

**Zur Spektraltheorie von Toeplitzoperatoren auf dem
Hardyraum $H^2(\mathbb{B}_n)$**

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

von
Zineb Akkar

Saarbrücken, 2012

Tag des Kolloquiums: 11.07.2012

Dekan: Prof. Dr. Mark Groves

Prüfungsausschuss

Vorsitzender: Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot

Berichterstatter: Prof. Dr. Ernst Albrecht

Prof. Dr. Alexandru Aleman

Wiss. Begleiter: Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Akademischer Mitarbeiter: Dr. Moritz Weber

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem Verfahren zur Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt.

Saarbrücken, April 2012

Zusammenfassung

Diese Arbeit ist der Spektraltheorie der kommutativen C^* -Algebren von Toeplitzoperatoren auf dem Hardyraum $H^2(\mathbb{B}_n)$ und ihrer Anwendungen gewidmet. Sie bezweckt, die für die gewichteten Bergmanräume bekannten Ergebnisse von Quiroga-Barranco und Vasilevski auf den Hardyraum zu übertragen. Insbesondere zeigen wir, dass für jede maximal kommutative Untergruppe G der Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ die C^* -Algebra, die von den Toeplitzoperatoren mit G -invarianten Symbolen erzeugt wird, kommutativ auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist. Außerdem zeigen wir, dass in jedem Fall die entsprechenden Toeplitzoperatoren Spektraldarstellungen besitzen, die zur Gewinnung ihrer Spektraleigenschaften führen.

Ein weiteres Ziel der Arbeit ist, die Fredholmstruktur von Toeplitzoperatoren mit gewissen unstetigen Symbolen zu untersuchen. Zwei Symbolklassen von Toeplitzoperatoren werden behandelt, zum einen die Symbolklasse von McDonald und zum anderen Symbole mit Invarianzeigenschaften bezüglich gewisser kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$.

Abstract

This thesis is devoted to the spectral theory of commutative C^* -algebras of Toeplitz operators on the Hardy space $H^2(\mathbb{B}_n)$ and its applications. The purpose is to extend the results obtained by Quiroga-Barranco and Vasilevski for the case of weighted Bergman spaces to the situation of Hardy spaces. In particular we prove that, for any maximal commutative subgroup G of automorphism group $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$, the C^* -algebra generated by Toeplitz operators with symbols which are invariant under the action of G is commutative on $H^2(\mathbb{B}_n)$. Moreover we show that in each case the corresponding Toeplitz operators admit spectral representations which describe their spectral properties.

Another aim of this work is to study the Fredholm structure of Toeplitz operators with certain discontinuous symbols. We will discuss two classes of symbols of Toeplitz operators, namely those of McDonald, and symbols with properties of invariance with respect to certain commutative subgroups of $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel 1. Präliminarien	9
1.1. Hardyräume	9
1.2. Transformationen vom Bargmann-Typ	18
1.3. Mehrdimensionale Spektraltheorie	19
Kapitel 2. Kommutative Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$	27
2.1. Quasi-elliptischer Fall	28
2.2. Quasi-parabolischer Fall	33
2.3. Nilpotenter Fall	37
2.4. Quasi-nilpotenter Fall	39
2.5. Quasi-hyperbolischer Fall	42
Kapitel 3. Symbole mit Invarianzeigenschaften	51
3.1. Quasi-elliptischer Fall	51
3.2. Quasi-parabolischer Fall	55
3.3. Nilpotenter Fall	59
3.4. Quasi-nilpotenter Fall	63
3.5. Quasi-hyperbolischer Fall	64
3.6. Symbolklasse von Davie und Jewell	68
Kapitel 4. Lokale Struktur von Toeplitzoperatoren	75
4.1. Das lokale Prinzip von Allan und Douglas	75
4.2. Stückweise stetige Symbole von McDonald	83
4.3. Symbole mit Invarianzeigenschaften bezüglich der maximal kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$	101
4.4. Symbolklasse von Davie und Jewell	107
Literaturverzeichnis	111
Symbolverzeichnis	115

Einleitung

1911 befasste sich Otto Toeplitz mit einer Klasse von Operatoren, die durch sogenannte Toeplitzmatrizen auf $l^2(\mathbb{Z}_+)$ definiert war. Eine Toeplitzmatrix ist eine Matrix, deren Einträge auf den Haupt- und Nebendiagonalen konstant sind. Unter Verwendung der Fouriertransformation nimmt diese Klasse von Operatoren eine einfache Form an. Ein Toeplitzoperator ist definiert als die Kompression eines Multiplikationsoperators auf den Hardyraum $H^2(\mathbb{T})$. Seit ihrer Einführung wurde der Bereich der Toeplitzoperatoren auf den Bergmanraum $A^2(\mathbb{D})$ und andere Banachräume holomorpher Funktionen erweitert. Obwohl sich die grundlegenden Eigenschaften und einige Resultate in den Theorien der Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$ und $A^2(\mathbb{D})$ ähneln, sind beide Sorten von Operatoren ganz verschieden. Im Gegensatz zum Hardyfall lässt sich der Toeplitzoperator auf $A^2(\mathbb{D})$ unter der kanonischen Orthonormalbasis nicht als Toeplitzmatrix darstellen. Ein weiterer Unterschied ist, dass auf $H^2(\mathbb{T})$ das Spektrum eines Toeplitzoperators immer zusammenhängend ist [19]. Während die einzig mögliche kommutative C^* -Algebra von Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$ diejenige ist, die von Toeplitzoperatoren mit reellen Symbolen und der Identität erzeugt wird [12, S. 98], tauchte vor etwa zehn Jahren ein unerwartetes Phänomen in der Theorie der Toeplitzoperatoren auf dem Bergmanraum auf: Es gibt eine überraschend große Familie kommutativer C^* -Algebren, die von den Toeplitzoperatoren mit nicht trivialen Symbolen erzeugt werden. In den Arbeiten [23, 24, 25, 26, 47, 48] wurden diese kommutativen C^* -Algebren untersucht und charakterisiert. Diesbezüglich ist eine umfassende Übersicht im Buch von Vasilevski [49] zusammengestellt. Darüber hinaus sind darin auch die bekannten Ergebnisse auf die gewichteten Bergmanräume $A_\lambda^2(\mathbb{D})$, $\lambda > -1$, übertragen worden.

Zusammen mit Quiroga-Barranco verallgemeinerte Vasilevski [37, 38] dieses Phänomen auf die Einheitskugel $\mathbb{B}_n$. Sie zeigten, dass:

- A. es bis auf Konjugation $n + 2$ maximal abelsche Untergruppen G von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ gibt.
- B. für jede solche Untergruppe G die C^* -Algebra, die von den Toeplitzoperatoren mit G -invarianten Symbolen erzeugt wird, kommutativ auf dem gewichteten Bergmanraum $A_\lambda^2(\mathbb{B}_n)$, $\lambda > -1$, ist.

Diese Arbeiten lassen folgende Frage offen: Was geschieht im Grenzfall $\lambda = -1$? Da dieser Fall dem Hardyraum $H^2(\mathbb{B}_n)$ entspricht, ist insbesondere die Gültigkeit der Aussage B auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ nachzuweisen.

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist, diese Frage zu beantworten und darüber hinaus die Spektraltheorie der kommutativen C^* -Algebren, die von den Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ erzeugt werden, näher zu beleuchten.

Der entscheidende Punkt bei der Untersuchung von Quiroga-Barranco und Vasilevski ist die alternative Charakterisierung der Funktionen auf dem Bergmanraum durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Die Idee bestand darin, diese Gleichungen unter Verwendung der maximal kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ und der Variablensubstitution zu reduzieren. Zu diesem Zweck wurde ein allgemeines Schema konstruiert, welches auf der Konstruktion eines auf dem Bergmanraum eingeschränkten Operators R beruht, und welches die Zerlegung der Bergman Projektion mittels R und R^* liefert. Damit wurde in jedem Fall der kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ die unitäre Äquivalenz der entsprechenden Toeplitzoperatoren T_ϕ mit der Darstellung $RT_\phi R^*$ aufgestellt, die zur Gewinnung ihrer Spektraleigenschaften führt. Beim Übergang zum Hardyraum-Fall müssen statt der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die tangentiellen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu Grunde gelegt werden und dementsprechend die verwendeten Methoden der harmonischen Analysis angepasst werden.

Es sei darauf hingewiesen, dass eine der obigen kommutativen C^* -Algebren, nämlich die *quasi-elliptische*, bereits im Jahr 1977 von Davie und Jewell [16] im Hardyraum-Fall entdeckt wurde. Die Einführung dieser Klasse von Toeplitzoperatoren lieferten Beispiele, die zeigten, dass der Satz von Widom über das zusammenhängende Spektrum für $n > 1$ nicht mehr richtig bleibt. Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen kommutativen C^* -Algebren fügen weitere Beispiele dieser Art hinzu.

Als wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchung von Toeplitzoperatoren steht das lokale Prinzip von Allan [3, 4] und Douglas [19] für C^* -Algebren (Satz 4.2) im Mittelpunkt. In dieser Verbindung wurden Toeplitzoperatoren mit unstetigen Symbolen betrachtet und studiert. Die bekanntesten sind:

- Toeplitzoperatoren mit stückweise stetigem Symbol auf dem Hardyraum $H^2(\mathbb{T})$ (siehe z.B. [20, 11]);
- Toeplitzoperatoren mit speziellen stückweise stetigen Symbolen auf dem Bergmanraum $A^2(\mathbb{B}_n)$, wie sie erstmals von McDonald [33] und danach von Yan [56] betrachtet wurden. Diese Symbole werden *Symbole von McDonald* genannt.

Dass dieses lokale Prinzip für das Studium der Fredholmtheorie von Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$ erfolgreich anwendbar war, ist wohlbekannt aus dem Buch von Douglas [20]. Auch das Buch von Böttcher und Silbermann [11] leistete später eine Reihe neuer Beiträge in dieser Richtung. Weitere Versuche für die Untersuchung von Toeplitzoperatoren mit anderen Klassen unstetiger Symbole auf $A^2(\mathbb{B}_n)$ gibt es in [7]. Dort wurden z.B. Symbole auf $\mathbb{S}_n$ betrachtet, die eine bis auf einen Randpunkt stetige Randfunktion besitzen. Die Schwierigkeiten bei der Betrachtung einer entsprechenden Klasse von Funktionen auf $\mathbb{B}_n$ liegt darin, dass auf der Kugel - anders als auf der Einheitssphäre - innere Effekte auftauchen. Die Symbolklasse von McDonald sind die einfachste Klasse unstetiger Symbole, mit denen man arbeiten kann, da sie ein sinnvolles Analogon der Algebra PC ist. Es sei daran erinnert, dass die Algebra PC die abgeschlossene Unter algebra von $L^\infty(\mathbb{T})$ aller stückweise stetigen Funktionen auf $\mathbb{T}$ ist. Eine Funktion $\varphi \in PC$ besitzt einseitige

endliche Grenzwerte $\varphi(t \pm 0)$ (in der Notation von [11]) überall auf $\mathbb{T}$, und es gibt höchstens abzählbar viele $t \in \mathbb{T}$, so dass $\varphi(t - 0) \neq \varphi(t + 0)$. Das Bild von $\varphi^\#$, wobei $\varphi^\# : \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Formel $\varphi^\#(\mu, t) = (1 - \mu)\varphi(t - 0) + \mu\varphi(t + 0)$ definiert ist, ist eine stetige Kurve und wird ausgehend vom wesentlichen Bild von φ erhalten, wenn alle Punkte $\varphi(t - 0) \neq \varphi(t + 0)$ durch Strecken verbunden werden, und damit gilt $\sigma_e(T_\varphi) = \text{Ran } \varphi^\#$. Das wesentliche Spektrum für Toeplitzoperatoren mit Symbolen von McDonald wurde auf $A^2(\mathbb{B}_n)$ berechnet [33]. Die Fredholmstruktur von solchen Toeplitzoperatoren wurde im Fall $n = 1$ von Wolf [54] behandelt und danach von Yan [56] verallgemeinert.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag leisten zur Untersuchung von Toeplitzoperatoren auf dem Hardyraum $H^2(\mathbb{B}_n)$, deren Symbole aus gewissen Klassen unstetiger Symbole stammen. Sie behandelt zwei Symbolklassen von Toeplitzoperatoren, zum einen die Symbolklasse von McDonald und zum anderen die Symbole mit Invarianzeigenschaften bezüglich gewisser kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$. Es wird ausführlich auf das Studium der Fredholmtheorie sowie der lokalen Methoden dieser Operatoren auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ eingegangen. Ausgangspunkt ist wieder das lokale Prinzip von Allan und Douglas.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt organisiert:

Im *Einführungskapitel* werden notwendige Grundlagen und benötigte Vorarbeiten bereit gestellt.

Im *Abschnitt 1.1* geben wir die Definitionen des Hardyraumes auf $\mathbb{B}_n$ und dem Siegel-Halbraum D_n und deren Beziehungen und charakterisieren den Hardyraum auf der Heisenberggruppe $\mathbb{H}$ durch die tangentiellen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (1.13).

Im *Abschnitt 1.2* wird an das Abstrakte Schema von Quiroga-Barranco und Vasilevski erinnert, welches die weitere Vorgehensweise wesentlich mitbestimmt. Kurz gefasst sei H ein separabler Hilbertraum und $\mathcal{A}$ ein abgeschlossener Unterraum von H . Die orthogonale Projektion von H auf $\mathcal{A}$ sei mit $\mathcal{P}$ bezeichnet. Weiterhin seien X, Y und $X_1 \subset X$ messbare Räume. Ziel des Schemas ist die Darstellung von $\mathcal{A}$ als $L^2(X_1, \mu)$ im Rahmen der reellen Analysis und die Konstruktion eines Operators $R : H \rightarrow L^2(X_1, \mu)$ mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung $R|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow L^2(X_1, \mu)$ ein isometrischer Isomorphismus ist und sich die orthogonale Projektion $\mathcal{P} : H \rightarrow \mathcal{A}$ als $\mathcal{P} = R^*R$ schreiben lässt. Folgendes kommutatives Diagramm veranschaulicht diese Konstruktion (siehe Kapitel 1.2).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H & \xrightarrow{\mathcal{P}=R^*R} & \mathcal{A} \\
 & \swarrow U & \downarrow R=R_0^*U & \nearrow R^*\simeq & \downarrow R|_{\mathcal{A}}\simeq \\
 & & L^2(X_1, \mu) & \xrightarrow{I=RR^*} & L^2(X_1, \mu) \\
 & \swarrow R_0 & & \nearrow R_0^* & \\
 L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \eta) & & & &
 \end{array}$$

Hierbei seien $U : H \rightarrow L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \eta)$ ein unitärer Operator und $R_0 : L^2(X_1, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \eta)$ eine isometrische Einbettung.

Im *Abschnitt 1.3* fassen wir einige zentralen Definitionen und Ergebnisse aus der mehrdimensionalen Indextheorie zusammen.

In *Kapitel 2* werden die $n + 2$ Typen maximal kommutativer Untergruppen G von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ klassifiziert: Die *quasi-elliptische*, *quasi-parabolische*, *nilpotente*, *quasi-nilpotente* und *quasi-hyperbolische* Gruppe. In fünf verschiedenen Fällen wird das Schema von Quiroga-Baranco und Vasilevski gemäß der obigen kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ angewendet. Mit den Methoden der harmonischen Analysis werden die tangentiellen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu Systemen von gewöhnlichen parameterabhängigen Differentialgleichungen reduziert und mit Hilfe der reellen Analysis gelöst. Im quasi-parabolischen Fall wird das obige Schema beispielsweise mit folgenden Räume realisiert:

$$\begin{aligned} H &= L^2(\partial D_n, d\beta), \\ \mathcal{A} &= H^2(D_n), \\ L^2(X, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}), \\ L^2(X_1, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+), \\ L^2(Y, \eta) &= L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr'). \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen ermöglicht die Kernaussagen des *dritten Kapitels*: Für jede maximal kommutative Untergruppe G der Automorphismengruppe ist die von der Menge aller Toeplitzoperatoren T_ϕ mit G -invarianten Symbolen ϕ erzeugte C^* -Algebra kommutativ und $RT_\phi R^*$ ist ein zu T_ϕ unitär äquivalenter Diagonaloperator bzw. Multiplikationsoperator auf einem L^2 -Raum (Satz 3.1 und die Sätze 3.2, 3.7, 3.12, 3.18 und 3.20). Der Aufbau dieses Kapitels sieht wie folgt aus.

Im *Abschnitt 3.1* wird der Begriff des quasi-elliptischen Symbols ϕ eingeführt und gezeigt, dass der Toeplitzoperator T_ϕ für $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ ein diagonal Operator ist. Es wird auch bemerkt, dass die Berechnung der Matrixdarstellung von T_ϕ in der kanonischen Orthonormalbasis $\{e_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ von $H^2(\mathbb{B}_n)$ auch zu diesem Ergebnis führt. Dennoch wird für die Vereinheitlichung des Vorgehens ein allgemeines Verfahren durchgeführt. Das Problem über zusammenhängendes Spektrum im Fall $n > 1$ wurde wie bereits erwähnt von Davie und Jewell [16] durch die Einführung dieser Symbolklasse behoben. Da diese Problematik unser Interesse geweckt hat, wird der Beweis hierfür vorgeführt (siehe Satz 3.4).

Eine weitere Symbolklasse, die auch ein nicht zusammenhängendes Spektrum im Fall $n > 1$ liefert, ist die quasi-parabolische. Sie wird im *Abschnitt 3.2* definiert und untersucht. Eine Funktion $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ wird *quasi-parabolisch* genannt, falls ϕ unter der quasi-parabolischen Gruppenoperation invariant ist. In diesem Fall ist ϕ von der Gestalt

$$(0.1) \quad \phi(z) = \phi(|z_1|, \dots, |z_{n-1}|, i|z'|^2) = a(|z_1|, \dots, |z_{n-1}|) \text{ für alle } z \in \partial D_n.$$

Damit gilt folgender Satz.

SATZ 3.7. *Sei $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ eine quasi-parabolische Funktion. Dann ist der Toeplitzoperator T_ϕ auf $H^2(D_n)$ unitär äquivalent zum Diagonaloperator*

$$\text{Diag}(M_{\gamma_a}) = RT_\phi R^* \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+))).$$

Hierbei ist $M_{\gamma_a} = (M_{\gamma_a(p', \cdot)})_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$ und $M_{\gamma_a(p', \cdot)}$ Operator der Multiplikation mit $\gamma_a(p', \cdot)$ auf $L^2(\mathbb{R}_+)$. Die Folge $\gamma_a = \{\gamma_a(p', \lambda)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, lässt sich darstellen als

$$\gamma_a(p', \lambda) = \frac{(2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} a(\sqrt{r'}) r'^{p'} e^{-2\lambda|r'|_1} dr',$$

wobei $\sqrt{r'} = (\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{n-1}})$ und $|r'|_1 = r_1 + \dots + r_{n-1}$.

Als Folgerung ergibt sich

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \overline{\cup_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \text{ran } \gamma_a(p', \cdot)}.$$

Hingegen liefert die in *Abschnitt 3.3* eingeführte Symbolklasse der nilpotenten Funktionen nur ein zusammenhängendes Spektrum. In diesem Fall ist der Toeplitzoperator T_ϕ unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator und es gilt $\sigma(T_\phi) = \sigma_e(T_\phi)$. In einem Beispiel wird gezeigt, dass das Spektrum von T_ϕ , wobei der wesentliche Wertebereich von ϕ nur aus drei Punkten besteht, in der abgeschlossenen konvexen Hülle dieser Punkte echt enthalten sein kann. Ein ähnliches Phänomen wurde von Böttcher [10] und von Böttcher und Silbermann [11, S. 219–226] betrachtet.

Eine andere Symbolklasse ist die quasi-nilpotente, die in *Abschnitt 3.4* eingeführt wird. Dieser Fall ergibt Sinn für $n \geq 3$. Für $n = 2$ ist die Funktion entweder nilpotent oder quasi-parabolisch.

Ferner wird im *Abschnitt 3.5* die quasi-hyperbolische Symbolklasse vorgestellt und für Symbole ϕ dieser Klasse die unitäre Äquivalenz von T_ϕ zu einer unendlichen direkten Summe von Operatoren der Multiplikation mit stetiger Funktionen gezeigt. Damit gilt $\sigma(T_\phi) = \sigma_e(T_\phi)$. Für die Veranschaulichung wird als ein Beispiel für eine quasi-hyperbolische Funktion ϕ eine charakteristische Funktion betrachtet und gezeigt, dass $\sigma(T_\phi) = [0, 1]$.

Im abschließenden *Abschnitt 3.6* wird eine auf Davie und Jewell zurückgehende Symbolklasse untersucht, die den quasi-elliptischen Fall verallgemeinert. Für Symbole ϕ dieser Art ist T_ϕ nicht mehr notwendig unitär äquivalent zu einem Diagonaloperator aber hat noch die schwache Eigenschaft, dass die endlich dimensional Unterräume $H_m := \text{LH}\{e_\alpha : |\alpha| = m\}$ reduzierende invariante Unterräume für T_ϕ sind. Wie im quasi-elliptischen Fall ist $\sigma(T_\phi) \setminus \sigma_e(T_\phi)$ noch diskret. Diese Ergebnisse werden an einem Beispiel illustriert. In diesem Beispiel, wo das Symbol $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ durch

$$\phi(z_1, z_2) = \phi(\varrho e^{i\theta}, \sqrt{(1-\varrho^2)} e^{i\eta}) = e^{i(\theta-\eta)}, \quad \varrho \in [0, 1], \quad \theta, \eta \in [0, 2\pi],$$

gegeben ist, ist T_ϕ eine universelle Dilatation im Sinne von Bercovici, Foiaş und Pearcy [8, 9]. Insbesondere gilt: Ist $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|A\| < 1$, so gibt es abgeschlossene invariante Unterräume M_1, M_2 von $H^2(\mathbb{B}_2)$ mit $M_1 \subset M_2$, so dass A unitär äquivalent zu $P_{M_2 \ominus M_1} T_\phi|_{M_2 \ominus M_1}$ ist. Hierbei bezeichnet $P_{M_2 \ominus M_1}$ die orthogonale Projektion auf $M_2 \ominus M_1$. (Siehe Korollar 3.30).

Toeplitzoperatoren mit speziellen stückweisen stetigen Symbolen auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ und die lokalen Eigenschaften des Spektrums von Toeplitzoperatoren, deren Symbole über bestimmte Invarianzeigenschaften verfügen, werden in *Kapitel 4* untersucht. Im Zentrum dieser Untersuchungen steht das lokale Prinzip von Allan und

Douglas für C^* -Algebren. Dieses wird im ersten Abschnitt zur Verfügung gestellt. Wie bei McDonald betrachten wir folgende Situation auf $H^2(\mathbb{B}_n)$: Sei

$$E = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} z_n = 0\}$$

eine $(2n - 1)$ -dimensionale reelle Hyperebene in $\mathbb{C}^n$, welche $\mathbb{S}_n$ in zwei Komponenten

$$\mathbb{S}_+ = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}_n : \operatorname{Im} z_n > 0\} \text{ und } \mathbb{S}_- = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}_n : \operatorname{Im} z_n < 0\}$$

zerlegt. Sei

$$HC(\mathbb{S}_n) = \{\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma) : \varphi|_{\mathbb{S}_+}, \varphi|_{\mathbb{S}_-} \text{ sind gleichmäßig stetig}\}.$$

Damit lautet die zentrale Aussage (Satz 4.20): Das wesentliche Spektrum von T_φ für $\varphi = (f, g) \in HC(\mathbb{S}_n)$ besteht aus $\{\varphi(\omega) : \omega \in \mathbb{S}_n \setminus (E \cap \mathbb{S}_n)\}$ zusammen mit den abgeschlossenen Verbindungsstrecken zwischen $f(\omega)$ und $g(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{S}_n \cap E$. Ferner wird eine Indexformel für solche Toeplitzoperatoren im Matrixfall bewiesen. Zusammen mit einer Indexformel für stetige Funktionalkalküle wesentlich vertauschender Tupel [39, Satz 1.3.1] wird eine Aussage über die Indexformel für Toeplitz-Tupel $T_\Phi \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))^n$ mit Symbol $\Phi \in HC(\mathbb{S}_n)^n$ gewonnen. Ein weiteres Ziel dieses Kapitels ist der Beweis, dass die Symbole mit Invarianzeigenschaften bezüglich der maximal kommutativen Untergruppen G von $\operatorname{Aut}(\mathbb{B}_n)$ zur Symmetrie der lokalen Spektren in den bestimmten Bahnen führt. Bei der konkreten Anwendung dieser Resultate in den Beispielen stellt sich heraus, dass eine Inklusion für den lokalen wesentlichen Wertebereich $\mathcal{R}_\omega(f)$ von Nutzen sein kann, um die lokalen Spektren zu bestimmen. Davie und Jewell [16] haben gezeigt, dass

$$\operatorname{ess-ran} f \subseteq \sigma_e(T_f), \quad f \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma),$$

und wir stellen die Frage, ob auch die Inklusion

$$\mathcal{R}_\omega(f) \subseteq \sigma(\Phi_\omega(T_f)), \quad \omega \in \mathbb{S}_n$$

für alle $f \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ gilt, wobei $\sigma(\Phi_\omega(T_f))$ das lokale Spektrum von $\Phi_\omega(T_f)$ in der Quotientenalgebra $\mathcal{I}_\omega^\infty$ ist (siehe Satz 4.6).

Diese Frage wird unter schwacher Voraussetzung an f im *Abschnitt 4.1* beantwortet. Nachdem der Satz von Allan und Douglas für C^* -Algebren erläutert wird, werden wir eine konkrete Anwendung auf die Toeplitzalgebra $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$ schildern (Satz 4.6). Hierbei ist $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$ die von $\{T_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)\}$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$. Dieser Satz wird abschließend auf die Situation vom Rand von D_n übertragen (Korollar 4.12), welche in späteren Paragraphen benötigt wird.

Der bereits weiter oben beschriebene Satz über das wesentliche Spektrum von T_φ , $\varphi = (f, g) \in HC(\mathbb{S}_n)$ wird im *Abschnitt 4.2* bewiesen. Der Beweis hierfür ist aufwendig. Sei $\omega \in \mathbb{S}_n \cap E$. Die Kernidee ist es nachzuweisen, dass für

$$\psi(z) := \begin{cases} f(\omega), & \text{für } z \in \mathbb{S}_+, \\ g(\omega), & \text{für } z \in \mathbb{S}_-, \end{cases}$$

das Spektrum von $\Phi_\omega(T_\psi)$ aus der Verbindungsstrecke zwischen $f(\omega)$ und $g(\omega)$ besteht. Außerdem wird der Raum der maximalen Ideale der Algebra $\tau(HC(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ bestimmt, wobei $\tau(HC(\mathbb{S}_n))$ die abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$, die

von $\{T_\varphi : \varphi \in HC(\mathbb{S}_n)\}$ erzeugt wird, und damit die Indexformel für Toeplitzoperatoren mit matrixwertigen Symbolen aus $HC(\mathbb{S}_n)$ angegeben (Satz 4.32). Diese Indexformel lässt sich im mehrdimensionalen Fall verallgemeinern (Satz 4.35).

Dass die Indexformel für Toeplitz-Tupel mit G -invariantem stetigen Symbol den Index Null ergibt, wird im *Abschnitt 4.3* vermerkt. Hierbei sei G eine maximal kommutative Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$. Außerdem werden in jedem Fall die lokalen Eigenschaften des Spektrums der Toeplitzoperatoren mit G -invarianten $L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ - bzw. $L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ -Symbolen untersucht. Hierbei ist $\partial D_n^\infty = \partial D_n \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von ∂D_n . Für quasi-parabolische Symbole $\phi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ der Gestalt (0.1) erhalten wir beispielsweise die folgende Aussage (Lemma 4.41): Für alle $z \in \partial D_n$ gilt

$$\sigma(\Phi_z(T_\phi)) = \sigma\left(\Phi_{(|z_1|, \dots, |z_{n-1}|, i|z'|^2)}(T_\phi)\right),$$

wobei $\sigma(\Phi_z(T_\phi))$ das lokale Spektrum von $\Phi_z(T_\phi)$ in der Quotientenalgebra $\tilde{\mathcal{I}}_z^\infty$ ist (siehe Korollar 4.12).

Auch auf lokale Eigenschaften des Spektrums von Toeplitzoperatoren T_ϕ , ϕ aus der Symbolklasse von Davie und Jewell, wird im abschließenden *Abschnitt 4.4* eingegangen.

KAPITEL 1

Präliminarien

1.1. Hardyräume

Mit $\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ bezeichnen wir die Einheitskugel und mit $\mathbb{S}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{C}^n$. Das normalisierte Lebesgue-Maß von $\mathbb{B}_n$ und das normalisierte Oberflächenmaß von $\mathbb{S}_n$ werden mit dv bzw. $d\sigma$ bezeichnet. Der Hardyraum $H^p(\mathbb{B}_n)$, $0 < p < \infty$, ist definiert als der Raum aller holomorphen Funktionen f auf $\mathbb{B}_n$, so dass

$$\|f\|_p^p := \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{S}_n} |f(r\xi)|^p d\sigma(\xi) < \infty$$

und $H^\infty(\mathbb{B}_n)$ als der Raum der beschränkten holomorphen Funktionen auf $\mathbb{B}_n$ mit der Supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$.

Da $H^2(\mathbb{B}_n)$ mit einem abgeschlossenen Unterraum von $L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ identifiziert werden kann, existiert eine orthogonale Projektion C von $L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ auf $H^2(\mathbb{B}_n)$. Diese Projektion wird *Cauchy-Szegő Projektion* genannt und ist durch

$$(1.1) \quad (Cf)(z) = \int_{\mathbb{S}_n} C(z, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi)$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und $z \in \mathbb{B}_n$ gegeben, wobei

$$C(z, \xi) = \frac{1}{(1 - \langle z, \xi \rangle)^n}$$

der reproduzierende Kern von $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist.

Bekanntlich bilden die Funktionen $e_\alpha(\xi) = c_{n,\alpha} \xi^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, die kanonische Orthonormalbasis für $H^2(\mathbb{B}_n)$, wobei

$$(1.2) \quad c_{n,\alpha} := \sqrt{\frac{(n-1+|\alpha|)!}{\alpha!(n-1)!}}.$$

Mehr über die Theorie der Räume $H^p(\mathbb{B}_n)$, $0 < p < \infty$, findet man z.B. in [57].

Für $z \in \mathbb{C}^n$ wird ab jetzt folgende Notation verwendet

$$z = (z', z_n), \text{ mit } z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ und } z_n \in \mathbb{C}.$$

Der obere Siegel-Halbraum in $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$D_n = \{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_n - |z'|^2 > 0\}$$

und sein Shilovrand ∂D_n ist gegeben durch

$$\partial D_n = \{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_n - |z'|^2 = 0\}.$$

Die Cayleyabbildung

$$\begin{aligned}\omega_c: \mathbb{B}_n &\longrightarrow D_n \\ (\xi', \xi_n) &\mapsto \left(i \frac{\xi'}{1 + \xi_n}, i \frac{1 - \xi_n}{1 + \xi_n} \right)\end{aligned}$$

ist eine biholomorphe Abbildung und lässt sich zu einem Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{S}_n \setminus \{-e_n\}$ und ∂D_n erweitern. Hierbei sei $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ der n -te Einheitsvektor.

Die Umkehrabbildung $\omega_c^{-1}: D_n \rightarrow \mathbb{B}_n$ ist gegeben durch

$$\omega_c^{-1}(z', z_n) = \left(\frac{-2iz'}{1 - iz_n}, \frac{1 + iz_n}{1 - iz_n} \right).$$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$. Wir bezeichnen mit $\text{Aut } \Omega$ die Menge aller biholomorphen Selbstabbildungen von Ω . Diese Menge bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe. Ein Isomorphismus zwischen $\text{Aut } \mathbb{B}_n$ und $\text{Aut } D_n$ ist gegeben durch

$$h \in \text{Aut } \mathbb{B}_n \mapsto \omega_c \circ h \circ \omega_c^{-1} \in \text{Aut } D_n.$$

Nun beschreiben wir in $\text{Aut } D_n$ die Untergruppen der Dilatationen, der Rotationen bezüglich der ersten $(n - 1)$ -Variablen und der Translationen. Die Gruppe der Dilatationen besteht aus den “nicht-isotropen“ Abbildungen

$$(1.3) \quad \tau_\delta: (z', z_n) \in D_n \mapsto (\delta z', \delta^2 z_n) \in D_n$$

für jede positive Zahl $\delta > 0$ und die Gruppe der Rotationen bzgl. der $(n - 1)$ -ersten Variablen ist gegeben durch die Abbildungen

$$(1.4) \quad \tau_{t'}: (z', z_n) \in D_n \mapsto (t' z', z_n) \in D_n$$

für jede Drehung $t' \in \mathbb{T}^{n-1}$. Um die Translationen zu beschreiben führen wir die Heisenberggruppe $\mathbb{H}$ ein. Als eine Menge definieren wir

$$\mathbb{H} := \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} = \{(z', x) : z' \in \mathbb{C}^{n-1}, x \in \mathbb{R}\}$$

und versehen wir sie mit der Gruppenmultiplikation

$$(z'_1, x_1) \cdot (z'_2, x_2) = (z'_1 + z'_2, x_1 + x_2 + 2\text{Im} \langle z'_1, z'_2 \rangle),$$

wobei $(z'_i, x_i) \in \mathbb{H}$, $i = 1, 2$. So wird $\mathbb{H}$ zu einer Gruppe mit $(0', 0)$ als neutralem Element und $(z', x)^{-1} = (-z', -x)$ als inversem Element.

Sei $(\xi', y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dann definiert die Abbildung

$$(1.5) \quad \tau_{(\xi', y)}: (z', z_n) \in D_n \mapsto (z' + \xi', z_n + y + 2i \langle z', \xi' \rangle + i |\xi'|^2) \in D_n$$

einen Automorphismus, welcher ∂D_n auf sich abbildet. Die Operation von τ ist transitiv auf ∂D_n , d.h. für je zwei Elemente $(z', z_n), (\eta', \eta_n) \in \partial D_n$ gibt es genau ein Element $(\zeta', x) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$, so dass $\tau_{(\zeta', x)}(z', z_n) = (\eta', \eta_n)$. Über die Operation im Nullpunkt können wir die Heisenberggruppe $\mathbb{H}$ mit dem Rand ∂D_n von D_n identifizieren durch

$$(1.6) \quad \kappa: (\zeta', x) \in \mathbb{H} \mapsto (\zeta', x + i|\zeta'|^2) = \tau_{(\zeta', x)}(0', 0) \in \partial D_n.$$

Die Abbildung κ ermöglicht die Übertragung der Topologie und der Maßtheorie von $\mathbb{H}$ nach ∂D_n . Insbesondere können wir das Maß β auf ∂D_n wie folgt definieren: Sei f stetig mit kompaktem Träger auf ∂D_n , dann gilt

$$(1.7) \quad \int_{\partial D_n} f(z) d\beta(z) = \int_{\mathbb{H}} f(z', x + i|z'|^2) d\lambda_{2n-1}(z', x),$$

wobei $d\lambda_{2n-1}(z', x)$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ ist und $x = \operatorname{Re} z_n$. Dieses Maß lässt sich schreiben in der Form

$$d\lambda_{2n-1}(z', x) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1} \wedge d\bar{z}_{n-1} \wedge dx.$$

Das Haarsche Maß β ist links- und rechtsinvariant bzgl. der durch die Heisenberggruppe induzierten Gruppenoperationen auf ∂D_n .

Für $0 < p \leq \infty$ bezeichnen wir mit $L^p(\partial D_n, d\beta)$ den L^p -Raum bezüglich β . Für eine Funktion $F : D_n \rightarrow \mathbb{C}$ und $t > 0$ definieren wir $F_t : D_n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F_t(z) = F_t(z', z_n) = F(z', z_n + it).$$

Der Hardyraum $H^p(D_n)$, $0 < p < \infty$, ist nun definiert als der Raum aller holomorphen Funktionen F auf D_n , so dass

$$\begin{aligned} \|F\|_p^p &= \sup_{t>0} \|F_t\|_{L^p(\partial D_n, d\beta)}^p \\ &= \sup_{t>0} \int_{\mathbb{H}} |F(z', x + i|z'|^2 + it)|^p d\lambda_{2n-1}(z', x) < \infty, \end{aligned}$$

und $H^\infty(D_n)$ als der Raum aller beschränkten holomorphen Funktionen auf D_n .

Bekanntlich gilt:

- i) $H^p(D_n)$ für $p \geq 1$ ist ein Banachraum versehen mit der Norm $\|\cdot\|_p$.
- ii) Falls $F \in H^2(D_n)$, so existiert $\lim_{t \rightarrow 0} F_t(z) = f(z)$ in $L^2(\partial D_n, d\beta)$ für fast alle $z \in \partial D_n$.
- iii) Der Raum der Randfunktionen f von F in ii) ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\partial D_n, d\beta)$. Ferner gilt

$$\|f\|_{L^2(\partial D_n, d\beta)} = \|F\|_2.$$

Insbesondere ist $H^2(D_n)$ ein Hilbertraum. Wir notieren, dass $H^2(D_n)$ invariant unter der Operation (1.5) von $\mathbb{H}$ ist. Für Beweise und weitere Eigenschaften siehe z.B. [29] und [35].

Bemerkung 1.1. Sei $g \in \mathbb{H}$ und $t' \in \mathbb{T}^{n-1}$. Dann definieren die Formeln

$$F \mapsto F \circ \tau_g \quad \text{und} \quad F \mapsto F \circ \tau_{t'}$$

unitäre Abbildungen $H^2(D_n) \rightarrow H^2(D_n)$.

Ist $\delta > 0$, dann gilt

$$\|F \circ \tau_\delta\|_2^2 = \sup_{t>0} \int_{\partial D_n} |F_t(\delta z', \delta^2 z_n)|^2 d\beta(z).$$

Die Variablensubstitution $w' = \delta z'$, $w_n = \delta^2 z_n$ liefert $d\beta(z) = \delta^{-2n} d\beta(w)$ und damit gilt

$$\|F \circ \tau_\delta\|_2^2 = \delta^{-2n} \sup_{t>0} \int_{\partial D_n} |F_t(w', w_n)|^2 d\beta(w) = \delta^{-2n} \|F\|_2^2.$$

Lemma 1.2. Für $f \in C(\mathbb{S}_n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{S}_n} f(\xi) d\sigma(\xi) = \frac{(n-1)!}{4\pi^n} \int_{\partial D_n} f(\omega_c^{-1}(\zeta', \zeta_n)) \frac{2^{2n}}{|1 - i\zeta_n|^{2n}} d\beta(\zeta).$$

BEWEIS. Sei $f \in C(\mathbb{S}_n)$. Wir teilen den Beweis in fünf Schritte.

(1) Zunächst gilt nach [41, S. 344], dass

$$(1.8) \quad nc_n \int_{\mathbb{S}_n} f(\xi) d\sigma(\xi) = \int_{\partial \mathbb{B}_n} f(\xi) \omega'(\bar{\xi}) \wedge \omega(\xi),$$

wobei

$$c_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2\pi i)^n}{n!}$$

und

$$\omega(\xi) = d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n, \quad \omega'(\bar{\xi}) = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \omega_j(\bar{\xi}).$$

Hiermit sei $\omega_j(\bar{\xi}) = (-1)^{j-1} d\bar{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{\xi}_n$. Das Symbol $\widehat{d\bar{\xi}_j}$ deutet auf die Entfernung des j -ten Ausdrucks hin. Setze $\alpha := \alpha(\xi) = \omega'(\bar{\xi}) \wedge \omega(\xi)$.

(2) Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^n \setminus (\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{-i\})) &\rightarrow \mathbb{C}^n \setminus (\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{1\})) \\ (\zeta', \zeta_n) &\mapsto \left(\frac{-2i\zeta'}{1 - i\zeta_n}, \frac{1 + i\zeta_n}{1 - i\zeta_n} \right). \end{aligned}$$

Dann ist T biholomorph und es gilt $T(\partial D_n) = \partial \mathbb{B}_n \setminus \{-e_n\}$. Wir berechnen die zurückgezogene Differentialform α_T . Mit

$$\xi_j = \frac{-2i\zeta_j}{1 - i\zeta_n}, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad \text{und} \quad \xi_n = \frac{1 + i\zeta_n}{1 - i\zeta_n}$$

folgt

$$\begin{aligned} (d\xi_j)_T &= \frac{-2i}{1 - i\zeta_n} d\zeta_j + \frac{2\zeta_j}{(1 - i\zeta_n)^2} d\zeta_n \\ (d\bar{\xi}_j)_T &= \frac{2i}{1 + i\bar{\zeta}_n} d\bar{\zeta}_j + \frac{2\bar{\zeta}_j}{(1 + i\bar{\zeta}_n)^2} d\bar{\zeta}_n \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, n-1$ und

$$(d\xi_n)_T = \frac{2i}{(1 - i\zeta_n)^2} d\zeta_n, \quad (d\bar{\xi}_n)_T = \frac{-2i}{(1 + i\bar{\zeta}_n)^2} d\bar{\zeta}_n.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} (\omega(\xi))_T &= (d\xi_1)_T \wedge \cdots \wedge (d\xi_n)_T \\ &= \bigwedge_{k=1}^{n-1} \left[\frac{-2i}{1 - i\zeta_n} d\zeta_k + \frac{2\zeta_k}{(1 - i\zeta_n)^2} d\zeta_n \right] \wedge \left[\frac{2i}{(1 - i\zeta_n)^2} d\zeta_n \right] \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2i)^n}{(1 - i\zeta_n)^{n+1}} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} (\omega_j(\bar{\xi}))_T &= (-1)^{j-1} \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} \left[\frac{2i}{1+i\bar{\zeta}_n} d\zeta_k + \frac{2\bar{\zeta}_k}{(1+i\bar{\zeta}_n)^2} d\bar{\zeta}_n \right] \wedge \left[\frac{-2i}{(1+i\bar{\zeta}_n)^2} d\bar{\zeta}_n \right] \\ &= \frac{(-1)^j (2i)^n}{(1+i\bar{\zeta}_n)^n} d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\zeta}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, n-1$ und

$$\begin{aligned} (\bar{\xi}_n \omega_n(\bar{\xi}))_T &= (-1)^{n-1} \frac{1-i\bar{\zeta}_n}{1+i\bar{\zeta}_n} \bigwedge_{k=1}^{n-1} \left[\frac{2i}{1+i\bar{\zeta}_n} d\zeta_k + \frac{2\bar{\zeta}_k}{(1+i\bar{\zeta}_n)^2} d\bar{\zeta}_n \right] \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2i)^{n-1} (1-i\bar{\zeta}_n)}{(1+i\bar{\zeta}_n)^n} d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{n-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{(2i)^{n-2} (1-i\bar{\zeta}_n) 2\bar{\zeta}_j}{(1+i\bar{\zeta}_n)^{n+1}} d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\zeta}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n. \end{aligned}$$

Mit

$$\omega'(\bar{\xi}) = \bar{\xi}_n \omega_n(\bar{\xi}) + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\xi}_j \omega_j(\bar{\xi})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} [\omega'(\bar{\xi})]_T &= (-1)^{n-1} \frac{(2i)^{n-1} (1-i\bar{\zeta}_n)}{(1+i\bar{\zeta}_n)^n} d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{n-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{(2i)^{n-2} (1-i\bar{\zeta}_n) 2\bar{\zeta}_j}{(1+i\bar{\zeta}_n)^{n+1}} d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\zeta}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j (2i)^n \bar{\zeta}_j}{(1+i\bar{\zeta}_n)^{n+1}} d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\zeta}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} [\omega'(\bar{\xi})]_T &= (-1)^{n-1} \frac{(2i)^{n-1} (1-i\bar{\zeta}_n)}{(1+i\bar{\zeta}_n)^n} d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{n-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j (2i)^n \bar{\zeta}_j}{2(1+i\bar{\zeta}_n)^n} d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\zeta}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n. \end{aligned}$$

(3) Weiterhin betrachten wir die Abbildung $\kappa : \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, die durch

$$\kappa(w', x) = (w', x + i|w'|^2)$$

gegeben ist. Dann ist κ eine Parametrisierung von ∂D_n . Wir berechnen die zurückgezogene Differentialform $(\alpha_T)_\kappa$. Mit

$$\zeta' = w' \quad \text{und} \quad \zeta_n = x + i|w'|^2$$

gilt

$$(d\zeta_j)_\kappa = dw_j, \quad (d\bar{\zeta}_j)_\kappa = d\bar{w}_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1,$$

und

$$(d\zeta_n)_\kappa = dx + i \sum_{k=1}^{n-1} (w_k d\bar{w}_k + \bar{w}_k dw_k)$$

$$(d\bar{\zeta}_n)_\kappa = dx - i \sum_{k=1}^{n-1} (w_k d\bar{w}_k + \bar{w}_k dw_k).$$

Daraus folgt

$$(1.9) \quad \begin{aligned} [(\omega(\xi))_T]_\kappa &= \frac{(-1)^{n-1}(2i)^n}{(1-ix+|w'|^2)^{n+1}} dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-1} \wedge (d\zeta_n)_\kappa \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2i)^n}{(1-ix+|w'|^2)^{n+1}} dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-1} \wedge dx \\ &\quad + i \frac{(-1)^{n-1}(2i)^n}{2(1-ix+|w'|^2)^{n+1}} dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-1} \wedge \sum_{k=1}^{n-1} w_k d\bar{w}_k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [(\omega'(\bar{\xi}))_T]_\kappa &= (-1)^{n-1} \frac{(2i)^{n-1}(1-ix-|w'|^2)}{(1+ix+|w'|^2)^n} d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_{n-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j (2i)^n \bar{w}_j}{2(1+ix+|w'|^2)^n} d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{w}_j} \wedge \cdots \wedge (d\bar{\zeta}_n)_\kappa, \end{aligned}$$

also

$$(1.10) \quad \begin{aligned} [(\omega'(\bar{\xi}))_T]_\kappa &= \frac{(-1)^{n-1}(2i)^{n-1}(1-ix)}{(1+ix+|w'|^2)^n} d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_{n-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j-1}(2i)^n \bar{w}_j}{2(1+ix+|w'|^2)^n} d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{w}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_{n-1} \wedge dx \\ &\quad - i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j (2i)^n \bar{w}_j}{2(1+ix+|w'|^2)^n} d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{w}_j} \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_{n-1} \wedge \sum_{k=1}^{n-1} \bar{w}_k dw_k. \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir aus (1.9) und (1.10)

$$\begin{aligned} [\alpha_T]_\kappa &= \frac{(2i)^{2n-1}(1-ix)}{(1-ix+|w'|^2)^{n+1}(1+ix+|w'|^2)^n} d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_{n-1} \\ &\quad \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-1} \wedge dx \\ &\quad + i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+j-1}(2i)^{2n}|w_j|^2}{2(1-ix+|w'|^2)^{n+1}(1+ix+|w'|^2)^n} (-1)^{n-j-2} \\ &\quad \wedge d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_{n-1} \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-1} \wedge dx, \end{aligned}$$

und so lässt sich die zurückgezogene Differentialform

$$[\alpha_T]_\kappa = [(\omega'(\bar{\xi}))_T]_\kappa \wedge [(\omega(\xi))_T]_\kappa$$

auf $\mathbb{H}$ darstellen als

$$(1.11) \quad \alpha_{T\kappa} = \frac{(2i)^{2n-1}}{|1+|w'|^2-ix|^{2n}} d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{w}_{n-1} \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-1} \wedge dx.$$

Wir beachten nach [40, Theorem 9.43], dass $[\alpha_T]_\kappa = \alpha_{T\kappa}$. Die Abbildung

$$S := T \circ \kappa : \mathbb{C}^n \setminus \{(w', w_n) \mid w_n = -i(|w'|^2 + 1)\} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus (\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{-1\}))$$

ist gegeben durch

$$S(w', w_n) = \left(\frac{-2iw'}{1 + |w'|^2 - iw_n}, \frac{1 - |w'|^2 + iw_n}{1 + |w'|^2 - iw_n} \right)$$

mit $S(\mathbb{H}) = \partial\mathbb{B}_n \setminus \{-e_n\}$.

(4) Mit dem Transformationssatz [40, Theorem 9.45] erhalten wir die Integraldarstellung

$$\int_{\partial\mathbb{B}_n} f(\xi) \omega'(\bar{\xi}) \wedge \omega(\xi) = \int_{\mathbb{H}} f(S(w', x)) \frac{(2i)^{2n-1}}{|1 + |w'|^2 - ix|^{2n}} \omega(\bar{w}') \wedge \omega(w') \wedge dx,$$

wobei $\omega(w') = dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-1}$.

(5) Schließlich folgt nach (1.8) und (1.7), dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_n} f(\xi) d\sigma(\xi) &= \frac{1}{nc_n} \int_{\mathbb{H}} f(S(w', x)) \frac{(2i)^{2n-1}}{|1 + |w'|^2 - ix|^{2n}} \omega(\bar{w}') \wedge \omega(w') \wedge dx \\ &= \frac{(n-1)!}{4\pi^n} \int_{\partial D_n} f(\omega_c^{-1}(\zeta', \zeta_n)) \frac{2^{2n}}{|1 - i\zeta_n|^{2n}} d\beta(\zeta). \end{aligned}$$

Beachte, dass

$$\omega(\bar{w}') \wedge \omega(w') = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-1} \wedge d\bar{w}_{n-1},$$

und damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Der nächste Satz liefert die Beziehung zwischen den Räumen $L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und $L^2(\partial D_n, d\beta)$. Dafür setzen wir

$$\nu_n = \frac{(n-1)!}{4\pi^n}.$$

Satz 1.3. Für $f \in L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ definieren wir $U : L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma) \rightarrow L^2(\partial D_n, d\beta)$ durch

$$(Uf)(\zeta) = \sqrt{\nu_n} \left(\frac{2}{1 - i\zeta_n} \right)^n f(\omega_c^{-1}(\zeta)).$$

Dann ist U unitär und sein inverser Operator

$$U^{-1} : L^2(\partial D_n, d\beta) \rightarrow L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$$

ist gegeben durch

$$(U^{-1}f)(z) = \frac{1}{\sqrt{\nu_n}} \frac{1}{(1 + z_n)^n} f(\omega_c(z)).$$

BEWEIS. Da $C(\mathbb{S}_n)$ dicht in $L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ liegt, ergibt sich nach Lemma 1.2

$$\int_{\mathbb{S}_n} |f(\xi)|^2 d\sigma(\xi) = \frac{(n-1)!}{4\pi^n} \int_{\partial D_n} |f(\omega_c^{-1}(\zeta))|^2 \frac{2^{2n}}{|1 - i\zeta_n|^{2n}} d\beta(\zeta)$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und somit folgt hieraus, dass U eine Isometrie ist, d.h.

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)}^2 = \|Uf\|_{L^2(\partial D_n, d\beta)}^2.$$

Außerdem zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{\nu_n}} \frac{1}{(1+z_n)^n} f(\omega_c(\cdot)) \right\|_{L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)}^2 &= \frac{1}{\nu_n} \int_{\mathbb{S}_n} |f(\omega_c(z))|^2 \frac{1}{(1+z_n)^{2n}} d\sigma(z) \\ &= \int_{\partial D_n} |f(\xi)|^2 \frac{1}{(1+z_n)^{2n}} \frac{2^{2n}}{|1-i\zeta_n|^{2n}} d\beta(\xi) \\ &= \|f\|_{L^2(\partial D_n, d\beta)}^2, \end{aligned}$$

dass U ein unitärer Operator ist. Beachte, dass

$$\frac{2}{1-i\zeta_n} = 1+z_n \quad \text{für } z = \omega_c^{-1}(\zeta).$$

□

Wir notieren, dass der wie in Satz 1.3 definierte Operator

$$U : H^2(\mathbb{B}_n) \rightarrow H^2(D_n)$$

ebenfalls unitär ist.

Die orthogonale Projektion $P : L^2(\partial D_n, d\beta) \rightarrow H^2(D_n)$ ist offensichtlich gegeben durch die Formel $P = UCU^{-1}$. Mit $z = \omega_c^{-1}(\mu)$ und $\xi = \omega_c^{-1}(\eta)$ liefert eine direkte Rechnung

$$1 - \langle z, \xi \rangle = \frac{4}{(1-i\mu_n)(1+i\bar{\eta}_n)} \left(\frac{\mu_n - \bar{\eta}_n}{2i} - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \bar{\eta}_k \right)$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} (Pg)(\mu) &= (UCU^{-1}g)(\mu) \\ &= \left(\frac{2}{1-i\mu_n} \right)^n \int_{\mathbb{S}_n} \frac{g(\omega_c(\xi))}{(1+\xi_n)^n} \frac{1}{(1-\langle \omega_c^{-1}(\mu), \xi \rangle)^n} d\sigma(\xi) \\ &= \left(\frac{2}{1-i\mu_n} \right)^n \int_{\partial D_n} g(\eta) \frac{(1-i\eta_n)^n}{2^n} \frac{(1-i\mu_n)^n (1+i\bar{\eta}_n)^n}{2^{2n}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left(\frac{\mu_n - \bar{\eta}_n}{2i} - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \bar{\eta}_k \right)^n} \frac{2^{2n}}{|1-i\bar{\eta}_n|^{2n}} \frac{(n-1)!}{4\pi^n} d\beta(\eta) \\ &= \int_{\partial D_n} g(\eta) \frac{1}{\left(\frac{\mu_n - \bar{\eta}_n}{2i} - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \bar{\eta}_k \right)^n} \frac{(n-1)!}{4\pi^n} d\beta(\eta) \end{aligned}$$

für alle $g \in L^2(\partial D_n, d\beta)$. Folglich besitzt P die Integraldarstellung

$$(Pg)(\mu) = \int_{\partial D_n} g(\eta) S(\mu, \eta) d\beta(\eta),$$

wobei

$$S(\mu, \eta) = \nu_n \cdot \frac{1}{\left(\frac{\mu_n - \bar{\eta}_n}{2i} - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \bar{\eta}_k \right)^n}$$

der reproduzierende Kern von $H^2(D_n)$ ist. Siehe [29] und [30].

Bemerkung 1.4. Der Kern S besitzt unter Automorphismen von D_n folgende Eigenschaften (siehe [31, Chapter 10.3.2]):

- i) Ist g ein Element von $\mathbb{H}$, so gilt $S(\tau_g(\mu), \tau_g(\eta)) = S(\mu, \eta)$ für alle $\mu, \eta \in D_n$, wobei τ_g in (1.5) gegeben ist.
- ii) Ist $\delta > 0$, so gilt $S(\tau_\delta(\mu), \tau_\delta(\eta)) = \delta^{-2n} S(\mu, \eta)$ für alle $\mu, \eta \in D_n$, wobei τ_δ in (1.3) gegeben ist.
- iii) Ist $t' \in \mathbb{T}^{n-1}$, so gilt $S(\tau_{t'}(\mu), \tau_{t'}(\eta)) = S(\mu, \eta)$ für alle $\mu, \eta \in D_n$, wobei $\tau_{t'}$ in (1.4) gegeben ist.

Nun betrachten wir den Operator $U_0 : L^2(\partial D_n, d\beta) \rightarrow L^2(\mathbb{H})$, der durch

$$(1.12) \quad (U_0 f)(z', x) = f(\kappa(z', x))$$

definiert ist, wobei die Abbildung κ durch (1.6) gegeben ist. Dann ist U_0 offensichtlich unitär mit dem Inversen $U_0^{-1} : L^2(\mathbb{H}) \rightarrow L^2(\partial D_n, d\beta)$, der durch

$$(U_0^{-1} f)(\xi', \xi_n) = f(\kappa^{-1}(\xi', \xi_n))$$

definiert ist, wobei $\kappa^{-1} : (\xi', \xi_n) \in \partial D_n \mapsto (\xi', \operatorname{Re} \xi_n) \in \mathbb{H}$.

Der Raum $H^2(\mathbb{H}) = U_0(H^2(D_n))$ ist nun der Abschluss in $L^2(\mathbb{H})$ des Vektorraumes derjenigen hinreichend oft differenzierbaren Funktionen $f_0 = U_0 f$, die den tangentiellen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$(1.13) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - i \frac{\partial}{\partial x} z_k \right) f_0(z', x) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

auf $\mathbb{H}$ genügen. Für die Literatur verweisen wir auf [46, Chapter 5]. Siehe auch [28, Chapter 7].

Bemerkung 1.5. Eine ähnliche Charakterisierung des Hardyraumes H^2 für das Siegel-Gebiet von Typ II wurde von Vági in [44] dargestellt. In dem Korollar zum Hauptsatz zeigte er: Falls D hermitesch symmetrisch mit dem Rand ∂D ist, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) D hat keinen irreduziblen Faktor von Tubentyp.
- ii) $H^2(D)$ besteht aus Funktionen $f \in L^2(\partial D)$, die im Sinne der Distribution, den tangentiellen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf ∂D genügen.

Der obere Siegel-Halbraum D_n erfüllt die Voraussetzung dieses Korollars.

Für $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ definieren wir den Toeplitzoperator T_φ^S mit Symbol φ durch

$$T_\varphi^S : H^2(\mathbb{B}_n) \rightarrow H^2(\mathbb{B}_n), \quad f \mapsto T_\varphi f := C(\varphi f).$$

Im nachfolgenden Lemma fassen wir wichtige bekannte Eigenschaften von Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ zusammen.

Lemma 1.6. *Sei $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$. Dann gilt:*

- i) $T_{\phi+\psi} = T_\phi + T_\psi$, $(T_\phi)^* = T_{\bar{\phi}}$.
- ii) $\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.
- iii) $\operatorname{ess-ran}(\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$, wobei $\operatorname{ess-ran}(\phi)$ der wesentliche Wertebereich von ϕ ist.
- iv) Ist $\phi, \psi \in C(\mathbb{S}_n)$, so ist der Kommutator $[T_\phi, T_\psi] = T_\phi T_\psi - T_\psi T_\phi$ kompakt.

v) Ist $\varphi \in C(\mathbb{S}_n)$, so ist der Semi-Kommutator $[T_\psi, T_\varphi] = T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi}$ kompakt.

BEWEIS. i) folgt direkt aus der Definition der Toeplitzoperatoren. ii) und iii) finden wir in [16, Corollary of Theorem 2.1] und iv) in [13].

Zu v). Es gilt

$$\begin{aligned} T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi} &= C\psi C\varphi C - C\psi\varphi C = C\psi(C\varphi C - \varphi C) \\ &= C\psi(C\varphi C - C\varphi C - (I - C)\varphi C) \\ &= C\psi(I - C)\varphi C. \end{aligned}$$

Dem Beweis von [13, Theorem 1] zufolge ist $(I - C)\varphi C$ kompakt und so auch $T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi}$. $\square$

Analog definieren wir für $\psi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ den Toeplitzoperator T_ψ^D mit Symbol ψ durch

$$T_\psi^D : H^2(D_n) \rightarrow H^2(D_n), \quad f \mapsto T_\psi^D f := P(\psi f).$$

Die beiden Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ und $H^2(D_n)$ sind unitär äquivalent mit

$$(1.14) \quad T_\varphi^S = U^{-1} T_{\varphi \circ \omega_c^{-1}}^D U,$$

wobei U wie in Satz 1.3 erklärt ist. Wenn es vom Kontext klar ist, wo der Toeplitzoperator operiert, schreiben wir anstelle T_φ^S und T_ψ^D nur T_φ bzw. T_ψ .

1.2. Transformationen vom Bargmann-Typ

Der in [37] präsentierte Abschnitt zu Transformationen vom Bargmann-Typ beinhaltet ein abstraktes Schema, das wir erläutern und in fünf kommenden Fällen verwenden werden. Ziel dieses Schemas ist es, den Raum der analytischen Funktionen als geeigneten L^2 -Raum im Rahmen der reellen Analysis darzustellen.

Sei H ein separabler Hilbertraum und $\mathcal{A}$ sein abgeschlossener Unterraum. Mit $\mathcal{P}$ bezeichnen wir die orthogonale Projektion von H auf $\mathcal{A}$. Wir nehmen an, es gibt

- i) messbare Räume X und Y bezüglich der Maße μ bzw. η ,
- ii) einen unitären Operator $U : H \rightarrow L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \eta)$ und
- iii) einen messbaren Unterraum X_1 von X und eine Funktion $g_0 = g_0(x, y)$ auf $X_1 \times Y$, so dass
 - für jedes $x \in X_1$ die Funktion $g_0(x, \cdot) \in L^2(Y, \eta)$ mit $\|g_0(x, \cdot)\|_{L^2(Y, \eta)} = 1$,
 - der Operator U den Unterraum $\mathcal{A}$ auf $g_0 L^2(X_1, \mu) \subset L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \eta)$ abbildet.

Offensichtlich folgt für jedes $\phi = g_0 f \in U(\mathcal{A}) = g_0 L^2(X_1, \mu)$, $f \in L^2(X_1, \mu)$,

$$\|\phi\|_{U(\mathcal{A})} = \|f\|_{L^2(X_1, \mu)}.$$

Nun führen wir die isometrische Einbettung

$$R_0 : L^2(X_1, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \eta)$$

durch die Formel

$$R_0 : f \mapsto \tilde{f}g_0,$$

ein, wobei

$$\tilde{f} = \begin{cases} f, & x \in X_1 \\ 0, & x \in X \setminus X_1. \end{cases}$$

Der adjungierte Operator

$$R_0^* : L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \eta) \rightarrow L^2(X_1, \mu)$$

ist gegeben durch

$$(R_0^*\phi)(x) = \int_Y \phi(x, y) \overline{g_0(x, y)} d\eta, \quad x \in X_1.$$

Dann gilt

$$R_0^*R_0 = I : L^2(X_1, \mu) \rightarrow L^2(X_1, \mu)$$

und $R_0R_0^*$ ist die orthogonale Projektion Q von $L^2(X, \mu) \otimes L^2(Y, \eta)$ auf den Bildraum $U(\mathcal{A}) = g_0L^2(X_1, \mu)$.

Zusammengefasst ergibt sich der folgende Satz.

Satz 1.7. *Der Operator $R = R_0^*U$ bildet den Hilbertraum H in $L^2(X_1, \mu)$ ab und seine Restriktion*

$$R|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow L^2(X_1, \mu)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Der adjungierte Operator

$$R^* = U^*R_0 : L^2(X_1, \mu) \rightarrow H$$

ist eine lineare Isometrie mit $\text{ran } R^ = \mathcal{A}$.*

Ferner gilt

$$RR^* = I : L^2(X_1, \mu) \rightarrow L^2(X_1, \mu)$$

*und R^*R ist die orthogonale Projektion $\mathcal{P}$ von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{A}$.*

Bei den konkreten Anwendungen dieses Satzes von Quiroga-Barranco und Vasilevski in [37] ist $\mathcal{A}$ stets ein gewichteter Bergmanraum. In dieser Arbeit wird Satz 1.7 auf den Hardyraum über $\mathbb{B}_n$ bzw. D_n angewendet. Wie in [37] muss dabei die Konstruktion von U , R und den Maßräumen den jeweiligen maximal kommutativen Untergruppen der Automorphismengruppe angepasst werden.

1.3. Mehrdimensionale Spektraltheorie

Es sei daran erinnert, dass ein Operator $T \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$ ein *Fredholmoperator* ist, falls $T + \mathcal{K}$ invertierbar in $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))/\mathcal{K}$ ist, wobei $\mathcal{K}$ das Ideal der kompakten Operatoren auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist. Ist T also ein Fredholmoperator, so sind $\dim \ker T$ und $\dim \ker T^*$ endlichdimensional. Der *Index* von T ist definiert durch

$$(1.15) \quad \text{ind}(T) = \dim(\ker T) - \dim(\ker T^*).$$

Das *wesentliche Spektrum* von T ist

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ ist kein Fredholmoperator}\}.$$

Die *wesentliche Norm* von T ist

$$\|T\|_e := \|[T]\|_{\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))/\mathcal{K}} = \inf\{\|T + K\| : K \in \mathcal{K}\}.$$

Ein *Banachraum-Komplex* ist eine Folge $(X^\bullet, \delta^\bullet) = (X^p, \delta^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ bestehend aus Banachräumen X^p und Operatoren $\delta^p \in \mathcal{L}(X^p, X^{p+1})$ mit $\delta^{p+1}\delta^p = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Ein *wesentlicher Banachraum-Komplex* ist eine Folge $(X^\bullet, \delta^\bullet) = (X^p, \delta^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ bestehend aus Banachräumen X^p und Operatoren $\delta^p \in \mathcal{L}(X^p, X^{p+1})$ mit $\delta^{p+1}\delta^p \in \mathcal{K}(X^p, X^{p+2})$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Für ein Operatortupel $A = (A_1, \dots, A_n)$ auf einem Banachraum X betrachten wir den Vektorraum $\Lambda^p(s, X) = \Lambda^p(s) \otimes X$, wobei $\Lambda^p(s)$ die Menge der Formen vom Grad $p \in \{0, \dots, n\}$ in der äußeren Algebra in den Unbestimmten $s_1, \dots, s_n$ bezeichnet. Wir schreiben $s = (s_1, \dots, s_n)$ und definieren die Abbildung $\delta_A^p : \Lambda^p(s, X) \rightarrow \Lambda^{p+1}(s, X)$ durch

$$(1.16) \quad \delta_A^p x = \left(\sum_{i=1}^n A_i s_i \right) \wedge x, \quad x \in \Lambda^p(s, X).$$

Mit Hilfe dieser Operatoren (1.16) ist der Koszul-Komplex $K^\bullet(A, X)$ von A als die Sequenz linearer Abbildungen

$$(1.17) \quad 0 \rightarrow \Lambda^0(s, X) \xrightarrow{\delta_A^0} \Lambda^1(s, X) \xrightarrow{\delta_A^1} \dots \xrightarrow{\delta_A^{n-1}} \Lambda^n(s, X) \rightarrow 0$$

gegeben. Ist $A = (A_1, \dots, A_n)$ ein vertauschendes Operatortupel (d.h. $[A_i, A_j] = 0$ für $i, j = 1, \dots, n$) und setzt man $\Lambda^{-l}(s, X) = \Lambda^{n+l}(s, X) = \{0\}$, $\delta_A^{-l} = 0$ und $\delta_A^{n-1+l} = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$, so ist der Koszul-Komplex (1.17) ein Banachraum-Komplex. Die Kohomologiegruppen eines solchen Komplexes, d.h. die Quotienten $\ker \delta_A^p / \text{ran } \delta_A^{p-1}$, $p \in \mathbb{Z}$, werden mit $H^p(X^\bullet, \delta^\bullet)$ bezeichnet.

Für $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ sei $z - A = (z_1 - A_1, \dots, z_n - A_n)$. Das *(Taylor)-Spektrum* $\sigma(A)$ von A ist

$$\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C}^n : \text{Der Koszul-Komplex } K^\bullet(z - A, X) \text{ ist nicht exakt}\}.$$

Diese Definition wurde erstmals von Taylor in [43] gegeben. Das *wesentliche (Taylor)-Spektrum* $\sigma_e(A)$ von A ist

$$\sigma_e(A) = \{z \in \mathbb{C}^n : \dim H^p(K^\bullet(z - A, X)) = \infty \text{ für wenigstens ein } p \in \{0, \dots, n\}\}$$

Im Falle eines Hilbertraumes H gilt eine andere Definition für das Spektrum: Ist $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein vertauschendes Tupel, $\mathcal{H} = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(s, H)$ (versehen mit der kanonischen Hilbertraumstruktur) und $\delta_{z-T} = \delta_{z-T}^0 \oplus \dots \oplus \delta_{z-T}^{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($z \in \mathbb{C}^n$), so gilt

$$\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C}^n : \delta_{z-T} + \delta_{z-T}^* \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

Dies lässt sich zur Definition eines Spektrums für ein vertauschendes Tupel $a = (a_1, \dots, a_n)$ von Elementen in einer unitalen C^* -Algebra $\mathcal{A}$ verallgemeinern [45]. Sei hierzu $\Lambda(s) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(s)$ die äußere Algebra in den Unbestimmten $s = (s_1, \dots, s_n)$ und seien für $j = 1, \dots, n$ die Abbildungen $\sigma_j : \Lambda(s) \rightarrow \Lambda(s)$ definiert durch $\sigma_j(\xi) = s_j \wedge \xi$. Ist $a = (a_1, \dots, a_n)$ ein vertauschendes Tupel in $\mathcal{A}$ und ist $\delta_a = a_1 \otimes \sigma_1 + \dots + a_n \otimes \sigma_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\Lambda(s))$, so kann $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ definiert werden durch

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{z \in \mathbb{C}^n : \delta_{z-a} + \delta_{z-a}^* \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\Lambda(s))\}.$$

Ist $\mathcal{B}$ eine weitere unitale C^* -Algebra und ist $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein unitaler $*$ -Monomorphismus, so gilt für $\varphi(a) = (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$ die Gleichheit $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a))$. Nach Gelfand-Naimark-Segal existieren ein Hilbertraum H und ein unitaler $*$ -Monomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(H)$. In diesem Fall gilt

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{L}(H)}(\varphi(a)) = \sigma(\varphi(a)).$$

Definition 1.8. Ist $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ ein wesentlich vertauschendes Operatortupel (d.h. $[T_i, T_j] = T_i T_j - T_j T_i \in \mathcal{K}(X)$ für alle $i, j = 1, \dots, n$), so gilt in diesem Fall $\delta_T^{p+1} \delta_T^p \in \mathcal{K}(\Lambda^p(s, X), \Lambda^{p+2}(s, X))$ und die Folge $(\Lambda^p(s, X), \delta_T^p)$ ist ein wesentlicher Banachraum-Komplex. Im Fall eines wesentlichen vertauschenden Tupels $T \in \mathcal{L}(X)^n$ wird $K^\bullet(T, X)$ für die Sequenz $(\Lambda^p(s, X), \delta^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ geschrieben. $K^\bullet(T, X)$ heißt der wesentliche Koszul-Komplex von T .

Bemerkung 1.9. Ist $X = \mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein wesentlich vertauschendes Tupel, so ist das wesentliche Spektrum von T definiert durch

$$\sigma_e(T) = \sigma_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}(\pi(T)),$$

wobei $\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ die Quotientenabbildung und $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ die Calkin-Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ bezeichnen.

Der in (1.15) definierte Index lässt sich folgendermaßen auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern.

Definition 1.10. Ist $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ ein vertauschendes Tupel und sind die Kohomologiegruppen $H^p(K^\bullet(A, X))$ für $p = 0, \dots, n$ endlichdimensionale Vektorräume, so heißt das Tupel A Fredholm-Tupel. Der Index von A ist definiert durch die Euler-Charakteristik des Koszul-Komplexes von A , d.h.

$$(1.18) \quad \text{ind } A = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(K^\bullet(A, X)).$$

Definition 1.11. Ein wesentlicher Banachraum-Komplex $(X^\bullet, \delta^\bullet)$ ist wesentlicher Fredholm-Komplex, wenn eine Familie $(\varepsilon^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ von stetigen Operatoren $\varepsilon^p : X^p \rightarrow X^{p-1}$ existiert mit der Eigenschaft

$$\delta^{p-1} \varepsilon^p + \varepsilon^{p+1} \delta^p \in \text{Id}_{X^p} + \mathcal{K}(X^p)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Die Familie $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ wird in diesem Fall eine wesentlich splittende Familie für $(X^\bullet, \delta^\bullet)$ genannt.

Sei $(X^\bullet, \delta^\bullet)$ ein wesentlicher Fredholm-Komplex und sei $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ eine beliebige wesentlich splittende Familie für $(X^\bullet, \delta^\bullet)$. Dann ist der durch $D|_{X^{2p}} = \varepsilon^{2p} + \delta^{2p}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ definierte Operator

$$D = \delta^\bullet + \varepsilon^\bullet : \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} X^{2p} \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} X^{2p+1}$$

ein Fredholmoperator und der Index

$$(1.19) \quad \text{ind } (X^\bullet, \delta^\bullet) = \text{ind } D$$

ist wohldefiniert.

Definition 1.12. Ein wesentlich vertauschendes Tupel $T \in \mathcal{L}(X)^n$ heißt wesentliches Fredholm-Tupel, wenn $K^\bullet(T, X)$ ein wesentlicher Fredholm-Komplex ist. In diesem Fall ist der Fredholm-Index von T definiert durch

$$\text{ind } T = \text{ind } K^\bullet(T, X).$$

Diese Definition des Index stimmt im Fall eines vertauschenden Operatortupels, dessen Koszul-Komplex ein Fredholm-Komplex ist, mit der Definition (1.18) überein.

Alle Details dieser Definitionen sind in [39] Kapitel 1 und 2 zu lesen. Siehe auch [21, Chapter 10]. Eine äquivalente Definition über den Koszul-Komplex und den Fredholm-Komplex finden wir in [15].

Beispiel 1.13. a) Sei $\phi_1, \phi_2 \in C(\mathbb{S}_n)$ ohne gemeinsame Nullstellen und sei der Koszul-Komplex für das Toeplitz-Tupel $T_\Phi = (T_{\phi_1}, T_{\phi_2})$ auf $\mathcal{H} := H^2(\mathbb{B}_n)$ gegeben durch

$$0 \rightarrow H^2(\mathbb{B}_n) \xrightarrow{\delta^0} H^2(\mathbb{B}_n) \oplus H^2(\mathbb{B}_n) \xrightarrow{\delta^1} H^2(\mathbb{B}_n),$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta^0 f &= (T_{\phi_1} f, T_{\phi_2} f) \\ \delta^1(f, g) &= -T_{\phi_2} f + T_{\phi_1} g \end{aligned}$$

für alle $f, g \in H^2(\mathbb{B}_n)$. Offensichtlich gilt $\delta^1 \delta^0 \in \mathcal{K}$.

Wir betrachten nun eine Familie $(\varepsilon^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ von Operatoren

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon^2} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon^1} \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon^1(f, g) &= T_{\psi_1} f + T_{\psi_2} g, \\ \varepsilon^2 f &= (-T_{\psi_2} f, T_{\psi_1} f), \end{aligned}$$

mit

$$\psi_1 = \frac{\overline{\phi_1}}{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2}, \quad \psi_2 = \frac{\overline{\phi_2}}{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \delta^0 \varepsilon^1(f, g) &= (T_{\phi_1} T_{\psi_1} f + T_{\phi_1} T_{\psi_2} g, T_{\phi_2} T_{\psi_1} f + T_{\phi_2} T_{\psi_2} g), \\ \varepsilon^2 \delta^1(f, g) &= (T_{\psi_2} T_{\phi_2} f - T_{\psi_2} T_{\phi_1} g, T_{\psi_1} T_{\phi_2} f + T_{\psi_1} T_{\phi_1} g) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} (\delta^0 \varepsilon^1 + \varepsilon^2 \delta^1)(f, g) &= ((T_{\phi_1} T_{\psi_1} + T_{\psi_2} T_{\phi_2})f + (T_{\phi_1} T_{\psi_2} - T_{\psi_2} T_{\phi_1})g, \\ &\quad (T_{\phi_2} T_{\psi_1} - T_{\psi_1} T_{\phi_2})f + (T_{\phi_2} T_{\psi_2} + T_{\psi_1} T_{\phi_2})g). \end{aligned}$$

Also ist $\delta^0 \varepsilon^1 + \varepsilon^2 \delta^1 \in \text{Id} + \mathcal{K}$ und T_Φ ein wesentliches Fredholm-Tupel.

Der Operator $\widehat{T}_\Phi = \delta^0 + \varepsilon^2 : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ist ein Fredholmoperator mit

$$\widehat{T}_\Phi(f, g) = (T_{\phi_1} f - T_{\psi_2} g, T_{\phi_2} f + T_{\psi_1} g)$$

und hat die Matrixdarstellung

$$\widehat{T}_\Phi = \begin{pmatrix} T_{\phi_1} & -T_{\psi_2} \\ T_{\phi_2} & T_{\psi_1} \end{pmatrix}.$$

b) Sei $T_\Phi = (T_{\phi_1}, T_{\phi_2}, T_{\phi_3})$ mit $\phi_i \in C(\mathbb{S}_n)$, $i = 1, \dots, 3$, ohne gemeinsame Nullstellen. Der wesentliche Koszul-Komplex von T_Φ ist

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta^0 f &= (T_{\phi_1} f, T_{\phi_2} f, T_{\phi_3} f), \\ \delta^1(f, g, h) &= (-T_{\phi_2} g + T_{\phi_1} f, -T_{\phi_3} g + T_{\phi_1} h, -T_{\phi_3} f + T_{\phi_2} g), \\ \delta^2(f, g, h) &= (T_{\phi_3} f - T_{\phi_2} g + T_{\phi_1} h). \end{aligned}$$

für alle $f, g, h \in \mathcal{H}$. Weiterhin definieren wir eine Familie $(\varepsilon^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ von Operatoren

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon^3} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon^2} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon^1} \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 f &= (T_{\psi_3} f, -T_{\psi_2} f, T_{\psi_1} f), \\ \varepsilon^2(f, g, h) &= (-T_{\psi_2} f - T_{\psi_3} g, T_{\psi_1} f - T_{\psi_3} h, T_{\psi_1} g + T_{\psi_2} h), \\ \varepsilon^1(f, g, h) &= T_{\psi_1} f + T_{\psi_2} g + T_{\psi_3} h \end{aligned}$$

mit

$$\psi_i = \frac{\overline{\phi_i}}{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Eine direkte Rechnung liefert

$$\delta^1 \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \delta^2 \in \text{Id} + \mathcal{K} \quad \text{und} \quad \delta^0 \varepsilon^1 + \varepsilon^2 \delta^1 \in \text{Id} + \mathcal{K},$$

und somit ist T_Φ ein wesentliches Fredholm-Tupel. Nach der Aussage (1.19) ist $\text{ind } T_\Phi = \text{ind } \widehat{T}_\Phi$. Die Matrixdarstellung von

$$\widehat{T}_\Phi := \delta^0 + \delta^2 + \varepsilon^2 : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

ist gegeben durch

$$\widehat{T}_\Phi = \begin{pmatrix} T_{\phi_1} & -T_{\psi_2} & -T_{\psi_3} & 0 \\ T_{\phi_2} & T_{\psi_1} & 0 & -T_{\psi_3} \\ T_{\phi_3} & 0 & T_{\psi_1} & T_{\psi_2} \\ 0 & T_{\phi_3} & -T_{\phi_2} & T_{\phi_1} \end{pmatrix}.$$

Wir notieren, dass $\widehat{T}_\Phi \in \mathcal{M}_{2n-1}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\widehat{T}_\Phi = T_{\widehat{\Phi}}$. $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ ist die Algebra der komplexen $N \times N$ Matrizen. Ferner lässt sich $\widehat{\Phi}$ in der Form

$$\widehat{\Phi} = (\widehat{\Phi_{1,2}}, \widetilde{\Phi_3}) = \begin{pmatrix} \Phi_{1,2} & -\widetilde{\Phi_3}^* \\ \widetilde{\Phi_3} & \Phi_{1,2}^* \end{pmatrix}$$

schreiben mit

$$\Phi_{1,2} = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\psi_2 \\ \phi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{1,2}^* = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ -\phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\widetilde{\Phi_3} = \text{diag}(\phi_3) = \begin{pmatrix} \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi_3}^* = \text{diag}(-\psi_3) = \begin{pmatrix} -\psi_3 & 0 \\ 0 & -\psi_3 \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt:

Sei $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in C(\mathbb{S}_n)^n$ mit $0 \notin \Phi(\mathbb{S}_n)$. Dann ist das n -Toeplitz-Tupel $T_\Phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n})$ von Operatoren auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und die assoziierte Matrix $\hat{T}_\Phi = T_{\hat{\Phi}}$ zu T_Φ ein Fredholmoperator. Das matrixwertige Symbol $\hat{\Phi}$ von $T_{\hat{\Phi}}$ ist rekursiv definiert durch

$$(1.20) \quad \hat{\Phi} = (\widehat{\Phi_{1,n-1}}, \tilde{\Phi}_n) = \begin{pmatrix} \Phi_{1,n-1} & -\tilde{\Phi}_n \\ \tilde{\Phi}_n & \Phi_{1,n-1}^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2^{n-1}}(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{S}_n), \quad n \geq 3,$$

wobei

$$\Phi_{1,n-1} \cong (\widehat{\Phi_{1,n-2}}, \tilde{\Phi}_{n-1}) \text{ für } n > 3, \quad \text{und} \quad \Phi_{1,2} = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\psi_2 \\ \phi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}.$$

Das Zeichen $\cong$ bedeutet, dass einige Permutationen von Spalten und Zeilen notwendig sind, um die Gleichheit zu erhalten. Hiermit sind

$$\tilde{\Phi}_n = \text{diag}(\phi_n) \in \mathcal{M}_{2^{n-2}}(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{S}_n), \quad n \geq 3,$$

$$\tilde{\Phi}_n^* = \text{diag}(-\psi_n) \in \mathcal{M}_{2^{n-2}}(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{S}_n), \quad n \geq 3$$

und

$$\psi_i = \frac{\bar{\phi}_i}{\sum_{i=1}^n |\phi_i|^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ferner gilt

$$(1.21) \quad \text{ind } T_\Phi = \text{ind } T_{\hat{\Phi}}.$$

Als Nächstes formulieren wir einen Satz, der von Nutzen ist. Sei $\mathcal{B}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1. Dann bezeichnen

$$\sigma_L(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}^m : \sum_{j=1}^m \mathcal{B}(\lambda_j - x_j) \neq \mathcal{B}\}$$

und

$$\sigma_R(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}^m : \sum_{j=1}^m (\lambda_j - x_j) \mathcal{B} \neq \mathcal{B}\}.$$

das Links- bzw. das Rechtsspektrum eines nicht notwendigen vertauschenden Tupels $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{B}^m$.

Satz 1.14. [2, Corollary 5.5] *Sei $\mathcal{R}$ eine C^* -Algebra mit Einselement $1_{\mathcal{R}}$ und sei $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{R}^N$ ein N -Tupel von N vertauschenden normalen Elementen $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{R}$. Sei $\mathcal{D}$ eine Banachalgebra mit Einselement $1_{\mathcal{D}}$ und sei $\varkappa : LH\{1_{\mathcal{R}}, x_1, \dots, x_N\} \rightarrow \mathcal{D}$ eine lineare Abbildung mit $\varkappa(1_{\mathcal{R}}) = 1_{\mathcal{D}}$ und $\|\varkappa\| = 1$. Dann gilt*

$$\text{conv } \sigma(\varkappa(x)) \subset \text{conv } \sigma_{\mathcal{B}}(x) = \text{conv } \sigma(x)$$

für alle kommutativen C^* -Unteralgebren $\mathcal{B}$ von $\mathcal{R}$ mit $1_{\mathcal{R}}, x_1, \dots, x_N \in \mathcal{B}$. Hierbei bezeichnet $\sigma(x)$ und $\sigma(\varkappa(x))$ den Durchschnitt von Links- und Rechtsspektrum von x bzw. $\varkappa(x)$ in $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{D}$.

Als Folgerung erhalten wir die multi-Variable Variante des Satzes von Brown und Halmos für Toeplitzoperatoren. (Siehe [19, S. 182] im Fall $n = N = 1$). Es sei daran erinnert, dass der wesentliche Wertebereich eines N -Tupels $f = (f_1, \dots, f_N)$ von Funktionen in $L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ die Menge $\text{ess-ran}(f)$ ist bestehend aus allen $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ das Oberflächenmaß der Menge

$$\left\{ \xi \in \mathbb{S}_n : \sum_{i=1}^N |f_i(\xi) - \lambda_i| < \varepsilon \right\}$$

von Null verschieden ist.

Korollar 1.15. *Sind $f_1, \dots, f_N \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und $T_{f_1}, \dots, T_{f_N}$ die entsprechenden Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{B}_n)$, so gilt*

$$\sigma(T_{f_1}, \dots, T_{f_N}) \subseteq \text{conv } \sigma(T_{f_1}, \dots, T_{f_N}) \subseteq \text{conv } \sigma_{L^\infty(\mathbb{S}_n)}(f_1, \dots, f_N).$$

Wir beachten, dass $\sigma_{L^\infty(\mathbb{S}_n)}(f_1, \dots, f_N) = \text{ess-ran}(f_1, \dots, f_N) \subset \mathbb{C}^N$.

Zum Schluss wird die Definition des Abbildungsgrades einer stetigen Funktion benötigt. Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ die Menge der k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ wird mit $J_f(x)$ die Jacobi-Determinante von f an der Stelle $x \in \Omega$ bezeichnet und mit k_f die Menge $\{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$ der *kritischen Punkte* von f . Ein *regulärer Wert* von f ist ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(y) \cap k_f = \emptyset$.

Der *analytische Abbildungsgrad* ist eine Abbildung, die einem Tripel (f, Ω, y) bestehend aus einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, einer Funktion $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und einem Punkt $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ die ganze Zahl

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{y})} \text{sgn } J_{\tilde{f}}(x)$$

zuordnet, wobei $\tilde{f} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{f}|_\Omega \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$ und $\tilde{y}$ ein regulärer Wert von $\tilde{f}$ mit $|\tilde{y} - y| < \text{dist}(y, \tilde{f}(\partial\Omega))$ ist. Hierbei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\text{dist}(x, A)$ den Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zu einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$. Siehe [17] für weitere Details und Eigenschaften des Abbildungsgrades.

Definition 1.16. [39, S. 14] *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $f \in C(K, \mathbb{R}^n)$. Sei C eine beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus K$ und sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial C)$. Der Abbildungsgrad $\deg(f, C, y)$ von f um y bzgl. C ist dann definiert durch*

$$\deg(f, C, y) = d(\tilde{f}|_{\overline{C}}, C, y),$$

wobei $\tilde{f}$ eine beliebige stetige Fortsetzung von $f|_{\partial C}$ auf $\overline{C}$ ist. Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Fortsetzung $\tilde{f}$ von f .

Ist $f \in C(K, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und ist C eine beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus K$, so sei $\deg(f, C) = \deg(f, C, 0)$. Besitzt die Menge $\mathbb{R}^n \setminus K$ nur eine Zusammenhangskomponente C und ist $f \in C(K, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, so sei

$$\deg(f) = \deg(f, C, 0).$$

KAPITEL 2

Kommutative Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$

In [37] haben Quiroga-Barranco und Vasilevski verschiedene Modelle kommutativer Untergruppen von Automorphismengruppen auf der Einheitskugel $\mathbb{B}_n$ und dem oberen Halbraum D_n aufgelistet. Im zweiten Teil der Arbeit [38] haben sie gezeigt, dass bis auf Konjugation diese kommutativen Untergruppen maximal sind. Das Hauptresultat beider Arbeiten ist das Folgende. Für jede maximal kommutative Untergruppe G von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ sei $\mathfrak{A}_G$ die Menge aller $L^\infty(\mathbb{B}_n)$ -Funktionen, die unter der G -Operation invariant sind. Dann ist die C^* -Algebra, die von den Toeplitzoperatoren mit Symbolen aus $\mathfrak{A}_G$ erzeugt wird, kommutativ auf jedem gewichteten Bergmanraum $A_\lambda^2(\mathbb{B}_n)$, $\lambda > -1$. Später stellten sie in [50, 51] fest, dass es auch andere von Toeplitzoperatoren erzeugte Banachalgebren gibt, die kommutativ sind. Keine davon ist eine C^* -Algebra.

In diesem Abschnitt betrachten wir die Erweiterung solcher maximal kommutativen Untergruppen auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}_n$ und dem Rand des oberen Halbraums ∂D_n und übertragen die Ergebnisse aus [37] auf den Hardyraum $H^2(\mathbb{B}_n)$. Dies entspricht dem Grenzfall $\lambda = -1$.

Wie in [37] listen wir die maximal kommutativen Untergruppen der Automorphismengruppe von $\mathbb{B}_n$ auf.

1. Die *quasi-elliptische* Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ ist isomorph zu $\mathbb{T}^n$ mit der Gruppenoperation

$$\tau_t : z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{B}_n \mapsto tz = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \in \mathbb{B}_n$$

für alle $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$. Die Abbildung τ_t ist sogar ein Automorphismus von $\mathbb{C}^n$ und seine Einschränkung $\tau_t|_{\mathbb{S}_n}$ ist ein Diffeomorphismus auf $\mathbb{S}_n$.

Der entsprechende Automorphismus von D_n ist

$$\tilde{\tau}_t := \omega_c \circ \tau_t \circ \omega_c^{-1} \in \text{Aut}(D_n).$$

Eine direkte Rechnung ergibt

$$\tilde{\tau}_t(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left(\frac{2\xi_1 t_1}{(1+t_n) - i\xi_n(1-t_n)}, \dots, \frac{(1+t_n)\xi_n + i(1-t_n)}{(1+t_n) - i\xi_n(1-t_n)} \right).$$

2. Die *quasi-hyperbolische* Untergruppe von $\text{Aut}(D_n)$ ist isomorph zu $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ mit der Gruppenoperation

$$\tau_{(t', r)} : (z', z_n) \in D_n \mapsto (\sqrt{r}t'z', rz_n) \in D_n$$

für alle $(t', r) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. Die Abbildung $\tau_{(t', r)}|_{\partial D_n}$ lässt sich zu einem Diffeomorphismus auf ∂D_n erweitern.

3. Die *quasi-parabolische* Untergruppe von $\text{Aut}(D_n)$ ist isomorph zu $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ mit der Gruppenoperation

$$\tau_{(t',h)} : (z', z_n) \in D_n \mapsto (t'z', z_n + h) \in D_n$$

für alle $(t', h) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Die Abbildung $\tau_{(t',h)}|_{\partial D_n}$ lässt sich zu einem Diffeomorphismus auf ∂D_n erweitern.

4. Die *nilpotente* Untergruppe von $\text{Aut}(D_n)$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ mit der Gruppenoperation

$$\tau_{(a',h)} : (z', z_n) \in D_n \mapsto (z' + a', z_n + h + 2i \langle z', a' \rangle + i|a'|^2) \in D_n$$

für alle $(a', h) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Die Abbildung $\tau_{(a',h)}|_{\partial D_n}$ lässt sich zu einem Diffeomorphismus auf ∂D_n erweitern.

5. Zur Definition der quasi-nilpotenten Untergruppen von $\text{Aut}(D_n)$ beachten wir folgende Notation für Punkte von D_n für ganzzahliges k mit $1 \leq k \leq n-2$

$$z = (z'', w', z_n) \in D_n, \text{ mit } z'' \in \mathbb{C}^k, w' \in \mathbb{C}^{n-k-1} \text{ und } z_n \in \mathbb{C}.$$

Die *quasi-nilpotente* Untergruppe von $\text{Aut}(D_n)$ ist isomorph zu $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}$, $0 < k < n-1$, mit der Gruppenoperation

$$\tau_{(t'',a',h)} : (z'', w', z_n) \in D_n \mapsto (t''z'', w' + a', z_n + h + 2i \langle w', a' \rangle + i|a'|^2) \in D_n$$

für alle $(t'', a', h) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}$. Die Abbildung $\tau_{(t'',a',h)}|_{\partial D_n}$ lässt sich zu einem Diffeomorphismus auf ∂D_n erweitern.

In den nachfolgenden fünf Abschnitten wenden wir das in Abschnitt 1.2 dargestellten Schema von Quiroga-Barranco und Vasilevski auf fünf verschiedene Fälle gemäß der obigen maximal kommutativen Untergruppen der Automorphismengruppe an. Dabei suchen wir die messbaren Räume X , X_1 und Y und konstruieren für jeden bestimmten Fall den geeigneten unitären Operator U . Um dies zu tun, führen wir bei der Betrachtung der dazugehörigen kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ die entsprechende Fourier- und Mellintransformation ein. Dies führt zu einer Reduktion der Systeme der partiellen Differentialgleichungen (1.13) und (2.6) zu Systemen von gewöhnlichen parameterabhängigen Differentialgleichungen, deren Lösung mit Hilfe der reellen Analysis erfolgt.

2.1. Quasi-elliptischer Fall

Sei $\xi \in \mathbb{S}_n$. Mit $\tau(\mathbb{B}_{n-1})$ bezeichnen wir die Menge

$$\tau(\mathbb{B}_{n-1}) = \{\varrho' = (\varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}) = (|\xi_1|, \dots, |\xi_{n-1}|) : |\varrho'|^2 = \varrho_1^2 + \dots + \varrho_{n-1}^2 \in [0, 1)\}$$

und verwenden die Parametrisierung der Einheitssphäre $\mathbb{S}_n$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \xi_k &= t_k \varrho_k, & \varrho_k &\in \mathbb{R}_+, t_k \in \mathbb{T}, k = 1, \dots, n-1, \\ \xi_n &= t_n \sqrt{1 - |\varrho'|^2}, & t_n &\in \mathbb{T}, \end{aligned}$$

wobei $\varrho' = (\varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}) \in \tau(\mathbb{B}_{n-1})$.

Aus der Identität [41, Proposition 1.4.7]

$$\int_{\mathbb{S}_n} f(\xi) d\sigma(\xi) = \int_{\mathbb{B}_{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi', e^{i\theta} |\xi_n|) d\theta dv_{n-1}(\xi'),$$

wobei $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ und $|\xi_n| = \sqrt{1 - |\xi'|^2}$, ergibt sich unter der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow (t_1, \dots, t_n, \varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}), \\ \int_{\mathbb{S}_n} f(\xi) d\sigma(\xi) &= \frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho' t', e^{i\theta} \sqrt{1 - |\varrho'|^2}) d\theta \\ &\quad \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k \prod_{k=1}^{n-1} \frac{dt_k}{it_k} \\ (2.2) \quad &= \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} f(\varrho' t', t_n \sqrt{1 - |\varrho'|^2}) \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k \prod_{k=1}^n \frac{dt_k}{it_k}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$d\sigma(\xi) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k \prod_{k=1}^n \frac{dt_k}{it_k}.$$

Durch die Identifikation

$$f(z) \mapsto g(t, \varrho'),$$

wobei

$$g(t, \varrho') := f(\varrho_1 t_1, \dots, \varrho_{n-1} t_{n-1}, \sqrt{1 - |\varrho'|^2} t_n)$$

folgt

$$L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma) \cong L^2(\mathbb{T}^n) \otimes L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu).$$

Hierbei sei

$$L^2(\mathbb{T}^n) = \bigotimes_{k=1}^n L^2\left(\mathbb{T}, \frac{dt_k}{it_k}\right) \quad \text{und} \quad d\mu = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k.$$

Als Nächstes benötigen wir den Satz von Bochner [41, Theorem 18.1.10]. Jede Funktion $f \in C^4(\partial\mathbb{B}_n)$, welche die tangentielle Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen erfüllt, ist zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f} \in C^1(\overline{\mathbb{B}}_n)$ fortsetzbar. Die Operatoren, die zu $\partial\mathbb{B}_n$ tangential sind, sind auf $\mathbb{C}^n$ gegeben durch

$$L_{k,j} = \xi_k \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_j} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_k}, \quad 1 \leq k < j \leq n$$

für $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$. Um $L_{k,j}f$ zu berechnen, setzen wir f auf $\mathbb{C}^n$ fort, wenden $L_{k,j}$ auf diese Fortsetzung an und schränken das erhaltene Ergebnis auf die Sphäre ein. Wir notieren, dass $(L_{k,j}f)(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{S}_n$ unabhängig von der Wahl der Fortsetzung ist.

Sei nun $f \in C^1(\mathbb{S}_n)$ und sei $\tilde{f}$ die durch $\tilde{f}(z) := rf(\xi)$ definierte Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}^n$, wobei $z = r\xi$ mit $0 < r < 1$ und $\xi \in \mathbb{S}_n$. Die Funktion f erfüllt genau dann die tangentiellen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, wenn

$$(2.3) \quad L_{k,j}\tilde{f}(z) = z_k \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}_j} - z_j \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad 1 \leq k < j \leq n.$$

Die Parametrisierung der Einheitssphäre (2.1) führt zu

$$\begin{cases} z_k = r\varrho_k t_k, & k = 1, \dots, n-1, \\ z_n = r\sqrt{1 - |\varrho'|^2} t_n, \end{cases}$$

mit

$$r = |z|, \quad \varrho_j = \frac{|z_j|}{|z|}, \quad t_j = \frac{z_j}{|z_j|}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Wir drücken die Gleichungen (2.3) in dem obigen Koordinatensystem aus.

Für $\tilde{f}(z) = g(r, \varrho', t)$ gilt

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}_j} = \frac{t_j}{2} \left(\varrho_j \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varrho_j} - \varrho_j \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\varrho_l}{r} \frac{\partial}{\partial \varrho_l} - \frac{t_j}{r \varrho_j} \frac{\partial}{\partial t_j} \right) g$$

für $j = 1, \dots, n-1$ und

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}_n} = \frac{t_n}{2} \left(\sqrt{1 - |\varrho'|^2} \frac{\partial}{\partial r} - \sqrt{1 - |\varrho'|^2} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\varrho_l}{r} \frac{\partial}{\partial \varrho_l} - \frac{t_n}{r \sqrt{1 - |\varrho'|^2}} \frac{\partial}{\partial t_n} \right) g.$$

Somit ergibt sich für $1 \leq k < j \leq n-1$

$$\begin{aligned} L_{k,j} \tilde{f}(z) &= z_k \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}_j} - z_j \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}_k} \\ &= \frac{rt_k t_j}{2} \left[\frac{\varrho_k}{r} \frac{\partial}{\partial \varrho_j} - \frac{\varrho_j}{r} \frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{\varrho_k t_j}{r \varrho_j} \frac{\partial}{\partial t_j} + \frac{\varrho_j t_k}{r \varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} \right] g(r, \varrho', t) \\ &= \frac{t_k t_j}{2} \left[\varrho_k \frac{\partial}{\partial \varrho_j} - \varrho_j \frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{\varrho_k t_j}{\varrho_j} \frac{\partial}{\partial t_j} + \frac{\varrho_j t_k}{\varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} \right] g(r, \varrho', t) \end{aligned}$$

und für $k = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} L_{k,n} \tilde{f}(z) &= z_k \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}_n} - z_n \frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial \bar{z}_k} \\ &= -\frac{\sqrt{1 - |\varrho'|^2} t_k t_n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{t_k}{\varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{\varrho_k t_n}{(1 - |\varrho'|^2)} \frac{\partial}{\partial t_n} \right] g(r, \varrho', t). \end{aligned}$$

Die Einschränkung der obigen Gleichungen auf die Sphäre liefert

(2.4)

$$\frac{t_k t_j}{2} \left[\varrho_k \frac{\partial}{\partial \varrho_j} - \varrho_j \frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{\varrho_k t_j}{\varrho_j} \frac{\partial}{\partial t_j} + \frac{\varrho_j t_k}{\varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} \right] g(\varrho', t) = 0, \quad 1 \leq k < j \leq n-1,$$

(2.5)

$$\frac{\sqrt{1 - |\varrho'|^2} t_k t_n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{t_k}{\varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{\varrho_k t_n}{(1 - |\varrho'|^2)} \frac{\partial}{\partial t_n} \right] g(\varrho', t) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Beachte, dass $g(r, \varrho', t)|_{\mathbb{S}_n} = g(\varrho', t)$.

Da aus (2.4) die Gleichheit

$$\varrho_k \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_j} - \frac{t_j}{\varrho_j} \frac{\partial}{\partial t_j} \right] g = \varrho_j \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{t_k}{\varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} \right] g$$

folgt, genügt es, die Gleichungen (2.5) zu betrachten.

Nun können wir eine äquivalente Definition des Hardyraumes $H^2(\mathbb{B}_n)$ angeben. Die verschiedenen Definitionen des Hardyraumes und deren Äquivalenz wurden bereits in [55] studiert. Der Raum $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist der Abschluss in $L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ des Raumes aller hinreichend oft differenzierbaren Funktionen F , die die tangentiellen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen

$$L_{k,j} F(\xi) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k < j \leq n, \quad \xi \in \mathbb{S}_n.$$

Diese sind in den Koordinaten (2.1) äquivalent zu

$$(2.6) \quad \frac{\sqrt{1-|\varrho'|^2} t_k t_n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{t_k}{\varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{\varrho_k t_n}{(1-|\varrho'|^2)} \frac{\partial}{\partial t_n} \right] F(\varrho', t) = 0$$

für $k = 1, \dots, n-1$.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\Xi_{k,n} := \frac{t_k t_n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{t_k}{\varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{\varrho_k t_n}{(1-|\varrho'|^2)} \frac{\partial}{\partial t_n} \right].$$

Die diskrete Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ ist bekanntlich definiert durch

$$(2.7) \quad (\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(t) t^{-n} \frac{dt}{it}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Der Operator $\mathcal{F}$ ist unitär mit dem Inversen $\mathcal{F}^{-1} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$, der durch

$$\mathcal{F}^{-1} : \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n t^n$$

definiert ist. Wir führen den unitären Operator

$$U = \mathcal{F}_{(n)} \otimes I : L^2(\mathbb{T}^n) \otimes L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^n) \otimes L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu)$$

ein, wobei $\mathcal{F}_{(n)} = \mathcal{F} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}$, und erhalten

$$\begin{aligned} U \Xi_{k,n} U^{-1} \{c_p\}_{p \in \mathbb{Z}^n} &= U \left[\frac{t_k t_n}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{t_k}{\varrho_k} \frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{\varrho_k t_n}{(1-|\varrho'|^2)} \frac{\partial}{\partial t_n} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} c_p t^p \right] \\ &= U \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \frac{t^p t_k t_n}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{p_k}{\varrho_k} + \frac{\varrho_k p_n}{(1-|\varrho'|^2)} \right) c_p \right] \\ &= U \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \frac{t^p}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{p_k - 1}{\varrho_k} + \frac{\varrho_k (p_n - 1)}{(1-|\varrho'|^2)} \right) c_{p - e_k - e_n} \right], \end{aligned}$$

wobei $t^p = t_1^{p_1} \dots t_n^{p_n}$. Folglich gilt

$$U \Xi_{k,n} U^{-1} \{c_p\}_{p \in \mathbb{Z}^n} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{p_k - 1}{\varrho_k} + \frac{\varrho_k}{(1-|\varrho'|^2)} (p_n - 1) \right) c_{p - e_k - e_n} \right\}_{p \in \mathbb{Z}^n}$$

für $k = 1, \dots, n-1$.

Somit ist der Bildraum $\mathcal{H}_1 = U(H^2(\mathbb{B}_n))$ der Abschluss in $l^2(\mathbb{Z}^n) \otimes L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu)$ des Raumes derjenigen Folgen $\{c_p(\varrho')\}_{p \in \mathbb{Z}^n}$ von C^1 -Funktionen, die den Gleichungen

$$(2.8) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_k} - \frac{p_k}{\varrho_k} + \frac{\varrho_k}{(1-|\varrho'|^2)} p_n \right) c_p(\varrho') = 0, \quad k = 1, \dots, n-1$$

genügen, wobei $p = (p_1, \dots, p_n)$ und $\varrho' = (\varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}) \in \tau(\mathbb{B}_{n-1})$.

Die Gleichungen (2.8) besitzen eine allgemeine Lösung der Form

$$c_p(\varrho') = \tilde{e}_p \varrho_1^{p_1} \dots \varrho_{n-1}^{p_{n-1}} \left(\sqrt{1-|\varrho'|^2} \right)^{p_n},$$

wobei $\tilde{e}_p \in \mathbb{C}$. Nun soll jede Funktion c_p in $L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu)$ liegen, d.h. $c_p \equiv 0$ für $p \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}_+^n$.

Setze $\tilde{e}_p = \alpha_p e_p$ mit $e_p \in \mathbb{C}$ und

$$\alpha_p = \left(\frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} \varrho_1^{2p_1} \cdots \varrho_{n-1}^{2p_{n-1}} (1 - |\varrho'|^2)^{p_n} \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Für die Berechnung von α_p betrachten wir das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_n} |\xi^p|^2 d\sigma(\xi) &= \int_{\mathbb{S}_n} |\xi_1|^{2p_1} \cdots |\xi_n|^{2p_n} d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{k=1}^n \frac{dt_k}{it_k} \alpha_p^{-2} \\ &= (2\pi)^n \alpha_p^{-2}. \end{aligned}$$

Andererseits wissen wir nach [57, Lemma 1.11], dass

$$\int_{\mathbb{S}_n} |\xi^p|^2 d\sigma(\xi) = \frac{(n-1)!p!}{(n-1+|p|)!},$$

so dass

$$(2.9) \quad \alpha_p = \left(\frac{(2\pi)^n (n-1+|p|)!}{p!(n-1)!} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

In Bezug auf das Schema in Kapitel 1.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} L^2(X, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}^n), \\ L^2(X_1, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}_+^n), \\ L^2(Y, \eta) &= L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu). \end{aligned}$$

Die Funktion g_0 ist gegeben durch

$$g_0(p, \varrho') = \{\alpha_p \varrho'^{p'} \sqrt{1 - |\varrho'|^2}^{p_n}\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n}, \quad \varrho' \in \tau(\mathbb{B}_{n-1}),$$

wobei $\varrho'^{p'} = \varrho_1^{p'_1} \cdots \varrho_{n-1}^{p'_{n-1}}$ und $p = (p', p_n)$ mit $p' = (p_1, \dots, p_{n-1})$.

Die isometrische Einbettung $R_0 : l^2(\mathbb{Z}_+^n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^n) \otimes L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu)$ und sein adjungierter Operator $R_0^* : l^2(\mathbb{Z}^n) \otimes L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^n)$ sind durch

$$R_0 : \{e_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n} \mapsto c_p(\varrho') = \begin{cases} \alpha_p e_p \varrho'^{p'} \left(\sqrt{1 - |\varrho'|^2} \right)^{p_n} & , p \in \mathbb{Z}_+^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$R_0^* : \{c_p(\varrho')\}_{p \in \mathbb{Z}^n} \mapsto \left\{ \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \alpha_p \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} \varrho'^{p'} \left(\sqrt{1 - |\varrho'|^2} \right)^{p_n} c_p(\varrho') \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k \right\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n}$$

erklärt. Dann gilt

$$R_0^* R_0 = I : l^2(\mathbb{Z}_+^n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^n)$$

und $R_0 R_0^*$ ist die orthogonale Projektion von $l^2(\mathbb{Z}^n) \otimes L^2(\tau(\mathbb{B}_{n-1}), d\mu)$ auf $\mathcal{H}_1$.

Zusammenfassend ergibt sich der folgende Satz.

Satz 2.1. *Der Operator $R = R_0^* U$ bildet $L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ in $l^2(\mathbb{Z}_+^n)$ ab und seine Restriktion*

$$R|_{H^2(\mathbb{B}_n)} : H^2(\mathbb{B}_n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^n)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Der adjungierte Operator

$$R^* = U^* R_0 : l^2(\mathbb{Z}_+^n) \rightarrow L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$$

ist eine lineare Isometrie mit $\text{ran } R^ = H^2(\mathbb{B}_n)$.*

Insbesondere gilt

$$RR^* = I : l^2(\mathbb{Z}_+^n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^n)$$

und $R^ R$ ist die Cauchy-Szegő Projektion C von $L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ auf $H^2(\mathbb{B}_n)$.*

2.2. Quasi-parabolischer Fall

Wir stellen $L^2(\mathbb{H})$ als das Hilbertraum-Tensorprodukt

$$L^2(\mathbb{H}) \cong L^2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

dar und betrachten den unitären Operator

$$(2.10) \quad U_1 = I \otimes F : L^2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}),$$

wobei die Fouriertransformation $F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ durch

$$(2.11) \quad (Ff)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\lambda u} du$$

gegeben ist. Dann gilt

$$U_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - i \frac{\partial}{\partial x} z_k \right) U_1^{-1} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \lambda z_k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Der Bildraum $\mathcal{H}_1 = U_1(H^2(\mathbb{H}))$ ist der Abschluss in $L^2(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R})$ des Vektorraumes derjenigen hinreichend oft differenzierbaren Funktionen ψ , die den Gleichungen

$$(2.12) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \lambda z_k \right) \psi(z', \lambda) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1$$

genügen.

Folgende Überlegung steht bei [46, S. 73] und weil sie von Interesse ist, werden wir näher auf die Schritte eingehen. Wir führen den Raum $L^2(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}, d\mu)$ bezüglich des Maßes

$$d\mu = e^{-2\lambda|z'|^2} d\lambda_{2n-1}(z', \lambda)$$

ein und betrachten den isometrischen Isomorphismus

$$W : L^2(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}, d\mu),$$

der durch

$$(W\psi)(z', \lambda) = \psi(z', \lambda) e^{\lambda|z'|^2} =: h(z', \lambda)$$

definiert ist. Es gilt

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k}(z', \lambda) = e^{\lambda|z'|^2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \lambda z_k \right) \psi(z', \lambda), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Ist $\psi \in \mathcal{H}_1$, so erfüllt h die Gleichungen $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k} = 0$ für $k = 1, \dots, n-1$. Daher ist die Funktion $h = \psi e^{\lambda|z'|^2}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine ganze Funktion in z' . Wegen $\psi = h e^{-\lambda|z'|^2} \in L^2(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R})$ ergibt sich

$$(2.13) \quad \text{supp } \psi(z', \lambda) \subset \{(z', \lambda) : z' \in \mathbb{C}^{n-1}, \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Mittels der Polarkoordinaten $z_k = r_k t_k$ in $\mathbb{C}^{n-1}$, wobei $r_k \in \mathbb{R}_+$ und $t_k \in \mathbb{T}$, $k = 1, \dots, n-1$, folgt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \lambda z_k = \frac{t_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{t_k}{r_k} \frac{\partial}{\partial t_k} + 2\lambda r_k \right), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Der Raum $L^2(\mathbb{H})$ ist somit isometrisch isomorph zu

$$L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr') \otimes L^2(\mathbb{T}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}),$$

wobei

$$r' dr' = \prod_{k=1}^{n-1} r_k dr_k, \quad L^2(\mathbb{T}^{n-1}) = \bigotimes_{k=1}^{n-1} L^2\left(\mathbb{T}, \frac{dt_k}{it_k}\right).$$

Wir betrachten den unitären Operator

$$U_2 = I \otimes \mathcal{F}_{n-1} \otimes I : L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr') \otimes L^2(\mathbb{T}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr') \otimes l^2(\mathbb{Z}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}),$$

wobei $\mathcal{F}_{(n-1)} = \mathcal{F} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ die eindimensionale diskrete Fouriertransformation (2.7) ist.

Setze

$$\delta := U_2 \frac{t_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{t_k}{r_k} \frac{\partial}{\partial t_k} + 2\lambda r_k \right) U_2^{-1}.$$

In Analogie zur Rechnung in [37, S. 392] erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta\{c_{p'}\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}} &= U_2 \frac{t_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{t_k}{r_k} \frac{\partial}{\partial t_k} + 2\lambda r_k \right) (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}} c_{p'} t^{p'} \\ &= U_2 \left((2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}} t^{p'} \frac{t_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{p_k}{r_k} + 2\lambda r_k \right) c_{p'} \right) \\ &= U_2 \left((2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \frac{t^{p'}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{p_k - 1}{r_k} + 2\lambda r_k \right) c_{p' - e_k} \right) \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{p_k - 1}{r_k} + 2\lambda r_k \right) c_{p' - e_k} \right\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}}, \end{aligned}$$

wobei $p' = (p_1, \dots, p_{n-1})$, $t^{p'} = (t_1^{p_1}, \dots, t_{n-1}^{p_{n-1}})$ und e_k der k -te Einheitsvektor ist.

Nun ist der Raum $\mathcal{H}_2 = U_2(\mathcal{H}_1)$ der Abschluss in $l^2(\mathbb{Z}^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr')) \otimes L^2(\mathbb{R})$ des Vektorraumes derjenigen Folgen $\{c_{p'}\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}}$ von C^1 -Funktionen, die den Gleichungen

$$(2.14) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} - \frac{p_k}{r_k} + 2\lambda r_k \right) c_{p'}(r', \lambda) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1$$

genügen mit

$$\text{supp } c_{p'}(r', \lambda) \subset \{(r', \lambda) : r' \in \mathbb{R}_+^{n-1}, \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Die Gleichungen (2.14) besitzen eine allgemeine Lösung der Form

$$d_{p'}(r', \lambda) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) r'^{p'} e^{-\lambda|r'|^2} g_{p'}(\lambda), \quad p' \in \mathbb{Z}^{n-1},$$

wobei $g_{p'} \in L^2(\mathbb{R})$ und $|r'|^2 = r_1^2 + \dots + r_{n-1}^2$.

Wegen $\{d_{p'}\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \in l^2(\mathbb{Z}^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr')) \otimes L^2(\mathbb{R})$ folgt $d_{p'} \equiv 0$ für alle $p' \in \mathbb{Z}^{n-1} \setminus \mathbb{Z}_+^{n-1}$.

In Bezug auf das Schema in Kapitel 1.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} L^2(X, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}), \\ L^2(X_1, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+), \\ L^2(Y, \eta) &= L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr'). \end{aligned}$$

Der unitäre Operator U ist wie folgt definiert

$$U = U_2 \circ U_1 \circ U_0 : L^2(\partial D_n, d\beta) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr')) \otimes L^2(\mathbb{R}),$$

wobei U_0 durch (1.12) definiert ist und die Funktion g_0 von der Form

$$g_0(p', r', \lambda) = \left\{ \left(\frac{2^{n-1}(2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} \right)^{\frac{1}{2}} r'^{p'} e^{-\lambda|r'|^2} \right\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}},$$

ist mit $(r', \lambda) \in \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr')}^2 &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \frac{2^{n-1}(2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} r'^{2p'} e^{-2\lambda|r'|^2} r' dr' \\ &= \frac{(2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} r'^{p'} e^{-2\lambda|r'|^2} dr' \\ &= 1 \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich das folgende Lemma.

Lemma 2.2. *Der unitäre Operator U bildet den Hardyraum $H^2(D_n)$ auf den Raum $\mathcal{H}_2 = g_0(l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+))$ ab, welcher der Abschluss in*

$$l^2(\mathbb{Z}^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr')) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

des Vektorraumes derjenigen Folgen $\{d_{p'}(r', \lambda)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$ von C^1 -Funktionen ist, wobei die Funktionen $d_{p'}(r', \lambda)$ sich als

$$d_{p'}(r', \lambda) = \left(\frac{2^{n-1}(2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} \right)^{\frac{1}{2}} r'^{p'} e^{-\lambda|r'|^2} g_{p'}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

darstellen lassen mit $g_{p'} \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Ferner gilt

$$\|d_{p'}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr') \otimes L^2(\mathbb{R})} = \|g_{p'}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Schließlich setzen wir

$$\delta(p', \lambda) = \left(\frac{2^{n-1}(2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und führen die isometrische Einbettung

$$R_0 : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+)) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr')) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

durch die Formel

$$R_0 : \{c_{p'}(\lambda)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \mapsto \left\{ \chi_{\mathbb{Z}_+^{n-1}}(p') \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) \delta(p', \lambda) r'^{p'} e^{-\lambda|r'|^2} c_{p'}(\lambda) \right\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$$

ein, wobei die Funktion $c_{p'}(\lambda)$ für jedes $p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ zu Null fortgesetzt wird für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$.

Der adjungierte Operator

$$R_0^* : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr')) \otimes L^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+))$$

ist gegeben durch

$$R_0^* : \{d_{p'}(r', \lambda)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \mapsto \left\{ \delta(p', \lambda) \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} r'^{p'} e^{-\lambda|r'|^2} d_{p'}(r', \lambda) r' dr' \right\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}.$$

Dann gilt

$$R_0^* R_0 = I : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+)) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+))$$

und $R_0 R_0^*$ ist die orthogonale Projektion von $l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+^{n-1}, r' dr')) \otimes L^2(\mathbb{R})$ auf $g_0 l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+))$.

Wir kommen zum folgenden Ergebnis.

Satz 2.3. *Der Operator $R = R_0^* U$ bildet den Hilbertraum $L^2(\partial D_n, d\beta)$ in $l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+))$ ab und seine Restriktion*

$$R|_{H^2(D_n)} : H^2(D_n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+))$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Der adjungierte Operator

$$R^* = U^* R_0 : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+)) \rightarrow L^2(\partial D_n, d\beta)$$

ist eine lineare Isometrie mit $\text{ran } R^ = H^2(D_n)$.*

Insbesondere gilt

$$R R^* = I : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+)) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+))$$

und $R^ R$ ist die orthogonale Projektion P von $L^2(\partial D_n, d\beta)$ auf $H^2(D_n)$.*

2.3. Nilpotenter Fall

Der erste Schritt verläuft genauso wie im quasi-parabolischen Fall. Wir stellen $L^2(\mathbb{H})$ als Hilbertraum-Tensorprodukt

$$L^2(\mathbb{H}) \cong L^2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

dar und betrachten den in (2.10) definierten unitären Operator $U_1 = I \otimes F$.

Somit ist der Bildraum $\mathcal{H}_1 = U_2(H^2(\mathbb{H}))$ der Abschluss in $L^2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ des Vektorraumes derjenigen hinreichend oft differenzierbaren Funktionen ψ , die den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \lambda z_k \right) \psi(z', \lambda) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1$$

genügen mit

$$\text{supp } \psi(z', \lambda) \subset \{(z', \lambda) : z' \in \mathbb{C}^{n-1}, \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Unter Verwendung des kartesischen Koordinatensystems $z' = (x', y')$ in $\mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ mit $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ und $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ ist

$$L^2(\mathbb{H}) \cong L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}).$$

Weiterhin betrachten wir den unitären Operator $U_2 = F_{(n-1)} \otimes I \otimes I$ auf der obigen Tensor Zerlegung, wobei $F_{(n-1)} = F \otimes \dots \otimes F$ die $(n-1)$ -dimensionale Fouriertransformation bezüglich der ersten Variable x' ist. Dann gilt

$$U_2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) + \lambda(x_k + iy_k) \right] U_2^{-1} = \frac{i}{2} \left(\zeta_k + \frac{\partial}{\partial y_k} \right) + i\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_k} + y_k \right).$$

Der Bildraum $\mathcal{H}_2 = U_1(\mathcal{H}_1)$ ist der Abschluss in $L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ des Vektorraumes derjenigen hinreichend oft differenzierbaren Funktionen φ , die den Gleichungen

$$\left[\frac{i}{2} \left(\zeta_k + \frac{\partial}{\partial y_k} \right) + i\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_k} + y_k \right) \right] \varphi(\zeta', y', \lambda) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1$$

genügen mit

$$\text{supp } \varphi(\zeta', y', \lambda) \subset \{(\zeta', y', \lambda) : \zeta', y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Die Einführung der Variablensubstitution

$$u_k = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \zeta_k - \sqrt{\lambda} y_k, \quad v_k = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \zeta_k + \sqrt{\lambda} y_k, \quad k = 1, \dots, n-1$$

oder

$$\zeta_k = \sqrt{\lambda}(u_k + v_k), \quad y_k = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u_k + v_k) \quad k = 1, \dots, n-1$$

und des unitären Operators

$$U_3 : L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

durch die Formel

$$U_3 \varphi(\zeta', y', \lambda) = \varphi \left(\sqrt{\lambda}(u' + v'), \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v'), \lambda \right),$$

wobei $u' = (u_1, \dots, u_{n-1})$ und $v' = (v_1, \dots, v_{n-1})$, führt zu

$$U_3 \left\{ i \left[\frac{1}{2} \left(\zeta_k + \frac{\partial}{\partial y_k} \right) + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_k} + y_k \right) \right] \right\} U_3^{-1} = i\sqrt{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial v_k} + v_k \right).$$

Somit ist der Bildraum $\mathcal{H}_3 = U_3(\mathcal{H}_2)$ der Abschluss in $L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ derjenigen hinreichend oft differenzierbaren Funktionen $\tilde{\varphi}$, die den Gleichungen

$$(2.15) \quad \left(\frac{\partial}{\partial v_k} + v_k \right) \tilde{\varphi}(u', v', \lambda) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1$$

genügen mit

$$\text{supp } \tilde{\varphi}(u', v', \lambda) \subset \{(u', v', \lambda) : (u', v') \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}, \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Die Gleichungen (2.15) besitzen eine allgemeine Lösung der Form

$$\tilde{\varphi}(u', v', \lambda) = \pi^{-\frac{n-1}{4}} e^{-\frac{|v'|^2}{2}} \varpi(u', \lambda) \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda),$$

wobei $\varpi \in L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{2(n-1)} \times \mathbb{R}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} e^{-|v'|^2} |\varpi(u', \lambda)|^2 \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) du' dv' d\lambda \\ &= \pi^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|v'|^2} dv' \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+} |\varpi(u', \lambda)|^2 du' d\lambda \\ &= \|\varpi(u', \lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

In Bezug auf das Schema in Kapitel 1.2 ergibt sich

$$\begin{aligned} L^2(X, \mu) &= L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}), \\ L^2(X_1, \mu) &= L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+), \\ L^2(Y, \eta) &= L^2(\mathbb{R}^{n-1}). \end{aligned}$$

Der unitäre Operator U ist wie folgt definiert

$$U = U_3 \circ U_2 \circ U_1 \circ U_0 : L^2(\partial D_n, d\beta) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}),$$

wobei U_0 durch (1.12) gegeben ist und die Funktion g_0 sich darstellen lässt als

$$g_0(v') = \pi^{-\frac{n-1}{4}} e^{-\frac{|v'|^2}{2}}, \quad v' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Wir fassen zusammen und erhalten das folgende Lemma.

Lemma 2.4. *Der unitäre Operator U bildet den Hardyraum $H^2(D_n)$ auf $\mathcal{H}_3 = g_0 L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$ ab, welcher der Abschluss in $L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ des Vektorraumes derjenigen hinreichend oft differenzierbaren Funktionen φ ist, wobei φ sich als*

$$\varphi(u', v', \lambda) = g_0(v') \varpi(u', \lambda)$$

darstellen lässt mit $\varpi \in L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$.

Schließlich führen wir die isometrische Einbettung

$$R_0 : L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

durch die Formel

$$R_0 : \varpi(u', \lambda) \mapsto \pi^{-\frac{n-1}{4}} e^{-\frac{|v'|^2}{2}} \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) \varpi(u', \lambda),$$

ein, wobei die Funktion $\varpi(u', \lambda)$ für jedes $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$ zu Null fortgesetzt wird für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$.

Der adjungierte Operator

$$R_0^* : L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$$

ist gegeben durch

$$R_0^* : \varphi(u', v', \lambda) \mapsto \pi^{-\frac{n-1}{4}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{|v'|^2}{2}} \varphi(u', v', \lambda) dv'.$$

Es gilt

$$R_0^* R_0 = I : L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$$

und $R_0 R_0^*$ ist die orthogonale Projektion von $L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{H}_3$.

Wir erhalten das folgende Ergebnis.

Satz 2.5. *Der Operator $R = R_0^* U$ bildet den Hilbertraum $L^2(\partial D_n, d\beta)$ in $L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$ ab und seine Restriktion*

$$R|_{H^2(D_n)} : H^2(D_n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Der adjungierte Operator

$$R^* = U^* R_0 : L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\partial D_n, d\beta)$$

ist eine lineare Isometrie mit $\text{ran } R^ = H^2(D_n)$.*

Insbesondere gilt

$$R R^* = I : L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$$

und $R^ R$ ist die orthogonale Projektion P von $L^2(\partial D_n, d\beta)$ auf $H^2(D_n)$.*

2.4. Quasi-nilpotenter Fall

Dieser Fall ist für $n > 2$ eine Zusammensetzung aus dem quasi-parabolischen und dem nilpotenten Fall.

Sei k ganzzahlig mit $1 \leq k \leq n - 2$. Die Punkte von ∂D_n schreiben wir als $z = (z'', w', z_n)$, $z'' \in \mathbb{C}^k$, $w' \in \mathbb{C}^{n-k-1}$ und $z_n \in \mathbb{C}$ und die Punkte von $\mathbb{H}$ als (z'', w', x) , $x \in \mathbb{R}$. Gemäß dieser Notation ist $L^2(\mathbb{H})$ isometrisch isomorph zu

$$L^2(\mathbb{C}^k) \otimes L^2(\mathbb{C}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}).$$

Analog zu den beiden vorherigen Fällen ergibt sich unter der Betrachtung des unitären Operators $U_1 = I \otimes I \otimes F$, dass der Bildraum $\mathcal{H}_1 = U_1(H^2(\mathbb{H}))$ der Abschluss in $L^2(\mathbb{C}^k) \otimes L^2(\mathbb{C}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ ist, des Vektorraumes derjenigen hinreichend oft differenzierbaren Funktionen ψ , die den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \lambda z_j \right) \psi(z'', w', \lambda) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}_l} + \lambda w_l \right) \psi(z'', w', \lambda) = 0, \quad l = 1, \dots, n - k - 1$$

genügen mit

$$\text{supp } \psi(z'', w', \lambda) \subset \{(z'', w', \lambda) : z'' \in \mathbb{C}^k, w' \in \mathbb{C}^{n-k-1}, \lambda \in \mathbb{R}_+\}.$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten in $\mathbb{C}^k$ und zu kartesischen Koordinaten $\mathbb{C}^{n-k-1}$ schreiben wir $z_j = r_j t_j$ mit $r_j \in \mathbb{R}_+$ und $t_j \in \mathbb{T}$, $j = 1, \dots, k$, bzw. $w_l = x_l + iy_l$, $l = 1, \dots, n-k-1$, mit $x', y' \in \mathbb{R}^{n-k-1}$.

Der Raum $L^2(\mathbb{H})$ ist isometrisch isomorph zu

$$L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'') \otimes L^2(\mathbb{T}^k) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}).$$

Weiterhin betrachten wir den unitären Operator $U_2 = I \otimes \mathcal{F}_k \otimes F_{(n-k-1)} \otimes I \otimes I$ von $L^2(\mathbb{H})$ nach

$$L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'') \otimes l^2(\mathbb{Z}^k) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}),$$

wobei $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}$ die k -dimensionale diskrete Fouriertransformation und $F_{n-k-1} = F \otimes \dots \otimes F$ die $n-k-1$ -dimensionale Fouriertransformation ist.

Nach den Ergebnissen aus Abschnitt 2.2 und 2.3 ist der Bildraum $\mathcal{H}_2 = U_1(\mathcal{H}_1)$ der Abschluss in

$$L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'') \otimes l^2(\mathbb{Z}^k) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

des Vektorraumes derjenigen Folgen $\{d_{p''}(r'', \xi', y', \lambda)\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k}$ von C^1 -Funktionen, wobei die Funktionen

$$d_{p''}(r'', \xi', y', \lambda) = \left(\frac{2^{k-1}(2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} \right)^{\frac{1}{2}} r''^{p''} e^{-\lambda|r''|^2} \tilde{d}_{p''}(\xi', y', \lambda)$$

mit $(\xi', y', \lambda) \in \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+$ im Raum $L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'') \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ liegen. Darüber hinaus müssen die Funktionen $\tilde{d}_{p''}(\xi', y', \lambda)$ die Gleichungen

$$i \left[\frac{1}{2} \left(\xi_l + \frac{\partial}{\partial y_l} \right) + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} + y_l \right) \right] \tilde{d}_{p''}(\xi', y', \lambda) = 0$$

für $l = 1, \dots, n-k-1$ erfüllen.

Wir führen folgende Variablensubstitution

$$u_l = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \zeta_l - \sqrt{\lambda} y_l, \quad v_l = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \zeta_l + \sqrt{\lambda} y_l, \quad l = 1, \dots, n-k-1$$

oder

$$\zeta_l = \sqrt{\lambda}(u_l + v_l), \quad y_l = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u_l + v_l) \quad l = 1, \dots, n-k-1$$

ein und definieren den unitären Operator

$$U_3 : l^2(\mathbb{Z}^k, L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'')) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \\ l^2(\mathbb{Z}^k, L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'')) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

durch die Formel

$$U_3 : \{d_{p''}(r'', \xi', y', \lambda)\}_{p'' \in \mathbb{Z}^k} \mapsto \left\{ d_{p''} \left(r'', \sqrt{\lambda}(u' + v'), \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v'), \lambda \right) \right\}_{p'' \in \mathbb{Z}^k},$$

wobei $u' = (u_1, \dots, u_{n-k-1})$ und $v' = (v_1, \dots, v_{n-k-1})$.

Zusammen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.2 und 2.3 ergibt sich für das Schema in Kapitel 1.2

$$\begin{aligned} L^2(X, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}^k) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}), \\ L^2(X_1, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}_+^k) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+), \\ L^2(Y, \eta) &= L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'') \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}). \end{aligned}$$

Der unitäre Operator U ist wie folgt definiert

$$U = U_3 \circ U_2 \circ U_1 \circ U_0 : L^2(\partial D_n, d\beta) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^k, L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'')) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

und die Funktion g_0 ist gegeben durch

$$g_0(p'', r'', v', \lambda) = \pi^{-\frac{n-k-1}{4}} \left(2^k \frac{(2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} \right)^{\frac{1}{2}} r'' p'' e^{-\lambda|r''|^2 - \frac{|v'|^2}{2}},$$

wobei $(p'', r'', v', \lambda) \in \mathbb{Z}_+^k \times \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|g_0\|^2 &= \pi^{-\frac{n-k-1}{2}} \int_{\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}} \frac{2^k (2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} r''^{2p''} e^{-2\lambda|r''|^2 - |v'|^2} r'' dr'' dv' \\ &= \pi^{-\frac{n-k-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k-1}} e^{-|v'|^2} dv' \frac{2^k (2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} \int_{\mathbb{R}_+^k} r''^{2p''} e^{-\lambda|r''|^2} r'' dr''. \end{aligned}$$

Da jedes Integral mit dem entsprechenden Vorfaktor eins ergibt, folgt

$$\|g_0(p'', \cdot, \cdot, \lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'') \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1})}^2 = 1.$$

Lemma 2.6. *Der unitäre Operator U bildet den Hardyraum $H^2(D_n)$ auf $\mathcal{H}_3 = g_0 l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+))$ ab, welcher der Abschluss in*

$$l^2(\mathbb{Z}^k, L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'')) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

des Vektorraumes derjenigen Folgen $\{d_{p''}(r'', u', v', \lambda)\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k}$ von C^1 -Funktionen ist, wobei die Funktionen $d_{p''}(r'', u', v', \lambda)$, $p'' \in \mathbb{Z}_+^k$, sich als

$$d_{p''}(r'', u', v', \lambda) = \pi^{-\frac{n-k-1}{4}} \left(2^k \frac{(2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} \right)^{\frac{1}{2}} r''^{p''} e^{-\lambda|r''|^2 - \frac{|v'|^2}{2}} c_{p''}(u', \lambda)$$

darstellen lassen mit $c_{p''} \in L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+)$. Ferner gilt

$$\|\{d_{p''}\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k}\| = \|\{c_{p''}\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k}\|_{l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+))}.$$

Schließlich setzen wir

$$\varkappa_k(p'', \lambda) := \pi^{-\frac{n-k-1}{4}} \left(2^k \frac{(2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und führen die isometrische Einbettung

$$\begin{aligned} R_0 : l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+)) &\rightarrow \\ l^2(\mathbb{Z}^k, L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'')) &\otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

durch die Formel

$$R_0 : \{c_{p''}(u', \lambda)\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k} \mapsto \left\{ \varkappa_k(p'', \lambda) \chi_{\mathbb{Z}_+^k}(p'') \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) r'' p'' e^{-\lambda |r''|^2 - \frac{|v'|^2}{2}} c_{p''}(u', \lambda) \right\}_{p'' \in \mathbb{Z}^k}$$

ein, wobei die Funktion $c_{p''}(u', \lambda)$ für jedes $u' \in \mathbb{R}^{n-k-1}$ und jedes $p'' \in \mathbb{Z}^k$ zu Null fortgesetzt wird für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$.

Der adjungierte Operator

$$R_0^* : l^2(\mathbb{Z}^k, L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'')) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+))$$

ist gegeben durch

$$R_0^* : \{d_{p''}(r'', u', v', \lambda)\}_{p'' \in \mathbb{Z}^k} \mapsto \left\{ \varkappa_k(p'', \lambda) \int_{\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}} r'' p'' e^{-\lambda |r''|^2 - \frac{|v'|^2}{2}} d_{p''}(r'', u', v', \lambda) r'' dr'' dv' \right\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k}.$$

Es gilt

$$R_0^* R_0 = I : l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+)) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+))$$

und $R_0 R_0^*$ ist die orthogonale Projektion Q von

$$l^2(\mathbb{Z}^k, L^2(\mathbb{R}_+^k, r'' dr'')) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

auf $\mathcal{H}_3$.

Zusammengefasst ergibt sich der folgende Satz.

Satz 2.7. *Der Operator $R = R_0^* U$ bildet den Hilbertraum $L^2(\partial D_n, d\beta)$ in $l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+))$ ab und seine Restriktion*

$$R|_{H^2(D_n)} : H^2(D_n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+))$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Der adjungierte Operator

$$R^* = U^* R_0 : l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+)) \rightarrow L^2(\partial D_n, d\beta)$$

ist eine lineare Isometrie mit $\text{ran } R^ = H^2(D_n)$.*

Ferner gilt

$$R R^* = I : l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+)) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+))$$

und $R^ R$ ist die orthogonale Projektion P von $L^2(\partial D_n, d\beta)$ auf $H^2(D_n)$.*

2.5. Quasi-hyperbolischer Fall

Die “nicht-isotrope” obere Halbsphäre von $\mathbb{H}$ ist definiert durch

$$\Sigma = \{(z', x) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} : |z'|^2 + |x| = 1\}.$$

Die Punkte von Σ nehmen folgende Parametrisierung

$$\begin{aligned} z_k &= s_k t_k, & s_k &\in [0, 1), \quad t_k \in \mathbb{T}, \quad k = 1, \dots, n-1 \\ x &= \epsilon \rho, & \rho &\in [0, 1] \text{ und } \epsilon \in \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

an, so dass

$$|z'|^2 + |x| = \sum_{k=1}^{n-1} s_k^2 + \rho = 1,$$

welche wiederum folgende Darstellung der Punkte $(z', x) \in \mathbb{H}$ induziert

$$z_k = \sqrt{r} s_k t_k, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad x = \epsilon r \rho,$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $|z'|^2 + |x| = r$. Dies schreiben wir in der Form

$$z_k = \sqrt{|r|} s_k t_k, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad x = r \rho$$

für $r \in \mathbb{R}$ mit $|z'|^2 + |x| = |r|$.

Wir beachten, dass $r = 0$ genau dann ist, wenn $(z', x) = (0', 0)$.

Wir stellen $\mathbb{H}$ als

$$\mathbb{H} = \iota(\mathbb{B}_{n-1}) \times \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

dar, wobei

$$\iota(\mathbb{B}_{n-1}) = \left\{ s' = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1} : |s'|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} s_k^2 < 1 \right\}$$

und

$$\mathbb{T}^{n-1} = \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T},$$

und führen in $\mathbb{H}$ das neue Koordinatensystem (s', t', r) ein mit

$$(2.16) \quad s_k = \frac{|z_k|}{\sqrt{|z'|^2 + |x|}}, \quad t_k = \frac{z_k}{|z_k|}, \quad |r| = |z'|^2 + |x|,$$

oder

$$z_k = \sqrt{|r|} s_k t_k, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad x = r(1 - |s'|^2), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Für eine messbare Funktion $f : D_n \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir das Integral

$$I(f) := \int_{\mathbb{H}} f(z', x + i|z'|^2) d\lambda_{2n-1}(z', x)$$

und führen die Polarkoordinaten (2.16) ein.

Zunächst setzen wir

$$\begin{cases} z_k = l_k e^{i\psi_k}, & l_k \in \mathbb{R}_+, \psi_k \in (0, 2\pi], \quad k = 1, \dots, n-1 \\ x = \rho & \rho \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

so dass $|z'|^2 + |x| = \sum_{k=1}^{n-1} l_k^2 + |\rho| = 1$ ist und erhalten

$$I(f) = \int_0^\infty l_1 \dots \int_0^\infty l_{n-1} \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(l e^{i\psi}, \rho + i|l'|^2) d\psi_1 \dots d\psi_{n-1} d\rho dl_1 \dots dl_{n-1}.$$

Weiter führen wir die Variablensubstitution durch

$$\begin{cases} l_k = \sqrt{|r|} s_k, & s_k \in [0, 1), k = 1, \dots, n-1 \\ \rho = r(1 - |s'|^2), & r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die Jakobi-Matrix ist

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial r} & \frac{\partial l_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial l_1}{\partial s_{n-1}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial l_{n-1}}{\partial r} & \cdots & & \frac{\partial l_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial r} & \frac{\partial \rho}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \rho}{\partial s_{n-1}} \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$|J| = \left| \begin{pmatrix} \frac{s_1}{2\sqrt{|r|}} & \sqrt{|r|} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ \frac{s_{n-2}}{2\sqrt{|r|}} & 0 & \cdots & \sqrt{|r|} & 0 \\ \frac{s_{n-1}}{2\sqrt{|r|}} & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{|r|} \\ (1 - |s|^2) & -2s_1 r & \cdots & & -2s_{n-1} r \end{pmatrix} \right| = |r|^{\frac{n-1}{2}}.$$

Daraus folgt

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |r|^{n-1} \int_0^1 s_1 \cdots \int_0^1 s_{n-1} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{|r|} s' e^{i\psi'}, r(1 - |s'|^2) + i|r||s'|^2\right) d\psi_1 \cdots d\psi_{n-1} ds_1 \cdots ds_{n-1} dr.$$

Unter der Variablensubstitution (2.16) ist

$$d\lambda_{2n-1}(z', x) = |r|^{n-1} dr \prod_{k=1}^{n-1} s_k ds_k \prod_{k=1}^{n-1} \frac{dt_k}{it_k}.$$

Der Raum $L^2(\mathbb{H})$ ist isomorph zu

$$L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{T}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}, |r|^{n-1} dr),$$

wobei

$$s' ds' = \prod_{k=1}^{n-1} s_k ds_k \quad \text{und} \quad L^2(\mathbb{T}^{n-1}) = \bigotimes_{k=1}^{n-1} L^2\left(\mathbb{T}, \frac{dt_k}{it_k}\right).$$

Sei nun $f \in L^2(\mathbb{H})$ mit $f(z', x) = g(s', t', r)$ und setzen wir abkürzend

$$L^2(\Delta) := L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{T}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr).$$

Außerdem wird folgende Identifikation benötigt

$$(2.17) \quad \begin{aligned} L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{T}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}, |r|^{n-1} dr) &\rightarrow L^2(\Delta) \oplus L^2(\Delta), \\ g &\mapsto (g_1, g_2) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} g_1(s', t', r) &= g(s', t', r), \quad \text{falls } r > 0, \\ g_2(s', t', r) &= g(s', t', -r), \quad \text{falls } r < 0. \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$(g_1, g_2) \mapsto g,$$

mit

$$g(s', t', r) = \begin{cases} g_1(s', t', r), & \text{falls } r > 0, \\ g_2(s', t', -r) & \text{falls } r < 0. \end{cases}$$

Wir drücken die Gleichungen (1.13) im neuen Koordinatensystem (s', t', r) aus.

• Falls $r > 0$, ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - i \frac{\partial}{\partial x} z_k \right) g_1(s', t', r) &= \frac{t_k}{2} \left(2\sqrt{r} s_k \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial g_1}{\partial s_l} \frac{2s_l s_k}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial g_1}{\partial s_l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{t_k}{\sqrt{r} s_k} \frac{\partial g_1}{\partial t_k} \right) - i\sqrt{r} s_k t_k \left(\frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{s_l}{r} \frac{\partial g_1}{\partial s_l} \right) \\ &= \frac{t_k}{\sqrt{r} s_k} \left\{ s_k^2 \left(r \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial g_1}{\partial s_l} \right) + \frac{s_k}{2} \frac{\partial g_1}{\partial s_k} - \frac{t_k}{2} \frac{\partial g_1}{\partial t_k} \right. \\ &\quad \left. - i s_k^2 \left(r \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial g_1}{\partial s_l} \right) \right\} \end{aligned}$$

• Falls $r < 0$, schreiben wir $\tilde{r} = -r > 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - i \frac{\partial}{\partial x} z_k \right) g_2(s', t', \tilde{r}) &= \frac{t_k}{\sqrt{\tilde{r}} s_k} \left\{ s_k^2 \left(\tilde{r} \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial g_2}{\partial s_l} \right) + \frac{s_k}{2} \frac{\partial g_2}{\partial s_k} - \frac{t_k}{2} \frac{\partial g_2}{\partial t_k} \right. \\ &\quad \left. + i s_k^2 \left(\tilde{r} \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial g_2}{\partial s_l} \right) \right\} \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, n-1$.

Im folgenden Lemma fassen wir die obigen Ergebnisse zusammen.

Lemma 2.8. *Der Raum $H^2(\mathbb{H})$ ist der Abschluss in $L^2(\mathbb{H})$ des Vektorraumes aller oft hinreichend differenzierbaren Funktionen g , deren Funktionspaare (g_1, g_2) folgenden Gleichungen genügen*

$$(2.18) \quad (1-i)s_k^2 \left(r \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial g_1}{\partial s_l} \right) + \frac{s_k}{2} \frac{\partial g_1}{\partial s_k} - \frac{t_k}{2} \frac{\partial g_1}{\partial t_k} = 0$$

und

$$(2.19) \quad (1+i)s_k^2 \left(\tilde{r} \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial g_2}{\partial s_l} \right) + \frac{s_k}{2} \frac{\partial g_2}{\partial s_k} - \frac{t_k}{2} \frac{\partial g_2}{\partial t_k} = 0$$

für $k = 1, \dots, n-1$, wobei $g_1 \in L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{T}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr)$ und $g_2 \in L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{T}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, \tilde{r}^{n-1} d\tilde{r})$.

Als Nächstes sei $\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ die Mellintransformation

$$(\mathcal{M}\phi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} r^{-i\xi + \frac{n-2}{2}} \phi(r) dr$$

mit dem Inversen $\mathcal{M}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr)$

$$(\mathcal{M}^{-1}\psi)(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} r^{i\xi - \frac{n}{2}} \psi(\xi) d\xi.$$

Wir setzen

$$L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R}) := L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes l^2(\mathbb{Z}^{n-1}) \otimes L^2(\mathbb{R})$$

und führen den unitären Operator

$$U_1 := V_1 \oplus V_2 : L^2(\Delta) \oplus L^2(\Delta) \rightarrow [L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R})] \oplus [L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R})]$$

ein, wobei

$$V_i = I \otimes \mathcal{F}_{(n-1)} \otimes \mathcal{M} \quad \text{für } i = 1, 2$$

und $\mathcal{F}_{(n-1)} = \mathcal{F} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}$ die $(n-1)$ -dimensionale diskrete Fouriertransformation (2.7) ist.

Der Bildraum $\mathcal{H}_1 = U_1(H^2(\mathbb{H}))$ ist der Abschluss in

$$[L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R})] \oplus [L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R})]$$

des Vektorraumes allen Paarfolgen

$$(d_{p'} = \{d_{p'}\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}}, b_{q'} = \{b_{q'}\}_{q' \in \mathbb{Z}^{n-1}})$$

von C^1 -Funktionen, so dass

$$(d_{p'}, b_{q'}) \in [L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R})] \oplus [L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R})]$$

und $d_{p'} = d_{p'}(s', \xi)$, $b_{q'} = b_{q'}(s', \xi)$ folgende Gleichungen

$$(2.20) \quad V_1 \left[(1-i)s_k^2 \left(r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial}{\partial s_l} \right) + \frac{s_k}{2} \frac{\partial}{\partial s_k} - \frac{t_k}{2} \frac{\partial}{\partial t_k} \right] V_1^{-1} d_{p'} = 0$$

bzw.

$$(2.21) \quad V_2 \left[(1+i)s_k^2 \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial}{\partial s_l} \right) + \frac{s_k}{2} \frac{\partial}{\partial s_k} - \frac{t_k}{2} \frac{\partial}{\partial t_k} \right] V_2^{-1} b_{q'} = 0$$

für $k = 1, \dots, n-1$ erfüllen.

Diese Gleichungen sind äquivalent zu

$$(2.22) \quad (1-i)s_k^2 \left[i \left(\xi + i \frac{n}{2} \right) d_{p'} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_l} \right] + \frac{s_k}{2} \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_k} - \frac{p_k}{2} d_{p'} = 0$$

bzw.

$$(2.23) \quad (1+i)s_k^2 \left[i \left(\xi + i \frac{n}{2} \right) b_{q'} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial b_{q'}}{\partial s_l} \right] + \frac{s_k}{2} \frac{\partial b_{q'}}{\partial s_k} - \frac{q_k}{2} b_{q'} = 0.$$

Setze $\alpha = \xi + i \frac{n}{2}$. Dann ist (2.22) äquivalent zu

$$(2.24) \quad \left[(1-i)s_k^2 \alpha + i \frac{p_k}{2} \right] d_{p'} - i \frac{s_k}{2} \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_k} + i \frac{(1-i)}{2} s_k^2 \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_l} = 0.$$

Die letzte Gleichung summieren wir über alle k auf und erhalten

$$\left[(1-i)|s'|^2 \alpha + i \frac{|p'|}{2} \right] d_{p'} + \frac{i}{2} [(1-i)|s'|^2 - 1] \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_l} = 0$$

also

$$\frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n-1} s_l \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_l} = \frac{[(1-i)|s'|^2 + i\frac{|p'|}{2}]}{[1 - (1-i)|s'|^2]} d_{p'}.$$

Diese Gleichung setzen wir in (2.24) ein und erhalten

$$\left[(1-i)s_k^2 \alpha + i\frac{p_k}{2} \right] d_{p'} - \frac{i}{2} s_k \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_k} + (1-i)s_k^2 \frac{[(1-i)|s'|^2 + i\frac{|p'|}{2}]}{[1 - (1-i)|s'|^2]} d_{p'} = 0$$

d.h.

$$s_k \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_k} - p_k d_{p'} + 2(1+i)s_k^2 \left(\alpha + \frac{[(1-i)|s'|^2 + i\frac{|p'|}{2}]}{[1 - (1-i)|s'|^2]} \right) d_{p'} = 0$$

d.h.

$$s_k \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_k} - p_k d_{p'} + 2(1+i)s_k^2 \frac{\alpha + i\frac{|p'|}{2}}{[1 - (1-i)|s'|^2]} d_{p'} = 0$$

für alle $k = 1, \dots, n-1$.

Schließlich sind die reduzierten Gleichungen

$$(2.25) \quad s_k \frac{\partial d_{p'}}{\partial s_k} - p_k d_{p'} + \left(\xi + i\frac{n+|p'|}{2} \right) \frac{2(1+i)s_k^2}{1 - (1-i)|s'|^2} d_{p'} = 0$$

für $k = 1, \dots, n-1$, wobei $p' = (p_1, \dots, p_{n-1})$ und $|p'| = p_1 + \dots + p_{n-1}$.

Die allgemeine Lösung von (2.25) für $k = 1, \dots, n-1$ ist gegeben durch

$$d_{p'}(s, \xi) = \tilde{c}_{p'}(\xi) s'^{p'} [1 - (1-i)|s'|^2]^{-\frac{n+|p'|}{2} + i\xi},$$

wobei $\tilde{c}_{p'} \in L^2(\mathbb{R})$. Da für jedes p' die Funktion $d_{p'}$ in $L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{R})$ liegen soll, folgt $d_{p'} \equiv 0$ für alle $p' \in \mathbb{Z}^{n-1} \setminus \mathbb{Z}_+^{n-1}$.

Ähnliche Rechnungen für die Gleichungen (2.23) liefern

$$(2.26) \quad s_k \frac{\partial b_{q'}}{\partial s_k} - q_k b_{q'} + \left(\xi + i\frac{n+|q'|}{2} \right) \frac{2(1+i)s_k^2}{1 - (1+i)|s'|^2} b_{q'} = 0$$

für $k = 1, \dots, n-1$ und $q' = (q_1, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Die allgemeine Lösung von (2.26) für $k = 1, \dots, n-1$ ist gegeben durch

$$b_{q'}(s', \xi) = \hat{c}_{q'}(\xi) s'^{q'} [1 - (1+i)|s'|^2]^{-\frac{n+|q'|}{2} + i\xi},$$

wobei $\hat{c}_{q'} \in L^2(\mathbb{R})$. Da für jedes $q' \in \mathbb{Z}^{n-1}$ die Funktion $b_{q'}$ in $L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{R})$ liegen soll, folgt $b_{q'} \equiv 0$ für alle $q' \in \mathbb{Z}^{n-1} \setminus \mathbb{Z}_+^{n-1}$.

Im Folgenden seien

$$(2.27) \quad \alpha_{p'}^-(\xi) := \left(\int_{\iota(\mathbb{B}_{n-1})} s'^{2p'} \left| [1 - (1-i)|s'|^2]^{-\frac{n+|p'|}{2} + i\xi} \right|^2 s' ds' \right)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$(2.28) \quad \alpha_{p'}^+(\xi) := \left(\int_{\iota(\mathbb{B}_{n-1})} s'^{2p'} \left| [1 - (1+i)|s'|^2]^{-\frac{n+|p'|}{2} + i\xi} \right|^2 s' ds' \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Mit $\tilde{c}_{p'}(\xi) = \alpha_{p'}^-(\xi)\dot{c}_{p'}(\xi)$ und $\hat{c}_{p'}(\xi) = \alpha_{p'}^+(\xi)\ddot{c}_{p'}(\xi)$ für $\dot{c}_{p'}$ und $\ddot{c}_{p'} \in L^2(\mathbb{R})$ ergibt sich für $p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$

$$\begin{aligned}\|d_{p'}\|^2 &= \int_{\iota(\mathbb{B}_{n-1}) \times \mathbb{R}} |d_{p'}(s', \xi)|^2 s' ds' d\xi \\ &= \int_{\iota(\mathbb{B}_{n-1}) \times \mathbb{R}} |\tilde{c}_{p'}(\xi)|^2 s'^{2p'} \left| [(1 - (1 - i)|s'|^2)]^{-\frac{n+|p'|}{2} + i\xi} \right|^2 s' ds' d\xi.\end{aligned}$$

Also ist

$$\|d_{p'}\|_{L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\dot{c}_{p'}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Analog folgt

$$\|b_{p'}\|_{L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\ddot{c}_{p'}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

In Bezug auf das Schema in Kapitel 1.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}L^2(X, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}^{n-1}) \otimes (L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})), \\ L^2(X_1, \mu) &= l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}) \otimes (L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})), \\ L^2(Y, \eta) &= L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds').\end{aligned}$$

Der unitäre Operator U ist definiert durch

$$U = U_1 \circ U_0 : L^2(\partial D_n, d\beta) \rightarrow L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R}) \oplus L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R}),$$

und die Paare von Funktionen-Folgen $g_0 = (g_0^1, g_0^2)$, mit

$$g_0^i = \{g_0^i(p', s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}, \quad i = 1, 2,$$

sind gegeben durch

$$\begin{aligned}g_0^1(p', s', \xi) &= \alpha_{p'}^-(\xi) s'^{p'} [1 - (1 - i)|s'|^2]^{-\frac{n+|p'|}{2} + i\xi} \\ g_0^2(p', s', \xi) &= \alpha_{p'}^+(\xi) s'^{p'} [1 - (1 + i)|s'|^2]^{-\frac{n+|p'|}{2} + i\xi}\end{aligned}$$

für $p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ und $(s', \xi) \in \iota(\mathbb{B}_{n-1}) \times \mathbb{R}$.

Zusammenfassend kommen wir zum folgenden Lemma.

Lemma 2.9. *Der unitäre Operator U bildet den Hardyraum $H^2(D_n)$ auf den Raum $\mathcal{H}_1 = g_0^1 l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus g_0^2 l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))$ ab, welcher der Abschluss in $[l^2(\mathbb{Z}^{n-1}, L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds')) \otimes L^2(\mathbb{R})] \oplus [l^2(\mathbb{Z}^{n-1}, L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds')) \otimes L^2(\mathbb{R})]$ des Vektorraumes allen Paarfolgen*

$$\left(\{d_{p'}(s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}, \{b_{p'}(s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \right)$$

von C^1 -Funktionen, wobei die Funktionen $d_{p'}(s', \xi)$ und $b_{p'}(s', \xi)$, $p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, sich als

$$d_{p'}(s', \xi) = \dot{c}_{p'}(\xi) g_0^1(p', s', \xi) \quad \text{bzw.} \quad b_{p'}(s', \xi) = \ddot{c}_{p'}(\xi) g_0^2(p', s', \xi)$$

darstellen lassen mit $\dot{c}_{p'}, \ddot{c}_{p'} \in L^2(\mathbb{R})$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\|d_{p'}\|_{L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\dot{c}_{p'}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \\ \|b_{p'}\|_{L^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), s' ds') \otimes L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\ddot{c}_{p'}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.\end{aligned}$$

Wir führen die isometrische Einbettung

$$R_0 : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \rightarrow \\ L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R}) \oplus L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R})$$

durch die Formel

$$R_0 : \left(\{\dot{c}_{p'}(\xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}, \{\ddot{c}_{p'}(\xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \right) \mapsto \\ \left(\{\dot{c}_{p'}(\xi) \alpha_{p'}^- \vartheta_{p'}^-(s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}}, \{\ddot{c}_{p'}(\xi) \alpha_{p'}^+ \vartheta_{p'}^+(s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \right)$$

ein, wobei die Funktionen $\vartheta_{p'}^-(s', \xi)$ und $\vartheta_{p'}^+(s', \xi)$ gegeben sind durch

$$(2.29) \quad \vartheta_{p'}^-(s', \xi) = s'^{p'} [1 - (1 - i)|s'|^2]^{-\frac{n+|p'|}{2} + i\xi}$$

bzw.

$$(2.30) \quad \vartheta_{p'}^+(s', \xi) = s'^{p'} [1 - (1 + i)|s'|^2]^{-\frac{n+|p'|}{2} + i\xi}.$$

Der adjungierte Operator

$$R_0^* : L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R}) \oplus L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R}) \rightarrow \\ l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))$$

lässt sich darstellen als

$$R_0^* : \left(\{d_{p'}(s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}}, \{b_{p'}(s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \right) \mapsto \\ \left(\{\dot{\varphi}_{p'}(\xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}, \{\ddot{\varphi}_{p'}(\xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \right),$$

wobei

$$\dot{\varphi}_{p'}(\xi) = \alpha_{p'}^-(\xi) \int_{\iota(\mathbb{B}_{n-1})} \overline{\vartheta_{p'}^-(s', \xi)} d_{p'}(s', \xi) s' ds' \\ \ddot{\varphi}_{p'}(\xi) = \alpha_{p'}^+(\xi) \int_{\iota(\mathbb{B}_{n-1})} \overline{\vartheta_{p'}^+(s', \xi)} b_{p'}(s', \xi) s' ds'$$

Dann gilt

$$R_0^* R_0 = I : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \rightarrow \\ l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))$$

und $R_0 R_0^*$ ist die orthogonale Projektion Q von

$$L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R}) \oplus L_V^2(\iota(\mathbb{B}_{n-1}), \mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{R})$$

auf $\mathcal{H}_1$.

Zusammengefasst ergibt sich der folgende Satz.

Satz 2.10. *Der Operator $R = R_0^* U$ bildet den Hilbertraum $L^2(\partial D_n, d\beta)$ in $l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))$ ab und seine Restriktion*

$$R|_{H^2(D_n)} : H^2(D_n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Der adjungierte Operator

$$R^* = U^* R_0 : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \rightarrow L^2(\partial D_n, d\beta)$$

ist eine lineare Isometrie mit $\text{ran } R^ = H^2(D_n)$.*

Insbesondere gilt

$$RR^* = I : l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \rightarrow \\ l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))$$

*und R^*R ist die orthogonale Projektion P von $L^2(\partial D_n, d\beta)$ auf $H^2(D_n)$.*

KAPITEL 3

Symbole mit Invarianzeigenschaften

In diesem Kapitel zeigen wir, dass es in jedem Fall der vorhergehenden fünf Abschnitte eine Klasse von beschränkten messbaren Symbolen ϕ gibt, so dass die entsprechenden Toeplitzoperatoren T_ϕ unitär äquivalent zu gewissen Diagonaloperatoren $RT_\phi R^*$ sind. Für eine Untergruppe G von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ sei $\mathcal{A}_G$ die Menge aller $L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ -Funktionen, die unter der G -Operation invariant sind. Insgesamt lautet die zentrale Aussage wie folgt.

Satz 3.1. *Für eine maximal kommutative Untergruppe G ist die C^* -Algebra, die von den Toeplitzoperatoren mit Symbolen aus $\mathcal{A}_G$ erzeugt wird, kommutativ auf dem Hardyraum.*

Am Ende dieses Kapitels werden wir eine weitere Familie von Symbolen kennen lernen, die die elliptische Symbolklasse echt enthält und für die die entsprechenden Toeplitzoperatoren nicht normal sein müssen. Dieser Teil beruht auf einer Bemerkung von Davie und Jewell [16]. Schließlich wird ein Beispiel angegeben, welches eine universelle Dilatation im Sinne von Bercovici, Foias und Pearcy [8, 9] ist.

3.1. Quasi-elliptischer Fall

Eine Funktion $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ wird *quasi-elliptisch* genannt, falls gilt

$$(3.1) \quad \phi(\xi) = g(|\xi_1|, \dots, |\xi_{n-1}|) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{S}_n.$$

Satz 3.2. *Sei $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ eine quasi-elliptische Funktion der Gestalt (3.1). Der Toeplitzoperator T_ϕ auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist unitär äquivalent zum Diagonaloperator $\text{Diag}(\gamma_g) = RT_\phi R^* \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{Z}_+^n))$, wobei R und R^* im Abschnitt 2.1 definiert sind. Die Folge $\gamma_g = \{\gamma_g(p)\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n}$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \gamma_g(p) &= \frac{2^{n-1}(n-1+|p|)!}{p!} \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} g(\varrho') \varrho'^{2p'} (1 - |\varrho'|^2)^{p_n} \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k \\ &= \frac{(n-1+|p|)!}{p!} \int_{\Delta(\mathbb{B}_{n-1})} g(\sqrt{\varrho'}) \varrho'^{p'} (1 - |\varrho'|_1)^{p_n} \prod_{k=1}^{n-1} d\varrho_k, \end{aligned}$$

wobei $p = (p', p_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\sqrt{\varrho'} = (\sqrt{\varrho'_1}, \dots, \sqrt{\varrho'_{n-1}})$ und

$$\Delta(\mathbb{B}_{n-1}) = \{\varrho' = (\varrho'_1, \dots, \varrho'_{n-1}) : |\varrho'|_1 = \varrho'_1 + \dots + \varrho'_{n-1} \in [0, 1)\}.$$

BEWEIS. Der Operator T_ϕ ist offensichtlich unitär äquivalent zu $RT_\phi R^*$. Wegen $R^*R = C$ und $RR^* = I$ gilt

$$RT_\phi R^* = RC\phi CR^* = R\phi R^*$$

und

$$Rg(\varrho')R^* = R_0^*Ug(\varrho')U^{-1}R_0 = R_0^*g(\varrho')R_0 =: T.$$

Für alle $\{c_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n} \in l^2(\mathbb{Z}_+^n)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T\{c_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n} &= R_0^* \left\{ g(\varrho') \alpha_p c_p \varrho'^{p'} \sqrt{(1 - |\varrho'|^2)^{p_n}} \right\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n} \\ &= \left\{ \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \alpha_p \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} \varrho'^{2p'} (1 - |\varrho'|^2)^{p_n} g(\varrho') \alpha_p c_p \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k \right\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n} \\ &= \{\gamma_g(p) \cdot c_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+^n}. \end{aligned}$$

□

Die Funktionen $e_p(\xi) = c_{n,p} \xi^p$, $p \in \mathbb{Z}_+^n$, wobei

$$(3.2) \quad c_{n,p} := \sqrt{\frac{(n-1+|p|)!}{p!(n-1)!}},$$

bilden die kanonische Orthonormalbasis für $H^2(\mathbb{B}_n)$. Das folgende Korollar wurde erstmals von Davie und Jewell [16, Proposition 4.2] im Fall $n = 2$ bewiesen.

Korollar 3.3. *Sei ϕ wie in Satz 3.2 gegeben. Dann ist T_ϕ ein diagonaler Operator mit*

$$T_\phi e_p = \gamma_g(p) e_p, \quad p \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Es sollte bemerkt werden, dass das obige Korollar auch anders gezeigt werden könnte und zwar durch eine direkte elementare Rechnung, welche Davie und Jewell auch im Fall $n = 2$ durchgeführt haben. Damit hätten wir uns die Analyse im Abschnitt 2.1 ersparen können. Jedoch haben wir für die Vereinheitlichung des Vorgehens den quasi-elliptischen Fall untersucht. Kurz erklärt, betrachten wir für alle Multiindizes $p, q \in \mathbb{Z}_+^n$ das Skalarprodukt

$$\langle T_\phi e_p, e_q \rangle = \int_{\mathbb{S}_n} \phi(\xi) e_p(\xi) \overline{e_q(\xi)} d\sigma(\xi)$$

und verwenden die Identität (2.2) und [41, Proposition 1.4.8].

Aus Korollar 3.3 folgt unmittelbar

$$\sigma(T_\phi) = \overline{\{\gamma_g(p) : p \in \mathbb{Z}_+^n\}}.$$

Ist $\phi \in C(\mathbb{S}_n)$, dann ist $\sigma_e(T_\phi) = \phi(\mathbb{S}_n)$ und somit ist das wesentliche Spektrum zusammenhängend. Im Fall $n = 1$ sind $\sigma(T_\phi)$ und $\sigma_e(T_\phi)$ für jedes $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ immer zusammenhängend [19, Theorem 7.45 and Corollary 7.46]. Diese Aussage trifft im Allgemeinen für $n > 1$ nicht zu, wie der Satz von Davie und Jewell zeigt.

Satz 3.4. [16, Theorem 4.3] *Es gibt*

- (i) *ein Symbol $\phi \in C(\mathbb{S}_n)$ derart, dass $\sigma(T_\phi)$ nicht zusammenhängend ist, und*
- (ii) *ein Symbol $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ derart, dass $\sigma_e(T_\phi)$ nicht zusammenhängend ist.*

BEWEIS. Der Beweis dieses Satzes wurde im Fall $n = 2$ folgendermaßen geführt. Sei $\phi(z_1, z_2) = g(|z_1|)$ für alle $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}_2$ mit $g \in L^\infty[0, 1]$.

(i) Sei $g(\sqrt{\varrho}) = e^{2i\pi\varrho}$, $\varrho \in [0, 1]$. Dann ist g stetig auf $[0, 1]$ mit $\text{ran } g = \mathbb{T}$. Offenbar gilt für alle $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+$, dass $|\gamma_g(p_1, p_2)| = 1$, und so ist die Menge der Häufungspunkte von $\{\gamma_g(p_1, p_2) : p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+\}$ die Einheitskreislinie. Da aber $\gamma_g(0, 0) = 0$ ergibt, ist $\sigma(T_\phi)$ nicht zusammenhängend.

(ii) Sei $g(\sqrt{\varrho}) = \varrho^i = e^{i \ln \varrho}$. Dann ist $\text{ess-ran } g = \mathbb{T}$ und

$$\begin{aligned} \gamma_g(p_1, p_2) &= \frac{(p_1 + p_2 + 1)!}{p_1! p_2!} \int_0^1 \varrho^{p_1+i} (1 - \varrho)^{p_2} d\varrho \\ &= \frac{\Gamma(p_1 + i + 1)}{p_1!} \frac{(p_1 + p_2 + 1)!}{\Gamma(p_1 + p_2 + i + 2)}. \end{aligned}$$

Für p_1 sehr groß folgt nach der Stirling-Formel

$$\frac{\Gamma(p_1 + i + 1)}{p_1!} \sim p_1^i = e^{i \ln p_1}$$

und damit ist die Menge der Häufungspunkte von $\frac{\Gamma(p_1 + i + 1)}{p_1!}$ die Einheitskreislinie. Ist $p_1 \in \mathbb{Z}_+$ fest, so gilt für $p_2 \rightarrow \infty$, dass die Menge der Häufungspunkte von $\frac{(p_1 + p_2 + 1)!}{\Gamma(p_1 + p_2 + i + 2)}$ die Einheitskreislinie ist. Deshalb ist die Menge der Häufungspunkte von $\{\gamma_g(p_1, p_2) : p_2 \in \mathbb{Z}_+\}$ der Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius

$$r_{p_1} = \left| \frac{\Gamma(p_1 + i + 1)}{p_1!} \right| = \left| \frac{(p_1 + i)(p_1 - 1 + i) \cdots i \Gamma(i)}{p_1(p_1 - 1) \cdots 1} \right|, \quad p_1 \in \mathbb{Z}_+$$

mit

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} r_{p_1} = 1.$$

Also ist $\lim_{p_1 \rightarrow \infty} |\gamma_g(p_1, \cdot)| = 1$. Folglich ist die Menge der Häufungspunkte von $\{\gamma_g(p_1, p_2) : p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+\}$ die Vereinigung von Kreisen mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r_{p_1} , $p_1 \in \mathbb{Z}_+$, die zu der Einheitskreislinie häuft. Dies zeigt, dass $\sigma_e(T_\phi)$ nicht zusammenhängend ist. $\square$

Zum Schluss noch eine Beobachtung zum Spektrum. Falls $\phi \in L^\infty(S_n, d\sigma)$ reellwertig ist, gilt

$$(3.3) \quad \sigma(T_\phi) \subseteq [\text{ess inf } \phi, \text{ess sup } \phi]$$

und es wird vermutet, dass hierbei die Gleichheit gilt. Siehe [16, S. 359].

Das folgende Beispiel mit $\text{ess-ran } \phi = \{0, 1\}$ und $\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = [0, 1]$ stützt diese Vermutung.

Beispiel 3.5. Sei

$$\phi(z_1, z_2) = \chi_{[0, 1/\sqrt{2})}(|z_1|) \quad \text{für alle } (z_1, z_2) \in \mathbb{S}_2.$$

Dann gilt

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = [0, 1].$$

Das Punktspektrum $\sigma_p(T_\phi)$ besteht aus rationalen Zahlen und liegt dicht in $[0, 1]$. $\frac{1}{2}$ ist ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit von T_ϕ .

Für den Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.6. *Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig.*

(a) *Für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq j \leq 2m$ gilt*

$$\binom{2m}{j} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \cdot 2^{2m} \cdot e^{\frac{1}{24m}}.$$

(b) *Für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq j \leq 2m+1$ gilt*

$$\binom{2m+1}{j} \leq \binom{2m+1}{m} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \cdot 2^{2m+1} \cdot e^{\frac{1}{12(2m+1)}}.$$

BEWEIS. Dies zeigt man durch direkte Rechnung mit Hilfe der Stirling-Formel. $\square$

BEWEIS. Mit $g(\varrho) = \chi_{[0, \frac{1}{\sqrt{2}})}(\varrho)$, $\varrho \in [0, 1]$, erhalten wir für γ_g nach Satz 3.2 für alle $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}_+^2$

$$\begin{aligned} \gamma_g(p_1, p_2) &= \frac{(p_1 + p_2 + 1)!}{p_1! p_2!} \int_0^{1/2} \varrho^{p_1} (1 - \varrho)^{p_2} d\varrho \\ (3.4) \quad &= I_{1/2}(p_1 + 1, p_2 + 1). \end{aligned}$$

Hierbei ist $I_x(a, b)$ die normalisierte unvollständige Betafunktion mit

$$I_x(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x \varrho^{a-1} (1 - \varrho)^{b-1} d\varrho$$

für $0 \leq x \leq 1$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$ und B die durch

$$B(a, b) := \int_0^1 \varrho^{a-1} (1 - \varrho)^{b-1} d\varrho \quad (\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0)$$

definierte Betafunktion [1, Sections 6.2, 6.3, 6.6 und 26.5].

Für diese gelten folgenden Beziehungen

$$(3.5) \quad I_x(a, b) + I_{1-x}(b, a) = 1,$$

$$(3.6) \quad I_x(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)} x^a (1-x)^b + I_x(a+1, b).$$

Hiermit folgt für alle $p_1 = p_2 = p \in \mathbb{Z}_+$

$$(3.7) \quad \gamma_g(p, p) = \frac{1}{2}.$$

Daher ist $\frac{1}{2}$ ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit für T_ϕ . Aus der Integraldarstellung in (3.4) erkennt man durch mehrfache partielle Integration, dass $\gamma_g(p) \in \mathbb{Q}$ für alle $p \in \mathbb{Z}_+^2$ gilt.

Durch direkte Abschätzung in (3.4) folgt für alle $p_2 \in \mathbb{Z}_+$

$$(3.8) \quad \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \gamma_g(p_1, p_2) = 0.$$

Mit (3.5) folgt hieraus für alle $p_1 \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{p_2 \rightarrow \infty} \gamma_g(p_1, p_2) = 1.$$

Aus (3.5) folgt mit (3.6) die Rekursionsformel

$$(3.9) \quad \gamma_g(p_1, p_2) = \frac{\Gamma(p_1 + p_2 + 2)}{\Gamma(p_1 + 2)\Gamma(p_2 + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{p_1+p_2+2} + \gamma_g(p_1 + 1, p_2)$$

und hieraus mit Hilfe von (3.5)

$$(3.10) \quad \gamma_g(p_1, p_2) = \gamma_g(p_1, p_2 + 1) - \frac{\Gamma(p_1 + p_2 + 2)}{\Gamma(p_2 + 2)\Gamma(p_1 + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{p_1+p_2+2}$$

Also ist für festes $p_2 \in \mathbb{Z}_+$ (bzw. $p_1 \in \mathbb{Z}_+$) die Folge $(\gamma_g(p_1, p_2))_{p_1=0}^\infty$ (bzw. $(\gamma_g(p_1, p_2))_{p_2=0}^\infty$) streng monoton fallend (bzw. wachsend).

Sei nun $x \in (0, \frac{1}{2})$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es wegen (3.8) ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt

$$\gamma_g(k, 1) < x.$$

Wegen der streng Monotonieaussagen und (3.7) gibt es genau ein $p_2(k) \in \mathbb{N}$ mit $p_2(k) < k$ und

$$\gamma_g(k, p_2(k)) \leq x < \gamma_g(k, p_2(k) + 1).$$

Mit (3.10) folgt

$$\begin{aligned} |x - \gamma_g(k, p_2(k))| &\leq \gamma_g(k, p_2(k) + 1) - \gamma_g(k, p_2(k)) \\ &\leq \binom{k + p_2(k) + 1}{p_2(k) + 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+p_2(k)+2}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 3.6 zeigt man, dass es eine konstante $C > 0$ gibt mit

$$|x - \gamma_g(k, p_2(k))| \leq \frac{C}{\sqrt{k}} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Es folgt

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \overline{\{\gamma_g(p) : p \in \mathbb{Z}_+^2\}}.$$

Mit Hilfe von (3.5) erhält man ebenfalls

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset \overline{\{\gamma_g(p) : p \in \mathbb{Z}_+^2\}}.$$

Damit folgt

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \overline{\sigma_p(T_\phi)} = [0, 1].$$

□

3.2. Quasi-parabolischer Fall

Eine Funktion $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ wird *quasi-parabolisch* genannt, falls gilt

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \phi(z) &= \phi(|z_1|, \dots, |z_{n-1}|, i|z'|^2) \\ &= a(|z_1|, \dots, |z_{n-1}|) \quad \text{für alle } z \in \partial D_n. \end{aligned}$$

Satz 3.7. Sei $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ von der Gestalt (3.11). Dann ist der Toeplitz-operator T_ϕ auf $H^2(D_n)$ unitär äquivalent zum Diagonaloperator $\text{Diag}(M_{\gamma_a}) = RT_\phi R^* \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+)))$, wobei R und R^* im Abschnitt 2.2 definiert sind. Die Folge $\gamma_a = \{\gamma_a(p', \lambda)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, lässt sich darstellen als

$$\gamma_a(p', \lambda) = \frac{(2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} a(\sqrt{r'}) r'^{p'} e^{-2\lambda|r'|_1} dr',$$

wobei $\sqrt{r'} = (\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{n-1}})$ und $|r'|_1 = r_1 + \dots + r_{n-1}$.

BEWEIS. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von [37, Theorem 10.2]. Der Operator T_ϕ ist offensichtlich unitär äquivalent zu $RT_\phi R^*$. Wegen $R^*R = P$ und $RR^* = I$ folgt

$$RT_\phi R^* = RP\phi PR^* = R(R^*R)\phi(R^*R)R^* = R\phi R^*.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} Ra(r')R^* &= R_0^* U_2 U_1 U_0 a(r') U_0^{-1} U_1^{-1} U_2^{-1} R_0 \\ &= R_0^* a(r') R_0 =: T. \end{aligned}$$

Sei $\{c_{p'}(\cdot)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \in l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}_+))$. Dann mit $c := \{c_{p'}(\lambda)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$ folgt

$$\begin{aligned} Tc &= R_0^* \left\{ a(r') \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) \left(\frac{2^{n-1} (2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} \right)^{\frac{1}{2}} r'^{p'} e^{-\lambda|r'|^2} c_{p'}(\lambda) \right\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \\ &= \left\{ \frac{2^{n-1} (2\lambda)^{|p'|+n-1}}{p'!} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} a(r') r'^{2p'} e^{-2\lambda|r'|^2} c_{p'}(\lambda) r' dr' \right\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \end{aligned}$$

und durch eine Variablensubstitution ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Korollar 3.8. Sei die Voraussetzung des obigen Satzes erfüllt. Dann folgt

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \overline{\cup_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \text{ran } \gamma_a(p', \cdot)}.$$

BEWEIS. Sei $z \in \sigma(T_\phi) \setminus \sigma_e(T_\phi)$. Da T_ϕ ein normaler Operator ist, ist z ein isolierter Punkt von $\sigma(T_\phi)$ und somit ein Eigenwert von T_ϕ von endlicher Vielfachheit [32, Proposition 10]. Da für festes $p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ die Funktion $\gamma_a(p', \cdot)$ eine stetige Funktion aus $L^2(\mathbb{R}_+)$ ist, kann der Multiplikationsoperator $M_{\gamma_a(p', \cdot)}$ keine Eigenwerte endlicher Vielfachheit besitzen. Daher gilt $\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi)$. $\square$

Für die Veranschaulichung betrachten wir einige Beispiele. Aus Vereinfachungsgründen schränken wir uns auf den Fall $n = 2$ ein.

Beispiel 3.9. Sei

$$\phi(z_1, z_2) = a(|z_1|), \quad (z_1, z_2) \in \partial D_2 \quad \text{mit} \quad a(\sqrt{r}) = \chi_{[0,1)}(r), \quad r \in \mathbb{R}_+.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\gamma_a(p, \lambda) &= \frac{(2\lambda)^{p+1}}{p!} \int_0^\infty a(\sqrt{r}) r^p e^{-2\lambda r} dr \\ &= \frac{(2\lambda)^{p+1}}{p!} \left[\frac{p!}{(2\lambda)^{p+1}} - \sum_{k=0}^p \frac{p!}{(p-k)!} \frac{e^{-2\lambda}}{(2\lambda)^{k+1}} \right] \\ &= 1 - e^{-2\lambda} \sum_{j=0}^p \frac{(2\lambda)^j}{j!}.\end{aligned}$$

Für festes $p \in \mathbb{Z}_+$ ergibt sich also

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma_a(p, \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(p, \lambda) = 1.$$

Da für festes $p \in \mathbb{Z}_+$ die Funktion $\gamma_a(p, \cdot)$ stetig in $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist, nimmt $\gamma_a(p, \cdot)$ nach dem Zwischenwertsatz jeden Wert zwischen 0 und 1 an.

Ferner gilt für festes $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \gamma_a(p, \lambda) = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_a(p, \lambda) = 0$$

und somit folgt

$$\sigma(T_\phi) = \overline{\cup_{p \in \mathbb{Z}_+} \text{ran } \gamma_a(p, \cdot)} = [0, 1].$$

Beispiel 3.10. Sei

$$\phi(z) = a(|z_1|), \quad z \in \partial D_2 \quad \text{mit} \quad a(\sqrt{r}) = e^{2ir}, \quad r \in \mathbb{R}_+.$$

Die Funktion a ist stetig im Punkt $r = 0$ und hat eine Unstetigkeitsstelle in ∞ mit $\text{ess-ran } a = \mathbb{T}$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\gamma_a(p, \lambda) &= \frac{(2\lambda)^{p+1}}{p!} \int_0^\infty e^{-2(\lambda-i)r} dr \\ &= \frac{\lambda^{p+1}}{(\lambda-i)^{p+1}} \frac{1}{p!} \int_0^\infty e^{-s} s^p ds \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-i} \right)^{p+1} \\ &= \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} \right)^{\frac{p+1}{2}} e^{i(p+1) \arctan\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt für festes $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(p, \lambda) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma_a(p, \lambda) = 0.$$

Speziell für $\lambda = \sqrt{p}$, $p \in \mathbb{Z}_+$ ergibt sich

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\gamma_a(p, \lambda)| = e^{-1/2} < 1.$$

Für festes p ist das Bild von $\gamma_a(p, \cdot)$ also eine Spirale, die vom Punkt $z = 0$ startet und gegen den Punkt $z = 1$ strebt für $\lambda \rightarrow \infty$. Diese Spirale verläuft innerhalb der Kreisscheibe, und bei wachsendem p wird die Spirale länger und dichter. Siehe Abbildung 3.1.

Nun zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{R} := \left\{ \left(\frac{\lambda}{\lambda - i} \right)^{p+1} : \lambda > 0, p \in \mathbb{Z}_+ \right\}$ dicht in $\overline{\mathbb{D}}$ liegt. Mit der Variablensubstitution $\theta := \arctan \left(\frac{1}{\lambda} \right)$ gilt

$$\mathcal{R} = \left\{ (\cos \theta)^{p+1} e^{i(p+1)\theta} : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, p \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Sei $z = r e^{i\varphi} \in \mathbb{D}$ beliebig mit $0 < r < 1$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$, und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim_{p \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{p+1}} = 1$ können wir $p_0 \in \mathbb{Z}_+$ so wählen, dass für alle $p \geq p_0$ und $\theta_p := \arccos r^{\frac{1}{1+p}}$ gilt

$$0 < \theta_p < \theta_p + \frac{2\pi}{p+1} < \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

Sei $p \geq p_0$ beliebig. Zu φ existiert ein $\theta_* \in \left[\theta_p, \theta_p + \frac{2\pi}{p+1} \right]$ mit

$$(p+1)\theta_* \equiv \varphi \pmod{2\pi}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \left| z - (\cos \theta_*)^{p+1} e^{i(p+1)\theta_*} \right| &= |(\cos \theta_p)^{p+1} - (\cos \theta_*)^{p+1}| \\ &= |\theta_p - \theta_*| (p+1) (\cos \xi)^p \sin(\xi) \\ &< \frac{2\pi}{p+1} (p+1) \xi \end{aligned}$$

für ein ξ mit $0 < \theta_p < \xi < \theta_* < \theta_p + \frac{2\pi}{p+1} < \frac{\epsilon}{2\pi}$. Also gilt

$$\left| z - (\cos \theta_*)^{p+1} e^{i(p+1)\theta_*} \right| < \epsilon.$$

Folglich ist

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Wie im quasi-elliptischen Fall zeigen wir, dass $\sigma_e(T_\phi)$ für $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ von der Gestalt (3.11) nicht immer zusammenhängend ist.

Beispiel 3.11. Sei

$$\phi(z_1, z_2) = a(|z_1|), \quad (z_1, z_2) \in \partial D_2 \quad \text{mit} \quad a(\sqrt{r}) = r^i = e^{i \ln r}, \quad r \in \mathbb{R}_+.$$

Dann ist ess-ran $\phi = \mathbb{T}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \gamma_a(p, \lambda) &= \frac{(2\lambda)^{p+1}}{p!} \int_0^\infty r^{p+i} e^{-2\lambda r} dr \\ &= \frac{1}{(2\lambda)^{2i} p!} \int_0^\infty t^{p+i} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{(2\lambda)^{2i}} \frac{\Gamma(p+i+1)}{p!}. \end{aligned}$$

Für $p \rightarrow \infty$ folgt aus der Stirling-Formel

$$\frac{\Gamma(p+i+1)}{p!} \sim p^i.$$

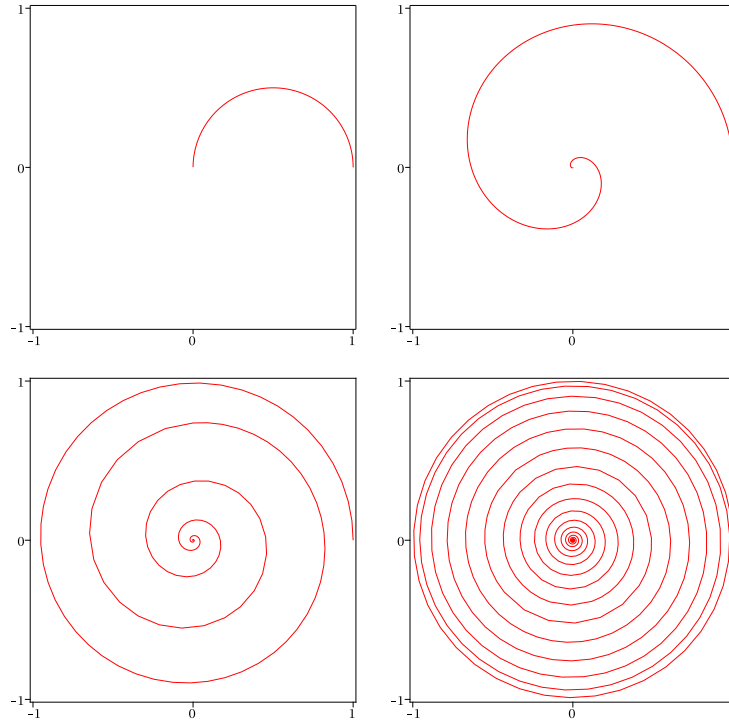


ABBILDUNG 3.1. Funktion $\gamma_a(p, \lambda)$ für $p = 0$, $p = 10$, $p = 100$ und $p = 1000$.

Daher ist die Menge der Häufungspunkte von $\frac{\Gamma(p+i+1)}{p!}$ die Einheitskreislinie $\mathbb{T}$. Für festes $p \in \mathbb{Z}_+$ ist das Bild von $\gamma_a(p, \cdot)$ der Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $\left| \frac{\Gamma(p+i+1)}{p!} \right|$. Somit ist die Menge der Häufungspunkte von $\{\gamma_a(p, \lambda) : p \in \mathbb{Z}_+, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ die Vereinigung von Kreisen $\mathbb{T}_p$ mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius

$$r_p = \left| \frac{\Gamma(p+i+1)}{p!} \right| = \left| \frac{(p+i)(p-1+i) \cdots i \Gamma(i)}{p(p-1) \cdots 1} \right|, \quad p \in \mathbb{Z}_+$$

mit

$$\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = 1.$$

Siehe Abbildung 3.2. Daraus folgt, dass $\sigma_e(T_\phi)$ nicht zusammenhängend ist.

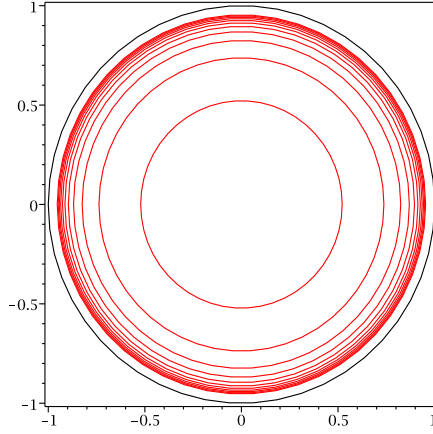
3.3. Nilpotenter Fall

Wir erinnern an die nilpotente Gruppe $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, die auf D_n durch

$$\tau_{(b', h)} : (z', z_n) \mapsto (z' + b', z_n + h + 2i \langle z', b' \rangle + i|b'|^2)$$

für $(b', h) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ operiert. Für jedes $g = (b', h) \in G := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ lässt sich die Abbildung $\tau_g|_{\partial D_n}$ zu einem Diffeomorphismus auf ∂D_n erweitern.

Wir notieren, dass die Punkte $\text{Im} z'$ und $\text{Im} z_n - |z'|^2$ unter der G -Operation invariant bleiben. Da auf ∂D_n die Zahl $\text{Im} z_n - |z'|^2$ verschwindet, nennen wir eine

ABBILDUNG 3.2. Die ersten 10 Kreise und $\mathbb{T}$.

Funktion $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ nilpotent, falls gilt

$$(3.12) \quad \phi(z) = \phi(i\operatorname{Im}z', i|\operatorname{Im}z'|^2) = a(\operatorname{Im}z') \quad \text{für alle } z \in \partial D_n.$$

Satz 3.12. Sei $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ eine nilpotente Funktion. Dann ist der Toeplitzoperator T_ϕ auf $H^2(D_n)$ unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator $M_{\gamma_a} = RT_\phi R^* \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+))$, wobei R und R^* im Abschnitt 2.3 definiert sind. Die Funktion γ_a ist gegeben durch

$$(3.13) \quad \gamma_a(u', \lambda) = \pi^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v')\right) e^{-|v'|^2} dv'$$

für alle $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

BEWEIS. Der Satz wird genauso wie in [37, Theorem 10.3] bewiesen. Der Operator T_ϕ ist unitär äquivalent zu $RT_\phi R^*$. Wegen $R^*R = P$ und $RR^* = I$ gilt

$$RT_\phi R^* = RP\phi PR^* = R(R^*R)\phi(R^*R)R^* = R\phi R^*.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} R\phi(z', z_n)R^* &= R_0^*U_3U_2U_1U_0a(\operatorname{Im}z')U_0^{-1}U_1^{-1}U_2^{-1}U_3^{-1}R_0 \\ &= R_0^*U_3U_2U_1a(\operatorname{Im}z')U_1^{-1}U_2^{-1}U_3^{-1}R_0 \\ &= R_0^*U_3a(\operatorname{Im}z')U_3^{-1}R_0 \\ &= R_0^*a\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v')\right)R_0 =: A. \end{aligned}$$

Für $\varpi \in L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$ folgt

$$\begin{aligned} A\varpi(u', \lambda) &= R_0^* \left[a\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v')\right) \pi^{-\frac{n-1}{4}} e^{-\frac{|v'|^2}{2}} \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) \varpi(u', \lambda) \right] \\ &= \pi^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v')\right) e^{-|v'|^2} \varpi(u', \lambda) dv' \\ &= \gamma_a(u', \lambda) \cdot \varpi(u', \lambda). \end{aligned}$$

□

Korollar 3.13. *Sei die Voraussetzung des obigen Satzes erfüllt. Dann folgt*

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \overline{\text{ran } \gamma_a}.$$

BEWEIS. Da die Funktion γ_a in $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$ stetig ist, kann der Multiplikationsoperator M_{γ_a} keine Eigenwerte besitzen. Daher ist $\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi)$. $\square$

Bemerkung 3.14. Beachte, dass der Beitrag des Integrals (3.13) für festes $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\lambda \rightarrow \infty$ durch die Werte von a im Nullpunkt und der Beitrag für $\lambda \rightarrow 0$ durch die Werte von a in einer Umgebung von ∞ bestimmt wird. Falls a Grenzwerte in den Punkten 0 und ∞ besitzt, folgt also für alle $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(u', \lambda) = \lim_{y \rightarrow 0} a(y) \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma_a(u', \lambda) = \lim_{y \rightarrow \infty} a(y).$$

Beispiel 3.15. Sei $\phi(z_1, z_2) = a(\text{Im} z_1)$ für alle $(z_1, z_2) \in \partial D_2$ mit

$$a(y) = \chi_{[0,1)}(y) + i\chi_{[2,3)}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma_a(u, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\chi_{[0,1)} \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u+v) \right) + i\chi_{[2,3)} \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u+v) \right) \right] e^{-v^2} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_u^{u+2\sqrt{\lambda}} e^{-v^2} dv + i \int_{u+4\sqrt{\lambda}}^{u+6\sqrt{\lambda}} e^{-v^2} dv \right]. \end{aligned}$$

Für festes $\lambda \in \mathbb{R}_+$ folgt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \gamma_a(u, \lambda) = 0 \quad , \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} \gamma_a(u, \lambda) = 0$$

und für festes $u \in \mathbb{R}$ folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma_a(u, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(u, \lambda) = 1/2 - 1/2 \cdot \text{erf}(u),$$

wobei erf die Gaußsche Fehlerfunktion

$$\text{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{C}$$

bezeichnet.

Speziell ergibt sich für $u = s - 4\sqrt{\lambda}$, $s \in \mathbb{R}$

$$\gamma_a(u, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{s-4\sqrt{\lambda}}^{s-2\sqrt{\lambda}} e^{-v^2} dv + i \int_s^{s+2\sqrt{\lambda}} e^{-v^2} dv \right]$$

und so folgt für festes $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(u, \lambda) = i/2 - i/2 \cdot \text{erf}(s).$$

Insbesondere erhalten wir

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(-5\sqrt{\lambda}, \lambda) = i, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(-4\sqrt{\lambda}, \lambda) = \frac{i}{2},$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(-3\sqrt{\lambda}, \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(-2\sqrt{\lambda}, \lambda) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(-\sqrt{\lambda}, \lambda) = 1.$$

Also ist

$$[0, 1] \cup [0, i] \subset \sigma(T_\phi).$$

Wegen der Symmetrie und Monotonieeigenschaft von $v \mapsto e^{-v^2}$ liegt $\gamma_a(u, \lambda)$ genau dann auf dem Strahl $S := \{x + ix : x \geq 0\}$, wenn die beiden Intervalle $[u, u + 2\sqrt{\lambda}]$ und $[u + 4\sqrt{\lambda}, u + 6\sqrt{\lambda}]$ symmetrisch zum Nullpunkt liegen. Beachte, dass die beiden Intervalle die Länge $2\sqrt{\lambda}$ haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn $-(u + 2\sqrt{\lambda}) = u + 4\sqrt{\lambda}$, d.h. wenn $u = -3\sqrt{\lambda}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \gamma_a(-2\sqrt{\lambda}, \lambda) &= \operatorname{Im} \gamma_a(-\sqrt{\lambda}, \lambda) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-3\sqrt{\lambda}}^{-\sqrt{\lambda}} e^{-v^2} dv \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}(3\sqrt{\lambda}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda}) \right) \\ &=: F(\sqrt{\lambda}). \end{aligned}$$

Der Wert $F(\sqrt{\lambda})$ wird maximal für $\sqrt{\lambda_0} := \left(\frac{\log 3}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,2422 < \frac{1}{4}$. Daraus folgt

$$\sigma(T_\phi) \cap S = [0, F(\sqrt{\lambda_0})(1+i)].$$

Insbesondere ist $\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \notin \sigma(T_\phi)$. Da

$$\operatorname{conv}(\operatorname{ess-ran})a = \Delta(0, 1, i)$$

gilt, wobei $\operatorname{conv}(\operatorname{ess-ran})a$ die abgeschlossene konvexe Hülle von $\operatorname{ess-ran} a$ und $\Delta(0, 1, i)$ das Dreieck mit den Eckpunkten 0, 1 und i ist, ist $\sigma(T_\phi)$ eine echte Teilmenge von $\Delta(0, 1, i)$. Folglich gilt

$$[0, 1] \cup [0, i] \subset \sigma(T_\phi) \subset \Delta(0, 1, i).$$

Beispiel 3.16. Sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte Teilmenge mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ und sei

$$\phi(z) = a(\operatorname{Im} z'), \quad z \in \partial D_n \quad \text{mit} \quad a(y) = \chi_K(y), \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Dann gilt für alle $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \gamma_a(u', \lambda) &= \pi^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_K \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v') \right) e^{-|v'|^2} dv' \\ &= \pi^{-\frac{n-1}{2}} \int_{2\sqrt{\lambda}K+u'} e^{-|v'|^2} dv'. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma_a(u', \lambda) = 0 \quad \text{für alle} \quad u' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Speziell ergibt sich für $u' = -2\sqrt{\lambda}w'$ mit $w' \in \operatorname{int} K$ fest, dass

$$\gamma_a(u', \lambda) = \pi^{-\frac{n-1}{2}} \int_{2\sqrt{\lambda}(K-w')} e^{-|v'|^2} dv',$$

und damit folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_a(-2\sqrt{\lambda}w', \lambda) = 1.$$

Da die Funktion γ_a in u' und λ stetig ist, nimmt sie nach dem Zwischenwertsatz jeden Wert zwischen 0 und 1 an. Folglich gilt

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = [0, 1].$$

Bemerkung 3.17. Sei $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ in der Form (3.12). Da die Funktion γ_a in $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$ stetig ist, ist das Spektrum von $M_{\gamma_a} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+))$ und somit von T_ϕ immer zusammenhängend.

3.4. Quasi-nilpotenter Fall

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n-2$ wird die Notation $z = (z'', w', z_n)$ für Punkte von D_n verwendet, wobei $z'' \in \mathbb{C}^k$ und $w' \in \mathbb{C}^{n-k-1}$. Die quasi-nilpotente Gruppe $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}$ operiert auf D_n durch

$$\tau_{(t'', b', h)} : (z'', w', z_n) \mapsto (t'' z'', w' + b', z_n + h + 2i \langle w', b' \rangle + i|b'|^2)$$

für alle $(t'', b', h) \in G := \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}$. Für jedes $g = (t'', b', h) \in G$ lässt sich die Abbildung $\tau_g|_{\partial D_n}$ zu einem Diffeomorphismus auf ∂D_n erweitern.

Wir notieren, dass $r_j := |z_j|$, $j = 1, \dots, k$, $y' := \operatorname{Im} w'$ und $\operatorname{Im} z_n - |w'|^2$ unter der G -Operation invariant bleiben. Da auf ∂D_n die Gleichheit $\operatorname{Im} z_n - |w'|^2 = |z''|^2$ gilt, nennen wir eine Funktion $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ *quasi-nilpotent*, falls gilt

$$\phi(z) = a(r_1, \dots, r_k, y', |r''|^2) \quad \text{für alle } z \in \partial D_n,$$

wobei $|r''|^2 = r_1^2 + \dots + r_k^2$.

Satz 3.18. Sei $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ eine quasi-nilpotente Funktion. Dann ist T_ϕ auf $H^2(D_n)$ unitär äquivalent zum Diagonaloperator $\operatorname{Diag}(M_{\gamma_a}) = RT_\phi R^* \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+)))$, wobei R und R^* im Abschnitt 2.4 definiert sind. Die Folge $\gamma_a = \{\gamma_a(p'', u', \lambda)\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k}$, $(u', \lambda) \in \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+$, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma_a(p'', u', \lambda) = & \pi^{-\frac{n-k-1}{2}} \frac{2^k (2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} \\ & \cdot \int_{\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}} a\left(\sqrt{r''}, \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v'), |r''|_1\right) \\ & \cdot r''^{p''} e^{-2\lambda|r''|_1 - |v'|^2} r'' dr'' dv', \end{aligned}$$

wobei $|r''|_1 = r_1 + \dots + r_k$ und $\sqrt{r''} = (\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_k})$.

BEWEIS. Wie im Beweis von [37, Theorem 10.4] ist der Operator T_ϕ offensichtlich unitär äquivalent zu $RT_\phi R^* = R\phi R^*$. Es gilt

$$\begin{aligned} Ra(r'', y', |r''|^2)R^* &= R_0^* U_3 U_2 U_1 U_0 a(r'', y', |r''|^2) U_0^{-1} U_1^{-1} U_2^{-1} U_3^{-1} R_0 \\ &= R_0^* U_3 U_2 U_1 a(r'', y', |r''|^2) U_1^{-1} U_2^{-1} U_3^{-1} R_0 \\ &= R_0^* U_3 a(r'', y', |r''|^2) U_3^{-1} R_0 \\ &= R_0^* a\left(r'', \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u'' + v''), |r''|^2\right) R_0 =: T. \end{aligned}$$

Für alle $\{c_{p''}(\cdot, \cdot)\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k} \in l^2(\mathbb{Z}_+^k, L^2(\mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}_+))$ folgt

$$\begin{aligned} T \{c_{p''}(u'', \lambda)\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k} = & R_0^* \left\{ a\left(r'', \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u'' + v''), |r''|^2\right) \pi^{-\frac{n-k-1}{4}} \chi_{\mathbb{Z}_+^k}(p'') \chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) \right. \\ & \cdot \left. \left(\frac{2^{k-1} (2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} \right)^{\frac{1}{2}} r''^{p''} e^{-\lambda|r''|^2 - \frac{|v''|^2}{2}} c_{p''}(u'', \lambda) \right\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k}, \end{aligned}$$

so dass

$$T \{c_{p''}(u'', \lambda)\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k} = \left\{ \pi^{-\frac{n-k-1}{2}} \left(\frac{2^{k-1}(2\lambda)^{|p''|+k}}{p''!} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}} a \left(r'', \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(-u' + v'), |r''|^2 \right) \cdot r''^{2p''} e^{-2\lambda|r''|^2 - |v'|^2} c_{p''}(u', \lambda) r'' dr'' dv' \right\}_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k},$$

und durch eine Variablensubstitution folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 3.19. *Sei die Voraussetzung des obigen Satzes erfüllt. Dann folgt*

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \overline{\cup_{p'' \in \mathbb{Z}_+^k} \text{ran } \gamma_a(p'', \cdot, \cdot)}.$$

BEWEIS. Analog zum Beweis von Korollar 3.8. $\square$

3.5. Quasi-hyperbolischer Fall

Wir erinnern an die quasi-hyperbolische Gruppe $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, die auf D_n durch

$$\tau_{(t', r)} : (z', z_n) \mapsto (\sqrt{r}t'z', rz_n)$$

für $(t', r) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ operiert. Die Abbildung $\tau_{(t', r)}|_{\partial D_n}$ lässt sich zu einem Diffeomorphismus auf ∂D_n erweitern.

Eine Funktion $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ wird *quasi-hyperbolisch* genannt, falls ϕ unter dieser Gruppenoperation invariant bleibt.

Wir wollen solche invariante Funktionen beschreiben. Dazu betrachten wir die Gruppe der nicht isotropen Dilatationen $\{\delta_r\}$, $r \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \delta_r : \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (q', x) &\mapsto (\sqrt{r}q', rx) \end{aligned}$$

und die Menge

$$\Sigma_+ = \{(q', x) \in \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2 + |x| = 1\}.$$

Nun hängt jede Funktion $\tilde{a}(q_1, \dots, q_{n-1}, x)$, welche auf $\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}$ nicht isotrop homogen vom Grad Null bezüglich der nicht isotropen Dilatationen δ_r ist, von ihren Werten auf Σ_+ ab. Schreibt man $x = |x| \cdot \text{sign}(x)$, so ist $\tilde{a}$ von der Gestalt

$$\tilde{a}(q', |x|, \text{sign}(x)) = \tilde{a} \left(\frac{q_1}{\sqrt{|q'|^2 + |x|}}, \dots, \frac{q_{n-1}}{\sqrt{|q'|^2 + |x|}}, \frac{|x|}{|q'|^2 + |x|}, \text{sign}(x) \right),$$

wobei $|q'|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2$.

Wir parametrisieren die Punkte von Σ_+ durch die Punkte $s = (s_1, \dots, s_{n-1}, \text{sign}(x))$ durch

$$s_k = \frac{q_k}{\sqrt{|q'|^2 + |x|}}, \quad (1 - |s'|^2) = \frac{|x|}{|q'|^2 + |x|}, \quad \text{sign}(x) \in \{-1, 1\},$$

wobei $|s'|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} s_k^2$.

So ist jede invariante Funktion auf Σ_+ von der Gestalt $a(s', \text{sign}(x))$, wobei $s' = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \iota(\mathbb{B}_{n-1})$ und $\text{sign}(x) \in \{-1, 1\}$.

Wir benötigen die Identifikation

$$(3.14) \quad a(s', \text{sign}(x)) \mapsto (a_1(s'), a_2(s')),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1(s') &= a(s', \text{sign}(x))|_{x>0}, \\ a_2(s') &= a(s', \text{sign}(x))|_{x<0}. \end{aligned}$$

So ist jede quasi-hyperbolische Funktion $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ genau in der Form

$$(3.15) \quad \phi(z', z_n) = a \left(\frac{|z_1|}{\sqrt{|z'|^2 + |\text{Re} z_n|}}, \dots, \frac{|z_{n-1}|}{\sqrt{|z'|^2 + |\text{Re} z_n|}}, \text{sign}(\text{Re} z_n) \right),$$

wobei mittels der Identifikation (3.14), die Funktionen a_1 und a_2 auf $\iota(\mathbb{B}_{n-1})$ definiert sind.

Satz 3.20. *Sei $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ von der Gestalt (3.15). Dann ist der Toeplitz-operator T_ϕ auf $H^2(D_n)$ unitär äquivalent zum Diagonaloperator*

$$RT_\phi R^* = (\text{Diag}(M_{\gamma_{a_1}}), \text{Diag}(M_{\gamma_{a_2}})) \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))) \oplus \mathcal{L}(l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))),$$

wobei R und R^* in Satz 2.10 erklärt sind. Die Folgen $\gamma_{a_1} = \{\gamma_{a_1}(p', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$ und $\gamma_{a_2} = \{\gamma_{a_2}(p', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$, $\xi \in \mathbb{R}$, sind gegeben durch

$$(3.16) \quad \gamma_{a_1}(p', \xi) = \alpha_{p'}^{-2}(\xi) \int_{\iota(B_{n-1})} a_1(s') |\vartheta_{p'}^-(s', \xi)|^2 s' ds',$$

$$(3.17) \quad \gamma_{a_2}(p', \xi) = \alpha_{p'}^{+2}(\xi) \int_{\iota(B_{n-1})} a_2(s') |\vartheta_{p'}^+(s', \xi)|^2 s' ds',$$

wobei $\alpha_{p'}^-(\xi)$, $\alpha_{p'}^+(\xi)$, $\vartheta_{p'}^-(s', \xi)$ und $\vartheta_{p'}^+(s', \xi)$ durch (2.27), (2.28), (2.29) bzw. (2.30) gegeben sind.

BEWEIS. Wir gehen wie im Beweis von [37, Theorem 10.5] vor. Der Operator T_ϕ ist offensichtlich unitär äquivalent zu $RT_\phi R^*$. Wegen $R^*R = P$ und $RR^* = I$ gilt

$$RT_\phi R^* = RP\phi PR^* = R(R^*R)\phi(R^*R)R^* = R\phi R^*.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} R\phi(z', z_n)R^* &= R_0^* U_1 U_0 \phi(z', z_n) U_0^{-1} U_1^{-1} R_0 \\ &= R_0^* U_1(a_1(s'), a_2(s')) U_1^{-1} R_0 \\ &= R_0^*(a_1(s'), a_2(s')) R_0 =: T. \end{aligned}$$

Für alle $(\{\dot{c}_{p'}(\cdot)\}, \{\ddot{c}_{p'}(\cdot)\}) \in l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R})) \oplus l^2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L^2(\mathbb{R}))$ folgt

$$\begin{aligned} &T(\{\dot{c}_{p'}(\xi)\}, \{\ddot{c}_{p'}(\xi)\}) \\ &= R_0^* \left(\{a_1(s') \dot{c}_{p'}(\xi) g_0^1(p', s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}, \{a_2(s') \dot{c}_{p'}(\xi) g_0^2(p', s', \xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \right) \\ &= \left(\{\gamma_{a_1}(p', \xi) \cdot \dot{c}_{p'}(\xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}, \{\gamma_{a_2}(p', \xi) \cdot \ddot{c}_{p'}(\xi)\}_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

□

Korollar 3.21. Sei $\phi \in L^\infty(\partial D_n, d\beta)$ von der Gestalt (3.15). Dann ist der Toeplitzoperator T_ϕ stetig auf $H^2(D_n)$ und das Spektrum ist gegeben durch

$$\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \overline{\bigcup_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \text{ran } \gamma_{a_1}(p', \cdot)} \cup \overline{\bigcup_{p' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \text{ran } \gamma_{a_2}(p', \cdot)}.$$

BEWEIS. Analog zum Beweis von Korollar 3.8. □

Beispiel 3.22. Sei $n = 2$. Für $0 < \epsilon < 1$ betrachten wir die Funktionen

$$a(s, \text{sign}(x)) = \chi_{[0, \epsilon]}(s), \quad s \in [0, 1]$$

und

$$\phi(z_1, z_2) = a\left(\frac{|z_1|}{\sqrt{|z_1|^2 + |\text{Re} z_2|}}, \text{sign}(\text{Re} z_2)\right), \quad z = (z_1, z_2) \in \partial D_2.$$

Dann gilt für alle $p \in \mathbb{Z}_+$ und $\xi \in \mathbb{R}$

$$\gamma_{a_1}(p, \xi) = \alpha_p^{-2}(\xi) \int_0^\epsilon s^{2p} \left| [1 - (1 - i)s^2]^{-\frac{2+p}{2} + i\xi} \right|^2 s ds$$

und

$$\gamma_{a_2}(p, \xi) = \alpha_p^{+2}(\xi) \int_0^\epsilon s^{2p} \left| [1 - (1 + i)s^2]^{-\frac{2+p}{2} + i\xi} \right|^2 s ds,$$

wobei

$$\alpha_p^\mp(\xi) = \int_0^1 s^{2p} \left| [1 - (1 \mp i)s^2]^{-\frac{2+p}{2} + i\xi} \right|^2 s ds.$$

Mit

$$\left| [1 - (1 \mp i)s^2]^{-\frac{2+p}{2} + i\xi} \right|^2 = r(s, p) u_\pm(s, \xi),$$

wobei

$$r(s, \xi) := ((1 - s^2)^2 + s^4)^{-\frac{2+p}{2}}, \quad u_\pm(s, \xi) = \exp\left(-2\xi \arctan\left(\frac{\pm s^2}{1 - s^2}\right)\right)$$

erhalten wir

$$\gamma_{a_1}(p, \xi) = \frac{\int_0^\epsilon s^{2p} r(s, p) u_+(s, \xi) s ds}{\int_0^1 s^{2p} r(s, p) u_+(s, \xi) s ds} = \frac{1}{1 + \frac{I_+([\epsilon, 1], \xi)}{I_+([0, \epsilon], \xi)}}.$$

Hierbei sei

$$I_\pm(A, \xi) = \int_A s^{2p} r(s, p) u_\pm(s, \xi) s ds \quad \text{für ein Intervall } A \subset [0, 1].$$

Analog schreiben wir

$$\gamma_{a_2}(p, \xi) = \frac{1}{1 + \frac{I_-([\epsilon, 1], \xi)}{I_-([0, \epsilon], \xi)}}.$$

Für $\epsilon < \epsilon_1 < 1$ setzen wir

$$\delta := 2 \arctan\left(\frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2}\right) \quad \text{und} \quad \delta_1 := 2 \arctan\left(\frac{\epsilon_1^2}{1 - \epsilon_1^2}\right).$$

Dann folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}_-$

$$\begin{aligned} \frac{I_+([\epsilon, 1], \xi)}{I_+([0, \epsilon], \xi)} &\geq \frac{I_+([\epsilon_1, 1], \xi)}{I_+([0, \epsilon], \xi)} \\ &\geq \frac{e^{-\delta_1 \xi} \int_{\epsilon_1}^1 s^{2p} r(s, p) s ds}{e^{-\delta \xi} \int_0^\epsilon s^{2p} r(s, p) s ds} \\ &\geq e^{-(\delta_1 - \delta) \xi} C(\epsilon, p) \rightarrow \infty \quad \text{für } \xi \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

wobei $C(\epsilon, p)$ eine Konstante ist, die nur von ϵ und p abhängt. Somit folgt für festes $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\gamma_{a_1}(p, \xi) \rightarrow 0 \quad \text{für } \xi \rightarrow -\infty.$$

Analog ergibt sich für festes $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\gamma_{a_2}(p, \xi) \rightarrow 0 \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty.$$

Außerdem folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}_+$ mit $\delta_2 := 2 \arctan \left(\frac{(\epsilon/2)^2}{1 - (\epsilon/2)^2} \right)$, dass

$$\begin{aligned} \frac{I_+([0, \epsilon], \xi)}{I_+([\epsilon, 1], \xi)} &\geq \frac{I_+([0, \epsilon/2], \xi)}{I_+([\epsilon, 1], \xi)} \\ &\geq \frac{e^{-\delta_2 \xi} \int_0^{\epsilon/2} s^{2p} r(s, p) s ds}{e^{-\delta \xi} \int_\epsilon^1 s^{2p} r(s, p) s ds} \\ &\geq e^{(\delta - \delta_2) \xi} C(\epsilon, p) \rightarrow \infty \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{I_+([\epsilon, 1], \xi)}{I_+([0, \epsilon], \xi)} \rightarrow 0 \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty.$$

Somit folgt für festes p

$$\gamma_{a_1}(p, \xi) \rightarrow 1 \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty.$$

Analog ergibt sich für festes $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\gamma_{a_2}(p, \xi) \rightarrow 1 \quad \text{für } \xi \rightarrow -\infty.$$

Die Stetigkeit der Funktionen $\gamma_{a_1}(p, \cdot)$ und $\gamma_{a_2}(p, \cdot)$ in $\xi \in \mathbb{R}$ für festes $p \in \mathbb{Z}_+$ liefert dann

$$\overline{\gamma_{a_1}(p, \mathbb{R})} = [0, 1] \quad \text{und} \quad \overline{\gamma_{a_2}(p, \mathbb{R})} = [0, 1].$$

Folglich folgt aus Korollar 3.21, dass

$$\sigma_e(T_\phi) = [0, 1].$$

Bemerkung 3.23. Da die Folge γ_a von einem diskreten Parameter abhängt liegt die Vermutung nahe, dass das Spektrum von T_ϕ nicht immer zusammenhängend ist. Leider bereitet die Behandlung mit der Integraldarstellung von γ_a Schwierigkeiten, ein Beispiel zu finden.

3.6. Symbolklasse von Davie und Jewell

Nach einer Anregung von Davie und Jewell in [16] wollen wir uns einer Verallgemeinerung des quasi-elliptischen Falls zuwenden. Wir betrachten Symbole $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ mit der Eigenschaft

$$(3.18) \quad \phi(z) = \phi(e^{i\theta}z) \quad \text{für alle } \theta \in [0, 2\pi] \text{ und } z \in \mathbb{S}_n.$$

Obwohl T_ϕ kein normaler Operator mehr sein muss, lässt sich einiges über T_ϕ und sein Spektrum aussagen.

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X)$, wobei X ein Banachraum ist, hat die eindeutige Fortsetzungseigenschaft (EFE) in einem Punkt $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, falls für jede offene Menge G mit $\lambda_0 \in G$ gilt: Ist $f : G \rightarrow X$ eine holomorphe Funktion mit $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$, so ist $f \equiv 0$ auf G . Man sagt T hat die eindeutige Fortsetzungseigenschaft, falls T diese Eigenschaft in jedem Punkt $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ hat. Die lokale Resolventenmenge $\rho_T(x)$ von T in x ist definiert als die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ für die eine offene Umgebung U von z und eine analytische Funktion $u : U \rightarrow X$ existiert mit

$$(\xi - T)u(\xi) \equiv x \quad \text{auf } U.$$

Für eine Menge $F \subseteq \mathbb{C}$ definieren wir

$$X_T(F) := \{x \in X : \sigma_T(x) \subset F\},$$

wobei $\sigma_T(x) := \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$ das lokale Spektrum von T in x ist. Zu den Eigenschaften siehe [14].

Ferner sei H_m die Menge aller holomorphen homogenen Polynome vom Grad m in $\mathbb{C}^n$. Die kanonische Orthonormalbasis von $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist $\{e_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$, wobei $e_\alpha(\xi) = c_{n,\alpha} \xi^\alpha$, $\xi \in \mathbb{S}_n$ und $c_{n,\alpha}$ durch (1.2) gegeben ist.

Lemma 3.24. *Ist $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ ein Symbol von der Gestalt (3.18), so gilt:*

- i) H_m ist ein reduzierender invarianter Unterraum für T_ϕ .
- ii) T_ϕ und T_ϕ^* haben die eindeutige Fortsetzungseigenschaft.
- iii) $\sigma(T_\phi) \setminus \sigma_e(T_\phi)$ ist diskret.
- iv) $\sigma_p(T_\phi) = \cup_{m=0}^\infty \sigma(T_\phi|_{H_m})$ ist abzählbar.

BEWEIS. i) Für zwei Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ gilt

$$\langle T_\phi e_\alpha, e_\beta \rangle = \int_{\mathbb{S}_n} \phi(\xi) e_\alpha(\xi) \overline{e_\beta(\xi)} d\sigma(\xi)$$

und so ergibt sich durch Anwendung von [41, Proposition 1.4.7], die Definition (3.18) und der Homogenität von e_α

$$\begin{aligned} \langle T_\phi e_\alpha, e_\beta \rangle &= \int_{\mathbb{S}_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \phi(e^{i\theta}\xi) e_\alpha(e^{i\theta}\xi) \overline{e_\beta(e^{i\theta}\xi)} d\theta d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{S}_n} \phi(\xi) e_\alpha(\xi) \overline{e_\beta(\xi)} d\sigma(\xi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{i|\alpha|\theta} e^{-i|\beta|\theta} d\theta \\ &= \delta_{|\alpha|, |\beta|} \int_{\mathbb{S}_n} \phi(\xi) e_\alpha(\xi) \overline{e_\beta(\xi)} d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Symbol ist mit $i, j \in \mathbb{N}$.

Sei nun $p \in H_m$. Dann folgt

$$\langle T_\phi p, e_\beta \rangle = 0 \quad \text{für } m \neq |\beta|,$$

d.h. $T_\phi p \in H_m$. Unter Verwendung von $T_\phi^* = T_{\bar{\phi}}$ erhalten wir ebenfalls $T_\phi^* p \in H_m$.

ii) Nach i) folgt $T_\phi = \bigoplus_{m=0}^{\infty} S_m$, wobei $S_m = T_\phi|_{H_m}$. Da H_m endlichdimensional ist, besitzt jeder Operator S_m die eindeutige Fortsetzungseigenschaft und so auch T_ϕ . Der adjungierte Operator T_ϕ^* hat ebenfalls die eindeutige Fortsetzungseigenschaft.

iii) Sei $\lambda \in \sigma(T_\phi) \setminus \sigma_e(T_\phi)$. Dann ist $\lambda I - T_\phi$ ein Fredholmoperator mit $\text{ind}(\lambda I - T_\phi) = 0$. Nach [27, Theorem 5.31, IV] existiert eine Umgebung U von λ , so dass für alle $z \in U \setminus \{\lambda\}$ gilt

$$\dim \ker(z - T_\phi) = \text{codim } \text{ran}(z - T_\phi) = k,$$

wobei k unabhängig von z ist. Ist $k > 0$, so hat nach [6, Lemma 5.1] die Funktion

$$z \mapsto \ker(z - T_\phi)$$

auf $U \setminus \{\lambda\}$ eine holomorphe Basis, d.h. es existieren $H^2(\mathbb{B}_n)$ -wertige holomorphe Funktionen $u_1, \dots, u_k$ auf $U \setminus \{\lambda\}$, so dass für alle $z \in U \setminus \{\lambda\}$ die Funktionen $u_1(z), \dots, u_k(z)$ eine Basis von $\ker(z - T_\phi)$ bilden. Daraus folgt

$$u_j(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{\lambda\}$$

und

$$(z - T_\phi)u_j(z) \equiv 0 \quad \text{auf } U \setminus \{\lambda\}$$

für $j = 1, \dots, k$, was der eindeutigen Fortsetzungseigenschaft von T_ϕ widerspricht. Daher ist $k = 0$, und somit ist λ isoliert.

iv) Offensichtlich gilt $\sigma(S_m) = \sigma_p(S_m) \subseteq \sigma_p(T_\phi)$. Umgekehrt sei $\lambda \in \sigma_p(T_\phi)$. Dann gilt für alle $0 \neq f \in H^2(\mathbb{B}_n)$

$$(\lambda - T_\phi)f = 0 \quad \text{genau dann, wenn } (\lambda - T_\phi)P_m f = 0,$$

wobei P_m die orthogonale Projektion auf H_m ist. Aus $f \neq 0$ folgt, dass $P_m f \neq 0$ für wenigstens ein m . Somit ist λ ein Eigenwert von T_ϕ mit Eigenvektor $P_m f$ und die Behauptung folgt. $\square$

Eine Kontraktion $T \in \mathcal{L}(X)$ (d.h. $\|T\| \leq 1$) gehört zur Klasse C_{00} im Sinne von Sz.-Nagy und Foias [34, S. 66], falls beide Folgen $\{T^n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{T^{*n}\}_{n=1}^{\infty}$ gegen 0 in der starken Operator-topologie konvergieren.

Bevor wir ein konkretes Beispiel angeben machen wir folgende Bemerkung.

Bemerkung 3.25. Im Spezialfall, dass das Symbol ϕ in (3.18) nicht mehr von $|z_i|$, $i = 1, \dots, n$ abhängt, lässt sich die Matrixdarstellung von T_ϕ in der Orthonormalbasis $\{e_p : p \in \mathbb{Z}_+\}$ von $H^2(\mathbb{B}_n)$ berechnen. Ist

$$\phi(z_1, z_2) = \phi(\varrho e^{i\theta}, \sqrt{(1 - \varrho^2)} e^{i\eta}) = h(\theta - \eta), \quad \varrho \in [0, 1], \quad \theta, \eta \in [0, 2\pi],$$

wobei $h \in L^\infty([0, 2\pi])$, so gilt

$$\langle T_\phi e_p, e_q \rangle = \delta_{|p|, |q|} \hat{h}(q_1 - p_1) \frac{\Gamma(\frac{p_1 + q_1}{2} + 1) \Gamma(\frac{p_2 + q_2}{2} + 1)}{\sqrt{p_1! p_2! q_1! q_2!}}.$$

Hierbei sind $\hat{h}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von h .

Die Matrixdarstellung von T_ϕ auf H_m bezüglich der kanonischen Orthonormalbasis $e_{0,m}, e_{1,m-1}, \dots, e_{m,0}$ ist

$$\begin{pmatrix} \hat{h}(0)g_{0,0} & \hat{h}(1)g_{0,1} & \dots & \hat{h}(m)g_{0,m} \\ \hat{h}(-1)g_{1,0} & \hat{h}(0)g_{1,1} & \dots & \hat{h}(m-1)g_{1,m} \\ \hat{h}(-2)g_{2,0} & \hat{h}(-1)g_{2,1} & \hat{h}(0)g_{2,2} & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ \hat{h}(-m+1)g_{m-1,0} & \dots & \ddots & \hat{h}(1)g_{m-1,m} \\ \hat{h}(-m)g_{m,0} & & \dots & \hat{h}(-1)g_{m,m-1} & \hat{h}(0)g_{m,m} \end{pmatrix},$$

wobei

$$g_{p_1, q_1} = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+q_1}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{2m-p_1-q_1}{2} + 1\right)}{\sqrt{p_1!(m-p_1)!q_1!(m-q_1)!}}, \quad p_1, q_1 = 0, \dots, m.$$

Beispiel 3.26. Sei

$$\phi(z_1, z_2) = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_1 z_2|} = e^{i(\theta-\eta)}, \quad \theta, \eta \in [0, 2\pi].$$

Die Funktion ϕ ist stetig auf $\mathbb{S}_2 \setminus \{(z_1, z_2) : z_1 = 0 \text{ oder } z_2 = 0\}$ und es gilt:

- a) $H_m = \text{LH}\{e_\alpha \mid |\alpha| = m\}$ ist ein reduzierender invarianter Unterraum für T_ϕ .
- b) T_ϕ und T_ϕ^* haben die eindeutige Fortsetzungseigenschaft.
- c) T_ϕ ist eine C_{00} -Kontraktion.
- d) $\sigma_p(T_\phi) = \cup_{m=0}^\infty \sigma(T_\phi|_{H_m}) = \{0\}$.
- e) $\sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \mathbb{D}$.
- f) $X_{T_\phi}(\{0\})$ liegt dicht in $H^2(\mathbb{B}_2)$.

BEWEIS. a) und b) folgen aus Lemma 3.24. Es gilt $H^2(\mathbb{B}_n) = \bigoplus_{m=0}^\infty H_m$, und T_ϕ lässt sich nach Bemerkung 3.25 darstellen als $T_\phi = \bigoplus_{m=0}^\infty S_m$, wobei $S_m := T_\phi|_{H_m}$ der Operator ist, der durch die $((m+1) \times (m+1))$ -Matrix

$$S_m = \begin{pmatrix} 0 & a_0^{(m)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(m)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & a_{m-1}^{(m)} \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Die Einträge $a_k^{(m)}$, $k = 0, \dots, m-1$ sind gegeben durch

$$a_k^{(m)} := \sqrt{\frac{m-k}{k+1}} \frac{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(m-k + \frac{1}{2}\right)}{k!(m-k)!}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $m - k \in \mathbb{N}$ sehr groß folgt nach der Stirling-Formel

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{m-k} \Gamma(k + \frac{3}{2}) \Gamma(m-k + \frac{1}{2})}{\sqrt{k+1} k! (m-k)!} &\sim \frac{\sqrt{m-k} (k + \frac{1}{2})^{k+1} (m-k - \frac{1}{2})^{m-k}}{\sqrt{k+1} k^{k+\frac{1}{2}} (m-k)^{m-k+\frac{1}{2}}} \\ &\sim \frac{k^{k+1} (1 + \frac{1}{2k})^{k+1}}{\sqrt{k+1} k^{k+\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{2(m-k)}\right)^{m-k} \\ &\sim 1 \end{aligned}$$

und somit ist

$$(3.19) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_k^{(m)} = 1.$$

Zu c). Offenbar gilt

$$(S_m)^{m+1} = 0.$$

Daher folgt für alle $f \in H^2(\mathbb{B}_2)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_\phi^m f = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} T_\phi^{*m} f = 0,$$

und die Behauptung c) ist gezeigt.

d) ist klar.

Zu e). Nach [16, Corollaries of Theorems 2.1 and 2.2] gilt

$$\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{T} \subseteq \sigma_e(T_\phi)$$

und somit

$$r(T_\phi) = \lim_{p \rightarrow \infty} \|T_\phi^p\|^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Folglich gilt

$$\{0\} \cup \mathbb{T} \subseteq \sigma_e(T_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi) \subseteq \overline{\mathbb{D}}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\mathbb{D} \subset \sigma_e(T_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi).$$

Sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{D}$. Dann ist $\lambda - S_m$ bijektiv für alle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\ker(\lambda - S_m) = \{0\}$ und $\ker(\lambda - S_m)^* = \{0\}$ und damit auch $\ker(\lambda - T_\phi) = \{0\}$ und $\ker(\lambda - T_\phi)^* = \{0\}$. Daraus folgt $\text{ran}(\lambda - T_\phi) = H^2(\mathbb{B}_2)$ und im Fall $\lambda \in \sigma(T_\phi)$ auch

$$\text{ran}(\lambda - T_\phi) \neq H^2(\mathbb{B}_2).$$

Folglich ist $\text{ran}(\lambda - T_\phi)$ nicht abgeschlossen und $\lambda - T_\phi$ kein Fredholmoperator. Also $\lambda \in \sigma_e(T_\phi)$.

Nun nehmen wir an, es gibt ein $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \sigma(T_\phi)$ und eine offene Umgebung U von λ , so dass für alle $f \in H_m$ und $\mu \in U$ gilt

$$(\mu - T_\phi)(\mu - T_\phi)^{-1} f \equiv f.$$

Insbesondere gilt ebenfalls

$$(\mu - T_\phi)(\mu - T_\phi|_{H_m})^{-1} f \equiv f.$$

Da T_ϕ die eindeutige Fortsetzungseigenschaft hat, ergibt sich

$$(\mu - T_\phi)^{-1}|_{H_m} = (\mu - T_\phi|_{H_m})^{-1} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{\mu^{j+1}} T_\phi^j|_{H_m}$$

und

$$S_m^j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_0^{(m)} \dots a_{j-1}^{(m)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_1^{(m)} \dots a_j^{(m)} & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & & a_{m-1+j}^{(m)} \dots a_{m-1}^{(m)} \\ & \dots & & & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig mit $|\lambda| < 1 - \epsilon$, und wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\left(\frac{1 - \epsilon}{|\lambda|} \right)^n > \|(\lambda - T_\phi)^{-1}\|.$$

Des Weiteren wähle $m = 2m_0$ mit $m_0 > n$ so groß, dass der Eintrag $b(2m_0, n)$ von S_m^n mit Index $(m_0, m_0 + n)$

$$b(2m_0, n) = a_{m_0-1}^{(m)} \dots a_{m_0-1+n}^{(m)}$$

ist. Nach (3.19) existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m_0 > m_1$ gilt

$$a_{m_0-1+j}^{(m)} > 1 - \epsilon \quad \text{für } j = 0, \dots, n-1.$$

Nun ist der Eintrag $r(2m_0, n)$ von $(\lambda - S_m)^{-1}$ zum Index $(m_0, m_0 + n)$ gegeben durch

$$r(2m_0, n) = \frac{a_{m_0-1}^{(m)} \dots a_{m_0-1+n}^{(m)}}{\lambda^{n+1}}$$

mit

$$|r(2m_0, n)| > \frac{(1 - \epsilon)^n}{|\lambda|^{n+1}} > \left(\frac{1 - \epsilon}{|\lambda|} \right)^n > \|(\lambda - T_\phi)^{-1}\|,$$

was absurd ist. Also war die Annahme falsch und

$$(3.20) \quad \sigma_e(T_\phi) = \sigma(T_\phi) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Zu f). Sei $\mathcal{Y}_l = \bigoplus_{m=0}^l H_m$. Wegen $T_\phi^l g = 0$ für alle $g \in \mathcal{Y}_l$ ist

$$(\lambda - T_\phi)^{-1} g = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{\lambda^{j+1}} T_\phi^j g$$

definiert für alle $\lambda \neq 0$ und somit ist $\mathcal{Y}_l$ in $X_{T_\phi}(\{0\})$ enthalten.

Nun nehmen wir an, dass $X_{T_\phi}(\{0\})$ abgeschlossen ist. Dann gilt

$$H^2(\mathbb{B}_2) = \overline{\bigcup_{l=0}^\infty \mathcal{Y}_l} \subset X_{T_\phi}(\{0\})$$

und somit gilt $X_{T_\phi}(\{0\}) = H^2(\mathbb{B}_2)$. Nach [14, Proposition 3.8 of Chapter 1] ist $X_{T_\phi}(\{0\})$ ein maximaler Spektralraum von T_ϕ mit

$$\sigma(T_\phi) = \sigma(T_\phi|_{X_{T_\phi}(\{0\})}) \subset \sigma(T_\phi) \cap \{0\} \subset \{0\},$$

und so folgt $\sigma(T_\phi) = \{0\}$ im Widerspruch zu (3.20). □

Zum Abschluss wird ein Dilatationssatz für den Operator T_ϕ aus Beispiel 3.26 gegeben. Zuvor sollen einige Begriffe definiert werden.

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Dann ist $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|)$ bekanntlich der Dualraum des Ideals $\mathcal{C}_1$ der Spurklassenoperatoren (versehen mit der Spurnorm). Zu $T \in \mathcal{L}(H)$ sei $\mathcal{A}_T$ die von $1_{\mathcal{H}}$ und T erzeugte schwach $*$ -abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$ und $\mathcal{Q}_T$ der Quotientenraum $\mathcal{C}_1/\mathcal{A}_T^\perp$, wobei $\mathcal{C}_1$ die Spurklasse und $\mathcal{A}_T^\perp$ der Annihilator von $\mathcal{A}_T$ in $\mathcal{C}_1$ ist. Also ist $\mathcal{A}_T$ der Dualraum von $\mathcal{Q}_T$ und die Dualität ist gegeben durch

$$\langle T, [L] \rangle = \text{tr}(TL), \quad T \in \mathcal{A}_T, \quad [L] \in \mathcal{Q}_T,$$

wobei $[L]$ die Äquivalenzklasse in $\mathcal{Q}_T$ vom Operator L in $\mathcal{C}_1$ ist. Siehe [9].

Eine Kontraktion $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *absolut stetige Kontraktion*, falls die kanonische Zerlegung $T = T_1 \oplus T_2$ von T in eine vollständige nicht unitäre Kontraktion T_1 und einen unitären Operator T_2 die Eigenschaft hat, dass T_2 absolut stetig ist (oder auf dem Nullraum operiert). Für so ein T gibt es nach [9, Theorem 4.1] einen Sz.-Nagy-Foiaş Funktionalkalkül $\Phi_T : H^\infty \rightarrow \mathcal{A}_T$ definiert durch $\Phi_T(f) = f(T)$ für alle $f \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Definition 3.27. Sei $\mathbf{A}$ die Klasse aller absolut stetigen Kontraktionen $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, für welche der Funktionalkalkül $\Phi_T : H^\infty(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{A}_T$ eine Isometrie ist. Ist n eine Kardinalzahl mit $1 \leq n \leq \aleph_0$, so bezeichnen wir mit $\mathbf{A}_n$ die Menge aller Operatoren T aus $\mathbf{A}$, für die gilt: Ist $\{[L_{ij}]\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+^n}$ eine beliebige $n \times n$ indezierte Familie von Elementen aus $\mathcal{Q}_T$, so besitzt das $n \times n$ Gleichungssystem

$$[x_i \otimes y_j] = [L_{ij}], \quad 0 \leq i, j \leq n$$

eine Lösung von Vektoren $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}, \{y_i\}_{0 \leq i \leq n}$ aus $\mathcal{H}$.

Offensichtlich folgt aus dieser Definition

$$\mathbf{A} \supset \mathbf{A}_1 \supset \cdots \mathbf{A}_n \supset \cdots \supset \mathbf{A}_{\aleph_0}.$$

Besonders wichtig sind die beiden folgenden Aussagen.

Lemma 3.28. [9, Corollary 6.9] Ist $T \in C_{00}$ und $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$, so ist $T \in \mathbf{A}_{\aleph_0}$.

Satz 3.29. [8, Theorem 4.8] Sei $T \in \mathbf{A}_{\aleph_0}$ und seien $\{A_j\}_{j=0}^\infty$ eine Folge von strikten Kontraktionen auf Hilberträumen der Dimension kleiner oder gleich $\aleph_0$. Dann existiert ein semi-invarianter Unterraum $\mathcal{N}$ für T , so dass $T_{\mathcal{N}}$ unitär äquivalent zur direkten Summe $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} A_j$ ist. Hierbei sei $T_{\mathcal{N}}$ die Kompression von T auf $\mathcal{N}$.

Korollar 3.30. Der Operator T_ϕ aus Beispiel 3.26 ist eine universelle Dilatation im Sinne von [8, 9], d.h. ist $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|A\| < 1$, so gibt es abgeschlossene invariante Unterräume M_1, M_2 von $H^2(\mathbb{B}_2)$ mit $M_1 \subset M_2$, so dass A unitär äquivalent zu $P_{M_2 \ominus M_1} T_\phi|_{M_2 \ominus M_1}$ ist. Hierbei bezeichnet $P_{M_2 \ominus M_1}$ die orthogonale Projektion auf $M_2 \ominus M_1$.

BEWEIS. Nach Lemma 3.28 ist $T_\phi \in \mathbf{A}_{\aleph_0}$. Mit Satz 3.29 folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 3.31. Eine andere Anwendung von Lemma 3.28 gilt für den Toeplitzoperator T_z auf dem gewichteten Bergmanraum $A_\lambda^2(\mathbb{D})$, $\lambda > -1$. Siehe [9,

Proposition 10.1] für die Anwendung auf $A^2(\mathbb{D})$. Die kanonische Orthonormalbasis für $A_\lambda^2(\mathbb{D})$, $\lambda > -1$ ist gegeben durch [57, S. 78]

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{n!\Gamma(\lambda+2)}} z^n, \quad n \geq 0.$$

Offensichtlich gilt $\|T_z\| \leq 1$ und somit auch $\|T_z^k\| \leq 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Für alle $n, m \in \mathbb{Z}_+$ folgt

$$\langle T_z^k e_n, e_m \rangle = \langle z^k e_n, e_m \rangle = \delta_{n+k,m} \sqrt{\frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{n!}} \sqrt{\frac{(n+k)!}{\Gamma(n+k+\lambda+2)}}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \|T_z^k e_n\|^2 &\leq \|z^k e_n\|^2 \\ &\leq \frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{n!} \frac{(n+k)!}{\Gamma(n+k+\lambda+2)}. \end{aligned}$$

Für k sehr groß gilt nach der Stirling-Formel

$$\begin{aligned} \frac{(n+k)!}{\Gamma(n+k+\lambda+2)} &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(n+k)^{n+k+(1/2)}e^{-(n+k)}}{\sqrt{2\pi}(n+k+\lambda+1)^{n+k+\lambda+(3/2)}e^{-(n+k+\lambda+1)}} \\ &\sim \frac{k^{n+k+(1/2)}(1+\frac{n}{k})^{n+k+(1/2)}}{k^{n+k+\lambda+(3/2)}(1+\frac{n+\lambda+1}{k})^{n+k+\lambda+(3/2)}e^{-(\lambda+1)}} \\ &\sim \frac{1}{k^{\lambda+1}} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

und somit $\|T_z^k e_n\|^2 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Analog folgt $\|T_z^{*k} e_n\|^2 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Folglich gehört T_z zur Klasse C_{00} und erfüllt $\sigma(T_z) = \mathbb{D}$. Also ist $T_z \in \mathbf{A}_{\aleph_0}$.

Lokale Struktur von Toeplitzoperatoren

4.1. Das lokale Prinzip von Allan und Douglas

4.1.1. Raum der maximalen Ideale. Sei A eine kommutative Banachalgebra mit dem Einselement e . Ein multiplikatives lineares Funktional auf A ist ein stetiger linearer Homomorphismus $m : A \rightarrow \mathbb{C}$ mit $m(ab) = m(a)m(b)$ für alle $a, b \in A$ und $m(e) = 1$. Der Kern von m ist die Menge aller $a \in A$ für die $m(a) = 0$ gilt. Zwischen den multiplikativen linearen Funktionalen auf A und den maximalen Idealen in A besteht eine eindeutige Beziehung. Der Kern jedes multiplikativen linearen Funktional ist nämlich ein maximales Ideal und umgekehrt. Daher können wir die multiplikativen linearen Funktionalen mit den maximalen Idealen identifizieren. Die Menge aller multiplikativen linearen Funktionalen auf A soll mit $M(A)$ bezeichnet werden. Über die Formel $\hat{a}(m) = m(a)$ ($m \in M(A)$) ordnen wir nun dem Element a der Algebra A eine Funktion $\hat{a} : M(A) \rightarrow \mathbb{C}$ zu. Diese Funktion heißt die *Gelfandtransformierte* von a . Sei $\hat{A} = \{\hat{a} : a \in A\}$.

Die Gelfandtopologie auf $M(A)$ ist die schwächste Topologie, in der alle Funktionen $\hat{a} \in \hat{A}$ stetig sind. Jedes multiplikative lineare Funktional hat offenbar die Norm 1. Die Mengen

$$U_{a_1, \dots, a_n; \varepsilon}(m_0) = \{m \in M(A) : |\hat{a}_i(m) - \hat{a}_i(m_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

bilden eine Umgebungsbasis der Gelfandtopologie, wobei $a_1, \dots, a_n \in A$ vorgegebene Elemente und $\varepsilon > 0$ sind. Der so entstandene topologische Raum $M(A)$ heißt der *Raum der maximalen Ideale* von A und ist ein kompakter Hausdorffraum. Die Algebra $\hat{A}$ ist eine Teilalgebra der Algebra $C(M(A))$ aller auf dem Kompaktum $M(A)$ stetigen Funktionen.

Die Abbildung $\Gamma : A \rightarrow C(M(A))$, $a \mapsto \hat{a}$, heißt *Gelfandabbildung*. Ist A eine kommutative C^* -Algebra, so vermittelt die Gelfandabbildung einen isometrischen $*$ -Isomorphismus von A auf $C(M(A))$.

4.1.2. Das Lokale Prinzip.

Definition 4.1. Eine Funktion $f : M(A) \rightarrow \mathbb{R}$ ist *oberhalbstetig* in $x_0 \in M(A)$, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U_\epsilon \subset M(A)$ von x_0 existiert, so dass

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon \quad \text{für alle } x \in U_\epsilon.$$

Die Funktion f ist *oberhalbstetig* auf $M(A)$, falls sie in jedem Punkt von $M(A)$ oberhalbstetig ist. Da $M(A)$ kompakt ist, gibt es zu jeder oberhalbstetigen Funktion $f : M(A) \rightarrow \mathbb{R}$ ein $x_0 \in M(A)$ mit

$$f(x_0) = \sup_{x \in M(A)} f(x).$$

Nun wollen wir die Lokalisierungsmethode von Allan und Douglas für C^* -Algebren beschreiben. Sei A eine Banachalgebra mit Einselement e . Das Zentrum $\text{Cen}A$ von A ist die Menge aller Elemente $a \in A$ mit der Eigenschaft $xa = ax$ für alle $x \in A$. Offenbar ist $\text{Cen}A$ eine abgeschlossene kommutative Unteralgebra von A .

Satz 4.2 (Allan/Douglas). *Sei $\mathcal{I}$ eine C^* -Algebra und $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra, die im Zentrum von $\mathcal{I}$ liegt und den Raum der maximalen Ideale $M(\mathcal{A})$ hat. Für $x \in M(\mathcal{A})$ sei $\mathcal{J}_x$ das abgeschlossene Ideal in $\mathcal{I}$, das von $\{a \in \mathcal{A} : x(a) = 0\}$ erzeugt wird. Dann gilt:*

- a) $\bigcap_{x \in M(\mathcal{A})} \mathcal{J}_x = \{0\}$.
- b) Bezeichnet Φ_x den kanonischen $*$ -Epimorphismus $\Phi_x : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{J}_x$, so ist

$$\Phi := \bigoplus_{x \in M(\mathcal{A})} \Phi_x : \mathcal{I} \rightarrow \bigoplus_{x \in M(\mathcal{A})} \mathcal{I}/\mathcal{J}_x$$

ein isometrischer $*$ -Monomorphismus. Ferner ist $T \in \mathcal{I}$ genau dann in $\mathcal{I}$ invertierbar, wenn $\Phi_x(T)$ invertierbar in $\mathcal{I}/\mathcal{J}_x$ für alle $x \in M(\mathcal{A})$ ist.

- c) Die Abbildung

$$M(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \|\Phi_x(T)\|$$

ist oberhalbstetig für jedes $T \in \mathcal{I}$. Ferner gilt: Wenn $T \in \mathcal{I}$ und $\Phi_y(T)$ invertierbar in $\mathcal{I}/\mathcal{J}_y$ ist, dann ist $\Phi_x(T)$ invertierbar in $\mathcal{I}/\mathcal{J}_x$ für alle x aus einer Umgebung von y .

- d) Für alle $T \in \mathcal{I}$ gilt

$$\|T\| = \max_{x \in M(\mathcal{A})} \|\Phi_x(T)\|.$$

BEWEIS. Siehe [19, Theorem 7.47] und [11, Theorem 1.35]. $\square$

Definition 4.3. *Sei die Situation wie in Satz 4.2 gegeben. Die Quotientenalgebra $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}/\mathcal{J}_x$ heißt die lokale Algebra zum Punkt x , $x \in M(\mathcal{A})$.*

Definition 4.4. *Eine Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$ ist irreduzibel, falls kein echter abgeschlossener Unterraum für alle S in $\mathfrak{S}$ reduzierend ist.*

Sei $\tau(C(\mathbb{S}_n))$ die abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$, die von $\{T_\varphi : \varphi \in C(\mathbb{S}_n)\}$ erzeugt wird.

Satz 4.5. [13]

- i) Die Algebra $\tau(C(\mathbb{S}_n))$ ist irreduzibel und enthält das abgeschlossene Ideal $\mathcal{K}$ der kompakten Operatoren aus $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$.
- ii) $\tau(C(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ ist isometrisch $*$ -isomorph zu $C(\mathbb{S}_n)$ und somit ist $\mathbb{S}_n$ sein Raum der maximalen Ideale.

Satz 4.2 lässt sich im folgenden Kontext auf Toeplitzoperatoren anwenden. Sei $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$ die von $\{T_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)\}$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$. Nach Lemma 1.6 ist die Algebra $\tau(C(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ im Zentrum von $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ enthalten und so können wir die Algebra $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ zu den Punkten von $\mathbb{S}_n$ lokalisieren.

Für $\omega \in \mathbb{S}_n$ sei $\mathcal{F}_\omega^\infty$ das von $\{T_\phi : \phi \in C(\mathbb{S}_n), \phi(\omega) = 0\}$ erzeugte abgeschlossene Ideal in $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$. Mit $\mathcal{I}_\omega^\infty$ bezeichnen wir die Quotientenalgebra $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))/\mathcal{F}_\omega^\infty$ und mit Φ_ω den zugehörigen kanonischen Epimorphismus.

Ferner sei $\sigma(\Phi_\omega(T_\phi))$ das Spektrum von $\Phi_\omega(T_\phi)$ in $\mathcal{I}_\omega^\infty$.

Satz 4.6. *Sei Φ gegeben durch*

$$\Phi : \tau(L^\infty(\mathbb{S}_n)) \rightarrow \bigoplus_{\omega \in \mathbb{S}_n} \mathcal{I}_\omega^\infty, \quad \Phi := \bigoplus_{\omega \in \mathbb{S}_n} \Phi_\omega.$$

i) *Die Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \tau(L^\infty(\mathbb{S}_n)) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{\omega \in \mathbb{S}_n} \mathcal{I}_\omega^\infty$$

ist exakt bei $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$.

ii) *Ist U auf $\mathbb{C}^n$ unitär, so gilt für alle $\omega \in \mathbb{S}_n$: $\mathcal{I}_\omega^\infty$ ist isometrisch $*$ -isomorph zu $\mathcal{I}_{U(\omega)}^\infty$. Insbesondere folgt für alle $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$*

$$\sigma(\Phi_\omega(T_\phi)) = \sigma(\Phi_{U(\omega)}(T_{\phi \circ U^{-1}})).$$

iii) *Sei $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$. Dann ist T_ϕ genau dann ein Fredholmoperator in $H^2(\mathbb{B}_n)$, wenn $\Phi_\omega(T_\phi)$ invertierbar in $\mathcal{I}_\omega^\infty$ für alle $\omega \in \mathbb{S}_n$ ist.*

iv) *Die Abbildung*

$$\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \omega \mapsto \|\Phi_\omega(T_\phi)\|$$

ist oberhalbstetig für jedes $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und es gilt

$$\|T_\phi\|_e = \max_{\omega \in \mathbb{S}_n} \|\Phi_\omega(T_\phi)\|.$$

Ferner gilt: Ist $\Phi_\omega(T_\phi)$ invertierbar in $\mathcal{I}_\omega^\infty$, so ist $\Phi_{\omega_0}(T_\phi)$ invertierbar in $\mathcal{I}_{\omega_0}^\infty$ für alle ω_0 aus einer Umgebung von ω .

v) *Ist ϕ stetig in ω , so gilt $\Phi_\omega(T_\phi) = \phi(\omega)e_\omega$, wobei e_ω das Einselement von $\mathcal{I}_\omega^\infty$ ist.*

BEWEIS. Da $\tau(C(\mathbb{S}_n))$ nach Lemma 4.5 irreduzibel ist und in $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$ enthalten ist, ist auch $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$ irreduzibel. Jedes $\mathcal{F}_\omega^\infty$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$. Der Selbst-Kommutator $T_\phi T_\phi^* - T_\phi^* T_\phi$ mit $\phi(z) = \omega_1 - z_1$, $z \in \mathbb{S}_n$ ist kompakt und nicht trivial in $\mathcal{F}_\omega^\infty$ (Lemma 1.6). Daher enthält $\mathcal{F}_\omega^\infty$ nach [19, Theorem 5.39] schon alle kompakten Operatoren. Die Algebra $\tau(C(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ ist eine abgeschlossene C^* -Unteralgebra des Zentrums von $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$. Nach Lemma 4.5 ist $\mathbb{S}_n$ der Raum der maximalen Ideale von $\tau(C(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ und somit folgen i), iii) und iv) direkt aus Satz 4.2.

Seien $\omega, \xi \in \mathbb{S}_n$ und sei U eine unitäre Transformation von $\mathbb{C}^n$ mit $U(\omega) = \xi$. Dann induziert U einen $*$ -Automorphismus von $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$, welcher $\mathcal{F}_\omega^\infty$ auf $\mathcal{F}_\xi^\infty$ abbildet und somit existiert ein isometrischer $*$ -Isomorphismus von $\mathcal{I}_\omega^\infty$ nach $\mathcal{I}_\xi^\infty$. Dies zeigt ii).

Zu v) genügt es $\phi(\omega) = 0$ anzunehmen. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von $\mathbb{S}_n$ mit $\omega \in U$, so dass $\|\phi\chi_U\|_\infty < \varepsilon$. Sei $\psi \in C(\mathbb{S}_n)$, so dass $\psi \equiv 1$ auf $\mathbb{S}_n \setminus U$ und $\psi \equiv 0$ auf V , wobei $V \subset U$ eine Umgebung von ω ist. Dann gilt

$$T_\phi = T_{\phi\chi_U} + T_{\phi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}(1-\psi)} + T_{\phi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}\psi}.$$

Da $\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}(1 - \psi) = 0$, folgt $\Phi_\omega(T_{\phi_{\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}(1-\psi)}}) = 0$ und damit

$$\Phi_\omega(T_\phi) = \Phi_\omega(T_{\phi_{\chi_U}}) + \Phi_\omega(T_{\phi_{\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}\psi}}).$$

Da ψ stetig ist, existiert nach Lemma 1.6 iv) ein kompakter Operator K mit $T_{\phi_{\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}\psi}} = T_{\phi_{\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}}}T_\psi + K$ und da $T_\psi \in \mathcal{F}_\omega^\infty$, ist $\Phi_\omega(T_\psi) = 0$, d.h.

$$\Phi_\omega(T_{\phi_{\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}\psi}}) = \Phi_\omega(T_{\phi_{\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}}})\Phi_\omega(T_\psi) = 0.$$

Daher folgt

$$\|\Phi_\omega(T_\phi)\| = \|\Phi_\omega(T_{\phi_{\chi_U}})\| \leq \|T_{\phi_{\chi_U}}\|_e = \|\phi_{\chi_U}\|_\infty < \varepsilon.$$

□

Aus Satz 4.6 folgt

$$\sigma_e(T_\phi) = \bigcup_{\omega \in \mathbb{S}_n} \sigma(\Phi_\omega(T_\phi)).$$

Diese Lokalisierungsmethode erweist sich als sehr nützlich für die Untersuchung des wesentlichen Spektrums von Toeplitzoperatoren mit gewissen Klassen unstetiger Symbole.

Lemma 4.7. *Sei $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine Familie kompakter Mengen in $\mathbb{C}$ mit $\emptyset \neq K_{\varepsilon_1} \subseteq K_{\varepsilon_2}$ für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Dann gilt mit $K := \bigcap_{\varepsilon>0} K_\varepsilon$, dass*

$$\max_{\lambda \in K} |\lambda| = \inf_{\varepsilon>0} \max_{\lambda \in K_\varepsilon} |\lambda|.$$

BEWEIS. Die Abschätzung “ $\leq$ ” ist offensichtlich. Wäre

$$\max_{\lambda \in K} |\lambda| < \inf_{\varepsilon>0} \max_{\lambda \in K_\varepsilon} |\lambda|$$

so gäbe es eine streng monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$ und Punkte $\lambda_k \in K_{\varepsilon_k}$, $k \in \mathbb{N}$ sowie ein $\delta > 0$ mit

$$\max_{\lambda \in K} |\lambda| + \delta \leq |\lambda_k| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Aus Kompaktheitsgründen gäbe es eine konvergente Teilfolge $(\lambda_{k_j})_{j=1}^\infty$ von $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$, so dass

$$\lambda_0 := \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{k_j} \in \bigcap_{j=1}^\infty K_{\varepsilon_{k_j}} = K$$

und somit der Widerspruch

$$|\lambda_0| \leq \max_{\lambda \in K} |\lambda| < \max_{\lambda \in K} |\lambda| + \delta \leq |\lambda_0|.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Lemma 4.8. *Sei $(K_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge kompakter Mengen in $\mathbb{R}^m$ mit $\emptyset \neq K_{k+1} \subseteq K_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\text{conv} \bigcap_{k=1}^\infty K_k = \bigcap_{k=1}^\infty \text{conv} K_k.$$

BEWEIS. Die Inklusion “ $\subseteq$ ” ist offensichtlich. Sei nun $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{conv} K_k$ beliebig. Nach dem Lemma zu [42, Theorem 3.25] lässt sich x für alle $k \in \mathbb{N}$ darstellen als Konvexkombination von $m+1$ Punkten $u_{1,k}, \dots, u_{m+1,k} \in K_k$, d.h.

$$x = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{j,k} u_{j,k} \quad \text{mit} \quad \alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{m+1,k} \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_{j,k} = 1.$$

Wegen der Kompaktheit der Mengen K_k können wir durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, dass die Folgen $(u_{j,k_l})_{l=1}^{\infty}$ und $(\alpha_{j,k_l})_{l=1}^{\infty}$ konvergieren mit $v_j := \lim_{l \rightarrow \infty} u_{j,k_l} \in K$, wobei $K := \bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$ und $\alpha_j := \lim_{l \rightarrow \infty} \alpha_{j,k_l} \in [0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j = 1$. Es folgt $x = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j v_j \in \text{conv } K$ und damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Wir zeigen nun eine lokale Variante der N -Tupel Variante des Satzes von Brown und Halmos. Für ein Tupel $f = (f_1, \dots, f_N)$ von Funktionen in $L^{\infty}(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und $\omega \in \mathbb{S}_n$ nennen wir

$$\mathcal{R}_{\omega}(f) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \text{ess-ran} (f|_{U_{\varepsilon}(\omega) \cap \mathbb{S}_n})$$

den *lokalen wesentlichen Wertebereich* von f in ω . Hierbei sei $\text{ess-ran} (f|_{U_{\varepsilon}(\omega) \cap \mathbb{S}_n})$ der wesentliche Wertebereich von $f|_{U_{\varepsilon}(\omega) \cap \mathbb{S}_n}$ in $L^{\infty}(U_{\varepsilon}(\omega) \cap \mathbb{S}_n)$ bezüglich des Oberflächenmaßes σ . Für die Definition siehe Kapitel 1.3.

Für $f \in L^{\infty}(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und $\omega \in \mathbb{S}_n$ schreiben wir

$$\mathcal{V}_{\varepsilon}(\omega) := U_{\varepsilon}(\omega) \cap \mathbb{S}_n = \{z \in \mathbb{S}_n : |z - \omega| < \varepsilon\}$$

und setzen

$$\|f\|_{\infty, \omega} := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_{\omega}(f)} |\lambda|$$

Satz 4.9. Für alle $f \in L^{\infty}(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und $w \in \mathbb{S}_n$ gilt

$$\|\Phi_{\omega}(T_f)\| = \|f\|_{\infty, \omega}.$$

BEWEIS. Wegen $\Phi_{\omega}(T_f) = \Phi_{\omega}(T_{\chi_{\mathcal{V}_{\varepsilon}(\omega)} f})$ für alle $\varepsilon > 0$ folgt nach Lemma 4.7

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\omega}(T_f)\| &\leq \inf_{\varepsilon > 0} \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{ess-ran } f|_{\mathcal{V}_{\varepsilon}(\omega)}\} \\ &= \max_{\lambda \in \mathcal{R}_{\omega}(f)} |\lambda| \\ &= \|f\|_{\infty, \omega}. \end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, dass $\|\Phi_{\omega}(T_f)\| < \|f\|_{\infty, \omega}$. Da $z \mapsto \|\Phi_z(T_f)\|$ oberhalbstetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ mit

$$\|\Phi_z(T_f)\| \leq \|f\|_{\infty, \omega} - \delta \quad \text{für alle } z \in \mathcal{V}_{\varepsilon}(\omega).$$

Sei $\varphi \in C(\mathbb{S}_n)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf $\mathcal{V}_{\varepsilon/2}(\omega)$, $\text{supp } \varphi \subset \mathcal{V}_{\varepsilon}(\omega)$ und $0 \leq \varphi \leq 1$ auf $\mathbb{S}_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi_z(T_{\varphi f})\| &= \|\Phi_z(T_{\varphi})\Phi_z(T_f)\| \\ &= |\varphi(z)| \|\Phi_z(T_f)\| \\ &\leq \|\Phi_z(T_f)\|. \end{aligned}$$

Beachte, dass $\|\Phi_z(T_{\varphi f})\| = 0$ für $z \in \mathbb{S}_n \setminus \mathcal{V}_\varepsilon(\omega)$. Somit folgt nach Satz 4.6 iv)

$$\|f\|_{\infty, \omega} \leq \|\varphi f\|_\infty = \|T_{\varphi f}\|_e = \max_{z \in \mathbb{S}_n} \|\Phi_z(T_{\varphi f})\| \leq \|f\|_{\infty, \omega} - \delta,$$

was zu einem Widerspruch führt. Also muss doch $\|\Phi_\omega(T_f)\| = \|f\|_{\infty, \omega}$ gelten. $\square$

Satz 4.10. *Sind $f_1, \dots, f_N \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$, so gilt für alle $\omega \in \mathbb{S}_n$*

$$\sigma(\Phi_\omega(T_{f_1}), \dots, \Phi_\omega(T_{f_N})) \subseteq \text{conv } \mathcal{R}_\omega(f)$$

mit $f = (f_1, \dots, f_N)$. Hierbei sei $\sigma(\Phi_\omega(T_{f_1}), \dots, \Phi_\omega(T_{f_N}))$ der Durchschnitt von Links- und Rechtsspektrum von $\Phi_\omega(T_f) := (\Phi_\omega(T_{f_1}), \dots, \Phi_\omega(T_{f_N}))$ in der lokalen Toeplitzalgebra $\mathcal{I}_\omega^\infty$.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wenden Satz 1.14 mit $\mathcal{R} = L^\infty(\mathcal{V}_\varepsilon(\omega))$ und $\mathcal{D} = \mathcal{I}_\omega^\infty$ an. Die Abbildung $\varkappa : L^\infty(\mathcal{V}_\varepsilon(\omega)) \rightarrow \mathcal{I}_\omega^\infty$ sei definiert durch $\varkappa(g) = \Phi_\omega(T_{\tilde{g}}) \in \mathcal{I}_\omega^\infty$, wobei

$$\tilde{g}(z) := \begin{cases} g(z), & \text{für } z \in \mathcal{V}_\varepsilon(\omega), \\ 0, & \text{für } z \in \mathbb{S}_n \setminus U_\varepsilon(\omega). \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\|\varkappa\| = 1$ und $\varkappa(1_{L^\infty(\mathcal{V}_\varepsilon(\omega))}) = 1_{\mathcal{I}_\omega^\infty}$. Sei $f \in L^\infty(\mathcal{V}_\varepsilon(\omega))^N$, dann ergibt sich mit $g := f|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\omega)}$

$$\begin{aligned} \sigma(\Phi_\omega(T_f)) &= \sigma(\Phi_\omega(T_{\tilde{g}})) \\ &= \sigma(\varkappa(f|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\omega)})) \\ &\subseteq \text{conv ess-ran}(f|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\omega)}). \end{aligned}$$

Beachte, dass $\text{ess-ran}(f|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\omega)}) = \sigma_{L^\infty(\mathcal{V}_\varepsilon(\omega))}(f|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\omega)})$. Zusammen mit Lemma 4.8 folgt

$$\sigma(\Phi_\omega(T_f)) \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \text{conv ess-ran}(f|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\omega)}) = \text{conv } \mathcal{R}_\omega(f).$$

$\square$

Bekanntlich gilt nach Davie und Jewell [16]

$$\text{ess-ran } f \subseteq \sigma_e(T_f) \quad \text{für alle } f \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma).$$

Gilt auch

$$\mathcal{R}_\omega(f) \subseteq \sigma(\Phi_\omega(T_f)) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{S}_n \text{ und } f \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)?$$

Eine schwache Aussage erhalten wir im folgenden Satz.

Satz 4.11. *Sei $K \subset \mathbb{S}_n$ kompakt mit $\sigma(K) = 0$ und sei $f \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ eine auf $\mathbb{S}_n \setminus K$ stetige Funktion. Dann gilt für alle $\omega \in \mathbb{S}_n$*

$$\mathcal{R}_\omega(f) \subseteq \sigma(\Phi_\omega(T_f)) \subseteq \text{conv } \mathcal{R}_\omega(f).$$

BEWEIS. Die Behauptung ist bekannt für alle Punkte $\omega \in \mathbb{S}_n$, in denen f stetig ist. Die rechte Inklusion wurde bereits allgemein gezeigt.

Sei also nun $\omega \in K$ beliebig. Wir nehmen an, es gibt ein $\lambda \in \mathcal{R}_\omega(f) \setminus \sigma(\Phi_\omega(T_f))$, d.h. $(\lambda - \Phi_\omega(T_f))^{-1}$ existiert in $\mathcal{I}_\omega^\infty$. Dann ist

$$A_f(\omega) := (\lambda - \Phi_\omega(T_f))^*(\lambda - \Phi_\omega(T_f))$$

invertierbar in $\mathcal{I}_\omega^\infty$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\| \|A_f(\omega)\|_\omega - A_f(\omega)\|_\omega < \|A_f(\omega)\|_\omega - \delta < \|A_f(\omega)\|_\omega.$$

Wegen der Oberhalbstetigkeit der Norm gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\| \|A_f(\omega)\|_\omega - A_f(z)\|_z < \|A_f(\omega)\|_\omega - \delta$$

für alle $z \in \mathcal{V}_\varepsilon(\omega) \setminus K$. Da f auf $\mathbb{S}_n \setminus K$ stetig ist, ist diese Abschätzung äquivalent zu

$$\| \|A_f(\omega)\|_\omega - |\lambda - f(z)|^2\|_z < \|A_f(\omega)\|_\omega - \delta.$$

Da $\lambda \in \mathcal{R}_\omega(f)$, gibt es eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathcal{V}_\varepsilon(\omega) \setminus K$ mit $z_n \rightarrow \omega$ für $n \rightarrow \infty$ und $f(z_n) \rightarrow \lambda$ für $n \rightarrow \infty$. Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \|A_f(\omega)\|_\omega - |\lambda - f(z_n)|^2\|_z \leq \|A_f(\omega)\|_\omega - \delta < \|A_f(\omega)\|_\omega$$

und dies ist ein Widerspruch. $\square$

Zum Schluss wollen wir Satz 4.6 auf die Situation des oberen Halbraums übertragen. Sei $\partial D_n^\infty := \partial D_n \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von ∂D_n und sei $\omega_c(-e_n) = \infty$. Dann ist die Cayleyabbildung $\omega_c : \mathbb{S}_n \rightarrow \partial D_n \cup \{\infty\}$ ein Homöomorphismus. Die triviale Fortsetzung des Maßes β auf die Einpunktkompaktifizierung (mit Masse 0 in ∞) bezeichnen wir weiterhin mit β .

Sei $\tau(L^\infty(\partial D_n^\infty))$ die von $\{T_{\varphi \circ \omega_c^{-1}}^D : \varphi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)\}$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(H^2(D_n))$ und für $w \in \mathbb{S}_n$ sei $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_c(w)}^\infty$ das von

$$\{T_{\varphi \circ \omega_c^{-1}}^D : \varphi(w) = 0, \varphi \in C(\mathbb{S}_n)\}$$

erzeugte abgeschlossene Ideal in $\tau(L^\infty(\partial D_n^\infty))$. Wegen (1.14) ist

$$T_\varphi^S \mapsto UT_\varphi^S U^{-1}$$

ein isometrischer $*$ -Isomorphismus von $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{S}_n, d\sigma))$ nach $\mathcal{L}(L^2(\partial D_n^\infty, d\beta))$ und bildet die Toeplitzalgebra $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$ auf die Toeplitzalgebra $\tau(L^\infty(\partial D_n^\infty))$ ab, das Ideal $\mathcal{F}_w^\infty$ auf das Ideal $\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_c(w)}^\infty$ ab und somit die Quotientenalgebra $\mathcal{I}_w^\infty$ auf $\tilde{\mathcal{I}}_{\omega_c(w)}^\infty$ ab. Hiermit ist $\tilde{\mathcal{I}}_{\omega_c(w)}^\infty$ die Quotientenalgebra $\tau(L^\infty(\partial D_n^\infty))/\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_c(w)}^\infty$ und $\Phi_{\omega_c(w)}$ der zugehörige kanonische Epimorphismus.

Mit $\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi^D))$ wird das Spektrum von $\Phi_\lambda(T_\varphi^D)$ in $\tilde{\mathcal{I}}_\lambda^\infty$ bezeichnet.

Korollar 4.12. *Sei Φ gegeben durch*

$$\Phi : \tau(L^\infty(\partial D_n^\infty)) \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \partial D_n^\infty} \tilde{\mathcal{I}}_\lambda^\infty, \quad \Phi := \bigoplus_{\lambda \in \partial D_n^\infty} \Phi_\lambda.$$

- i) $\tilde{\mathcal{K}} \subset \tilde{\mathcal{F}}_\lambda^\infty$, wobei $\tilde{\mathcal{K}}$ das Ideal der kompakten Operatoren auf $H^2(D_n)$ ist.
- ii) Die Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \tau(L^\infty(\partial D_n^\infty)) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{\lambda \in \partial D_n^\infty} \tilde{\mathcal{I}}_\lambda^\infty$$

ist exakt bei $\tau(L^\infty(\partial D_n^\infty))$.

- iii) Ist $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$, so ist T_φ genau dann ein Fredholmoperator in $H^2(D_n)$, wenn $\Phi_\lambda(T_\varphi)$ invertierbar in $\tilde{\mathcal{I}}_\lambda^\infty$ für alle $\lambda \in \partial D_n^\infty$ ist.
- iv) Ist φ stetig in λ , so gilt: $\Phi_\lambda(T_\varphi) = \varphi(\lambda)e_\lambda$, wobei e_λ das Einselement von $\tilde{\mathcal{I}}_\lambda^\infty$ ist.

v) Seien $\psi_1, \psi_2 \in C(\partial D_n^\infty)$. Dann gilt für alle $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ und alle $\lambda \in \partial D_n^\infty$, dass

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_{\psi_1+\psi_2\cdot\varphi})) = \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda) \cdot \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)).$$

vi) Die Abbildung

$$\partial D_n^\infty \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \lambda \mapsto \|\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi))\|$$

ist oberhalbstetig für alle $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ und es gilt

$$\|[T_\varphi]\|_{\mathcal{L}(H^2(D_n))/\tilde{\mathcal{K}}} = \max_{\lambda \in \partial D_n^\infty} \|\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi))\|.$$

Ferner gilt: Ist $\Phi_\lambda(T_\varphi)$ invertierbar in $\tilde{\mathcal{I}}_\lambda^\infty$, so ist $\Phi_{\lambda_0}(T_\varphi)$ invertierbar in $\tilde{\mathcal{I}}_{\lambda_0}^\infty$ für alle λ_0 aus einer Umgebung von λ .

BEWEIS. i), ii), iii), iv) und v) folgen direkt aus Satz 4.6 und vi) aus iv). $\square$

Aus dem obigen Korollar ergibt sich unmittelbar, dass

$$\sigma_e(T_\varphi^D) = \bigcup_{\lambda \in \partial D_n^\infty} \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi^D)).$$

Satz 4.13. Sei U ein Automorphismus von D_n . Besitzt U eine stetige Fortsetzung auf ∂D_n^∞ , die ∂D_n^∞ homöomorph auf sich abbildet und ist die durch $f \mapsto f \circ U$ definierte Abbildung ein positives Vielfaches einer unitären Abbildung

$$V : H^2(D_n) \rightarrow H^2(D_n),$$

so folgt für alle $\lambda \in \partial D_n^\infty$ und $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{U(\lambda)}(T_{\varphi \circ U^{-1}})).$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$f \circ U = cVf \quad \text{für alle } f \in H^2(D_n).$$

Durch $\Lambda : A \mapsto V^*AV$ ist ein isometrischer *-Isomorphismus von $\mathcal{L}(H^2(D_n))$ auf sich gegeben mit $\Lambda(T_\varphi) = T_{\varphi \circ U^{-1}}$ für alle $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ und $\Lambda(\tau(L^\infty(\partial D_n^\infty))) = \tau(L^\infty(\partial D_n^\infty))$ sowie $\Lambda(\mathcal{F}_\lambda^\infty) = \mathcal{F}_{U(\lambda)}^\infty$ für alle $\lambda \in \partial D_n^\infty$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Das folgende Beispiel illustriert Satz 4.13 für bestimmte Automorphismen von D_n .

Beispiel 4.14. a) Sei U eine Translation durch die Heisenberggruppe oder eine Rotation bzgl. der $(n-1)$ -ersten Variablen von D_n . Mit $U(\infty) = \infty$ ist U ein Homöomorphismus von ∂D_n^∞ auf sich. Die durch $Vf = f \circ U$ definierte Abbildung $V : H^2(D_n) \rightarrow H^2(D_n)$ ist unitär (in diesem Fall ist $c = 1$) und es gilt für alle $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ und $\lambda \in \partial D_n^\infty$

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{U(\lambda)}(T_{\varphi \circ U^{-1}})).$$

b) Sei U die Dilatation τ_δ für $\delta > 0$. Mit $\tau_\delta(\infty) = \infty$ ist τ_δ ein Homöomorphismus von ∂D_n^∞ auf sich. Wir definieren $V_\delta : H^2(D_n) \rightarrow H^2(D_n)$ durch $f \mapsto \delta^n(f \circ \tau_\delta)$, so dass V_δ nach Bemerkung 1.1 unitär mit $\|V_\delta f\|_2 = \|f\|_2$ für alle

$f \in H^2(D_n)$ ist (in diesem Fall ist $c = \delta^{-n}$). Nach Satz 4.13 ergibt sich für alle $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ und $\lambda \in \partial D_n^\infty$

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{U(\lambda)}(T_{\varphi \circ U^{-1}})).$$

c) Wir notieren, dass die Elemente der in Kapitel 2 aufgelisteten maximal kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(D_n)$ Hintereinanderausführungen von Automorphismen aus a) und b) sind.

Bemerkung 4.15. Das Analogon zu Satz 4.11 gilt ebenfalls auf ∂D_n^∞ .

4.2. Stückweise stetige Symbole von McDonald

Sei E eine $(2n - 1)$ -dimensional reelle Hyperebene in $\mathbb{C}^n$, die einer nichtleeren Schnitt mit $\mathbb{B}_n$ hat. Die Menge $\mathbb{B}_n \setminus E$ besteht aus zwei Komponenten, die wir mit $\mathbb{B}_+$ und $\mathbb{B}_-$ bezeichnen. Die Toeplitzoperatoren auf dem Bergmanraum $A^2(\mathbb{B}_n)$, deren Symbole aus gewissen Klassen stückweiser stetiger Symbolen gehören, also Symbole die auf $\mathbb{B}_+$ und $\mathbb{B}_-$ gleichmäßig stetig sind, wurden erstmals von McDonald in [33] und danach von Yan in [56] studiert. Dabei wurde in der ersten Arbeit das wesentliche Spektrum solcher Toeplitzoperatoren berechnet und in der zweiten Arbeit die Automorphismengruppe auf der entsprechenden Toeplitzalgebra diskutiert. Im Hardyraum-Fall stammen die ersten Ergebnisse über Toeplitzoperatoren mit stückweise stetigen Symbolen auf $\mathbb{T}$ von Widom [53], Devinatz [18] und danach von Gohberg und Krupnik [22]. In diesem Abschnitt wird das wesentliche Spektrum für Toeplitzoperatoren mit solchen speziellen stückweise stetigen Symbolen auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ untersucht und insbesondere gezeigt, dass das wesentliche Spektrum zusammenhängend ist.

Außerdem wird nach der Bestimmung des Raumes der maximalen Ideale der Toeplitzalgebra modulo der kompakten Operatoren eine Indexformel für solche Toeplitzoperatoren mit matrixwertigen Symbolen angegeben. Schließlich wird gezeigt, dass sich die Indexformel für Toeplitzoperatortupel mit Hilfe der Indextheorie für wesentlich vertauschende Tupel, die einen wesentlich stetigen Funktionalkalkül besitzen, beweisen lässt.

Wir betrachten die Hyperebene

$$E = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \text{Im} z_n = 0\}.$$

Dies entspricht im Fall $n = 1$ der Situation für PC auf $\mathbb{T}$. Sei daran erinnert, dass PC die abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$ aller stückweise stetigen Symbolen φ auf $\mathbb{T}$ ist. Die stetige Kurve $\varphi^\#$ wird erhalten, indem alle einseitigen Grenzwerte von φ im Unstetigkeitspunkt durch Strecken verbunden werden. Siehe z.B. [20, S. 20-23]. Mehr über die Algebra PC findet man im Buch von Böttcher und Silbermann [11].

Weiterhin sei

$$\mathbb{S}_+ = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}_n : \text{Im} z_n > 0\}, \quad \mathbb{S}_- = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}_n : \text{Im} z_n < 0\}.$$

Wir schreiben ∂E für $\mathbb{S}_n \cap E$. Es gilt $\mathbb{S}_n \setminus \partial E = \mathbb{S}_+ \cup \mathbb{S}_-$.

Wir definieren

$$HC(\mathbb{S}_n) = \{\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma) : \varphi|_{\mathbb{S}_+} \text{ und } \varphi|_{\mathbb{S}_-} \text{ sind gleichmäßig stetig}\}.$$

Dann ist $HC(\mathbb{S}_n)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ und wie in [33] können wir schreiben

$$HC(\mathbb{S}_n) = \{\langle f, g \rangle : f \in C(\overline{\mathbb{S}}_+), g \in C(\overline{\mathbb{S}}_-)\}.$$

Falls φ in $z \in \mathbb{S}_n$ stetig ist, schreiben wir $\varphi(z)$ für $f(z)$ oder $g(z)$.

Sei $\tau(HC(\mathbb{S}_n))$ die abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$, die von

$$\{T_\varphi : \varphi \in HC(\mathbb{S}_n)\}$$

erzeugt wird.

Für $\omega \in \mathbb{S}_n$ sei $\mathcal{F}_\omega$ das abgeschlossene Ideal in $\tau(HC(\mathbb{S}_n))$, das von $\{T_\varphi : \varphi \in C(\mathbb{S}_n), \varphi(\omega) = 0\}$ erzeugt wird. Die Quotientenalgebra $\tau(HC(\mathbb{S}_n))/\mathcal{F}_\omega$ werde mit $\mathcal{I}_\omega$ bezeichnet, der zugehörige kanonische Epimorphismus mit Φ_ω und Φ sei gegeben durch

$$\Phi : \tau(HC(\mathbb{S}_n)) \rightarrow \bigoplus_{\omega \in \mathbb{S}_n} \mathcal{I}_\omega, \quad \Phi := \bigoplus_{\omega \in \mathbb{S}_n} \Phi_\omega.$$

Satz 4.16. i) $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}_\omega$.

ii) Die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \tau(HC(\mathbb{S}_n)) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{\omega \in \mathbb{S}_n} \mathcal{I}_\omega$$

ist exakt bei $\tau(HC(\mathbb{S}_n))$.

- iii) Ist $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n)$, so ist T_φ genau dann ein Fredholmoperator in $H^2(\mathbb{B}_n)$, wenn $\Phi_\omega(T_\varphi)$ invertierbar in $\mathcal{I}_\omega$ für alle $\omega \in \mathbb{S}_n$ ist.
- iv) Sei $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n)$. Für $\omega \in \mathbb{S}_n \setminus \partial E$ gilt $\Phi_\omega(T_\varphi) = \varphi(\omega)e_\omega$, wobei e_ω das Einselement von $\mathcal{I}_\omega$ ist.

BEWEIS. i) Die Algebra $\tau(C(\mathbb{S}_n))$ ist nach Lemma 4.5 irreduzibel. Wegen $\tau(C(\mathbb{S}_n)) \subset \tau(HC(\mathbb{S}_n))$ ist $\tau(HC(\mathbb{S}_n))$ ebenfalls irreduzibel. Jedes $\mathcal{F}_\omega$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $\tau(HC(\mathbb{S}_n))$. Der Selbst-Kommutator $T_f T_f^* - T_f^* T_f$ mit $f(z) = \omega_1 - z_1$ ist ein kompakter nicht verschwindender Operator in $\mathcal{F}_\omega$ (siehe Lemma 1.6 ii)) und daher enthält $\mathcal{F}_\omega$ nach [19, Theorem 5.39] schon alle kompakten Operatoren.

ii) und iii). Die Algebra $\tau(C(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ ist im Zentrum von $\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ enthalten (siehe Abschnitt 4.1) und somit auch im Zentrum von $\tau(HC(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$. Der Raum der maximalen Ideale von $\tau(C(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ ist $\mathbb{S}_n$. Daher folgen ii) und iii) aus Satz 4.2.

Zu iv) genügt es $\varphi(\omega) = 0$ anzunehmen. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von $\mathbb{S}_n$ mit $\omega \in U$, so dass $\|\varphi\chi_U\|_\infty < \varepsilon$. Sei $\psi \in C(\mathbb{S}_n)$, so dass $\psi \equiv 1$ auf $\mathbb{S}_n \setminus U$ und $\psi \equiv 0$ auf V , wobei $V \subset U$ eine Umgebung von ω ist. Dann gilt

$$T_\varphi = T_{\varphi\chi_U} + T_{\varphi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}(1-\psi)} + T_{\varphi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}\psi}.$$

Da $\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}(1-\psi) = 0$, folgt $\Phi_\omega(T_{\varphi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}(1-\psi)}) = 0$ und damit

$$\Phi_\omega(T_\varphi) = \Phi_\omega(T_{\varphi\chi_U}) + \Phi_\omega(T_{\varphi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}\psi}).$$

Da ψ stetig ist, existiert nach Lemma 1.6 iv) ein kompakter Operator K mit $T_{\varphi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}\psi} = T_{\varphi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}}T_\psi + K$, und da $T_\psi \in \mathcal{F}_\omega$, ist $\Phi_\omega(T_\psi) = 0$, so dass

$$\Phi_\omega(T_{\varphi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}\psi}) = \Phi_\omega(T_{\varphi\chi_{\mathbb{S}_n \setminus U}})\Phi_\omega(T_\psi) = 0.$$

Somit folgt

$$\|\Phi_\omega(T_\varphi)\| = \|\Phi_\omega(T_{\varphi\chi_U})\| \leq \|T_{\varphi\chi_U}\|_e = \|\varphi\chi_U\|_\infty < \varepsilon.$$

□

Es ist anzumerken, dass $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n)$ eine weitere Darstellung besitzt. Zunächst beachten wir, dass $\varphi|_{\mathbb{S}_\pm}$ stetige Fortsetzungen $\varphi|_\pm$ auf ganz $\mathbb{S}_n$ besitzen. Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_+\chi_{\mathbb{S}_+} + \varphi_-\chi_{\mathbb{S}_-} \\ (4.1) \quad &= f_1 + f_2\chi_{\mathbb{S}_+} \end{aligned}$$

mit auf $\mathbb{S}_n$ stetigen Funktionen $f_1 = \varphi_-$ und $f_2 = \varphi_+ - \varphi_-$.

Satz 4.17. *Für $\varphi, \psi \in HC(\mathbb{S}_n)$ ist $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ kompakt. Somit ist die Algebra $\tau(HC(\mathbb{S}_n))/K$ kommutativ.*

BEWEIS. Seien $\varphi, \psi \in HC(\mathbb{S}_n)$ mit $\varphi = f_1 + f_2\chi_{\mathbb{S}_+}$ und $\psi = g_1 + g_2\chi_{\mathbb{S}_+}$, wobei $f_i, g_i \in C(\mathbb{S}_n)$, $i = 1, 2$. Wir zeigen, dass $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ kompakt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} T_{f_1+f_2\chi_{\mathbb{S}_+}}T_{g_1+g_2\chi_{\mathbb{S}_+}} - T_{g_1+g_2\chi_{\mathbb{S}_+}}T_{f_1+f_2\chi_{\mathbb{S}_+}} &= [T_{f_1}, T_{g_1}] + [T_{f_2\chi_{\mathbb{S}_+}}, T_{g_1}] \\ &\quad + [T_{f_1}, T_{g_2\chi_{\mathbb{S}_+}}] + [T_{f_2\chi_{\mathbb{S}_+}}, T_{g_2\chi_{\mathbb{S}_+}}]. \end{aligned}$$

Die Kompaktheit der drei ersten Kommutatoren folgen aus Lemma 1.6. Es bleibt nur noch die Kompaktheit von $[T_{f_2\chi_{\mathbb{S}_+}}, T_{g_2\chi_{\mathbb{S}_+}}]$ nachzuweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} T_{f_2\chi_{\mathbb{S}_+}}T_{g_2\chi_{\mathbb{S}_+}} - T_{g_2\chi_{\mathbb{S}_+}}T_{f_2\chi_{\mathbb{S}_+}} &= T_{\chi_{\mathbb{S}_+}}T_{f_2}T_{g_2}T_{\chi_{\mathbb{S}_+}} - T_{\chi_{\mathbb{S}_+}}T_{g_2}T_{f_2}T_{\chi_{\mathbb{S}_+}} + K \\ &= T_{\chi_{\mathbb{S}_+}}(T_{f_2}T_{g_2} - T_{g_2}T_{f_2})T_{\chi_{\mathbb{S}_+}} + K, \end{aligned}$$

wobei K ein kompakter Operator ist. Wiederum liefert Lemma 1.6 die Behauptung. □

Mit $\sigma(\Phi_\omega(T_\varphi))$ bezeichnen wir das Spektrum von $\Phi_\omega(T_\varphi)$ in $\mathcal{I}_\omega$. Nach Satz 4.16 erhalten wir für $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n)$

$$\begin{aligned} \sigma_e(T_\varphi) &= \bigcup_{\omega \in \mathbb{S}_n} \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) \\ (4.2) \quad &= \{\varphi(\omega) : \omega \in \mathbb{S}_n \setminus \partial E\} \cup \left[\bigcup_{\omega \in \partial E} \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) \right]. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\sigma_e(T_\varphi)$ genügt es also, die lokalen Spektren $\sigma(\Phi_\omega(T_\varphi))$ für alle $\omega \in \partial E$ zu berechnen.

Als Vorarbeit soll die Algebra $PC(\overline{\mathbb{D}})$ aller in $\overline{\mathbb{D}}$ stückweise stetigen Funktionen eingeführt werden. Sei g_τ die positiv orientierte Tangente an $\mathbb{T}$ im Punkt $\tau \in \mathbb{T}$. Der Strahl aus τ , der mit g_τ den Winkel $\vartheta \in (0, 2\pi)$ einschließt, nennen wir h_τ . Alle zwischen g_τ und h_τ liegenden Punkte von $\mathbb{D}$ bilden die Menge U_τ^+ , die übrigen Punkte von $\mathbb{D}$ die Menge U_τ^- .

Die Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{D})$ gehört nach Definition zu $PC_{\vartheta(\tau)}$, wenn zwei komplexe Zahlen $a(\tau + 0)$ und $a(\tau - 0)$ mit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{ess-sup}_{w \in U_\tau^\pm, |w - \tau| < \epsilon} |a(w) - a(\tau \pm 0)| = 0$$

existieren. Eine stetige Funktion $\vartheta : \mathbb{T} \rightarrow (0, \pi)$ definiert eine Menge $PC_\vartheta(\overline{\mathbb{D}})$ von $L^\infty(\mathbb{D})$ -Funktionen, die für jeden Punkt $\tau \in \mathbb{T}$ zu $PC_{\vartheta(\tau)}$ gehören. Offenbar ist $PC_\vartheta(\overline{\mathbb{D}})$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{D})$. Die Funktion ϑ wird ab jetzt als fest vorgegeben und die Funktionen aus $PC(\overline{\mathbb{D}}) := PC_\vartheta(\overline{\mathbb{D}})$ werden stückweise stetig genannt.

Ferner definieren wir für jede stückweise stetige Funktion a ihre Restriktion $a|_{\mathbb{T}}$ auf $\mathbb{T}$ durch die Gleichung

$$(a|_{\mathbb{T}})(\tau) = \frac{[a(\tau - 0) + a(\tau + 0)]}{2}, \quad \tau \in \mathbb{T}.$$

Es lässt sich zeigen, dass mit Ausnahme abzählbar vieler Punkte $\tau \in \mathbb{T}$ die Gleichheit $a(\tau - 0) = a(\tau + 0)$ erfüllt ist und dass $a|_{\mathbb{T}}$ zur Algebra PC auf $\mathbb{T}$ gehört. Siehe [54, Kapitel 4.5].

Nun definieren wir

$$L_1^\infty(\mathbb{S}_n) := \{\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma) : \varphi(z_1, \dots, z_n) \equiv h_\varphi(z_n) \text{ für ein } h_\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})\}$$

und bezeichnen mit $C_1(\mathbb{S}_n)$ und $HC_1(\mathbb{S}_n)$ die Menge derjenigen Funktionen φ in $C(\mathbb{S}_n)$ bzw. $HC(\mathbb{S}_n)$, für die $\varphi(z_1, \dots, z_n) \equiv h_\varphi(z_n)$ gilt mit $h_\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}})$ bzw. $h_\varphi \in PC(\overline{\mathbb{D}})$.

Für jedes $(n - 1)$ -Tupel $k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ definieren wir $H^2(k')$ als den Unterraum von $H^2(\mathbb{B}_n)$, der von

$$\{e_\nu : \nu = (k', m), m = 0, 1, 2, \dots\}$$

erzeugt wird, wobei $\{e_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}_+^n}$ die Orthonormalbasis von $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist. Es gilt

$$H^2(\mathbb{B}_n) = \bigoplus_{k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} H^2(k').$$

Lemma 4.18. *Ist $\varphi \in L_1^\infty(\mathbb{S}_n)$, so gilt:*

- i) *Für alle $k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ ist $H^2(k')$ ein reduzierender Unterraum für T_φ .*
- ii) *Falls es ein $\varepsilon \in (0, 1)$ gibt, so dass $\varphi \equiv 0$ für $\varepsilon < |z_n| < 1$, so ist $T_\varphi|_{H^2(k')}$ für alle $k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ ein kompakter Operator.*
- iii) *Für alle $\varphi \in C_1(\mathbb{S}_n)$ und $k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ ist $T_\varphi|_{H^2(k')}$ unitär äquivalent zu einer kompakten Störung von $T_\varphi|_{H^2(0)}$.*
- iv) *$T_\varphi|_{H^2(0)}$ ist unitär äquivalent zu $\tilde{T}_{h_\varphi}$, wobei $\tilde{T}_{h_\varphi}$ der zugehörige Toeplitz-operator auf dem gewichteten Bergmanraum $A_{n-2}^2(\mathbb{D})$ ist.*

BEWEIS. i) Für zwei Multiindizes $\nu = (k', m)$ und $v = (l', q)$ erhalten wir aus dem Ausdruck (2.2)

$$\begin{aligned}
\langle T_\varphi e_\nu, e_v \rangle &= c_\nu c_v \int_{\mathbb{S}_n} \varphi(\xi) \xi^{k'} \bar{\xi}^{l'} \xi_n^m \bar{\xi}_n^q d\sigma(\xi) \\
&= \frac{C_n}{2\pi} \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} \int_0^{2\pi} e^{i(k_1-l_1)\theta_1} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} e^{i(k_{n-1}-l_{n-1})\theta_{n-1}} d\theta_{n-1} \\
&\quad \cdot \int_0^{2\pi} h_\varphi(e^{i\theta_n} \sqrt{1-|\varrho'|^2}) e^{i(m-q)\theta_n} d\theta_n \varrho^{k'+l'} \sqrt{1-|\varrho'|^2}^{m+q} \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k \\
&= \delta_{k', l'} C_n (2\pi)^{n-2} \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} \int_0^{2\pi} h_\varphi(e^{i\theta_n} \sqrt{1-|\varrho'|^2}) e^{i(m-q)\theta_n} d\theta_n \\
&\quad \cdot \varrho^{2k'} \sqrt{1-|\varrho'|^2}^{m+q} \prod_{k=1}^{n-1} \varrho_k d\varrho_k
\end{aligned}$$

wobei $C_n := c_\nu c_v \frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}}$ mit $c_\nu = (2\pi)^{-1} \alpha_\nu$ und α_ν durch (2.9) gegeben ist. Daraus folgt

$$\langle T_\varphi e_\nu, e_v \rangle = \delta_{k', l'} \int_{\mathbb{S}_n} \varphi(\xi) e_\nu(\xi) \overline{e_v(\xi)} d\sigma(\xi).$$

Ist also $F \in H^2(k')$, so gilt $T_\varphi F \in H^2(k')$. Unter Verwendung von $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$ erhalten wir ebenfalls $T_\varphi^* F \in H^2(k')$.

ii) Für zwei Multiindizes $\nu = (k', m)$, $v = (k', q)$ folgt aus (2.2)

$$\begin{aligned}
|\langle T_\varphi e_\nu, e_v \rangle| &\leq C_n \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\tau(\mathbb{B}_{n-1})} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta} \sqrt{1-|\varrho'|^2}, t' \varrho')| d\theta \\
&\quad \cdot \varrho_2^{2k_2} \dots \varrho_{n-1}^{2k_{n-1}} \varrho_n^{m+q} \sqrt{1-|\varrho'|^2}^{2k_1} \prod_{k=2}^n \varrho_k d\varrho_k \prod_{k=2}^n \frac{dt_k}{it_k}.
\end{aligned}$$

Da $\varphi \in L_1^\infty(\mathbb{S}_n)$ mit $\varphi(e^{i\theta} \sqrt{1-|\varrho'|^2}, t' \varrho') = h_\varphi(t_n \varrho_n)$ und $h_\varphi \equiv 0$ für $\varepsilon < \varrho_n < 1$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\langle T_\varphi e_\nu, e_v \rangle| &\leq C_n \int_{\mathbb{T}} \int_{\tau(B_{n-1})} |h_\varphi(t_n \varrho_n)| \varrho_2^{2k_2} \dots \varrho_{n-1}^{2k_{n-1}} \varrho_n^{m+q} \sqrt{1-|\varrho'|^2}^{2k_1} \\
&\quad \cdot \prod_{k=2}^n \varrho_k d\varrho_k \frac{dt_n}{it_n} \\
&\leq C_n \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 \int_0^{1-\varrho_2^2} \dots \int_0^{1-\sum_{j=2}^{n-1} \varrho_j^2} |h_\varphi(t_n \varrho_n)| \varrho_n^{m+q+1} (1-|\varrho'|^2)^{k_1} d\varrho_n \\
&\quad \varrho_2^{2k_2+1} \dots \varrho_{n-1}^{2k_{n-1}+1} d\varrho_{n-1} \dots d\varrho_2 \frac{dt_n}{it_n} \\
&\leq C_n \int_{\mathbb{T}} \int_0^1 \int_0^{1-\varrho_2^2} \dots \int_0^\varepsilon |h_\varphi(t_n \varrho_n)| \varrho_n^{m+q+1} (1-|\varrho'|^2)^{k_1} d\varrho_n \\
&\quad \varrho_2^{2k_2+1} \dots \varrho_{n-1}^{2k_{n-1}+1} d\varrho_{n-1} \dots d\varrho_2 \frac{dt_n}{it_n}.
\end{aligned}$$

Der Term $(1 - |\varrho'|^2)^{k_1}$ wird durch 1 abgeschätzt und damit folgt

$$|\langle T_\varphi e_\nu, e_\nu \rangle| \leq 2\pi C_n \varepsilon^{m+q+1} \|\varphi\|_\infty \int_0^1 \int_0^{1-\varrho_2^2} \dots \int_0^\varepsilon d\varrho_n \\ \varrho_2^{2k_2+1} \dots \varrho_{n-1}^{2k_{n-1}+1} d\varrho_{n-1} \dots d\varrho_2,$$

d.h.

$$|\langle T_\varphi e_\nu, e_\nu \rangle| \leq \check{C} C_n \|\varphi\|_\infty \varepsilon^{m+q+2},$$

wobei $\check{C}$ von n und k abhängt. Dies führt zu

$$\sum_m \sum_q |\langle T_\varphi e_\nu, e_\nu \rangle|^2 < \infty.$$

Folglich ist $T_\varphi|_{H^2(k')}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator und somit kompakt.

iii) Sei $S_\varphi := T_\varphi|_{H^2(0)}$ und identifiziere $m \in \mathbb{Z}_+$ mit $(0, \dots, 0, m)$. Weiterhin sei der durch $V(e_m) = e_\nu$ mit $\nu = (k', m)$ definierte unitäre Operator

$$V : H^2(0) \rightarrow H^2(k').$$

Es ist zu zeigen, dass der Operator

$$V^{-1}T_\varphi V - S_\varphi$$

für jedes $\varphi \in C_1(\mathbb{S}_n)$ kompakt ist. Beachte, dass $[V^{-1}T_\varphi V - S_\varphi]^* = V^{-1}T_{\bar{\varphi}} V - S_{\bar{\varphi}}$. Zunächst zeigen wir, dass der Operator $V^{-1}T_{z_n} V - S_{z_n}$ kompakt ist. Es gilt

$$V^{-1}T_{z_n} V e_m(z) = V^{-1}z_n e_\nu(z) = V^{-1}c_\nu z'^{k'} z_n^{m+1} = c_\nu c_v^{-1} e_{m+1}(z),$$

wobei $v = (k', m+1)$ und $c_\nu c_v^{-1} = \sqrt{\frac{(m+1)}{(n+m+|k'|)}}$, und

$$S_{z_n} e_m(z) = c_m z_n^{m+1} = \sqrt{\frac{m+1}{n+m}} e_{m+1}(z).$$

Somit folgt

$$[V^{-1}T_{z_n} V - S_{z_n}] e_m(z) = \lambda(m) e_{m+1}(z)$$

mit

$$\lambda(m) = \left[\sqrt{\frac{(m+1)}{(n+m+|k'|)}} - \sqrt{\frac{m+1}{n+m}} \right].$$

Folglich ist der obige Operator diagonal mit $\lambda(m) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, was zur Kompaktheit von $V^{-1}T_{z_n} V - S_{z_n}$ und somit auch von $V^{-1}T_{\bar{z}_n} V - S_{\bar{z}_n}$ führt.

Des Weiteren zeigen wir, dass der Operator

$$V^{-1}T_{z_n \bar{z}_n} V - S_{z_n \bar{z}_n}$$

kompakt ist. Setze $T_{z_n \bar{z}_n}^0 := V^{-1}T_{z_n \bar{z}_n} V$. Dann gilt

$$T_{z_n \bar{z}_n}^0 - S_{z_n \bar{z}_n} = T_{z_n \bar{z}_n}^0 - T_{z_n}^0 T_{\bar{z}_n}^0 + T_{z_n}^0 T_{\bar{z}_n}^0 - T_{z_n}^0 S_{\bar{z}_n} \\ + T_{z_n}^0 S_{\bar{z}_n} - S_{z_n} S_{\bar{z}_n} + S_{z_n} S_{\bar{z}_n} - S_{z_n \bar{z}_n}.$$

Unter Verwendung der ersten Teils und eines entsprechenden Satzes im Hardyraum erhalten wir

$$\begin{aligned} T_{z_n \bar{z}_n}^0 - S_{z_n \bar{z}_n} &= T_{z_n \bar{z}_n}^0 - T_{z_n}^0 T_{\bar{z}_n}^0 + T_{z_n}^0 [T_{\bar{z}_n}^0 - S_{\bar{z}_n}] \\ &\quad + [T_{z_n}^0 - S_{z_n}] S_{\bar{z}_n} + S_{z_n} S_{\bar{z}_n} - S_{z_n \bar{z}_n}. \end{aligned}$$

Damit ist der Operator $T_{z_n \bar{z}_n}^0 - S_{z_n \bar{z}_n}$ kompakt.

Durch vollständige Induktion folgt nun die Kompaktheit von $T_{p_k}^0 - S_{p_k}$ für alle Polynome p_k der Gestalt $p_k(z) = z_n^l \bar{z}_n^\delta$, wobei $l + \delta = k$ und $k \in \mathbb{N}$. Da die Polynome in z_n und $\bar{z}_n$ dicht in $C_1(\mathbb{S}_n)$ liegen, ist die Behauptung bewiesen.

iv) Die kanonische orthonormale Basis für $A_{n-2}^2(\mathbb{D})$ [58, S. 78] ist gegeben durch

$$\tilde{e}_m(z) = \sqrt{\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}} z^m, \quad m \geq 0.$$

Wir identifizieren m mit $(0, \dots, 0, m)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi e_m, e_m \rangle &= \int_{\mathbb{S}_n} \varphi(\xi) |e_m(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \\ &\stackrel{*}{=} (n-1) \int_{\mathbb{D}} h_\varphi(w) |\tilde{e}_m(\xi)|^2 (1-|w|^2)^{n-2} dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} h_\varphi(w) |\tilde{e}_m(\xi)|^2 dA_{n-2}(w) \\ &= \langle \tilde{T}_{h_\varphi} \tilde{e}_m, \tilde{e}_m \rangle, \end{aligned}$$

wobei $dA_a(z)$, $a > -1$, das durch

$$dA_a(z) = (a+1)(1-|z|^2)^a dA(z)$$

definierte Borelmaß auf $\mathbb{D}$, und $dA(z)$ das normalisierte Flächenmaß auf $\mathbb{D}$ ist. Bei (*) wurde die Identität (1) in [41, 1.4.4] ausgenutzt. $\square$

Lemma 4.19. *Ist $\varphi \in HC_1(\mathbb{S}_n)$ und*

$$\lim_{\varrho_n \rightarrow 1} \sup_{\theta_n \in [0, 2\pi]} |h_\varphi(\varrho_n e^{i\theta_n})| = 0,$$

so ist $T_\varphi|_{H^2(k')}$ für alle $k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ kompakt.

BEWEIS. Für $r \in \mathbb{N}$ sei χ_r die charakteristische Funktion der Menge

$$S_r := \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}_n : |z_n| < 1 - \frac{1}{r} \right\}.$$

Dann folgt für alle $k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ und für $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|T_\varphi|_{H^2(k')} - T_{\varphi\chi_r}|_{H^2(k')}\| &= \|T_{[\varphi - \varphi\chi_r]}|_{H^2(k')}\| \\ &\leq \|T_{[\varphi - \varphi\chi_r]}\| \\ &= \|\varphi - \varphi\chi_r\|_\infty \\ &= \sup_{1-\frac{1}{r} < |z_n| < 1} |h_\varphi(z_n)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.18 ii) ist $T_{\varphi\chi_r}|_{H^2(k')}$ kompakt, und weil $T_{\varphi\chi_r}|_{H^2(k')}$ in der Operatornorm gegen $T_\varphi|_{H^2(k')}$ konvergiert, ist auch $T_\varphi|_{H^2(k')}$ kompakt. $\square$

Der zu beweisende Hauptsatz lautet wie folgt.

Satz 4.20. *Sei $\varphi = \langle f, g \rangle \in HC(\mathbb{S}_n)$. Dann besteht das wesentliche Spektrum von T_φ aus $\{\varphi(\omega) : \omega \in \mathbb{S}_n \setminus \partial E\}$ zusammen mit den abgeschlossenen Verbindungsstrecken zwischen $f(\omega)$ und $g(\omega)$ für jedes $\omega \in \partial E$.*

Dieselbe Methode wie in [33, Seite 290-294] wird zum Beweis von Satz 4.20 herangezogen werden. Sei $\omega \in \partial E$. Sei $\varphi = \langle f, g \rangle \in HC(\mathbb{S}_n)$ und definiere

$$\psi(z) := \begin{cases} f(\omega), & \text{für } z \in \mathbb{S}_+, \\ g(\omega), & \text{für } z \in \mathbb{S}_-. \end{cases}$$

Dann ist ψ konstant auf $\mathbb{S}_+$ und auf $\mathbb{S}_-$ und nach Satz 4.16 iv) gilt $\Phi_\omega(T_\varphi) = \Phi_\omega(T_\psi)$. Somit reicht es aus zu zeigen, dass das Spektrum von $\Phi_\omega(T_\psi)$ aus der Verbindungsstrecke zwischen $f(\omega)$ und $g(\omega)$ besteht. Dies formulieren wir im folgenden Lemma.

Lemma 4.21. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und*

$$\psi(z) := \begin{cases} \alpha, & \text{für } z \in \mathbb{S}_+, \\ \beta, & \text{für } z \in \mathbb{S}_-. \end{cases}$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) *Für jedes $\omega \in \partial E$ ist $\Phi_\omega(T_\psi)$ invertierbar.*
- b) *Die Verbindungsstrecke zwischen α und β verläuft nicht durch den Ursprung.*

BEWEIS. Die Richtung b) $\Rightarrow$ a) wird sofort bewiesen. Wir nehmen an, dass die Verbindungsstrecke zwischen α und β nicht den Ursprung enthält. Da $aT_\psi = T_{a\psi}$ für eine Konstante a , können wir voraussetzen, dass sich α und β in der oberen rechten Halbebene befinden. Also es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $|\epsilon\alpha - 1| < 1$ und $|\epsilon\beta - 1| < 1$ und daher $\|\epsilon\psi - 1\|_\infty < 1$. Wegen

$$\|T_{\epsilon\psi} - 1\| = \|T_{\epsilon\psi-1}\| = \|\epsilon\psi - 1\|_\infty < 1$$

ist der Operator T_ψ invertierbar und damit ist $\Phi_\omega(T_\psi)$ invertierbar. $\square$

Zum Beweis der Richtung a) $\Rightarrow$ b) in Lemma 4.21 werden zwei Lemmata benötigt. Wir betrachten für $p \in [-1, 1]$ die Menge

$$\Delta_p = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \partial E : \omega_n = p\},$$

so dass $\bigcup_{p \in [-1, 1]} \Delta_p = \partial E$. Für $p = \pm 1$ gilt offensichtlich $\Delta_p = \{(0, \dots, 0, p)\}$.

Lemma 4.22. *Sei $\omega, \mu \in \Delta_p$ und sei U eine unitäre Transformation von $\mathbb{C}^n$, welche die z_n -Koordinate festhält und ω auf μ abbildet. Dann gibt es einen isometrischen $*$ -Isomorphismus $W : \Phi_\omega(\tau(HC(\mathbb{S}_n))) \rightarrow \Phi_\mu(\tau(HC(\mathbb{S}_n)))$, so dass für $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n)$ gilt*

$$W(\Phi_\omega(T_\varphi)) = \Phi_\mu(T_{\varphi \circ U^{-1}}).$$

BEWEIS. Definiere die Abbildung $D : HC(\mathbb{S}_n) \rightarrow HC(\mathbb{S}_n)$ durch $D\varphi = \varphi \circ U$. Dann ist D ein Automorphismus von $HC(\mathbb{S}_n)$ und bildet $\mathcal{F}_\mu$ auf $\mathcal{F}_\omega$ ab. Als linearer Operator auf $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist D unitär. Wir zeigen nun, dass

$$T_{\varphi \circ U^{-1}} = D^{-1}T_\varphi D.$$

Sei $f \in H^2(\mathbb{B}_n)$, dann gilt

$$D^{-1}T_\varphi Df(z) = D^{-1} \left[\int_{\mathbb{S}_n} \frac{\varphi(\zeta)(f \circ U)(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^n} d\sigma(\zeta) \right] = \int_{\mathbb{S}_n} \frac{\varphi(\zeta)(f \circ U)(\zeta)}{(1 - \langle U^{-1}z, \zeta \rangle)^n} d\sigma(\zeta).$$

Mit $\hat{\varphi} = \varphi \circ U^{-1}$ folgt wegen der Rotationsinvarianz von σ

$$\begin{aligned} D^{-1}T_\varphi Df(z) &= \int_{\mathbb{S}_n} \frac{\hat{\varphi}(U(\zeta))f(U(\zeta))}{(1 - \langle z, U(\zeta) \rangle)^n} d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{S}_n} \frac{\hat{\varphi}(w)f(w)}{(1 - \langle z, w \rangle)^n} d\sigma(w) \\ &= T_{\hat{\varphi}}f(z). \end{aligned}$$

Daher ist $V : \mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n)) \rightarrow \mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))$, $T_\varphi \mapsto T_{\hat{\varphi}}$, ein isometrischer *-Automorphismus mit $V(\tau(HC(\mathbb{S}_n))) \subset \tau(HC(\mathbb{S}_n))$ und $V(\mathcal{F}_\omega) = \mathcal{F}_\mu$ und induziert einen unitalen isometrischen *-Isomorphismus $\tilde{V} : \mathcal{I}_\omega \rightarrow \mathcal{I}_\mu$. $\square$

Lemma 4.23. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und ψ wie in Lemma 4.21 und sei $p \in [-1, 1]$ vorgegeben. Dann existiert eine Funktion $\phi \in HC(\mathbb{S}_n)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- i) T_ϕ ist kein Fredholmoperator.
- ii) $\Phi_\mu(T_\phi)$ ist invertierbar in $\mathcal{I}_\mu$, $\mu \in \mathbb{S}_n \setminus \Delta_p$.
- iii) $\phi(\omega) = \psi(\omega)$ für $\omega \in \Delta_p$.

Anstatt dieses Lemma zu zeigen, beweisen wir ein äquivalentes Lemma. Wir notieren, dass die Richtung “b) $\Rightarrow$ a)” von Lemma 4.21 benötigt wird.

Lemma 4.24. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ beliebig und $p \in [-1, 1]$ vorgegeben. Dann existiert eine Funktion $\phi = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \in HC(\mathbb{S}_n)$, so dass gilt:*

- i) T_ϕ ist kein Fredholmoperator.
- ii) ϕ verschwindet nicht auf $\mathbb{S}_n \setminus \partial E$.
- iii) Die Verbindungsstrecke zwischen $\phi_1(\mu)$ und $\phi_2(\mu)$ läuft nicht durch den Ursprung für $\mu \in \partial E \setminus \Delta_p$.
- iv) $\phi_1(\omega) = \alpha$ und $\phi_2(\omega) = \beta$ für $\omega \in \Delta_p$.

BEWEIS. Wir konstruieren eine Funktion ϕ , die diese Voraussetzungen erfüllt.

a) Wir behandeln zunächst den Fall $-1 < p < 1$ und nehmen an, dass α und β rein imaginär sind mit $\text{Im}\beta < 0 < \text{Im}\alpha$. Wir betrachten den speziellen Fall $p = 0$ und definieren eine Funktion $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(4.3) \quad f(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi}(\alpha - 1)\theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 + 2\alpha - \frac{2}{\pi}(\alpha + 1)\theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \\ 1 + \frac{2}{\pi}(1 - \beta)\theta, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0, \\ 1 + 2\beta + \frac{2}{\pi}(1 + \beta)\theta, & -\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Für $p \neq 0$ läuft das Verfahren genauso mit einer nahe liegenden Abänderung in der Definition von f . Wir definieren $\phi = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \in HC(\mathbb{S}_n)$ durch

$$\phi_1(z_1, \dots, z_n) = f(\cos^{-1}(\text{Re}z_n)) \quad \text{für} \quad \text{Im}z_n \geq 0,$$

$$\phi_2(z_1, \dots, z_n) = f(-\cos^{-1}(\operatorname{Re} z_n)) \quad \text{für} \quad \operatorname{Im} z_n \leq 0.$$

Das Bild von ϕ und f ist das Viereck, das durch die Eckpunkte 1, α , -1 und β bestimmt ist. Wir beachten, dass $\phi \in HC_1(\mathbb{S}_n)$ und $\phi_1(\omega) = f(\cos^{-1} 0) = \alpha$ und $\phi_2(\omega) = f(-\cos^{-1} 0) = \beta$ für $\omega \in \Delta_0$. Offenbar erfüllt ϕ die Eigenschaften ii), iii) und iv) von Lemma 4.24.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass T_ϕ kein Fredholmoperator ist. Nach Lemma 4.18 i) lässt sich T_ϕ darstellen als

$$T_\phi = \bigoplus_{k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} T_\phi|_{H^2(k')}.$$

Wir definieren eine Funktion $g : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z_1, \dots, z_{n-1}, \varrho_n e^{i\theta_n}) = h_g(\varrho_n e^{i\theta_n}) = \varrho_n f(e^{i\theta_n}),$$

wobei $f \in C(\mathbb{T})$ durch (4.3) erklärt ist. Dann gilt $g \in C_1(\mathbb{S}_n)$. Schreibt man $\phi = g + (\phi - g)$ so ergibt sich aus Lemma 4.19

$$(4.4) \quad T_\phi = \bigoplus_{k'} (T_g|_{H^2(k')} + K_{k'}),$$

wobei $K_{k'}$ ein kompakter Operator auf $H^2(k')$ ist. Lemma 4.18 iii) zusammen mit iv) zufolge ist $T_g|_{H^2(k')}$ unitär äquivalent zu einer kompakten Störung von $\tilde{T}_{h_g} \in \mathcal{L}(A_{n-2}^2(\mathbb{D}))$. Nach [13, Lemma 3] ist $\tilde{T}_{h_g}$ unitär äquivalent zu einer kompakten Störung von $T_f \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$. Nun war f so definiert, dass T_f vom Index $\operatorname{ind}(T_f) = -1$ ist [19, S. 185]. Daraus folgt, dass $\operatorname{ind}(T_g|_{H^2(k')} + K_{k'}) = -1$, also ist

$$\dim \ker (T_g|_{H^2(k')} + K_{k'})^* > 0.$$

Mit (4.4) folgt $\dim \ker T_\phi^* = \infty$. Daher kann T_ϕ kein Fredholmoperator sein.

b) Wir betrachten nun den Fall $p = -1$. Der Fall $p = 1$ ist analog. Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\pi}(\alpha - 1)\theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 1 + \frac{1}{\pi}(1 - \beta)\theta, & -\pi \leq \theta \leq 0, \end{cases}$$

wobei α und β wie in a) betrachtet, und definieren $\phi = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \in HC(\mathbb{S}_n)$ durch

$$\phi_1(z_1, \dots, z_n) = f(\cos^{-1}(\operatorname{Re} z_n)) \quad \text{für} \quad \operatorname{Im} z_n \geq 0,$$

$$\phi_2(z_1, \dots, z_n) = f(-\cos^{-1}(\operatorname{Re} z_n)) \quad \text{für} \quad \operatorname{Im} z_n \leq 0.$$

Offenbar erfüllt ϕ die Eigenschaften ii), iii) und iv) von Lemma 4.24.

Nach der vorhergehenden Überlegung wissen wir, dass

$$M := \overline{\bigcup_{\lambda \in \partial E \setminus \Delta_{(1,-1)}} [\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)]} \subset \sigma_e(T_\phi)$$

gilt, wobei $\Delta_{(1,-1)} := \Delta_1 \cup \Delta_{-1}$. Da das Intervall $[\alpha, \beta]$ nach Definition von f in M liegt und 0 enthält, folgt $0 \in \sigma_e(T_\phi)$. Daher ist T_ϕ kein Fredholmoperator. $\square$

Nun können wir den Beweis von Lemma 4.21 abschließen.

BEWEIS VON LEMMA 4.21. a) $\Rightarrow$ b) Wir nehmen an, dass die Verbindungsstrecke zwischen α und β durch den Ursprung läuft und zeigen, dass $\Phi_\omega(T_\psi)$ für jedes $\omega \in \partial E = \bigcup_{-1 \leq p \leq 1} \Delta_p$ nicht invertierbar in $\mathcal{I}_\omega$ ist. Für ein $p \in [-1, 1]$ existiert nach Lemma 4.23 eine Funktion $\phi \in HC(\mathbb{S}_n)$, die die Eigenschaften dieses Lemmas erfüllt. Nach Satz 4.16 iii) gibt es ein $\omega_0 \in \Delta_p$, so dass $\Phi_{\omega_0}(T_\phi)$ nicht invertierbar ist. Zusammen mit Satz 4.16 iv) gilt aber $\Phi_{\omega_0}(T_\phi) = \Phi_{\omega_0}(T_\psi)$. Der Isomorphismus W in Lemma 4.22 bildet $\Phi_{\omega_0}(T_\psi)$ auf $\Phi_\mu(T_\psi)$ ab, $\mu \in \Delta_p$. Insbesondere gilt, falls $\Phi_\omega(T_\psi)$ für irgendein $\omega \in \Delta_p$ nicht invertierbar ist, ist er für alle $\omega \in \Delta_p$ nicht invertierbar. Da $\partial E = \bigcup_p \Delta_p$, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 4.25. Satz 4.20 kann für Symbole $\phi \in HC_1(\mathbb{S}_n)$ auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden. Sei $\phi(z) = h_\phi(z_n)$, $z \in \mathbb{S}_n$ mit $h_\phi \in PC(\mathbb{D})$. Nach einer Anwendung von [36, Theorem 2] und dem Beweis zu [54, Satz 4.6.3 (b)] erhalten wir

$$\sigma_e(\tilde{T}_{h_\phi}) = \text{ran } h_\phi^\#,$$

wobei die Funktion $h_\phi^\# : \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Formel

$$h_\phi^\#(\tau, x) = (1 - x)h_\phi(\tau - 0) + xh_\phi(\tau + 0), \quad (\tau, x) \in \mathbb{T} \times [0, 1]$$

gegeben ist. Aus Lemma 4.18 iv) ergibt sich

$$\sigma_e(T_\phi|_{H^2(0)}) = \sigma_e(\tilde{T}_{h_\phi}) = \text{ran } h_\phi^\#.$$

Zusammen mit Lemma 4.18 i) folgt

$$(4.5) \quad \text{ran } h_\phi^\# \subset \sigma_e(T_\phi).$$

Andererseits ist $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n)$ in der Form (4.1), so folgt für alle $\omega \in \partial E$

$$\Phi_\omega(T_{f_1+f_2 \cdot \chi_{\mathbb{S}_+}}) = f_1(\omega) + f_2(\omega) \cdot \Phi_\omega(T_{\chi_{\mathbb{S}_+}}).$$

Da nach (3.3) die Abschätzung $\sigma(\Phi_\omega(T_{\chi_{\mathbb{S}_+}})) \subset \sigma(T_{\chi_{\mathbb{S}_+}}) \subseteq [0, 1]$ gilt, folgt

$$\sigma(\Phi_\omega(T_{f_1+f_2 \cdot \chi_{\mathbb{S}_+}})) \subseteq [f_1(\omega), f_1(\omega) + f_2(\omega)].$$

Aus (4.2) folgern wir

$$\sigma_e(T_\varphi) \subseteq \text{ran } \varphi^\#,$$

wobei die Funktion $\varphi^\# : (\mathbb{S}_n \setminus \partial E) \cup (\partial E \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \varphi^\#(z) &= \varphi(z), \quad z \in \mathbb{S}_n \setminus \partial E, \\ \varphi^\#(z, x) &= f_1(z) + x f_2(z), \quad (z, x) \in \partial E \times [0, 1] \end{aligned}$$

definiert ist.

Folglich ergibt sich speziell für $\varphi = \phi \in HC_1(\mathbb{S}_n)$

$$\sigma_e(T_\phi) \subseteq \text{ran } \phi^\# = \text{ran } h_\phi^\#,$$

und diese zusammen mit (4.5) führt zur Aussage

$$\sigma_e(T_\phi) = \text{ran } h_\phi^\#.$$

Als Nächstes wollen wir den Raum der maximalen Ideale von $\tau(HC(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ bestimmen und danach die Indexformel für Toeplitzoperatoren mit matrixwertigen Symbolen angeben.

Sei $X := (\mathbb{S}_n \setminus \partial E) \cup (\partial E \times [0, 1])$. Für $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n)$ mit

$$(4.7) \quad \varphi(z) = \begin{cases} f(z), & \text{Im} z_n > 0, \\ g(z), & \text{Im} z_n < 0, \end{cases}$$

wobei $f \in C(\overline{\mathbb{S}}_+)$ und $g \in C(\overline{\mathbb{S}}_-)$, definieren wir $\varphi^\#$ auf X durch

$$\begin{aligned} \varphi^\#(z) &= \varphi(z), \quad z \in \mathbb{S}_n \setminus \partial E, \\ \varphi^\#(z, x) &= xf(z) + (1-x)g(z), \quad (z, x) \in \partial E \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.20 ist $\sigma_e(T_\varphi) = \text{ran } \varphi^\#$.

Wir fassen X vermöge der Punktevaluation $x \mapsto \delta_x$ als Teilmenge des algebraischen Dualraums E von $HC^\# := \{\varphi^\# : \varphi \in HC(\mathbb{S}_n)\}$ auf und versehen X mit der durch $\sigma(E, HC^\#)$ auf X gegebenen Relativtopologie. Eine Umgebungsbasis für diese Topologie ist gegeben durch die Mengen

$$\begin{aligned} U_\epsilon(z) &\subseteq \mathbb{S}_\pm \quad \text{für } z \in \mathbb{S}_\pm, \\ [U_\epsilon(z) \cap \partial E] \times U_\delta(x) &\subseteq \partial E \times [0, 1] \quad \text{für } (z, x) \in \partial E \times (0, 1), \\ [U_\epsilon(z) \cap \mathbb{S}_+] \cup \{[U_\epsilon(z) \cap \partial E] \times (\delta, 1]\} &\quad \text{für } z \in \partial E, \\ [U_\epsilon(z) \cap \mathbb{S}_-] \cup \{[U_\epsilon(z) \cap \partial E] \times [0, \delta)\} &\quad \text{für } z \in \partial E, \end{aligned}$$

wobei $U_\epsilon(z)$ die ϵ -Umgebung von z ist und $\epsilon, \delta > 0$.

Bemerkung 4.26. Wir beachten die punktweise Konvergenz einer Folge in X .

- Falls $z_n \in \mathbb{S}_\pm$ und $z_n \rightarrow z \in \mathbb{S}_\pm$, dann gilt $z_n \rightarrow z \in X$.
- Falls $z_n \in \partial E$ und $z_n \rightarrow z$, $x_n \rightarrow x \in (0, 1)$, dann gilt $(z_n, x_n) \rightarrow (z, x) \in \partial E \times [0, 1]$ in X .
- Falls $z_n \in \partial E$ und $z_n \rightarrow z$, $x_n \rightarrow 1^-$, dann gilt $(z_n, x_n) \rightarrow (z, 1)$ in X , aber falls $z_n \in \mathbb{S}_+$ und $z_n \rightarrow z \in \partial E$, dann gilt $z_n \rightarrow (z, 1)$ in X .
- Falls $z_n \in \partial E$ und $z_n \rightarrow z$, $x_n \rightarrow 0^+$, dann gilt $(z_n, x_n) \rightarrow (z, 0)$ in X , aber falls $z_n \in \mathbb{S}_-$ und $z_n \rightarrow z \in \partial E$, dann gilt $z_n \rightarrow (z, 0)$ in X .

Nach Satz 4.20 ist der Raum der maximalen Ideale von $\Phi_\omega(\tau(HC(\mathbb{S}_n)))$ für $\omega \in \partial E$ homöomorph zu $\{\omega\} \times [0, 1]$. Da Φ_ω für $\omega \in \mathbb{S}_n \setminus \partial E$ Punktevaluationen sind, ist der Raum der maximalen Ideale von $\Phi(\tau(HC(\mathbb{S}_n)))$ homöomorph zu $(\mathbb{S}_n \setminus \partial E) \cup (\partial E \times [0, 1])$. Wegen der Kommutativität der Algebra $\tau(HC(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ (Satz 4.17) ist der Raum der maximalen Ideale von $\tau(HC(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K}$ homöomorph zu X . Die Gelfandabbildung $\Gamma : \tau(HC(\mathbb{S}_n))/\mathcal{K} \rightarrow C(X)$ ist gegeben durch

$$\Gamma(T_\varphi + K) = \varphi^\# \quad \text{für } \varphi \in HC(\mathbb{S}_n) \text{ und } K \in \mathcal{K}.$$

Nach Satz 4.16 erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \tau(HC(\mathbb{S}_n)) \xrightarrow{\Gamma} C(X) \rightarrow 0.$$

Die Erweiterung der obigen exakten Sequenz zum Matrixfall durch Bildung des Tensorproduktes führt zur exakten Sequenz

$$(4.8) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{i \otimes 1} \tau(HC(\mathbb{S}_n)) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Gamma \otimes 1} C(X) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow 0.$$

Sei $H_N^2(\mathbb{B}_n) = H^2(\mathbb{B}_n) \otimes \mathbb{C}^N$. Für $\varphi \in C(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ sei $T_\varphi \in \mathcal{L}(H_N^2(\mathbb{B}_n))$ definiert durch

$$T_\varphi f = C_N(\varphi f) \quad \text{für alle } f \in H_N^2(\mathbb{B}_n),$$

wobei $C_N : L_N^2(\mathbb{S}_n, d\sigma) \rightarrow H_N^2(\mathbb{B}_n)$ die orthogonale Projektion ist.

Für $\psi \in C(\overline{\mathbb{B}}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ sei $\tilde{T}_\psi$ definiert auf $A_N^2(\mathbb{B}_n)$ wie in [52].

Sei nun $U : H^2(\mathbb{B}_n) \rightarrow A^2(\mathbb{B}_n)$ die unitäre Transformation mit $U(e_\alpha) = \tilde{e}_\alpha$, wobei $\{e_\alpha\}_\alpha$ die kanonische Orthonormalbasis (1.2) für $H^2(\mathbb{B}_n)$ ist und $\{\tilde{e}_\alpha\}_\alpha$ die durch

$$\tilde{e}_\alpha(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+|\alpha|+1)}{\alpha! \Gamma(n+1)}} z^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$$

gegebene kanonische Orthonormalbasis für $A^2(\mathbb{B}_n)$ ist. Wir setzen $U_n = U \otimes \mathbb{C}^n$.

Lemma 4.27. [13, Lemma 3] *Sei $\psi \in C(\overline{\mathbb{B}}_n) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dann gilt $U_n^* \tilde{T}_\psi U_n = T_\varphi + K$, wobei $\varphi = \psi|_{\mathbb{S}_n}$ und K ein kompakter Operator auf $A_n^2(\mathbb{B}_n)$ ist.*

Definition 4.28 (Venugopalkrishna). *Sei $F : \mathbb{S}_n \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ eine stetige Abbildung und $N = n$. Die erste Spalte von F definiert eine Abbildung $F_1 : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$, so dass $g = \frac{F_1}{|F_1|} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$. Wir definieren den Abbildungsgrad von F durch*

$$\deg F = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \deg g.$$

Sei nun $G : \mathbb{S}_n \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ eine stetige Abbildung mit $N > n$. Nach [5, S. 239] existiert eine stetige Abbildung

$$H : \mathbb{S}_n \times [0, 1] \rightarrow GL(N, \mathbb{C}),$$

so dass $H(z, 0) = G(z)$ und

$$H(z, 1) = \begin{pmatrix} G'(z) & 0 \\ 0 & I_{N-n} \end{pmatrix},$$

wobei I_{N-n} die $(N-n) \times (N-n)$ -Einheitsmatrix ist. Dann definieren wir

$$\deg G = \deg G'.$$

Die folgende Indexformel für Toeplitzoperatoren mit stetigen matrixwertigen Symbolen auf $\overline{\mathbb{B}}_n$ wurde von Venugopalkrishna in [52, Theorem 1.5] aufgestellt.

Satz 4.29. [52] *Seien $N \geq n$ und $\psi \in C(\overline{\mathbb{B}}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Falls $\det \psi|_{\mathbb{S}_n}$ nullstellenfrei ist, dann ist $\tilde{T}_\psi : A_N^2(\mathbb{B}_n) \rightarrow A_N^2(\mathbb{B}_n)$ ein Fredholmoperator und der Index von $\tilde{T}_\psi$ ist gegeben durch*

$$\text{ind } \tilde{T}_\psi = (-1)^n \deg \psi|_{\mathbb{S}_n}.$$

Dieser Satz liefert zusammen mit Lemma 4.27 sofort eine analoge Aussage auf $H_n^2(\mathbb{B}_n)$.

Korollar 4.30. *Sei $N \geq n$ und sei $\varphi \in C(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Falls $\det \varphi$ nullstellenfrei ist, dann ist $T_\varphi : H_N^2(\mathbb{B}_n) \rightarrow H_N^2(\mathbb{B}_n)$ ein Fredholmoperator und der Index von T_φ ist gegeben durch*

$$\text{ind } T_\varphi = (-1)^n \deg \varphi.$$

Nun sei $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n)$ wie in (4.7). Für $t \in [0, 1]$ definieren wir φ_t auf $\mathbb{S}_n$ durch

$$\begin{aligned} \varphi_t(z', \varrho_n e^{i\theta_n}) &= \begin{cases} f\left(z', \varrho_n e^{i\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{2-t}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_n\right)\right]}\right), & \frac{\pi t}{4} \leq \theta_n \leq \pi - \frac{\pi t}{4}, \\ g\left(z', \varrho_n e^{i\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{2-t}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_n\right)\right]}\right), & -\pi + \frac{\pi t}{4} \leq \theta_n \leq -\frac{\pi t}{4}, \end{cases} \\ \varphi_t(z', \varrho_n e^{i\theta_n}) &= \begin{cases} \left(\frac{2\theta_n}{\pi} + 1 - \frac{t}{2}\right) f(z', \varrho_n) + \left(\frac{t}{2} - \frac{2\theta_n}{\pi}\right) g(z', \varrho_n), & 0 < \theta_n \leq \frac{\pi t}{4}, \\ \left(\frac{2\theta_n}{\pi} + \frac{t}{2}\right) f(z', \varrho_n) + \left(1 - \frac{t}{2} - \frac{2\theta_n}{\pi}\right) g(z', \varrho_n), & -\frac{\pi t}{4} \leq \theta_n < 0, \end{cases} \\ \varphi_t(z', \varrho_n e^{i\theta_n}) &= \left(-\frac{2\theta_n}{\pi} + \frac{6-t}{2}\right) f(z', -\varrho_n) + \left(\frac{t-4}{2} + \frac{2\theta_n}{\pi}\right) g(z', -\varrho_n), \\ &\quad \frac{\pi(4-t)}{4} \leq \theta_n < \pi, \\ \varphi_t(z', \varrho_n e^{i\theta_n}) &= \left(-\frac{2\theta_n}{\pi} + \frac{t-4}{2}\right) f(z', -\varrho_n) + \left(\frac{6-t}{2} + \frac{2\theta_n}{\pi}\right) g(z', -\varrho_n), \\ &\quad -\pi < \theta_n \leq \frac{\pi(t-4)}{4}. \end{aligned}$$

Ferner definieren wir die Gelfandtransformierte $\varphi_t^\#$ von φ_t auf X durch

$$\begin{aligned} \varphi_t^\#(z', \varrho_n e^{i\theta_n}) &= \varphi_t(z', \varrho_n e^{i\theta_n}), \quad (z', \varrho_n e^{i\theta_n}) \in \mathbb{S}_n \\ \varphi_t^\#((z', \varrho_n), x) &= \left(x(1-t) + \frac{t}{2}\right) f(z', \varrho_n) + \left(1 - \frac{t}{2} - x(1-t)\right) g(z', \varrho_n), \\ \varphi_t^\#((z', -\varrho_n), x) &= \left(x(1-t) + \frac{t}{2}\right) f(z', -\varrho_n) + \left(1 - \frac{t}{2} - x(1-t)\right) g(z', -\varrho_n), \end{aligned}$$

wobei $x \in [0, 1]$.

Wir notieren, dass $\varphi_0 = \varphi$ gilt und φ_1 stetig auf $\mathbb{S}_n$ ist.

Lemma 4.31. $t \mapsto T_{\varphi_t}$ ist stetig auf $[0, 1]$ bezüglich der Operatornorm.

BEWEIS. Es gilt

$$\|T_{\varphi_{t_1}} - T_{\varphi_{t_2}}\| \leq \|\varphi_{t_1} - \varphi_{t_2}\|_\infty, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 1].$$

Somit genügt es für die Stetigkeit von $t \mapsto T_{\varphi_t}$ auf $[0, 1]$ zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$(4.9) \quad \sup_{z \in \mathbb{S}_n} |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |t_1 - t_2| < \delta.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir nehmen $0 \leq t_2 \leq t_1 \leq 1$ an und setzen

$$\begin{aligned} \alpha_t(\theta_n) &:= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{2-t} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_n\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-t/2} \left[\frac{2\theta_n}{\pi} - \frac{t}{2}\right], \\ \beta_t(\theta_n) &:= -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{2-t} \left(\frac{\pi}{2} + \theta_n\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-t/2} \left[\frac{2\theta_n}{\pi} + \frac{t}{2}\right]. \end{aligned}$$

Für $z = (z', \varrho_n e^{i\theta_n})$ folgt

$$(4.10) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| \leq \begin{cases} |f(z', \varrho_n e^{i\alpha_{t_1}(\theta_n)}) - f(z', \varrho_n e^{i\alpha_{t_2}(\theta_n)})|, & \frac{\pi t_1}{4} \leq \theta_n \leq \pi - \frac{\pi t_1}{4}, \\ |g(z', \varrho_n e^{i\beta_{t_1}(\theta_n)}) - g(z', \varrho_n e^{i\beta_{t_2}(\theta_n)})|, & \frac{\pi(t_1-4)}{4} \leq \theta_n \leq -\frac{\pi t_1}{4}, \end{cases}$$

$$(4.11) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}|t_1 - t_2||f(z', \varrho_n) - g(z', \varrho_n)|, & 0 < \theta_n \leq \frac{\pi t_2}{4}, \\ \frac{1}{2}|t_1 - t_2||f(z', \varrho_n) - g(z', \varrho_n)|, & -\frac{\pi t_2}{4} \leq \theta_n < 0, \end{cases}$$

$$(4.12) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}|t_1 - t_2||f(z', -\varrho_n) - g(z', -\varrho_n)|, & \pi - \frac{\pi t_2}{4} < \theta_n < \pi, \\ \frac{1}{2}|t_1 - t_2||f(z', -\varrho_n) - g(z', -\varrho_n)|, & -\pi < \theta_n \leq -\pi + \frac{\pi t_2}{4}. \end{cases}$$

Insbesondere ergibt sich aus (4.11) und (4.12)

$$(4.13) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| \leq M|t_1 - t_2|, \quad -\frac{\pi t_2}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi t_2}{4},$$

$$(4.14) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| \leq M|t_1 - t_2|, \quad \frac{\pi(4 - t_2)}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi(t_2 - 4)}{4},$$

wobei $M := \frac{M_1 + M_2}{2}$ mit $M_1 := \|f\|_\infty$ und $M_2 := \|g\|_\infty$.

Im Fall $\frac{\pi t_2}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi t_1}{4}$ gilt

$$(4.15) \quad \begin{aligned} |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| &\leq \left| \left(\frac{2\theta_n}{\pi} + 1 - \frac{t_1}{2} \right) f(z', \varrho_n) + \left(\frac{t_1}{2} - \frac{2\theta_n}{\pi} \right) g(z', \varrho_n) \right. \\ &\quad \left. - f(z', \varrho_n e^{i\alpha_{t_2}(\theta_n)}) \right| \\ &\leq 2 \left| f(z', \varrho_n) - f(z', \varrho_n e^{i\alpha_{t_2}(\theta_n)}) \right| + M|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Für $\frac{\pi(t_1 - 4)}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi(4 - t_2)}{4}$ erhalten wir

$$(4.16) \quad \begin{aligned} |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| &\leq \left| \left(\frac{2\theta_n}{\pi} + \frac{6 - t_1}{2} \right) f(z', -\varrho_n) + \left(\frac{2\theta_n}{\pi} + \frac{t - 4}{2} \right) g(z', -\varrho_n) \right. \\ &\quad \left. - f(z', \varrho_n e^{i\alpha_{t_2}(\theta_n)}) \right| \\ &\leq 2 \left| f(z', -\varrho_n) - f(z', \varrho_n e^{i\alpha_{t_2}(\theta_n)}) \right| + M|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für $-\frac{\pi t_1}{4} \leq \theta_n \leq -\frac{\pi t_2}{4}$

$$(4.17) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| \leq 2 \left| g(z', \varrho_n) - g(z', \varrho_n e^{i\beta_{t_2}(\theta_n)}) \right| + M|t_1 - t_2|,$$

und für $\frac{\pi(t_2 - 4)}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi(t_1 - 4)}{4}$

$$(4.18) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| \leq 2 \left| g(z', -\varrho_n) - g(z', \varrho_n e^{i\beta_{t_2}(\theta_n)}) \right| + M|t_1 - t_2|.$$

Da $(t, \theta_n) \mapsto \alpha_t(\theta_n)$ gleichmäßig stetig auf $[0, 1] \times [-\pi, \pi]$ ist und $z \mapsto f(z', \varrho_n e^{i\theta_n})$ gleichmäßig stetig auf $\bar{\mathbb{S}}_+$ ist, ist auch $(z, t) \mapsto f(z', \varrho_n e^{i\alpha_t(\theta_n)})$ als Hintereinanderausführung gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig auf $[0, 1] \times \bar{\mathbb{S}}_+$.

Also gibt es ein $\delta_0 > 0$, so dass für alle $(z, t) \in [0, 1] \times \bar{\mathbb{S}}_+$ gilt

$$(4.19) \quad \left| f(z', \varrho_n e^{i\alpha_{t_1}(\theta_n)}) - f(z', \varrho_n e^{i\alpha_{t_2}(\theta_n)}) \right| < \varepsilon \quad \text{für } 0 \leq t_1 - t_2 \leq \delta_0.$$

Nach (4.10) folgt für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ mit $0 \leq t_1 - t_2 \leq \delta_0$, dass

$$(4.20) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}_n \text{ mit } \frac{\pi t_1}{4} \leq \theta_n \leq \pi - \frac{\pi t_1}{4}.$$

Analog gibt es ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ mit $0 \leq t_1 - t_2 \leq \delta_1$ gilt

$$(4.21) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}_n \text{ mit } -\pi + \frac{\pi t_1}{4} \leq \theta_n \leq -\frac{\pi t_1}{4}.$$

Wegen (4.13) und (4.14) gibt es ein $\delta_2 > 0$, so dass für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ mit $0 \leq t_1 - t_2 \leq \delta_2 := \frac{\varepsilon}{M+1}$ gilt

$$(4.22) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z = (z', \varrho_n e^{i\theta_n}) \in \mathbb{S}_n$$

mit $-\frac{\pi t_2}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi t_2}{4}$ oder $\frac{\pi(4-t_2)}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi(t_2-4)}{4}$.

Nun zu (4.15). Für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ und $\theta_n \in [-\pi, \pi]$ mit $t_2 \leq \frac{4\theta_n}{\pi} \leq t_1$ gilt

$$\alpha_{t_2}(\theta_n) \leq \frac{\pi}{2}(t_1 - t_2),$$

und für alle $\varrho_n \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} |\varrho_n - \varrho_n e^{i\alpha_{t_2}\theta_n}| &\leq \varrho_n |\alpha_{t_2}(\theta_n)| e^{i|\alpha_{t_2}(\theta_n)|} \\ &\leq \varrho_n \frac{\pi}{2}(t_1 - t_2) e^{i\frac{\pi}{2}(t_1 - t_2)}. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $\bar{\mathbb{S}}_+$, (4.15) und dieser Abschätzung gibt es ein $\delta_3 > 0$, so dass für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ mit $0 \leq t_1 - t_2 \leq \delta_3$ gilt

$$(4.23) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}_n \text{ mit } \frac{\pi t_2}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi t_1}{4}.$$

Verfährt man analog mit den Ungleichungen (4.16), (4.17) und (4.18), so gibt es ein $\delta_4 > 0$, so dass für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ mit $0 \leq t_1 - t_2 \leq \delta_4$ gilt

$$(4.24) \quad |\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z = (z', \varrho_n e^{i\theta_n}) \in \mathbb{S}_n$$

mit $\frac{\pi(t_1-4)}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi(4-t_2)}{4}$ oder $-\frac{\pi t_1}{4} \leq \theta_n \leq -\frac{\pi t_2}{4}$ oder $\frac{\pi(t_2-4)}{4} \leq \theta_n \leq \frac{\pi(t_1-4)}{4}$.

Mit $\delta := \min\{\delta_0, \dots, \delta_4\}$ folgt aus (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) und (4.24), dass für alle $t_1, t_2 \in [0, 1]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$ gilt

$$|\varphi_{t_1}(z) - \varphi_{t_2}(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \mathbb{S}_n.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

Sei $\varphi = (\varphi_{i,j})_{i,j=1}^N \in HC(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, $N \geq n$, mit

$$\varphi(z) = \begin{cases} f(z), & \operatorname{Im} z_n > 0, \\ g(z), & \operatorname{Im} z_n < 0, \end{cases}$$

wobei $f = (f_{i,j}) \in C(\bar{\mathbb{S}}_+) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ und $g = (g_{i,j}) \in C(\bar{\mathbb{S}}_-) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

Für $t \in [0, 1]$ definieren wir $\varphi_t = (\varphi_{i,j}^t)$ auf $\mathbb{S}_n$ komponentenweise wie in Lemma 4.31 mit $\varphi_0 = \varphi$ und $\varphi_1 \in C(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

Mit dieser Bezeichnung formulieren wir den folgenden Satz.

Satz 4.32. *Sei $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ und $\varphi^\# \in C(X) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ mit $N \geq n$. Dann ist $T_\varphi : H_N^2(\mathbb{B}_n) \rightarrow H_N^2(\mathbb{B}_n)$ ein Fredholmoperator genau dann, wenn $\det \varphi^\#$ nullstellenfrei auf X ist und der Index von T_φ ist gegeben durch*

$$\operatorname{ind} T_\varphi = (-1)^n \deg \varphi_1.$$

BEWEIS. Die Aussage über das Fredholm-Kriterium von T_φ folgt unmittelbar aus der exakten Sequenz (4.8). Wir müssen nur noch die Indexformel zeigen. Sei $\varphi \in HC(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ mit $\det \varphi^\#(z) \neq 0$ für alle $z \in X$.

Da φ_t für $t \in [0, 1]$ so definiert war, dass $\text{ran } \varphi_t^\# = \text{ran } \varphi^\#$, ist $\det \varphi_t^\#(z) \neq 0$ für $z \in X$ und $t \in [0, 1]$. Also für jedes $0 \leq t \leq 1$ ist T_{φ_t} ein Fredholmoperator auf $H_N^2(\mathbb{B}_n)$. Lemma 4.31 zufolge ist $t \mapsto T_{\varphi_t}$ komponentenweise stetig auf $[0, 1]$ und somit stetig bezüglich der Operatornorm. Folglich liefert der Stabilitätssatz des Indexes zusammen mit Korollar 4.30 die gewünschte Behauptung

$$\text{ind } T_\varphi = \text{ind } T_{\varphi_0} = \text{ind } T_{\varphi_1} = (-1)^n \deg \varphi_1.$$

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir Satz 4.32 für das Toeplitz-Tupel $T_\Phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n})$ mit Symbol $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in HC(\mathbb{S}_n)^n$ formulieren.

Réolon hat in seiner Doktorarbeit [39, Satz 1.3.1] eine Indexformel für ein wesentlich vertauschendes Tupel $T = (T_1, \dots, T_n)$ von Operatoren auf einem Banachraum E , das einen stetigen wesentlichen Kalkül besitzt, erhalten. Ein Spezialfall dieses Satzes ist das folgende Korollar. Für die Definitionen siehe Abschnitt 1.3.

Korollar 4.33. *Sei $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in C(\mathbb{S}_n)^n$. Ist $0 \notin \Phi(\mathbb{S}_n)$, so ist $T_\Phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n}) \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))^n$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt*

$$\text{ind } T_\Phi = (-1)^n \deg \Phi,$$

wobei $\deg \Phi$ im Sinne der Definition 1.16 zu verstehen ist.

Außerdem haben wir im Abschnitt 1.3 Beispiel 1.13 gesehen, dass das Tupel $T_\Phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n})$ für $0 \notin \Phi(\mathbb{S}_n)$ wesentlich Fredholm ist und die assoziierte Matrix $\hat{T}_\Phi = T_{\hat{\Phi}}$ zu T_Φ ein Fredholmoperator ist, wobei $\hat{\Phi} \in C(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_{2^{n-1}}(\mathbb{C})$ durch (1.20) erklärt ist. Ferner gilt

$$\text{ind } T_\Phi = \text{ind } T_{\hat{\Phi}}.$$

Nach Korollar 4.30 ergibt sich

$$\text{ind } T_\Phi = \text{ind } T_{\hat{\Phi}} = (-1)^n \deg \hat{\Phi},$$

wobei $\deg \hat{\Phi}$ im Sinne der Definition 4.28 zu verstehen ist.

Diese Formel liefert zusammen mit der Formel in Korollar 4.33 die Aussage

$$(4.25) \quad \deg \Phi = \deg \hat{\Phi}$$

für $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in C(\mathbb{S}_n)^n$.

Beispiel 4.34. Sei $T_\Phi = (T_{z_1}, T_{z_3}, T_{z_2}) \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_3))^3$. Dann gilt

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 & -\bar{z}_3 & 0 \\ z_2 & \bar{z}_1 & 0 & -\bar{z}_3 \\ z_3 & 0 & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \\ 0 & z_3 & -z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

und der Index von T_Φ ist

$$\text{ind } T_\Phi = \text{ind } T_{\hat{\Phi}} = (-1)^3 \deg \hat{\Phi} = -1.$$

Sei nun $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in HC(\mathbb{S}_n)^n$, wobei

$$\phi_i(z) = \begin{cases} f_i(z), & \operatorname{Im} z_n > 0, \\ g_i(z), & \operatorname{Im} z_n < 0 \end{cases}$$

mit $f_i \in C(\overline{\mathbb{S}}_+)$ und $g_i \in C(\overline{\mathbb{S}}_-)$ für $i = 1, \dots, n$, und definiere $\Phi^\# = (\phi_1^\#, \dots, \phi_n^\#) \in C(X)^n$ durch

$$\begin{aligned} \phi_i^\#(z) &= \phi_i(z), \quad z \in \mathbb{S}_n \setminus \partial E, \\ \phi_i^\#(z, x) &= x f_i(z) + (1-x) g_i(z), \quad (z, x) \in \partial E \times [0, 1] \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n$.

Ist $0 \notin \Phi^\#(X)$, so liefert ein ähnliches Verfahren wie in Beispiel 1.13, dass das Tupel $T_\Phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n})$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und seine assoziierte Matrix $T_{\widehat{\Phi}}$ ein Fredholmoperator ist. Wir beachten, dass T_Φ nach Satz 4.17 wesentlich vertauschend ist. Eine allgemeine Matrixdarstellung von $\widehat{\Phi}$ ist gegeben wie in (1.20), d.h.

$$(4.26) \quad \widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{1,n-1} & -\tilde{\Phi}_n \\ \tilde{\Phi}_n^* & \Phi_{1,n-1}^* \end{pmatrix} \in HC(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C}),$$

wobei

$$\Phi_{1,n-1} \cong (\widehat{\Phi_{1,n-2}, \tilde{\Phi}_{n-1}}) \text{ für } n > 3, \quad \Phi_{1,2} = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\psi_2 \\ \phi_2 & \psi_1 \end{pmatrix},$$

und

$$\tilde{\Phi}_n = \operatorname{diag}(\phi_n) \in HC(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C}), \quad \tilde{\Phi}_n^* = \operatorname{diag}(-\psi_n) \in HC(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C}), \quad n \geq 3$$

mit $\psi_i = \frac{\overline{\phi_i}}{\sum_{j=1}^n |\phi_j|^2}$, $i = 1, \dots, n$ und $N = 2^{n-1}$. Das Zeichen $\cong$ bedeutet, dass einige Permutationen von Spalten und Zeilen notwendig sind, um die Gleichheit zu erhalten.

Ferner gilt

$$\operatorname{ind} T_\Phi = \operatorname{ind} T_{\widehat{\Phi}}.$$

Schließlich definieren wir für $t \in [0, 1]$ die Abbildung $\widehat{\Phi}_t = (\widehat{\Phi}_{i,j}^t)$ wie in Satz 4.32 mit $\widehat{\Phi}_0 = \widehat{\Phi}$ und $\widehat{\Phi}_1 = (\widehat{\Phi}_{i,j}^1) \in C(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_{2^{n-1}}(\mathbb{C})$ sowie $\Phi_t = (\phi_1^t, \dots, \phi_n^t)$ mit ϕ_i^t für $i = 1, \dots, n$ wie in Lemma 4.31.

Mit dieser Bezeichnung lautet der Satz wie folgt.

Satz 4.35. *Sei $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in HC(\mathbb{S}_n)^n$. Ist $0 \notin \Phi^\#(X)$, so ist $T_\Phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n})$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt*

$$\operatorname{ind} T_\Phi = (-1)^n \operatorname{deg} \Phi_1.$$

BEWEIS. Ist $0 \notin \Phi^\#(X)$, so ist T_Φ nach der obigen Überlegung ein wesentliches Fredholm-Tupel und somit ist die assoziierte Matrix $T_{\widehat{\Phi}}$ zu T_Φ ein Fredholmoperator, wobei $\widehat{\Phi} \in HC(\mathbb{S}_n) \otimes \mathcal{M}_{2^{n-1}}(\mathbb{C})$ durch (4.26) gegeben ist. Nach Satz 4.32 ist $\det \widehat{\Phi}^\#$ nullstellenfrei auf X , und es folgt

$$\operatorname{ind} T_\Phi = \operatorname{ind} T_{\widehat{\Phi}} = (-1)^n \operatorname{deg} \widehat{\Phi}_1.$$

Zusammen mit dem Ausdruck (4.25) ergibt diese Formel die Behauptung

$$\text{ind } T_\Phi = (-1)^n \deg \Phi_1.$$

□

4.3. Symbole mit Invarianzeigenschaften bezüglich der maximal kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Invarianz der Symbole unter der Aktion der maximal kommutativen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}_n)$ zur Symmetrie der lokalen Spektren in den bestimmten Bahnen führt. Dabei werden einige Toeplitzoperatoren mit unstetigen Symbolen untersucht.

Vorher machen wir eine Bemerkung über die Indexformel für Toeplitzoperator-Tupel mit Symbolen aus $\mathcal{A}_G^n$.

Bemerkung 4.36. Für ein normales n -Tupel $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ (d.h. $[N_i, N_j] = 0$ und $N_i N_i^* = N_i^* N_i$ für $i, j = 1, \dots, n$), welches ein Fredholm-Tupel ist, gilt nach [15, S. 147] für den Index

$$\text{ind } N = 0.$$

Nach Satz 3.1 wissen wir, dass das Tupel $T_\Phi = (T_{\phi_1}, \dots, T_{\phi_n}) \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{B}_n))^n$ für $\phi_i \in \mathcal{A}_G$, $i = 1, \dots, n$ normal ist. Sind ferner die Funktionen ϕ_i stetig für $i = 1, \dots, n$ mit $0 \notin \Phi(\mathbb{S}_n)$, so folgt

$$\text{ind } T_\Phi = \text{ind } T_{\widehat{\Phi}} = 0.$$

Wir erinnern an die durch

$$\omega_c(\xi', \xi_n) = \left(i \frac{\xi'}{1 + \xi_n}, i \frac{1 - \xi_n}{1 + \xi_n} \right)$$

definierte Cayleyabbildung $\omega_c: \mathbb{S}_n \setminus \{-e_n\} \rightarrow \partial D_n$. Ist $\omega_c(-e_n) = \infty$, so wird ω_c zu einem Homöomorphismus zwischen $\mathbb{S}_n$ und die Einpunktkompaktifizierung $\partial D_n^\infty := \partial D_n \cup \{\infty\}$ von ∂D_n .

4.3.1. Quasi-elliptische Symbole.

Lemma 4.37. Sei $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ ein quasi-elliptisches Symbol. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{S}_n$

$$\sigma(\Phi_z(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(|z_1|, \dots, |z_n|)}(T_\varphi)).$$

BEWEIS. Dies folgt direkt aus Satz 4.6 (ii). Beachte, dass φ invariant unter Drehungen ist. □

Für $\varrho' = (\varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}) \in \tau(\mathbb{B}_{n-1})$ sei

$$K_{\varrho'} := \{z \in \mathbb{S}_n : |z_j| = \varrho_j, j = 1, \dots, n-1\}.$$

Lemma 4.38. Sei $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ wie in Lemma 4.37. Existiert nur ein $\varrho' \in \tau(\mathbb{B}_{n-1})$, so dass $z \in K_{\varrho'}$ ein Unstetigkeitspunkt ist, so gilt für alle $\omega \in K_{\varrho'}$

$$\sigma_e(T_\varphi) \setminus \varphi(\mathbb{S}_n \setminus K_{\varrho'}) \subseteq \sigma(\Phi_{(\varrho', \sqrt{1-|\varrho'|^2})}(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) \subseteq \sigma_e(T_\varphi).$$

Beispiel 4.39. Wir kommen zurück zum Beispiel 3.5 und betrachten die Funktion

$$g(\varrho) = \chi_{[0, \frac{1}{\sqrt{2}})}(\varrho), \quad \varrho \in [0, 1] \quad \text{mit} \quad \varphi(z) := g(|z_1|), \quad z \in \mathbb{S}_2.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{2}}$ der einzige Unstetigkeitspunkt von g ist, so folgt nach Lemma 4.38

$$[0, 1] \subseteq \sigma \left(\Phi_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(T_\varphi) \right) = \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) \subseteq [0, 1]$$

für alle $\omega \in K_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Daher gilt

$$(4.27) \quad \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) = [0, 1] \quad \text{für alle } \omega \in K_{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Sind nun $f_1, f_2 \in C(\mathbb{S}_2)$, so ergibt sich aus Satz 4.6 für alle $\omega \in K_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(T_{f_1+f_2 \cdot \varphi}) &= \Phi_\omega(T_{f_1}) + \Phi_\omega(T_{f_2})\Phi_\omega(T_\varphi) \\ &= f_1(\omega) + f_2(\omega) \cdot \Phi_\omega(T_\varphi). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\sigma(\Phi_\omega(T_{f_1+f_2 \cdot \varphi})) = f_1(\omega) + f_2(\omega) \cdot \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)).$$

Wegen (4.27) besteht das Spektrum $\sigma(\Phi_\omega(T_{f_1+f_2 \cdot \varphi}))$ aus der Verbindungsstrecke zwischen $f_1(\omega)$ und $f_1(\omega) + f_2(\omega)$ für alle $\omega \in K_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Beispiel 4.40. Sei

$$g(\varrho) = e^{2i \ln \varrho}, \quad \varrho \in [0, 1] \quad \text{mit} \quad \varphi(z) := g(|z_1|), \quad z \in \mathbb{S}_2.$$

Die Funktion g hat nur einen Unstetigkeitspunkt bei $\varrho_0 = 0$ und erfüllt $\text{ess-ran } g = \mathbb{T}$. Aus Lemma 4.38 und dem Beweis zu Satz 3.4 folgt für alle $z \in K_0$

$$\sigma_e(T_\varphi) \setminus \mathbb{T} \subseteq \sigma(\Phi_{(0,1)}(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_z(T_\varphi)) \subseteq \sigma_e(T_\varphi) = \overline{\cup_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{T}_p},$$

wobei $\mathbb{T}_p$ der Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius

$$r_p = \left| \frac{\Gamma(p + i + 1)}{p!} \right|$$

ist und

$$\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = 1$$

gilt. Somit ergibt sich für alle $z \in K_0$

$$\sigma(\Phi_{(0,1)}(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_z(T_\varphi)) = \overline{\cup_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{T}_p}.$$

4.3.2. Quasi-parabolische Symbole.

Lemma 4.41. *Sei $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ eine quasi-parabolische Funktion. Dann gilt für alle $z \in \partial D_n$*

$$\sigma(\Phi_z(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(|z_1|, \dots, |z_{n-1}|, |z'|^2)}(T_\varphi)).$$

BEWEIS. Sei $z \in \partial D_n$ beliebig. Für alle $(t', h) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}$ betrachten wir den Automorphismus

$$\tau_{(t', h)} : (w', w_n) \in D_n \mapsto (t'w', w_n + h) \in D_n,$$

welcher ∂D_n auf sich abbildet. Sei $h_0 := -\operatorname{Re} z_n$. Dann ist $\tau_{(t', h_0)}$ Element der quasi-parabolischen Untergruppe von $\operatorname{Aut}(D_n)$ mit

$$\tau_{(t', h_0)}(z', z_n) = (t' z', i \operatorname{Im} z_n) = (t' z', i |z'|^2).$$

Wegen $\tau_{(t', h_0)} = \tau_{t'} \circ \tau_g$, wobei $g = (0, h_0) \in \mathbb{H}$, und da φ unter der quasi-parabolischen Gruppenoperation invariant ist, folgt die Behauptung aus Beispiel 4.14 und Satz 4.13. $\square$

Wir betrachten die Beispiele aus Abschnitt 3.2 und untersuchen die lokalen Spektren in den Unstetigkeitspunkten.

Beispiel 4.42. Sei

$$a(r) = e^{2ir^2}, \quad r \in \mathbb{R}_+ \quad \text{und} \quad \varphi(z) := a(|z_1|) \text{ f\"ur alle } z \in \partial D_2.$$

Der Unstetigkeitspunkt von a liegt bei ∞ und man hat $\operatorname{ess-ran} \varphi = \mathbb{T}$. Aus Korollar 4.12 und Beispiel 3.10 folgt

$$\begin{aligned} \sigma_e(T_\varphi) &= \overline{\mathbb{D}} \\ &= \varphi(\partial D_2) \cup \sigma(\Phi_{\{\infty\}}(T_\varphi)) \\ &= \mathbb{T} \cup \sigma(\Phi_{\{\infty\}}(T_\varphi)). \end{aligned}$$

Da das Spektrum abgeschlossen ist, ergibt sich

$$\sigma(\Phi_{\{\infty\}}(T_\varphi)) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Beispiel 4.43. Sei

$$a(r) = e^{2i \ln r}, \quad r \in \mathbb{R}_+ \quad \text{und} \quad \varphi(z) := a(|z_1|) \text{ f\"ur alle } z \in \partial D_2.$$

Die Funktion a hat zwei Unstetigkeitspunkte in $r = 0$ und im Unendlichen und so hat φ die Unstetigkeitsmenge $L := M \cup \{\infty\}$, wobei $M := \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Aus Beispiel 3.11 ergibt sich

$$\sigma_e(T_\varphi) = \overline{\cup_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{T}_p},$$

wobei $\mathbb{T}_p$ der Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius

$$r_p = \left| \frac{\Gamma(p + i + 1)}{p!} \right|$$

ist und

$$\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = 1$$

gilt. Nach Korollar 4.12 folgt

$$\sigma_e(T_\varphi) = \varphi(\partial D_2^\infty \setminus L) \cup \bigcup_{\lambda \in L} \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)).$$

Somit erhalten wir

$$\bigcup_{\lambda \in L} \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = \overline{\cup_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{T}_p}.$$

Nun liefert Lemma 4.41

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(0,0)}(T_\varphi)) \quad \text{f\"ur alle } \lambda \in M.$$

Daher folgt

$$\sigma(\Phi_{(0,0)}(T_\varphi)) \cup \sigma(\Phi_{\{\infty\}}(T_\varphi)) = \overline{\cup_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{T}_p}.$$

Beispiel 4.44. Sei

$$\varphi(z) = a(|z_1|) = \chi_{[0,1]}(|z_1|) \quad z \in \partial D_2.$$

Die Funktion a hat Unstetigkeitspunkte in $|z_1| = 1$ und so hat φ die Unstetigkeitsmenge $M := \mathbb{T}_D \cup \{\infty\}$ in ∂D_2^∞ , wobei $\mathbb{T}_D := \{(z_1, z_2) \in \partial D_2 : |z_1| = 1\}$.

Wir notieren, dass

$$\varphi \circ \omega_c(\xi) = \chi_A(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}_2,$$

wobei $A := \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{S}_2 : |\xi_2 + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$. Die Funktion $\varphi \circ \omega_c$ hat also die Unstetigkeitsmenge ∂A .

Nach Beispiel 3.9 und Korollar 4.12 gilt

$$\sigma_e(T_\varphi) = \varphi(\partial D_2^\infty \setminus M) \cup \bigcup_{\lambda \in M} \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = [0, 1],$$

und somit folgt

$$\bigcup_{\lambda \in M} \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = [0, 1].$$

Nach Lemma 4.41 gilt

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(1,i)}(T_\varphi)) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{T}_D.$$

Daher ergibt sich

$$\sigma(\Phi_{(1,i)}(T_\varphi)) \cup \sigma(\Phi_{\{\infty\}}(T_\varphi)) = [0, 1].$$

4.3.3. Nilpotente Symbole.

Lemma 4.45. *Sei $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ eine nilpotente Funktion. Dann gilt für alle $z \in \partial D_n$*

$$\sigma(\Phi_{(z', z_n)}(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(i\text{Im}z_1, \dots, i\text{Im}z_{n-1}, i|\text{Im}z'|^2)}(T_\varphi)).$$

BEWEIS. Sei $z \in \partial D_n$ beliebig. Die Abbildung

$$\tau_{(\xi', h)} : (w', w_n) \mapsto (w' + \xi', w_n + h + 2i \langle w', \xi' \rangle + i|\xi'|^2)$$

definiert für alle $(\xi', h) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ einen Automorphismus von D_n und bildet ∂D_n homöomorph auf sich ab.

Sei $(\xi'_0, h_0) := (-\text{Re}z', -\text{Re}z_n - 2 \langle \text{Re}z', \text{Im}z' \rangle)$. Dann ist der Automorphismus $\tau_{(\xi'_0, h_0)}$ Element der nilpotenten Untergruppe von $\text{Aut}(D_n)$ mit

$$\tau_{(\xi'_0, h_0)}(z', z_n) = (i\text{Im}z', i|\text{Im}z'|^2).$$

Da φ unter der nilpotenten Gruppenoperation invariant ist, d.h. $\varphi \circ \tau_{(\xi'_0, h_0)} = \varphi$ erfüllt, ergibt sich nach Beispiel 4.14 a) und Satz 4.13

$$\sigma(\Phi_{(z', z_n)}(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(i\text{Im}z', i|\text{Im}z'|^2)}(T_\varphi))$$

für alle $z \in \partial D_n$. □

Beispiel 4.46. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ sei

$$a(y) = \chi_{[\alpha, \beta)}(y), \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \varphi(z) := a(\operatorname{Im} z_1), \quad z \in \partial D_2.$$

Wir untersuchen das lokale Spektrum in den Unstetigkeitspunkten von T_φ .

Nach Beispiel 3.16 gilt

$$\sigma_e(T_\varphi) = \sigma(T_\varphi) = [0, 1].$$

Die Funktion a besitzt zwei Unstetigkeitspunkte $y_0 = \alpha$ und $y_1 = \beta$, und so besitzt φ die Unstetigkeitsmenge $M := M_\alpha \cup M_\beta \cup \{\infty\}$ in ∂D_2^∞ , wobei

$$M_\gamma := \{(z_1, z_2) \in \partial D_2 : \operatorname{Im} z_1 = \gamma\} \quad \text{für alle} \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Nach Korollar 4.12 ergibt sich

$$\sigma_e(T_\varphi) = \varphi(\partial D_2^\infty \setminus M) \cup \bigcup_{\lambda \in M} \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)).$$

Nach Lemma 4.45 gilt

$$\sigma(\Phi_z(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(i\alpha, i\alpha^2)}(T_\varphi)) \quad \text{und} \quad \sigma(\Phi_w(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(i\beta, i\beta^2)}(T_\varphi))$$

für alle $z \in M_\alpha$ und $w \in M_\beta$. Folglich gilt

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) \cup \sigma(\Phi_\mu(T_\varphi)) \cup \sigma(\Phi_{\{\infty\}}(T_\varphi)) = [0, 1]$$

für alle $\lambda \in M_\alpha$ und alle $\mu \in M_\beta$.

Im Spezialfall $\beta = -\alpha$ betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} R : \partial D_2 &\longrightarrow \partial D_2, \\ (z_1, z_2) &\mapsto (-z_1, z_2), \end{aligned}$$

so dass $R(M_\alpha) = M_{-\alpha}$. Mit $R(\infty) = \infty$ ist R ein Homoöomorphismus von ∂D_2^∞ auf sich. Da $\varphi \circ R = \varphi$ gilt, ergibt sich nach Satz 4.13

$$\sigma(\Phi_{(i\alpha, i\alpha^2)}(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(-i\alpha, i\alpha^2)}(T_\varphi)),$$

und somit gilt

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) \cup \sigma(\Phi_{\{\infty\}}(T_\varphi)) = [0, 1]$$

für alle $\lambda \in M_\alpha \cup M_{-\alpha}$.

Lässt sich nun ein Symbol $\psi \in L^\infty(\partial D_2^\infty, d\beta)$ darstellen als $\psi = g_1 + g_2\varphi$, wobei $g_1, g_2 \in C(\partial D_2^\infty)$, so folgt nach Korollar 4.12 v)

$$\begin{aligned} \sigma(\Phi_\lambda(T_\psi)) &= \sigma(\Phi_\lambda(T_{g_2})) + \sigma(\Phi_\lambda(T_{g_2})) \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) \\ &= \begin{cases} \{\psi(\lambda)\}, & \lambda \in \partial D_2^\infty \setminus M \\ g_1(\lambda) + g_2(\lambda) \cdot \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)), & \lambda \in M. \end{cases} \end{aligned}$$

4.3.4. quasi-nilpotente Symbole. Wir schreiben $z = (z'', w', z_n)$ für Punkte von D_n , wobei $z'' \in \mathbb{C}^k$ und $w' \in \mathbb{C}^{n-k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n-2$.

Lemma 4.47. *Sei $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ eine quasi-nilpotente Funktion. Dann gilt für alle $z \in \partial D_n$*

$$\sigma(\Phi_{(z'', w', z_n)}(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(|z''|, i\operatorname{Im} w', i|z''|^2 + i|\operatorname{Im} w'|^2)}(T_\varphi)),$$

wobei $|z''| = (|z_1|, \dots, |z_k|)$ und $\operatorname{Im} w' = (\operatorname{Im} z_{k+1}, \dots, \operatorname{Im} z_{n-1})$.

BEWEIS. Sei $z = (z'', w', z_n) \in \partial D_n$ beliebig. Die Abbildung

$$\tau_{(t'', b', h)} : (\xi'', \xi', \xi_n) \mapsto (t''\xi'', \xi' + b', \xi_n + h + 2i\langle \xi', b' \rangle + i|b'|^2)$$

definiert für alle $(t'', b', h) \in G := \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}$ einen Automorphismus von D_n und bildet ∂D_n homöomorph auf sich ab.

Sei $(b'_0, h_0) = (-\operatorname{Re} w', -\operatorname{Re} z_n - 2\langle \operatorname{Im} w', \operatorname{Re} w' \rangle)$. Dann ist der Automorphismus $\tau_{(t'', b'_0, h_0)}$ Element der quasi-nilpotenten Untergruppe von $\operatorname{Aut}(\mathbb{B}_n)$ mit

$$\begin{aligned} \tau_{(t'', b'_0, h_0)}(z'', w', z_n) &= (t''z'', i\operatorname{Im} w', \operatorname{Im} z_n - i|\operatorname{Re} w'|^2) \\ &= (t''z'', i\operatorname{Im} w', i|z''|^2 + i|\operatorname{Im} w'|^2). \end{aligned}$$

Wir beachten, dass diese Untergruppe eine Zusammensetzung aus der nilpotenten und quasi-parabolischen Untergruppe ist. Da φ unter der quasi-nilpotenten Gruppenoperation invariant ist, liefert Satz 4.13 die gewünschte Behauptung. $\square$

4.3.5. Quasi-hyperbolische Symbole.

Lemma 4.48. *Sei $\varphi \in L^\infty(\partial D_n^\infty, d\beta)$ eine quasi-hyperbolische Funktion. Dann gilt für alle $z \in \partial D_n$*

$$\sigma(\Phi_{(z', z_n)}(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(q', q_n)}(T_\varphi)),$$

$$\text{wobei } (q', q_n) = \left(\frac{|z_1|}{\sqrt{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|}}, \dots, \frac{|z_{n-1}|}{\sqrt{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|}}, \frac{\operatorname{Re} z_n + i|z'|^2}{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|} \right).$$

BEWEIS. Sei $(z', z_n) \in \partial D_n$ beliebig. Die Abbildung

$$\tau_{(t', r)} : (w', w_n) \mapsto (\sqrt{r}t'w', rw_n),$$

definiert für alle $(t', r) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ einen Automorphismus von D_n und bildet ∂D_n homöomorph auf sich ab. Sei $r_0 := \frac{1}{\sqrt{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|}} > 0$. Dann ist der Automorphismus $\tau_{(t', r_0)}$ Element der quasi-hyperbolischen Untergruppe von $\operatorname{Aut}(D_n)$ mit

$$\tau_{(t', r_0)}(z', z_n) = \left(\frac{t'z'}{\sqrt{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|}}, \frac{z_n}{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|} \right).$$

Wegen $\tau_{(t', r_0)} = \tau_{t'} \circ \tau_{r_0}$ und da φ unter der quasi-hyperbolischen Gruppenoperation invariant ist, folgt die Behauptung aus Beispiel 4.14 und Satz 4.13.

Beachte, dass

$$\begin{aligned} \frac{z_n}{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|} &= \frac{\operatorname{Re} z_n + i|z'|^2}{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|} \\ &= \frac{\operatorname{sign}(\operatorname{Re} z_n)|\operatorname{Re} z_n| + i|z'|^2}{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|} \\ &= \operatorname{sign}(\operatorname{Re} z_n) \left(1 - \frac{|z'|^2}{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|} \right) + \frac{i|z'|^2}{|z'|^2 + |\operatorname{Re} z_n|}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.49. Sei $a(s, \operatorname{sign}(x)) = \chi_{[0, \frac{1}{\sqrt{2}})}(s)$, $s \in [0, 1]$ und

$$\varphi(z_1, z_2) = a \left(\frac{|z_1|}{\sqrt{|z_1|^2 + |\operatorname{Re} z_2|}}, \operatorname{sign}(\operatorname{Re} z_2) \right), \quad z \in \partial D_2.$$

Die Funktion a ist unstetig in $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und somit hat φ die Unstetigkeitsmenge $L := M \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ in ∂D_2^∞ , wobei

$$M := \{(z_1, z_2) \in \partial D_2 \setminus \{(0, 0)\} : |\operatorname{Re} z_2| = |z_1|^2\}.$$

Nach Beispiel 3.22 und Korollar 4.12 gilt

$$\sigma_e(T_\varphi) = \{0, 1\} \cup \bigcup_{\lambda \in L} \sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = [0, 1].$$

Nach Lemma 4.48 ergibt sich für alle $\lambda \in M$

$$\sigma(\Phi_\lambda(T_\varphi)) = \begin{cases} \sigma_+ := \sigma \left(\Phi_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}(T_\varphi) \right), & \text{falls } \operatorname{Re} \lambda_2 > 0, \\ \sigma_- := \sigma \left(\Phi_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)}(T_\varphi) \right), & \text{falls } \operatorname{Re} \lambda_2 < 0. \end{cases}$$

Folglich erhalten wir

$$\sigma(\Phi_{(0,0)}(T_\varphi)) \cup \sigma(\Phi_{\{\infty\}}(T_\varphi)) \cup \sigma_+ \cup \sigma_- = [0, 1].$$

4.4. Symbolklasse von Davie und Jewell

Lemma 4.50. Sei $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}_n, d\sigma)$ ein Symbol mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi(z) = \varphi(tz) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T} \text{ und } z \in \mathbb{S}_n.$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{S}_n$

$$\sigma(\Phi_z(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(|z_1|, \dots, |z_n|)}(T_\varphi)).$$

BEWEIS. Für $t \in \mathbb{T}$ betrachten wir die durch die Formel

$$V(z_1, \dots, z_n) = (tz_1, \dots, tz_n).$$

definierte unitäre Abbildung $V : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$. Da φ unter gemeinsamer Drehung invariant ist, folgt die Behauptung aus Satz 4.6 ii).

□

Wir untersuchen die lokalen Spektren in den Unstetigkeitspunkten von T_φ aus Beispiel 3.26.

Beispiel 4.51. Sei

$$\varphi(z_1, z_2) = \varphi(\varrho e^{i\theta}, \sqrt{1-\varrho^2} e^{i\eta}) = e^{i(\theta-\eta)}, \quad \varrho \in [0, 1], \quad \theta, \eta \in [0, 2\pi].$$

Dann ist φ stetig auf $\mathbb{S}_2 \setminus K$, wobei

$$K := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}_2 : z_1 = 0 \text{ oder } z_2 = 0\},$$

und erfüllt ess-ran $\varphi = \mathbb{T}$. Nach Satz 4.6 und Beispiel 3.26 e) folgt

$$\sigma_e(T_\varphi) = \varphi(\mathbb{S}_2 \setminus K) \cup \bigcup_{\omega \in K} \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) = \overline{\mathbb{D}},$$

und deshalb ist

$$\bigcup_{\omega \in K} \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Wir setzen

$$\sigma_1 := \sigma(\Phi_{(0,1)}(T_\varphi)) \quad \text{und} \quad \sigma_2 := \sigma(\Phi_{(1,0)}(T_\varphi)).$$

Dann gilt

- 1) $\mathbb{T} \subseteq \sigma_i \subseteq \mathbb{D}$ für $i = 1, 2$.
- 2) $\sigma_1 = \overline{\sigma_2}$ mit $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \overline{\mathbb{D}}$.

BEWEIS. Wir schreiben $K = K_1 \cup K_2$, wobei

$$K_i := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{S}_2 : z_i = 0\} \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Nach Lemma 4.50 folgt

$$\bigcup_{\omega \in K_1} \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(0,1)}(T_\varphi)) = \sigma_1$$

und

$$\bigcup_{\omega \in K_2} \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{(1,0)}(T_\varphi)) = \sigma_2.$$

Außerdem liefert Satz 4.11 die Inklusionen

$$\mathbb{T} \subseteq \sigma_1 \subseteq \mathbb{D} \quad \text{und} \quad \mathbb{T} \subseteq \sigma_2 \subseteq \mathbb{D}.$$

Nun betrachten wir die unitäre Abbildung

$$U : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad U(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$$

mit $U(\mathbb{S}_2) = \mathbb{S}_2$ und $U(K_i) = K_j$ für $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Wegen $\varphi \circ U = \overline{\varphi}$ ergibt sich nach Satz 4.6 ii)

$$\sigma(\Phi_z(T_\varphi)) = \sigma(\Phi_{U(z)}(T_\varphi^*)) = \overline{\sigma(\Phi_{U(z)}(T_\varphi))}$$

für alle $z \in K_i$, $i = 1, 2$. Somit gilt

$$\sigma_1 = \overline{\sigma_2} \quad \text{und} \quad \sigma_1 \cup \sigma_2 = \overline{\mathbb{D}}.$$

□

Allgemeiner betrachten wir Symbole ψ der Art

$$(4.28) \quad \psi(z) = f(z)\varphi(z) + g(z), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{S}_2,$$

wobei $f, g \in C(\mathbb{S}_2)$ und $\varphi(z) = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_1 \bar{z}_2|}$.

Die Funktion ψ ist stetig auf $\mathbb{S}_2 \setminus K$, wobei K die Menge aus Beispiel 4.51. Nach Satz 4.6 ergibt sich für alle $\omega \in \mathbb{S}_2$

$$\sigma(\Phi_\omega(T_\psi)) = \sigma(\Phi_\omega(T_f)) \sigma(\Phi_\omega(T_\varphi)) + \sigma(\Phi_\omega(T_g)),$$

also gilt

$$\sigma(\Phi_\omega(T_\psi)) = \begin{cases} \{f(\omega)\varphi(\omega) + g(\omega)\}, & \omega \in \mathbb{S}_2 \setminus K, \\ f(0, \omega_2) \cdot \sigma_1 + g(0, \omega_2), & |\omega_2| = 1, \\ f(\omega_1, 0) \cdot \sigma_2 + g(\omega_1, 0), & |\omega_1| = 1. \end{cases}$$

Setzt man voraus, dass $f(z) = f(tz)$ und $g(z) = g(tz)$ für alle $t \in \mathbb{T}$, so folgt

$$\sigma_e(T_\psi) \subseteq \psi(\mathbb{S}_2 \setminus K) \cup \bigcup_{\omega \in K_1} [|f(\omega)| \cdot \overline{\mathbb{D}} + |g(\omega)|] \cup \bigcup_{\omega \in K_2} [|f(\omega)| \cdot \overline{\mathbb{D}} + |g(\omega)|].$$

Da f und g auf K_1 und K_2 stetig sind, nehmen sie ihre Maximum und Minimum in K_1 und K_2 an. Insbesondere erhalten wir für das wesentliche Spektrum von T_ψ die Inklusion

$$\sigma_e(T_\psi) \subseteq \psi(\mathbb{S}_2 \setminus K) \cup \max_{\omega \in K_1} [|f(\omega)| \cdot \overline{\mathbb{D}} + |g(\omega)|] \cup \max_{\omega \in K_2} [|f(\omega)| \cdot \overline{\mathbb{D}} + |g(\omega)|].$$

Beispiel 4.52. Als Beispiel für (4.28) betrachten wir

$$\psi(z) = f(\varrho)e^{i(\theta-\eta)} + \varrho, \quad z \in \mathbb{S}_2,$$

wobei $f \in C([0, 1])$ mit $f(\varrho) = (\varrho - \frac{1}{2})^2$, $\varrho \in [0, 1]$.

Es gilt

$$\sigma(\Phi_\omega(T_\psi)) = \begin{cases} \{\psi(\omega)\}, & \omega \in \mathbb{S}_2 \setminus K, \\ \frac{1}{4} \cdot \sigma_1, & \omega \in K_1, \\ \frac{1}{4} \cdot \sigma_2 + 1, & \omega \in K_2. \end{cases}$$

Nun ist $\{\psi(\mathbb{S}_2 \setminus K)\}$ die Vereinigung von Kreisen $\mathbb{T}_\varrho$ mit Mittelpunkt $(\varrho, 0)$ und Radius $|f(\varrho)|$, $\varrho \in (0, 1)$. Wegen den Eigenschaften von σ_i , $i = 1, 2$ ist

$$\mathbb{T}_\varrho \subseteq \sigma(\Phi_\omega(T_\psi)) \subseteq D_\varrho \quad \text{für } \omega \in K_{\varrho+1}, \varrho = 0, 1,$$

wobei D_ϱ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(\varrho, 0)$ und Radius $|f(\varrho)|$, $\varrho \in \{0, 1\}$ ist.

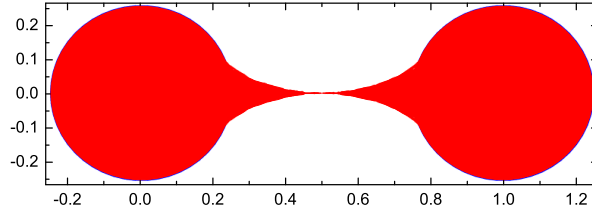
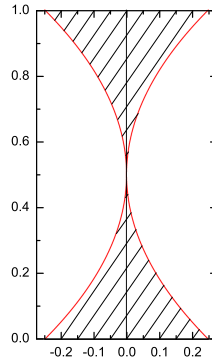
Folglich erhalten wir

$$\bigcup_{\varrho \in [0, 1]} \mathbb{T}_\varrho \subseteq \sigma_e(T_\psi) \subseteq \bigcup_{\varrho \in (0, 1)} \mathbb{T}_\varrho \cup D_0 \cup D_1.$$

Also gilt

$$\sigma_e(T_\psi) = \bigcup_{\varrho \in [0, 1]} \mathbb{T}_\varrho \cup D_0 \cup D_1.$$

Siehe Abbildung 4.1.

ABBILDUNG 4.1. Das wesentliche Spektrum von T_ψ .ABBILDUNG 4.2. Das wesentliche Spektrum von T_ψ .

Beispiel 4.53. Sei

$$\psi(z_1, z_2) = f(\varrho) \cos(\theta - \eta) + g(\varrho), \quad \varrho \in [0, 1], \quad \theta, \eta \in [0, 2\pi],$$

wobei $f, g \in C([0, 1])$. Die Funktion h mit

$$h(z_1, z_2) := \operatorname{Re}[e^{i(\theta - \eta)}] = \cos(\theta - \eta) \quad \text{für alle } z \in \partial D_2$$

hat offensichtlich die Unstetigkeitsmenge K aus Beispiel 4.51. Nach Satz 4.11 ergibt sich

$$(-1, 1) \subseteq \sigma(\Phi_\omega(T_h)) \subseteq [-1, 1]$$

für alle $\omega \in K$ und somit gilt

$$\sigma(\Phi_\omega(T_h)) = [-1, 1] \quad \text{für alle } \omega \in K.$$

Daher folgt

$$\sigma_e(T_\psi) = \bigcup_{\varrho \in [0, 1]} (f(\varrho) \cdot [-1, 1] + g(\varrho)).$$

In Abbildung 4.2 präsentieren wir das wesentliche Spektrum von T_ψ für konkretes

f und g mit $f(\varrho) = \left(\varrho - \frac{1}{2}\right)^2$ und $g(\varrho) = i\varrho$.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, New York: Dover Publ., 1972.
- [2] E. Albrecht, *Several variable spectral theory in the noncommutative case*. In: Spectral Theory (Warsaw, 1977), 9-30, Banach Center Pub., 8, PWN, Warsaw, 1982.
- [3] G. R. Allan, *On one-sided inverses in Banach algebras of holomorphic vector-valued functions*, J. London Math. Soc. 42 (1966), 463-470.
- [4] G. R. Allan, *Ideals of vector-valued functions*, Proc. London Math. Soc. (3) 18 (1967), 463-470.
- [5] M. F. Atiyah, *Algebraic topology and elliptic operators*, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 237-249.
- [6] H. Bart, *Holomorphic relative inverses of operators valued functions*, Math. Ann. 208 (1974), 179-194.
- [7] T. Becker, *Zur Theorie der Toeplitz-Operatoren auf Bergman- und Bargmann-Räumen*, Dissertation, Saarbrücken, 2004.
- [8] H. Bercovici, C. Foiaş and C. Pearcy, *Dilatation theory and systems of simultaneous equations in the predual of an operator algebra. I*, Mich. Math. J. 30 (1983), 335-354.
- [9] H. Bercovici, C. Foiaş and C. Pearcy, *Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory*, CBMS 56, Amer. Math. Soc., Providence, 1985.
- [10] A. Böttcher, *On Toeplitz operators generated by symbols with three essential cluster points*, Preprint P-MATH-04/86, Akad. Wiss. DDR, Inst. Math., Berlin (1986).
- [11] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, second edition, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [12] A. Brown, P. R. Halmos, *Algebraic properties of Toeplitz operators*, J. reine angew. Math. 213 (1964), 89-102.
- [13] L. Coburn, *Singular integral operators and Toeplitz operators on odd spheres*, Indiana Univ. Math. J. 23 (1973), 433-439.
- [14] I. Colojoară, C. Foiaş, *Theory of Generalized Spectral Operators*. Mathematics and its Applications, Vol. 9. Gordon and Breach, Science Publishers, New-York-London-Paris, 1968.
- [15] R. E. Curto, *Fredholm and invertible n -tuples of operators. The deformation problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 266, n. 1 (1981), 129-159.
- [16] A. M. Davie and N. P. Jewell, *Toeplitz operators in several complex variables*, J. Funct. Anal. 26 (1977), 356-368.
- [17] K. Deimling, *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*, Springer, Berlin-New York, 1974.
- [18] A. Devinatz, *Toeplitz operators on H^2 spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 304-317.
- [19] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, New York-London, 1972.
- [20] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators*, CBMS 15, Amer. Math. Soc., Providence, 1973.
- [21] J. Eschmeier, M. Putinar, *Spectral Decompositions and Analytic Sheaves*, London Mathematical Society Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [22] I. C. Gohberg and N. Ja. Krupnik, *The algebra generated by Toeplitz matrices*, Functional Anal. Appl. 3 (1969), 119-127.

- [23] S. Grudsky, A. Karapetyants, N. Vasilevski, *Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half-planes: Hyperbolic case*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 10 (2004), 119-138.
- [24] S. Grudsky, A. Karapetyants, N. Vasilevski, *Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half-planes: Parabolic case*, J. Operator Theory 52 (1) (2004), 185-204.
- [25] S. Grudsky, A. Karapetyants, N. Vasilevski, *Dynamics of properties of Toeplitz operators with radial symbols*, Integr. Equ. Oper. Th. 20 (2) (2004), 217-253.
- [26] S. Grudsky, A. Karapetyants, N. Vasilevski, *Commutative C^* -algebras of Toeplitz operators and quantization on the unit disk*, J. Funct. Anal. 234 (1) (2006), 1-44.
- [27] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [28] G. M. Khenkin, *The Method of Integral Representation in Complex Analysis*, A.G. Vitushkin (Ed.) Several Complex Variables I, Encyclopedia of Math. Sciences v. 7, Springer-Verlag.
- [29] A. Koranyi, *The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains*, Ann. of Math. 82 (1965), 332-350.
- [30] A. Koranyi, E. M. Stein, *H^2 spaces of generalized half-planes*, Stud. Math. 44 (1972), 379-388.
- [31] S. G. Krantz, *Explorations in Harmonic Analysis. With applications to complex function theory and the Heisenberg group*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.
- [32] D. Lutz, *Eigenvalues and essential spectra of operators with A -spectral functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 26 (1981), 603-609.
- [33] G. McDonald, *Toeplitz operators on the ball with piecewise continuous symbol*, Illinois J. Math. 23, no. 2 (1979), 286-294.
- [34] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North-Holland, New-York, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
- [35] R. D. Ogden, S. Vági, *Harmonic analysis of a nilpotent group and function theory on Siegel domain of type II*, Advances in Mathematics 33 (1979), 31-92.
- [36] A. Perälä, J. A. Virtanen, *A note on the Fredholm properties of Toeplitz operators on weighted Bergman spaces with matrix-valued symbols*, Oper. Matrices 5 (2011), no. 1, 97-106.
- [37] R. Quiroga-Barranco, N. Vasilevski, *Commutative C^* -Algebras of Toeplitz operators on the unit ball, I. Bargmann-type transforms and spectral representations of Toeplitz operators*, Integr. Equ. Oper. Th. 59 (2007), no. 3, 379-419.
- [38] R. Quiroga-Barranco, N. Vasilevski, *Commutative C^* -Algebras of Toeplitz operators on the unit ball, II. Geometry of the level sets of symbols*, Integr. Equ. Oper. Th. 60 (2008), 89-132.
- [39] E. Réolon, *Zur Spektraltheorie vertauschender Operatortupel -Fredholmtheorie und subnormaler Operatortupel*, Dissertation, Saarbrücken, 2004.
- [40] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Second edition McGraw-Hill, New-York, 1964.
- [41] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$* , Springer-Verlag, New York, 1980.
- [42] W. Rudin, *Functional Analysis*. Second edition. International series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [43] J. L. Taylor, *A joint spectrum for several commuting operators*, J. Funct. Anal. 6 (1970), 172-191.
- [44] S. Vági, *On the boundary values of holomorphic functions*, Revista de la Unión Matemática Argentina 25 (1970), 123-136.
- [45] F. H. Vasilescu, *A multi-dimensional spectral theory in C^* -algebras*, Banach Center Publications 8 (1982), 471-491.
- [46] N. Vasilevski, R. Trujillo, *Group convolution operators on standard CR-manifolds. I. Structural Properties*, Integr. Equ. Oper. Th. 19 (1994), 56-104.
- [47] N. Vasilevski, *Toeplitz operators on the Bergman spaces: Inside-the-domain effects*, Contemp. Math. 289 (2001), 79-146.
- [48] N. Vasilevski, *Bergman space structure, commutative algebras of Toeplitz operators and hyperbolic geometry*, Integr. Equ. Oper. Th. 46 (2003), 235-251.

- [49] N. Vasilevski, *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Spaces*, Oper. Theory Adv. Appl. 185, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [50] N. Vasilevski, *Quasi-radial quasi-homogeneous symbols and commutative Banach algebras of Toeplitz operators*, Integr. Equ. Oper. Th. 66 (2010), no. 1, 141-152.
- [51] N. Vasilevski, *Parabolic quasi-radial quasi-homogeneous symbols and commutative algebras of Toeplitz operators*, Oper. Theory. Adv. Appl. 202, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
- [52] U. Venugopalkrishna, *Fredholm operators associated with strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$* , J. Funct. Anal. 9 (1972), 349-373.
- [53] H. Widom, *Inversion of Toeplitz matrices. II*, Illinois J. Math. 4 (1960), 88-99.
- [54] H. Wolf, *Noetherkriterien und Näherungsverfahren für Toeplitzoperatoren auf Räumen vom Bergmanschen Typ*, Dissertation, Chemnitz, 1993.
- [55] R. Wolff, *Spectral theory on Hardy spaces in several complex variables*, Dissertation, Münster, 1996.
- [56] C. Yan, *Automorphisms on the Toeplitz algebra with piecewise continuous symbol on the unit ball*, Integr. Equ. Oper. Th. 56 (2006), 587-595.
- [57] K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [58] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{B}_n, \mathbb{S}_n$	9
Δ_p	90
$\mathbb{H}$ Heisenberggruppe	10
$\iota(\mathbb{B}_{n-1})$	43
κ	11
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ Diskrete Fouriertransformation und ihre Inverse	31
$\mathcal{F}_\omega$	84
$\mathcal{F}_\omega^\infty$	77
$\mathcal{I}_\omega$	84
$\mathcal{I}_\omega^\infty$	77
$\mathcal{K}$	19
$\mathcal{M}, \mathcal{M}^{-1}$ Mellintransformation und ihre Inverse	45
$\mathcal{R}_\omega(\cdot)$	79
$\mathcal{A}_G$	51
ω_c, ω_c^{-1} Cayleyabbildung und ihre Inverse	10
$\mathbb{S}_+, \mathbb{S}_-$	83
$\sigma(\cdot)$	20
$\sigma_e(\cdot)$	19
$\sigma_p(\cdot)$	53
$\tau(\mathbb{B}_{n-1})$	28
$\tau(C(\mathbb{S}_n))$	76
$\tau(HC(\mathbb{S}_n))$	84
$\tau(L^\infty(\partial D_n^\infty)), \partial D_n^\infty$	81
$\tau(L^\infty(\mathbb{S}_n))$	76
$\text{Aut}(D_n)$ Automorphismengruppe von D_n	10
$\tilde{\mathcal{F}}_{\omega_c(w)}^\infty$	81
$\tilde{\mathcal{I}}_{\omega_c(w)}^\infty$	81
$\ \cdot\ _e$	19
C Cauchy-Szegö Projektion	9
$C_1(\mathbb{S}_n), HC_1(\mathbb{S}_n)$	86
$d\beta$	11
$d\sigma$	9
$D_n, \partial D_n$ Oberer Siegel-Halbraum und sein Rand	9
dv	9
$E, \partial E$ Hyperebene und ihr Rand	83
F, F^{-1} Fouriertransformation und ihre Inverse	33
$H^2(\mathbb{B}_n)$	9

$H^2(\mathbb{H})$	17
$H^2(D_n)$	11
$H^2(k')$	86
$H_N^2(\mathbb{B}_n)$	95
H_m	68
$HC(\mathbb{S}_n)$	84
$L_1^\infty(\mathbb{S}_n)$	86
P Orthogonale Projektion	16
PC	83
$PC(\overline{\mathbb{D}})$	85
$\text{ess-ran}(\cdot)$ Wesentlicher Wertebereich	25

Danksagung

Mein Dank gilt all denen, ohne die diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre und die während der Zeit der Doktorarbeit mir sehr viel Verständnis entgegen gebracht haben.

Insbesondere möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Ernst Albrecht, der mir sein Vertrauen schenkte als er mich als Doktorand an seinem Lehrstuhl annahm, bedanken. Er hat mir sehr viel Geduld entgegengebracht und mich während der letzten Jahre fachlich hervorragend betreut und beraten. Seine Hinweise, die wesentlicher Anstoß in den wichtigen Etappen der Arbeit waren und mir das Angehen einer wissenschaftlichen Arbeit zeigten, waren sehr konstruktiv und sehr hilfreich.

Für die Durchsicht meines Manuskripts und für die Bereitstellung der Räumlichkeiten danke ich Herrn Prof. Dr. Mark Groves.

Meinen Eltern und meiner Familie, speziell meinem Mann Muhammed und allen anderen, die ich unter Freunde zusammenfasse, möchte ich danken, dass sie mir das Studium der Mathematik ermöglicht, mich auf meinem Weg immer unterstützt, mich motiviert und das nötige Verständnis gezeigt haben.