischen Matrix und Inklusion durch die Interface-Bedingungen in Form von stark gekoppelten Dirichlet-Daten vorgegeben ist. Diese kann man vereinfacht auch so verstehen, inwieweit sich die Inklusion verschieben muss, um die entsprechenden Randspannungen zu erzeugen. Allerdings sind die Randspannungen des Matrixmaterials durch den Faktor $(1-d)$ abgeschwächt. Im vorliegenden Beispiel liegt der Wert von $(1-d)$ bei ungefähr 0.8 auf dem Rand. Letztendlich bewirkt dies eine kleinere Verschiebung des Randes der Inklusion, da sich dort per Vorgabe keine Schädigung bilden kann. Insbesondere steigt e in den Regionen der Schädigung im Matrixmaterial in der Nähe des Randes demzufolge an.



(a) Verlauf der Schädigungsvariable im Vergleich zu Schritt 0.

(b) Verlauf von e_{zz} im Vergleich zu Schritt 0.



(c) Verlauf der zz -Komponente von σ im Vergleich zur geschädigten zz -Komponente $(1-d)\sigma_{zz}$

Abbildung 31: Auswertung des Linienplots durch die Punkte $(0, 0, 5)$ und $(0, 0, -5)$.

10 Periodische Randbedingungen

Im Hinblick auf die Ermittlung der Materialtangente werden periodische Randbedingungen bevorzugt. Wie im Abschnitt 7.3 bereits erläutert, ist das Aufbringen der Randbedingungen nicht direkt möglich, sondern muss in Form von Nebenbedingungen in die Formulierung eingehen.

Dazu wird ein speziell konstruiertes RVE betrachtet: Die Netze der einzelnen gegenüberliegenden Seiten werden durch Verschiebung der entsprechenden Seiten erzeugt, so dass später eine eindeutige Identifizierung der Knoten möglich ist (siehe Abbildung 32). Die

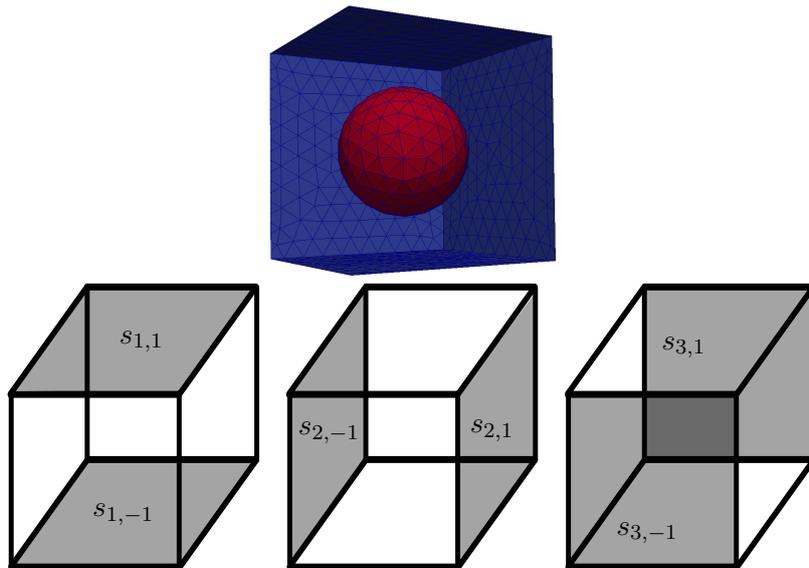


Abbildung 32: Periodische Geometrie.

Projektionsoperatoren auf einzelne Seiten und Kanten der Box sowie auf die Knoten der Inklusion bei der Formulierung mit symmetrischen Steklov-Poincaré-Operator erfordert eine Ordnung der Knoten. Die Kanten der Box werden mit k bezeichnet, die Seitenflächen (ohne Kanten) werden gemäß Abbildung 32 mit $s_{1,1}$, $s_{2,1}$, $s_{3,1}$, $s_{1,-1}$, $s_{2,-1}$ und $s_{3,-1}$ bezeichnet. Durch eine Verschiebung der Knoten der diskretisierten Oberfläche in $s_{\cdot,-1}$ entlang eines Verschiebungsvektors $\delta s_{\cdot,-1}$ werden diese auf $s_{\cdot,1}$ abgebildet, wobei

$$\delta s_{1,-1} = (0, 0, d_s), \quad \delta s_{2,-1} = (0, d_s, 0), \quad \delta s_{3,-1} = (d_s, 0, 0)$$

und d_s der Abstand der Seiten ist.

Das Aufbringen der Randbedingungen gliedert sich in:

1. Direkte Randbedingungen auf den Kanten mittels

$$u(x) = ex, \quad x \in k.$$

2. Indirekte Randbedingungen durch Kopplung der Seiten mittels Dirichlet-Daten

$$u(x) = u(x + \delta s_{1,-1}) + e(\delta s_{1,-1}), \quad x \in s_{1,-1},$$

$$u(x) = u(x + \delta s_{2,-1}) + e(\delta s_{1,-1}), \quad x \in s_{2,-1},$$

$$u(x) = u(x + \delta s_{3,-1}) + e(\delta s_{1,-1}), \quad x \in s_{3,-1}$$

und Neumann-Daten

$$t(x) = -t(x + \delta s_{1,-1}), \quad x \in s_{1,-1},$$

$$t(x) = -t(x + \delta s_{2,-1}), \quad x \in s_{2,-1},$$

$$t(x) = -t(x + \delta s_{3,-1}), \quad x \in s_{3,-1}.$$

Die diskretisierte Formulierung gemäß (28) erfordert eine neue Sortierung der Knoten. Für die Diskretisierung werden die Ränder der Inklusionen $\Gamma_2, \dots, \Gamma_p$ sortiert und trianguliert. Der Rand Γ_0 der Box wird in

$$\Gamma_0 = k \cup s_{1,-1} \cup s_{2,-1} \cup s_{3,-1} \cup s_{1,1} \cup s_{2,1} \cup s_{3,1}$$

zerlegt und diskretisiert. Die Anzahl der gesamten Anzahl M an Knoten auf Γ_S teilt sich auf in:

- Anzahl M_k auf den Kanten,
- Anzahl $M_{s,-1}$ auf den Flächen $s_{,-1}$,
- Anzahl $M_{s,1}$ auf den Flächen $s_{,1}$,
- Anzahl M_j auf den Rändern Γ_j , $j = 2, \dots, p$.

Der Vektor aller Knoten wird gemäß Kanten, $s_{,-1}$, $s_{,1}$, und Knoten der Inklusionen $\Gamma_2, \dots, \Gamma_p$ sortiert. Der Vektor der gesuchten Knoten besteht aus den Knoten von $s_{,-1}$ und $\Gamma_2, \dots, \Gamma_p$. Die dabei verwendeten Projektionen sind:

- Projektion auf den gesamten Knotenvektor

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{I}_1 & 0 \\ \mathbb{I}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix},$$

- Projektion auf den gesuchten Knotenvektor

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_1 & \mathbb{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix},$$

- Projektion auf die Knoten der Inklusion

$$A_3 = (0 \quad \mathbb{I}_2),$$

- Projektion der Knoten der Inklusion auf den gesamten Knotenvektor

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbb{I}_2 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathbb{I}_1 \in \mathbb{R}^{M_{s,-1} \times M_{s,-1}}, \mathbb{I}_2 \in \mathbb{R}^{M_2 + \dots + M_p \times M_2 + \dots + M_p}$$

sind.

Als Ansatzraum für u_h wird $(S_h^1(\Gamma_S))^3$ gewählt. Die diskretisierte Formulierung lautet

$$A_2(\tilde{S}_h^{\text{Lame},1} A_1 + A_4 \tilde{S}_h^{\text{Lame,inc}} A_3) u_h = -A_2 \tilde{S}_h^{\text{Lame},1} \tilde{g}_D,$$

wobei $\tilde{g}_D = (g_k, 0, e\delta s_{,-1}, 0)^\top$, und die Projektionen

$$\begin{aligned} A_1 &: \mathbb{R}^{M_{s,-1} + M_2 + \dots + M_p} \rightarrow \mathbb{R}^{2M_{s,-1} + M_k + M_2 + \dots + M_p}, \\ A_2 &: \mathbb{R}^{2M_{s,-1} + M_k + M_2 + \dots + M_p} \rightarrow \mathbb{R}^{M_{s,-1} + M_2 + \dots + M_p}, \\ A_3 &: \mathbb{R}^{M_{s,-1} + M_2 + \dots + M_p} \rightarrow \mathbb{R}^{M_2 + \dots + M_p}, \\ A_4 &: \mathbb{R}^{M_2 + \dots + M_p} \rightarrow \mathbb{R}^{2M_{s,-1} + M_k + M_2 + \dots + M_p} \end{aligned}$$

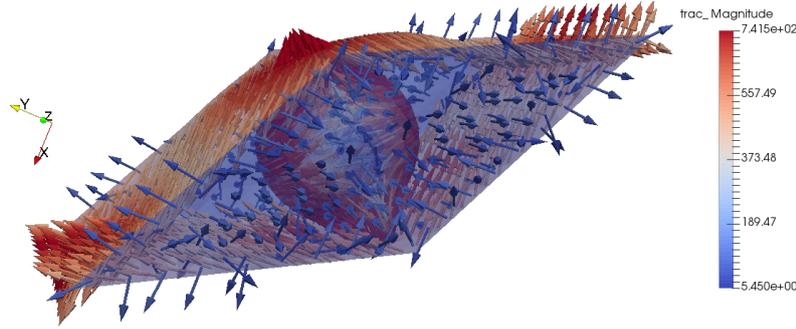


Abbildung 33: Periodische Lösung. Die Farbe der Oberfläche zeigt die Spannung, die Pfeile die Richtung der Oberflächenspannung. Die Kopplung der Neumann-Daten auf der Oberfläche der Box sind deutlich zu erkennen.

$$C_{\text{uni}} = \begin{pmatrix} 16.9265 & 5.013 & 5.01313 & -0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 5.01296 & 16.9289 & 5.01359 & -0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 5.01308 & 5.01362 & 16.9305 & -0.0 & -0.0 & 0.0 \\ -0.0 & -0.0 & -0.0 & 5.85958 & 0.0 & -0.0 \\ -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 5.8587 & -0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 5.85838 \end{pmatrix}$$

$$C_{\text{per}} = \begin{pmatrix} 16.8323 & 5.00657 & 5.00841 & -0.0 & 0.02 & -0.05 \\ 5.00148 & 16.8365 & 5.00299 & 0.01 & 0.02 & -0.06 \\ 5.00519 & 5.0057 & 16.8365 & 0.0 & 0.04 & -0.01 \\ -0.01 & -0.06 & -0.04 & 5.65101 & -0.02 & 0.01 \\ 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.01 & 5.65638 & 0.01 \\ 0.0 & 0.03 & -0.0 & 0.0 & -0.01 & 5.65277 \end{pmatrix}$$

Abbildung 34: Tangenten im Vergleich. Oben nicht periodisch, unten periodisch.

sind.

Für das numerische Beispiel wurden die Parameter $E_{\text{mat}} = 0.114 \text{ GPa}$, $E_{\text{phs}} = 75 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{mat}} = 0.24$ und $\nu_{\text{phs}} = 0.2$ verwendet. In Abbildung 33 ist die Lösung zu den Randbedingungen für

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Ein Vergleich der Homogenisierung mittels direktem Aufbringen der Randbedingungen durch ex und dem periodischen Ansatz zeigt eine geringere Steifheit, wie es gemäß Aboudi, [1], auch zu erwarten ist. In Abbildung 34 sind entsprechenden Tangenten zu finden.

Im Allgemeinen wäre durch eine Anpassung der Sortierung der Knoten auch Inklusionen denkbar, die den Rand schneiden. Dazu ist es aber unbedingt erforderlich, dass die innere Struktur des RVE ebenfalls periodisch ist.

Für die periodischen Randbedingungen sind in einigen Schritten auch periodische matrixwertige RBF anzuwenden. Eine Verallgemeinerung der bisherigen Theorie auf diesen Fall ist ebenfalls denkbar.

11 Fazit und Ausblick

Die Randelementmethode ist ein vielseitig einsetzbares Verfahren. Im konkreten Anwendungsfall wurde eine Erweiterung mit Hilfe von matrixwertigen radialen Basisfunktionen betrachtet, um die entstehenden Inhomogenitäten, sei es aufgrund von Nichtlinearitäten

oder bestehenden Volumenkraftdichten zu behandeln. Die hergeleiteten matrixwertigen RBF vom Lamé-Typ wurden untersucht und Fehler- und Stabilitätsabschätzungen in Kapitel 5.2.2 hergeleitet. Des Weiteren wurden bestehende numerische Verfahren zur Lösung des Interpolationsproblems in Kapitel 6 auf den matrixwertigen Fall übertragen und angewendet. Es wurde weiter gezeigt, dass die entstandenen RBF im Kontext der H^2 -Matrizen eine Niedrigrangapproximation besitzen und komprimiert werden können. Im numerischen Teil wurde belegt, dass die verwendete Approximation einer Volumenkraftdichte die Konvergenzordnung der Randelementmethode nicht stört.

Auf Seiten der Randelementmethode wurde eine gekoppelte Formulierung für das nichtlineare Schädigungsmodell hergeleitet und mit den neu entwickelten matrixwertigen RBF sowie einem modifizierten Steklov-Poincaré-Operator ergänzt. Zur Lösung wurde eine Fixpunktiteration verwendet und die Konvergenz an einem numerischen Beispiel nachvollzogen. Trotz der Verwendung von H^2 -Matrizen und iterativen Gleichungslösern bei der rein linearen Aufgabe oder auch dem nichtlinearen Schädigungsmodell bleibt der Rechenaufwand im Vergleich zu FFT-basierten Methoden hoch. Auf der anderen Seite lösen die FFT-basierten Methoden die Geometrie aufgrund der Voxel-Struktur nur grob auf. Die aufwändigen Schritte sind vor allem die L^2 -Projektionen der RBF-Interpolanten und deren Ableitungen auf die Oberflächen. Folglich wurde nur im linearen Fall eine Multiskalenrechnung an einem Zugstab durchgeführt. Die Rechenzeit für das nichtlineare Schädigungsmodell ist zum jetzigen Zeitpunkt zu hoch. Verbesserungen in der Rechnerstruktur und CPU könnten zukünftig eine Anwendung ermöglichen.

Literatur

- [1] J. Aboudi, S. Arnold, and B. Bednarczyk. A generalized multiscale analysis approach. In *Micromechanics of Composite Materials*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [2] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer, 2015.
- [3] H. Andrä, R. Grzhibovskis, and S. Rjasanow. Boundary element method for linear elasticity with conservative body forces. *Advanced Finite Element Methods and Applications*, 2013.
- [4] N. Arad. Image warping by radial basis functions: applications to facial expressions. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 1994.
- [5] R. Beatson, J. Cherrie, and C. Mouat. Fast fitting of radial basis functions: Methods based on preconditioned gmres iteration. *Advances in Computational Mathematics*, 1999.
- [6] R. Beatson and W. Light. Fast evaluation of radial basis functions: methods for two-dimensional polyharmonic splines. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1996.
- [7] R. Beatson and G. Newsam. Fast evaluation of radial basis functions: I. *Computers & Mathematics with Applications*, 1992.
- [8] M. Bebendorf. *Hierarchical Matrices - A Means to Efficiently Solve Elliptic Boundary Value Problems*. Springer, 2008.
- [9] S. Börm. *Efficient numerical methods for non-local operators: H^2 -matrix compression, algorithms and analysis*. European Mathematical Society, 2010.
- [10] S. Brenner and L. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer, 1994.
- [11] J. Cherrie, R. Beatson, and G. Newsam. Fast evaluation of radial basis functions: Methods for generalized multiquadrics in \mathbb{R}^n . *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2002.
- [12] T. Cruse. A direct formulation and numerical solution of general transient dynamic problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968.
- [13] T. Cruse. Numerical solution in three dimensional elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, 1969.
- [14] R. DeVore and R. Shapley. Besov spaces on domains in \mathbb{R}^d . *Transactions of the American Mathematical Society*, 1993.
- [15] A. Drago and M. Pindera. Micro-macromechanical analysis of heterogeneous materials: Macroscopically homogeneous vs periodic microstructures. *Composites Science and Technology*, 2007.
- [16] C. Eckart and G. Young. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1936.
- [17] G. Fasshauer. Solving differential equations with radial basis functions: multilevel methods and smoothing. *Advances in Computational Mathematics*, 1999.

- [18] A. Faul and M. Powell. Krylov subspace methods for radial basis function interpolation. *Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics*, 1999.
- [19] J. Ferreira and V. Menegatto. Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels. *Integral Equations and Operator Theory*, 2009.
- [20] B. Fornberg and C. Piret. A stable algorithm for flat radial basis functions on a sphere. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2008.
- [21] E. Fuselier. *Refined Error Estimates for Matrix-valued Radial Basis Functions*. PhD thesis, Texas A&M University, 2006.
- [22] E. Fuselier. Improved stability estimates and a characterization of the native space for matrix-valued RBFs. *Advances in Computational Mathematics*, 2008.
- [23] E. Fuselier. Sobolev-type approximation rates for divergence-free and curl-free RBF interpolants. *Mathematics of Computation*, 2008.
- [24] R. Grzhibovskis, M. Bambach, S. Rjasanow, and G. Hirt. Adaptive cross-approximation for surface reconstruction using radial basis functions. *Journal of Engineering Mathematics*, 2008.
- [25] J. Guedes and N. Kikuchi. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990.
- [26] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on H-matrices. I. Introduction to H-matrices. *Computing*, 1999.
- [27] W. Hackbusch. *Hierarchische Matrizen : Algorithmen und Analysis*. Springer, 2009.
- [28] W. Hackbusch and B. Khoromskij. A sparse H-matrix arithmetic : general complexity estimates. *Journal of computational and applied mathematics*, 2000.
- [29] W. Hackbusch and B. Khoromskij. A sparse H-matrix arithmetic. Part II. Application to multi-dimensional problems. *Computing*, 2000.
- [30] W. Hackbusch, B. Khoromskij, and S. Sauter. On H²-matrices. In *Lectures on applied mathematics : proceedings of the symposium organized by the Sonderforschungsbereich 438 on the occasion of Karl-Heinz Hoffmann's 60th birthday, Munich, June 30 - July 1, 1999*. Springer, 2000.
- [31] H. Han. The boundary integro-differential equations of three-dimensional neumann problem in linear elasticity. *Numerische Mathematik*, 1994.
- [32] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 1962.
- [33] M. Kachanov. *Introduction to continuum damage mechanics* *Introduction to continuum damage mechanics*. Springer Netherlands, 1986.
- [34] V. Kupradze. Potential methods in theory of elasticity. *Daniel Davey & Co.*, 1965.
- [35] V. Kupradze. *Three dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*. Elsevier Science, 1979.

- [36] D. Lee. Fast multiplication of a recursive block toeplitz matrix by a vector and its application. *Journal of Complexity*, 1986.
- [37] J. Lemaitre and J. Chaboche. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal de Mécanique Appliquée*, 1978.
- [38] J. Lemaitre and J. Mazars. Application de la théorie de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. *Annales de l'ITBTP*, 1982.
- [39] O. Livne and G. Wright. Fast multilevel evaluation of smooth radial basis function expansions. *Electronic Transactions on Numerical Analysis.*, 2006.
- [40] S. Lowitzsch. *Approximation and interpolation employing divergence-free radial basis functions with applications*. PhD thesis, Texas A&M University, 2002.
- [41] S. Lowitzsch. A density theorem for matrix-valued radial basis functions. *Numerical Algorithms*, 2005.
- [42] S. Lowitzsch. Matrix-valued radial basis functions: stability estimates and applications. *Advances in Computational Mathematics*, 2005.
- [43] K. Luthra. Ceramic matrix composites (cmcs) for gas turbine applications. *GE Corporate Research & Development*, 2002.
- [44] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, 200.
- [45] J. Mercer. Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1909.
- [46] F. Narcowich and J. Ward. Norms of inverses and condition numbers for matrices associated with scattered data. *Journal of Approximation Theory*, 1991.
- [47] F. Narcowich and J. Ward. Norm estimates for the inverses of a general class of scattered-data radial-function interpolation matrices. *Journal of Approximation Theory*, 1992.
- [48] F. Narcowich and J. Ward. Generalized hermite interpolation via matrix-valued conditionally positive definite functions. *Mathematics of Computation*, 1994.
- [49] F. Narcowich, J. Ward, and H. Wendland. Sobolev bounds on functions with scattered zeros, with applications to radial basis function surface fitting. *Mathematics of Computation*, 2005.
- [50] F. Narcowich, J. Ward, and H. Wendland. Sobolev error estimates and a bernstein inequality for scattered data interpolation via radial basis functions. *Constructive Approximation*, 2006.
- [51] A. Neves and C. Brebbia. The multiple reciprocity boundary elements method for transforming domain iintegral to the boundary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991.
- [52] A. Nowak and C. Brebbia. The multiple-reciprocity method. a new approach for transforming b. e. m. domain integrals to the boundary. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1989.

- [53] P. Partridge, C. Brebbia, and L. Wrobel. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications Southampton Boston, 1992.
- [54] K. Pearson. Liii. on lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine Series 6*, 1901.
- [55] M. Powell. Tabulation of thin-plate splines on a very fine two dimensional grid. *University of Cambridge, Technical Report No. DAMTP 1992/NA2*, 1992.
- [56] M. Powell. Truncated laurent expansions for the fast evaluation of thin plate splines. *Numerical Algorithms*, 1993.
- [57] F. Rizzo. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1967.
- [58] S. Rjasanow and O. Steinbach. *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Springer, 2007.
- [59] S. Sauter and C. Schwab. *Boundary Element Methods*. Springer, 2011.
- [60] J. Simo and J. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models -I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 1987.
- [61] W. Slaughter. *The Linearized Theory of Elasticity*. Springer, 2002.
- [62] J. Spahn, H. Andrä, M. Kabel, and R. Müller. A multiscale approach for modeling progressive damage of composite materials using fast fourier transforms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014.
- [63] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.
- [64] O. Steinbach. *Stability Estimates for Hybrid Coupled Domain Decomposition Methods*. Springer, 2003.
- [65] O. Steinbach. *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. Finite and Boundary Elements*. Springer, 2008.
- [66] P. Suquet. Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. *Plasticity today: modelling, methods and applications*, 1985.
- [67] P. Wagner. A new constructive proof of the Malgrange-Ehrenpreis theorem. *American Mathematical Monthly*, 2009.
- [68] H. Wendland. Ein Beitrag zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen. Master's thesis, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Georg-August-Universität zu Göttingen, 1994.
- [69] H. Wendland. *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2004.
- [70] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, 1982.
- [71] Z. Zhiye. On the calculation of boundary stresses in boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1995.
- [72] W. Zongmin. Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions. *Approximation Theory and its Applications*, 1992.

Danksagung

Ich danke Professor Sergej Rjasanow für die interessante und anwendungsbezogene Aufgabenstellung und der Möglichkeit bei ihm zu promovieren. Ich danke weiter meinem Zweitgutachter PD Heiko Andrä für die Begutachtung meiner Arbeit.

Auch danke ich Dr. Richard Grzibovskis mit dem ich viele interessante Ideen diskutiert und später auch umgesetzt habe. Frau Dr.-Ing. Sarah Staub danke ich für die Erzeugung der RVE mit vorgegebenen Faserverteilungen und Professor Steffen Börm für die Bereitstellung der H^2 -Bibliothek.

Weiterhin danke ich meinen Kollegen Andreas Buchheit, Dr. Steffen Weißer, Luisa Huwig, Claudia Stoffer, Prof. Joachim Weickert und Dr. Darya Apushkinskaya und dem Bundesministerium für Bildung und Forschung.