Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 86

Moritz Cantor
und die krumme Linie des Archytas von Tarent

Horst Hischer

Saarbrücken 2003

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 86
submitted: May 12, 2003

Moritz Cantor
und die krumme Linie des Archytas von Tarent

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: http://www.math.uni-sb.de/

Preprint
Erscheint 2003 in einem Sammelband über Mathematik und ihre Didaktik.

Moritz Cantor und die krumme Linie des Archytas von Tarent

Horst Hischer

Zusammenfassung. Das Problem der *Verdoppelung eines Würfels* (bzw.: das *Delische Problem*) gehört neben denen der *Quadratur des Kreises* und der *Winkeldreiteilung* zu den knapp 2500 Jahre alten sog. „drei berühmten klassischen Problemen der Antike“. Diese Probleme wurden erst im 19. Jh. gelöst, und zwar sämtlich negativ. Befreit man sich von der Einschränkung, eine Lösung mittels Zirkel und Lineal suchen zu wollen, so findet man für alle drei Probleme geeignete Hilfsmittel, die jeweils zu Lösungen führen. Die Geschichte der Mathematik bietet hierfür eine Fülle reizvoller, verschiedenartiger Lösungsversuche bzw. Lösungen, und zwar bereits in der griechischen Antike. Dieses wird im vorliegenden Beitrag exemplarisch für das Delische Problem erläutert, wobei der Weg gewählt wird, einen historischen Sekundärtext zu analysieren, nämlich Auszüge aus dem ersten Band der „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ von Moritz Cantor. Zugleich soll an der Auswahl dieser Textstellen exemplarisch deutlich werden, dass solche Quellentexte Grundlage für eine entsprechende eigentätige Analyse durch Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe sein können.

Die drei berühmten klassischen Probleme der Antike

Abbildung 1 gibt eine Übersicht über die bekannten „drei berühmten klassischen Probleme der Antike“ und ihre heutige „Lösung“. In ähnlicher Form werden sie oft in Algebralehrbüchern im Rahmen der Körpertheorie erwähnt.

Verdoppelung des Würfels (oder: „Delisches Problem“)

Die „Verdoppelung des Würfels“ führt zu der Gleichung:

$$\boxed{x^3 - 2 = 0}$$

☞ Die **Galoistheorie** der Algebra liefert, dass eine **Lösung dieser Gleichung nicht mittels Zirkel und Lineal konstruierbar** ist!

Dreiteilung beliebiger (!) Winkel

Es sei der Winkel α zu dritteln, also ist ein Winkel β gesucht mit $\beta := \alpha/3$. Wegen $\cos(3\beta) = 4\cos^3(\beta) - 3\cos(\beta)$ ergibt sich hieraus mit $x := \cos(\beta)$ und $c := \cos(\alpha)$:

$$\boxed{4\,x^3 - 3x - c = 0}$$

☞ Die **Galoistheorie** der Algebra liefert, dass für *beliebige* c eine **Lösung dieser Gleichung nicht mittels Zirkel und Lineal konstruiert werden kann**!

Quadratur des Kreises

Die „Quadratur des Kreises“ führt zur Frage der Lösbarkeit folgender Gleichung:

$$\boxed{x^2 = \pi}$$

☞ Nach Carl Louis Ferdinand **Lindemann** (1882) ist π **transzendent**, d. h.:
π ist nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten.
Damit ist π **nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar**!

Abbildung 1: Die drei klassischen Probleme der Antike und ihre heutige „Lösung“

Diese drei Probleme entstanden vor knapp zweieinhalbtausend Jahren in der Mathematik der griechischen Antike. Die Zeittafel in Abbildung 2 zeigt wichtige Meilensteine der Bearbeitung dieser Probleme während der ersten drei Jahrhunderte seit ihrer Formulierung, wobei das Problem der Würfelverdoppelung lediglich mit Blick auf den Fokus dieses Beitrags hervorgehoben ist.

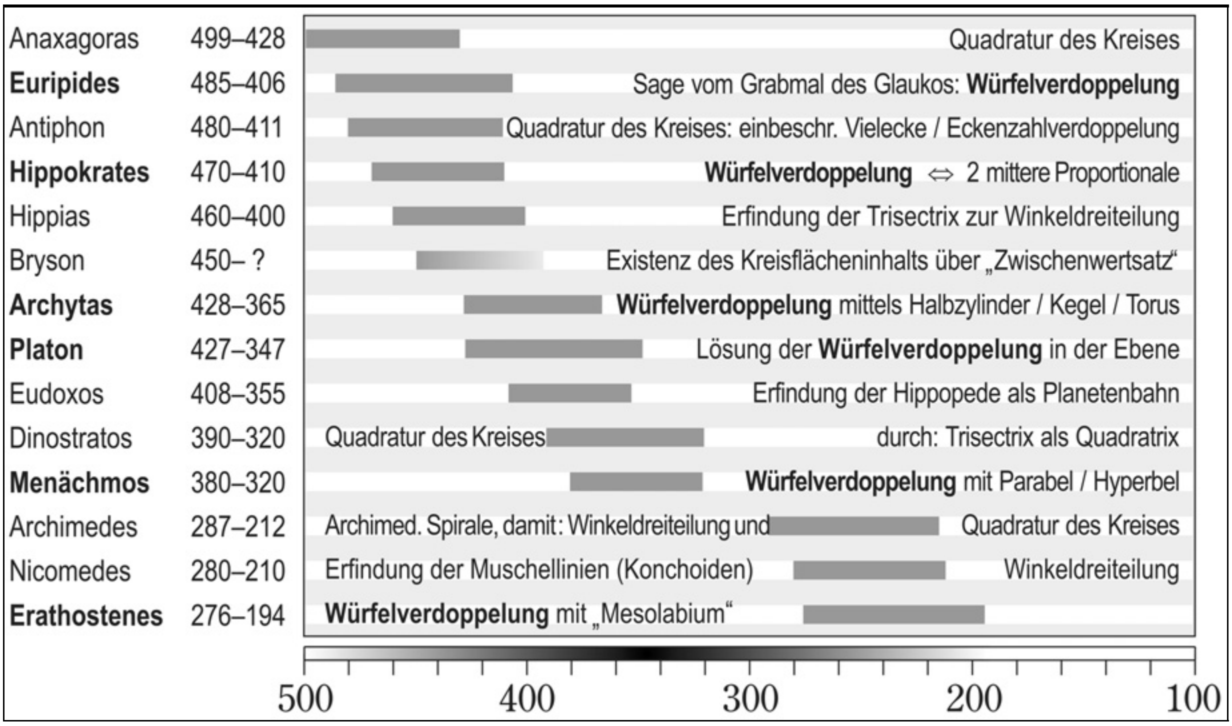

Abbildung 2: Die klassischen Probleme in drei Jahrhunderten der griechischen Antike

Das Auftreten des Problems der **Quadratur des Kreises** wird aufgrund historischer Quellen erstmals bei **Anaxagoras** dokumentiert: Anaxagoras war in Gefangenschaft geraten und versuchte währenddessen, einen Kreis konstruktiv in ein flächeninhaltgleiches Quadrat umzuwandeln. Die Lösung dieser Aufgabe hätte ihn wahrlich der Entlassung nicht irgendwie näher gebracht, sie hatte also keinen praktischen Nutzen. Und so muss diese Beschäftigung für ihn rein spielerisch gewesen sein, ein Zeitvertreib — Mathematik als „Spiel des Geistes“.

Als nächstes taucht in der Zeittafel merkwürdigerweise **Euripides** auf – er war nämlich kein Mathematiker, sondern ein Tragödiendichter, der uns durch viele Tragödien bekannt ist. Neben anderen soll er „Poleidos“ geschrieben haben, eine Tragödie, die leider verloren gegangen ist und über die wir nur noch indirekt Kenntnis haben. In „Poleidos“ war vom **Grabmal des Glaukos** die Rede, und dort taucht bereits das Problem der **Würfelverdoppelung** auf (vgl. die späteren Erläuterungen), also viel früher als bei dem **Orakel von Delos**, das üblicherweise in diesem Zusammenhang genannt wird.

Der Sophist **Antiphon** befasste sich mit der Flächenberechnung des Kreises. Hier finden wir erstmals die Idee, den **Kreisflächeninhalt** durch **einbeschriebene Vielecke** und durch eine **Eckenanzahlverdoppelung** zu approximieren – also durch die *Exhaustionsmethode*, die Archimedes später weiter ausgebaut hat.

Mit **Hippokrates von Chios** (nicht zu verwechseln mit dem durch „Eid“ bekannten Hippokrates von Kos) kommen wir zu einem wichtigen Meilenstein: Er zeigte, dass das Problem der **Würfelverdoppelung** äquivalent ist zu demjenigen der Bestimmung von zwei **mittleren Proportionalen** zweier Größen.

Hippias von Elis erfand 420 v. Chr. eine Kurve, um das Problem der **Winkeldreiteilung** lösen zu können: die **Trisectrix**.

Bryson von Alexandria hat eine **Existenzaussage** zum Kreisflächeninhalt formuliert, indem er so etwas wie den „**Zwischenwertsatz**“ vorweggenommen hat: Man könne umbeschriebene und einbeschriebene Vielecke nehmen, aber – und nun kommt seine entscheidende Aussage: – wo es aber ein Größeres und ein Kleineres gibt, muss es auch ein Gleiches geben.

Archytas von Tarent steht im Zentrum dieses Beitrages, denn er hat als erster das Problem der **Würfelverdoppelung** gelöst, und zwar mit der „krummen Linie“ unter Zuhilfenahme des o. g. Satzes von **Hippokrates**.

Platon lieferte eine interessante Variante der Lösung des Problems der Würfelverdoppelung, und auch von **Eudoxos von Knidos** wird berichtet, dass er eine Lösung gefunden habe („Bogenlinien“), die jedoch leider nicht überliefert ist.

Dinostratos gelang das Kunststück, mit der Trisectrix des Hippias das **Problem der Quadratur des Kreises** zu lösen, weshalb diese Kurve auch **Quadratrix** heißt.

Menächmos, ein Bruder von Dinostratos, gab zwei weitere Verfahren zur Lösung des Problems der **Würfelverdoppelung** an, und zwar einerseits durch den **Schnitt einer Parabel mit einer Hyperbel** und andererseits durch den **Schnitt von zwei Parabeln**. In der Folgezeit entstand eine Fülle weiterer analoger Ideen – der Damm war gebrochen, und diverse Lösungsversuche ergossen sich!

Archimedes von Syrakus ist uns u. a. durch seine **Archimedische Spirale** bekannt. Diese Kurve ist sehr elegant zur **Winkeldreiteilung** nutzbar, und später konnte man zeigen, dass mit ihrer Hilfe auch die **Quadratur des Kreises** lösbar ist.

Nikomedes verdanken wir die **Muschellinien**, auch **Konchoiden** genannt, die der **Winkeldreiteilung** dienen.

Und schließlich ist **Erathostenes von Cyrene** zu nennen, aus der Zahlentheorie bekannt durch sein „Sieb“. Er löste das Problem der **Würfelverdoppelung** mit einem eigens konstruierten Apparat, den er „**Mesolabium**“ nannte. Er war auf diesen Apparat so stolz, dass er ihn einem Tempel als Ausstellungsstück vermacht hat, denn aus seiner eigenen Sicht war die Erfindung des Mesolabiums eine geniale Idee. Dieses wird noch vorgestellt.

Im Folgenden soll nun auf die mit der Würfelverdoppelung zusammenhängenden Personen und Stationen eingegangen werden, also auf Euripides, Hippokrates, Archytas, Platon, Eudoxos und Erathostenes.

Erathostenes’ Brief an den ägyptischen König Ptolemäus

(Cantor 1880, S. 181) berichtet über einen Brief von Erathostenes an den ägyptischen König Ptolemäus:

> *Dem Könige Ptolemäus wünscht Erathostenes Glück und Wohlergehen. Von den alten Tragödiendichtern* [Anm.: gemeint ist Euripides mit seinem verloren gegangenen Werk „Poleido*s*“], *sagt man, habe einer den Minos, wie er dem Glaukos ein Grabmal errichten liess, und hörte, dass es auf allen Seiten 100 Fuss haben werde, sagen lassen:*
>
> > *Zu klein entwarfst Du mir die königliche Gruft,*
> >
> > *Verdopple sie; des Würfels doch verfehle nicht.*
>
> *Man untersuchte aber auch von Seiten der Geometer, auf welche Weise man einen gegebenen Körper, ohne dass er seine Gestalt veränderte, verdoppeln könnte, und nannte die Aufgabe der Art des Würfels Verdoppelung; denn einen Würfel zugrunde legend suchte man diesen zu verdoppeln. Während nun lange Zeit hindurch Alle ratlos waren, entdeckte zuerst [...] Hippokrates, dass, wenn man herausbrächte zu zwei gegebenen graden Linien, ...*

Der Kontext zeigt uns, dass diese „geraden Linien“ als „Strecken“ zu verstehen sind.

> *... wovon die grössere der kleineren Doppelte wäre, zwei mittlere Proportionalen von stetigem Verhältnisse zu ziehen, der Würfel verdoppelt werden könnte; ...*

Das bedeutet: Zu den beiden Ausgangsstrecken, deren eine doppelt so lang wie die andere ist, sind zwei Zwischenstrecken derart zu bestimmen, dass die erste Strecke sich zur zweiten wie die zweite zur dritten und wie die dritte zur letzten verhält. Doch nun kommt die Frustration:

> *... wonach er dann seine Rathlosigkeit in eine nicht geringere Rathlosigkeit verwandelte.*

Hier wird Zeugnis abgelegt über das (vermutlich historisch erstmalige?) Auftreten eines wichtigen methodischen Kunstgriffs in der Mathematik, nämlich: Man versucht ein Problem zu lösen, indem man es auf ein anderes äquivalentes zurückführt und hofft, dieses andere besser lösen zu können als das gegebene – eine geniale Idee, aber es bleibt die „Ratlosigkeit“! Weiter heißt es:

> *Nach der Zeit, erzählt man, wären die Delier, weil sie von einer Krankheit befallen waren, einem Orakel zufolge geheissen worden einen ihrer Altäre zu verdoppeln und in dieselbe Verlegenheit gerathen. Sie hätten aber die bei Platon in der Akademie gebildeten Geometer beschickt und gewünscht, sie möchten ihnen das Verlangte auffinden. Da sich nun diese mit Eifer der Sache unterzogen und zu zwei Gegebenen zwei Mittlere suchten, soll sie [...] Archytas vermittelst der Halbcylinder aufgefunden haben, Eudoxus aber vermittelst der sogenannten Bogenlinien ...*

Es ist rätselhaft, wie Eudoxos hier vorgegangen ist, denn es gibt keine Überlieferung, was unter seiner Bogenlinienmethode zu verstehen ist. Und auch die „Halbcylinder" des Archytas können wir vorläufig noch nicht einordnen.

Zuvor sei noch erwähnt, wie Moritz Cantor Erathostenes bezüglich dieser Würfelverdoppelungsversuche weiterhin zitiert:

> *Es widerfuhr ihnen aber insgesammt, dass sie zwar ihre Zeichnungen mit geometrischer Evidenz nachgewiesen hatten, sie aber nicht leicht mit der Hand ausführen und zur Anwendung bringen konnten, ausser etwa einigermassen die des Menächmus, doch auch nur mühsam.*

Hier weist Cantor also auf die Diskrepanz zwischen gedanklicher und praktischer Lösung eines mathematischen Problems hin.

Der Satz des Hippokrates zur Lösung des Delischen Problems

Abildung 3 visualisiert den Satz des Hippokrates, wobei der Quantor „$?x:$" als eine Frage zur Problembeschreibung wie folgt zu lesen ist:

„Gibt es ein x, so dass gilt: ... ?"

Hippokrates zeigt nun gemäß Cantor, dass das Delische Problem (oberer Teil von Abbildung 3) sich lösen lässt, wenn es gelingt, das Problem der Einschiebung zweier mittlerer Proportionalen (unterer Teil der Abbildung) zu lösen, d. h.: a und damit $2a$ sind gegeben (wie es im Text des Erathostenes steht), und gesucht sind die „mittleren Proportionalen" x und y, so dass also gilt:

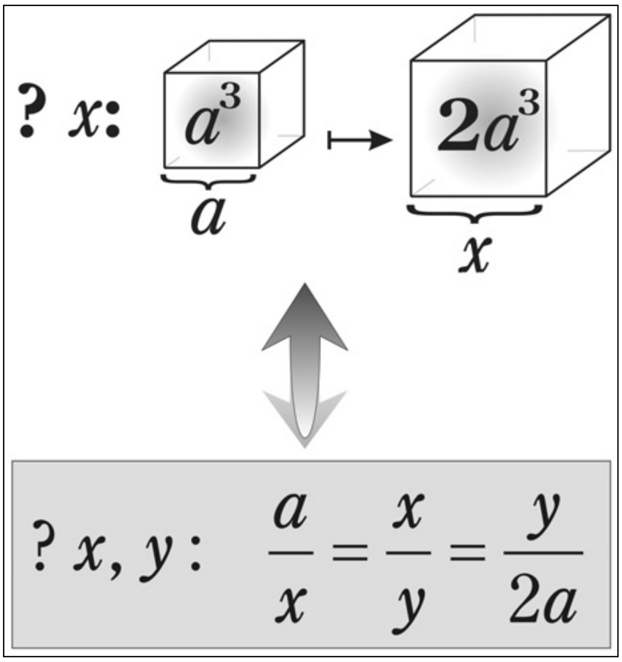

Abbildung 3: Satz des Hippokrates

$$a : x = x : y = y : 2a$$

Und wie können *wir* den Satz des Hippokrates (von unten nach oben) beweisen? Formal machen wir aus dem „Frage-Quantor" einen Existenzquantor, denn wenn die Frage verneint werden muss, ist die Prämisse falsch und also der Schluss richtig. Nur dieser Fall interessiert uns. Wir zeigen also: Wenn x und y so existieren, dass $a:x=x:y=y:2a$ gilt, so existiert ein x mit $x^3=2a^3$. Eine elementare Rechnung führt sofort zum Ziel (alle Größen sind positiv):

$$a : x = x : y = y : 2a \Leftrightarrow ay = x^2 \wedge 2ax = y^2 \Leftrightarrow a^2y^2 = x^4 \wedge y^2 = 2ax \Rightarrow x^3 = 2a^3$$

In dieser Beweisrichtung sind also die beiden Belegungen von x sogar identisch, was formallogisch für die Gültigkeit des Satzes nicht nötig ist.

Für die Lösung des Problems der Würfelverdoppelung durch Archytas wird nur die hier bewiesene Richtung des Satzes benötigt. Es gilt jedoch auch die andere Richtung, wie man sich klar machen möge.

Der Satz von Hippokrates war ein methodischer Durchbruch, der eine Fülle von Lösungsversuchen nach sich zog, nachdem man bei der ursprünglichen Form völlig ratlos war. Denn dies passte methodisch in die „Proportionenlehre".

Der noch zu untersuchende Text von Cantor über Archytas' Methode wird uns allerdings zeigen, dass Archytas den Satz von Hippokrates in anderer, äquivalenter, Formulierung benutzt hat. Dieses sei im Vorgriff darauf dargestellt (Abbildung 4):

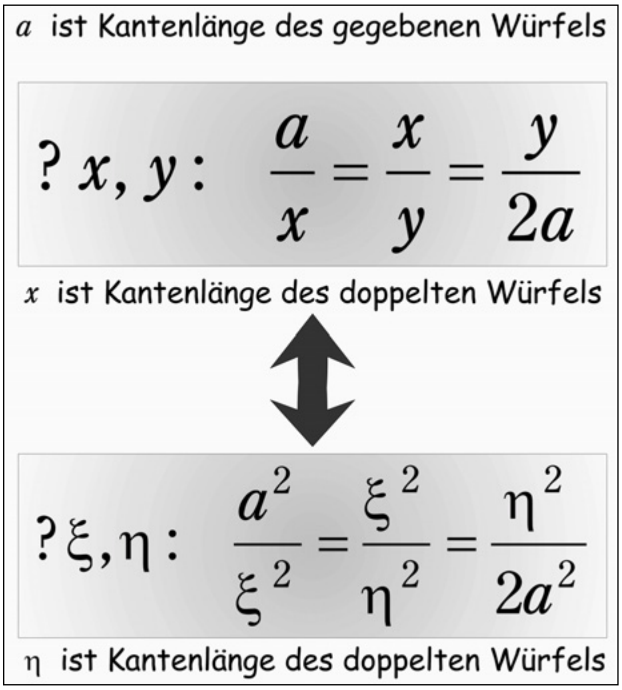

Abbildung 4: Archytas' äquivalente Umformung von Hippokrates' Bedingung

Zunächst ist man verblüfft, dass diese beiden Aussagen äquivalent sein sollen. Eine inhaltliche, nicht formale, Betrachtung hilft aber weiter: Während die erste Gleichung der Bestimmung von mittleren Proportionalen zwischen *Streckenlängen* dient, kann die zweite als Beziehung zwischen *Flächeninhalten* aufgefasst werden: Zu dem Quadrat mit dem Flächeninhalt a^2 und dem mit dem doppelten Inhalt $2a^2$ sind zwei weitere Quadrate derart gesucht, dass deren Flächeninhalte die mittleren Proportionalen der gegebenen Inhalte sind. Archytas sucht also zwei Längen ξ und η derart, dass

$$\frac{a^2}{\xi^2} = \frac{\xi^2}{\eta^2} = \frac{\eta^2}{2a^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\xi} = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{2} \cdot a}$$

gilt. Man rechnet dann schnell nach, dass $\eta^3 = 2a^3$ gilt, dass damit also η die Kantenlänge des gesuchten Würfels doppelten Volumens ist. Wir werden im Folgenden diese hierauf basierende äquivalente Umformung des Satzes von Hippokrates verwenden.

Und damit kehren wir wieder zu Moritz Cantor und seinen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik zurück. Dort findet sich ein Bericht, der keinesfalls auf Anhieb einfach zu verstehen ist, der aber dennoch – oder vielleicht gerade deshalb! – sehr geeignet erscheint, im Mathematikunterricht interpretierend behandelt zu werden.

Dies wäre dann ein Beitrag zu einem problemorientierten Unterricht mit innermathematischem Bezug in historischer Verankerung, vgl. (Hischer 2000).

Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen durch Archytas von Tarent zur Lösung des Delischen Problems

Wir knüpfen an den bereits zitierten Brief von Erathostenes an Ptolemäus an, wie wir ihn bei (Cantor 1907, S. 228) finden (vgl. Abbildung 5), wobei wir die einzelnen Textpassagen impulsgebend spontan diskutieren und interpretieren:

> *Erathostenes: „Der Tarentiner Archytas soll sie vermittelst der Halbzylinder aufgefunden haben.“*

Erathostenes meint die Auffindung der mittleren Proportionalen, wie aus dem vorausgehenden (hier nicht wiedergegebenen) Text hervorgeht.

> *Es seien [...] $A\Delta = b$ und $AB = a$ die beiden Geraden, zwischen welche zwei mittlere Proportionalen einzuschalten sind.*

Wir würden heute von „Strecken“ sprechen.

Eratosthenes: „Der Tarentiner Archytas soll sie vermittelst der Halbzylinder aufgefunden haben.“ Es seien (Fig. 36) $A\Delta = b$ und $AB = a$ die beiden Geraden, zwischen welche zwei mittlere Proportionalen einzuschalten sind. Die größere $A\Delta$ wird als Durchmesser eines Halbkreises benutzt, in welchen die kleinere AB als Sehne eingezeichnet wird. Aber auch senkrecht zu diesem ersten Halbkreise wird über $A\Delta$ ein zweiter Halbkreis errichtet, der in A befestigt über die Ebene $AB\Delta$ weggeschoben werden kann. Er bildet dabei auf dem über dem Halbkreis $AB\Delta$ errichteten Halbzylinder eine krumme Linie. Andererseits ist das Dreieck $A\Delta\Pi$ gegeben durch die $A\Delta$, die AB und die Berührungslinie $\Delta\Pi$ an den Halbkreis in Δ. Dieses Dreieck liefert um $A\Delta$ als Achse in Drehung versetzt eine Kegeloberfläche, welche gleichfalls den Halbzylinder und die vorher auf ihm erzeugte Kurve schneidet, letztere in einem Punkte K, der als dem Halbzylinder angehörend senkrecht über einem Punkte I des Halbkreisbogens $AB\Delta$ liegen muß. Während $A\Pi$ die Kegeloberfläche beschreibt, beschreibt endlich auch das Stück AB dieser Geraden eine Fläche gleicher Art, beziehungsweise der Punkt B einen Halbkreis BMZ, der senkrecht zur Horizontalebene $AB\Delta Z$ steht. Da zu dieser Ebene auch $AK\Delta'$ senkrecht steht, so ist zu ihr auch $M\Theta$ senkrecht, die Durchschnittsgerade der beiden genannten Ebenen, beziehungsweise $M\Theta \perp BZ$ als Durchschnittsgeraden der BMZ mit der $AB\Delta Z$. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Eigenschaft von BMZ als Halbkreis und von BZ als dessen Durchmesser, daß $M\Theta^2 = B\Theta \times \Theta Z$. Aber $B\Theta \times \Theta Z = A\Theta \times \Theta I$, weil BZ und AI zwei in Θ sich schneidende Sehnen desselben Kreises sind. Also $M\Theta^2 = A\Theta \times \Theta I$, also der Winkel AMI ein Rechter, d. h. ebenso groß wie $AK\Delta'$, welcher Winkel im Halbkreise ist, und folglich MI parallel zu $K\Delta'$. Damit ist die Ähnlichkeit des Dreiecks $\Delta' AK$ mit IAM, aber auch mit KAI bewiesen, und damit die Proportion $AM : AI = AI : AK = \Delta K : \Delta' A$. Setzt man endlich $AM = AB = a$, $\Delta' A = A\Delta = b$, $AI = x$, $AK = y$, so ist wieder $a : x = x : y = y : b$, wie es verlangt wurde. Aus diesem Verfahren geht, was wir zu bemerken nicht versäumen wollen, die Kenntnis mehrerer wichtiger Sätze von seiten des Erfinders hervor.

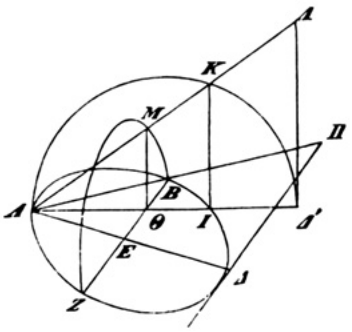

Fig. 36.

Abbildung 5: Textausschnitt aus (Cantor 1907, S. 228) betreffend die krumme Linie des Archytas von Tarent

> *Die größere $A\Delta$ wird als Durchmesser eines Halbkreises benutzt, in welchen die kleinere AB als Sehne eingezeichnet wird.*

Es ist ein in der „Grundebene“ liegender Halbkreis gemeint. Und weiterhin sehen wir, dass damit $b^2 = 2a^2$ gilt – wie zuvor beim Satz des Hippokrates.

> *Aber auch senkrecht zu diesem ersten Halbkreise wird über $A\Delta$ ein zweiter Halbkreis errichtet, der in A befestigt über die Ebene $AB\Delta$ weggeschoben werden kann.*

Das wirkt recht diffus, denn wo ist dieser zweiter Halbkreis? Doch dann klärt es sich: Cantor meint „Drehen“ und nicht „Schieben“, wie wir es heute genauer sagen würden! Also: Es wird über $A\Delta$ senkrecht ein Halbkreis errichtet – den wir in der Abbildung nicht sehen –, und dieser Halbkreis wird um den Punkt A links herum „weggedreht“. Und nun sehen wir ihn auch! Aber: Dieser Halbkreis ist weder maßstäblich noch perspektivisch richtig, und dieser Darstellungsmangel trägt wohl zu den Schwierigkeiten beim Textverständnis bei!

Er bildet dabei auf dem über dem Halbkreis $AB\Delta$ errichteten Halbzylinder eine krumme Linie.

Hier wird nun erstmals die „krumme Linie“ erwähnt – wer kann sie sich schon vorstellen? Ferner sollte es bezüglich des wegzudrehenden Halbkreises über $A\Delta$ wohl genauer heißen: „Er bildet bei diesem Drehen ...“. Und wo ist der *„über dem Halbkreis $AB\Delta$ [errichtete] Halbzylinder“*? Dieser muss offenbar senkrecht zur Grundebene gedacht werden, wie der vorausgehende Text nahe legt (etwa wie in Abbildung 6).

Abbildung 6: Halbzylinder

Doch wie soll nun der über $A\Delta$ senkrecht zur Grundebene errichtete Halbkreis *„auf dem [...] Halbzylinder eine krumme Linie“* bilden, wenn er „weggedreht“ wird? Und *wie* wird er denn weggedreht? Da in Cantors Zeichnung eine – wenn auch perspektivisch nicht richtige – Zwischenstellung dieses Halbkreises eingezeichnet ist (wie oben diskutiert), muss A das Zentrum dieser Drehung sein mit einer zur Grundfläche orthogonalen Drehachse. Dann aber ist die *Ortsfläche* dieses Halbkreises, die bei dessen Drehung entsteht, die „obere Hälfte“ eines Torus mit dem Innenradius 0. Die dabei entstehende „krumme Linie“ muss dann die *Schnittkurve* des Halbzylinders mit diesem Torusteil sein. Offensichtlich entsteht diese *Raumkurve* aber nur bis zu einem maximalen Drehwinkel von 90°, so dass wir also den Halbzylinder mit einem „Achteltorus“ schneiden müssen, wie er in Abbildung 7 dargestellt ist.

Abbildung 7: Achteltorus

Da die beiden Flächen sich in den beiden im Abbildung 7 markierten Punkten schneiden, sind dies Anfangs- und Endpunkt der gesuchten Kurve, die sowohl auf dem Halbzylinder als auch auf dem Achteltorus verläuft. Durch Betrachtung des Achteltorus ergibt sich, dass die Kurve in ihrem Endpunkt vertikal zur Grundfläche einlaufen muss. Doch wie startet sie „unten rechts“? Horizontal, vertikal oder irgendwie „schräg nach oben“? Für gute Vorhersagen ist eine sehr gute Raumanschauung erforderlich. Mit einem 3D-Programm zur Simulation impliziter Funktionen verschaffen wir uns einen Eindruck von dieser krummen Linie (Abbildung 8). Sie besitzt offenbar einen absoluten Hochpunkt. Wo liegt dieser?

Abbildung 8: „krumme Linie“ als Schnittkurve

Bevor wir die krumme Linie genauer untersuchen, folgen wir jedoch zunächst den Ausführungen von Moritz Cantor mit Blick auf das Delische Problem:

Andererseits ist das Dreieck $A\Delta\Pi$ *gegeben durch die* $A\Delta$*, die* AB *und die Berührungslinie* $A\Pi$ *an den Halbkreis in* Δ.

Cantor meint die „Strecken" $A\Delta$ und AB, und mit *„Berührungslinie* $A\Pi$ *"* ist wohl die Tangente im Punkt Δ an den Grundkreis gemeint. Aber wir merken erneut: Die Zeichnung weist erhebliche Darstellungsfehler auf!

Dieses Dreieck liefert um $A\Delta$ *als Achse in Drehung versetzt eine Kegeloberfläche, welche gleichfalls den Halbzylinder und die vorher auf ihm erzeugte Kurve schneidet, ...*

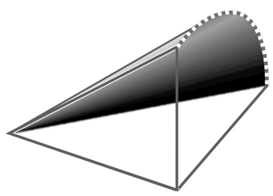

Abbildung 9: Kegeloberfläche

Die Entstehung der Kegeloberfläche als Rotationsfläche ist leicht nachvollziehbar (Abbildung 9). Auch ist mit Abbildung 5 klar, dass diese Kegelfläche den Halbzylinder schneidet.

... letztere in einem Punkte K*, der als dem Halbzylinder angehörend senkrecht über einem Punkte* I *des Halbkreisbogens* $AB\Delta$ *liegen muß.*

Da die krumme Linie in der Oberfläche des Halbzylinders verläuft, ist mit Abbildung 8 klar, dass die Kegelfläche diese *Zylinderkurve* (nicht nur trivial in deren Endpunkt, sondern auch) in dem weiteren Punkt K über I schneidet.

Während $A\Pi$ *die Kegeloberfläche beschreibt, beschreibt endlich auch das Stück* AB *dieser Geraden eine Fläche gleicher Art, beziehungsweise der Punkt* B *einen Halbkreis* BMZ*, der senkrecht zur Horizontalebene* $AB\Delta Z$ *steht.*

Gemeint ist, dass die Sehne AB ebenfalls eine Rotationskegelfläche erzeugt, und zwar einen Teil der Fläche in Abbildung 9.

Wir können nun die bisherigen Überlegungen in eine zusammenfassende verbesserte Darstellung wie in Abbildung 10 einfließen lassen, wobei die Punkte hier und nachfolgend mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet werden. Der Punkt K ist zunächst nur ein aktueller Schnittpunkt des Halbzylinders mit dem um A gedrehten Halbkreis über der Strecke AD'; er liegt aber auch auf dem Kegelmantel, wie man an der durch A und M verlaufenden Halbgeraden sieht, wodurch er eindeutig bestimmt ist. Cantor fährt fort:

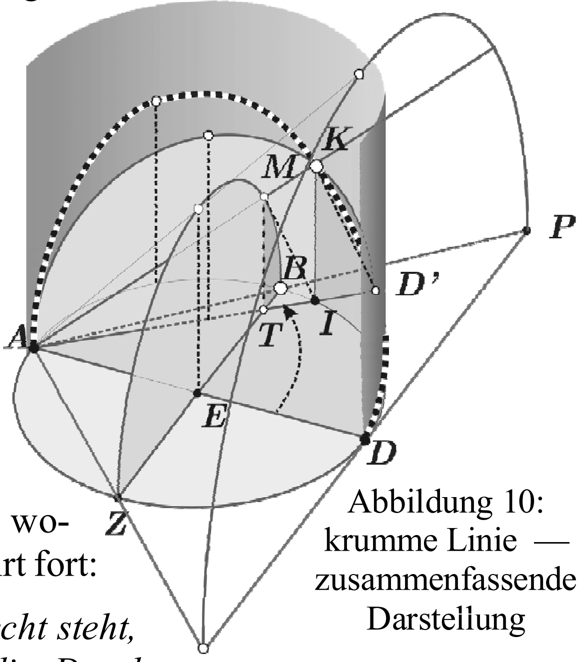

Abbildung 10: krumme Linie — zusammenfassende Darstellung

Da zu dieser Ebene auch AKD' *senkrecht steht, so ist zu ihr auch* MT *senkrecht, die Durchschnittsgerade der beiden [...] Ebenen, beziehungsweise* $MT \perp BZ$ *als Durchschnittsgerade der* BMZ *mit [...]* $ABTZ$.

Diese Behauptung ist elementargeometrisch klar: Sind zwei Ebenen zu einer dritten orthogonal, so gilt dies auch für ihre Schnittgerade.

Daraus folgt mit Rücksicht auf die Eigenschaft von BMZ als Halbkreis und von BZ als dessen Durchmesser, daß $MT^2 = BT \times TZ$.

Hier wird der Höhensatz des Euklid angewendet.

Aber $BT \times TZ = AT \times TI$, *weil ...*

Der Sehnensatz wird also ausgenutzt. Der Rest ist offensichtlich und führt auf die Anwendung des Satzes von Hippokrates gemäß Abbildung 4, weil ja nachgewiesen wird, dass $a : x = x : y = y : b$ gilt, wobei wir in Gedanken ξ bzw. η anstelle von x bzw. y setzen und zugleich beachten, dass $b^2 = 2a^2$ gilt.

Somit liefert also Archytas' krumme Linie (als Schnittkurve von Achteltorus und Halbzylinder) im Schnitt mit der Kegelfläche einen eindeutig bestimmten Punkt K, der dann überleitet zu den gesuchten mittleren Proportionalen, womit das Delische Problem mit dem Hilfsmittel „krumme Linie" gelöst wurde.

Untersuchung der krummen Line von Archytas

Da die krumme Linie in der Mantelfläche des Halbzylinders verläuft, liegt es nahe, sie in die Ebene abzuwickeln und als zweidimensionale Kurve darzustellen. Wir legen ein kartesisches x-y-z-Koordinatensystem mit dem Ursprung in Punkt A, nehmen die x-y-Ebene als Grundebene und die z-Achse als Torusachse. Sodann sind die Flächen durch folgende Gleichungen beschreibbar:

Halbzylinder: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, Torus: $x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

Die Rotationssymmetrie des Torus zur z-Achse legt Polarkoordinaten nahe:

$$x = 1 + \cos(\varphi),\ y = \sin(\varphi)$$

Damit ergibt sich für die Schnittkurve (Abbildung 11):

$$z = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2 \cdot (1 + \cos(\varphi))} - (1 + \cos(\varphi)}$$

Diese Kurve besitzt offenbar genau einen lokalen Hochpunkt, nämlich gemäß Graph etwa bei $\varphi \approx 2{,}1$. Mittels Differentiation könnten wir ihn zwar ermitteln, aber es geht auch ganz elementar:

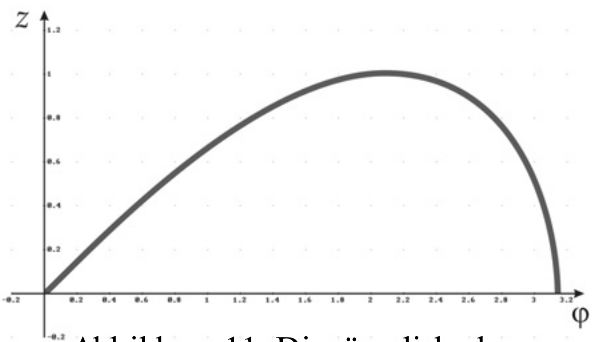

Abbildung 11: Die räumliche krumme Linie als ebene Abwicklungskurve

Abbildung 10 zeigt, dass dieser Hochpunkt dort liegt, wo der Zenith des gedrehten Halbkreises den Halbzylinder durchstößt. Der Lotfußpunkt dieses Zenits liegt auf dem Kreisumfang des Grundkreises. Da die entstehende Sehne genau so lang ist wie der Radius des Grundkreises, ist sie Teil eines einbeschriebenen Sechsecks. Der zugehörige Winkel ist also $120°$ oder $2\pi / 3 \approx 2{,}0944$!

Weitere Lösungen des Delischen Problems

Es gab in der Antike weitere Lösungen bzw. Lösungsversuche, über die Moritz Cantor berichtet. So schreibt er u. a. **Platon** (427 – 347) folgende Lösung zu.

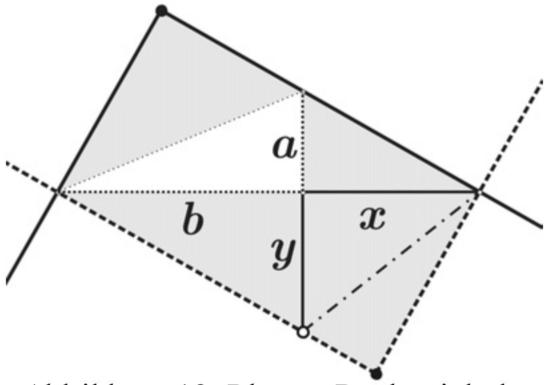

Abbildung 12: Platons Rechtwinkelapparat in „beliebiger" Stellung

Dessen ideeller „Apparat" besteht aus zwei Rechtwinkelzügeln, also jeweils zwei Strecken, die rechtwinklig miteinander fest verbunden sind — hier das dick durchgezogene und das dick gestrichelte Streckenpaar in Abbildung 12. Diese beiden Rechtwinkelzüge sind unter Erhalt ihrer Parallelität zueinander beweglich. Man bewegt nun einen der beiden Rechtwinkelzüge so weit, bis die beiden „unteren" Punkte (hohl und ausgefüllt) wie in Abbildung 13 zusammenfallen. Aufgrund von Ähnlichkeitsbeziehungen in entsprechenden Dreiecken oder wegen des Höhensatzes des Euklid ist dies dann die Lösung des Delischen Problems, denn wir lesen ab:

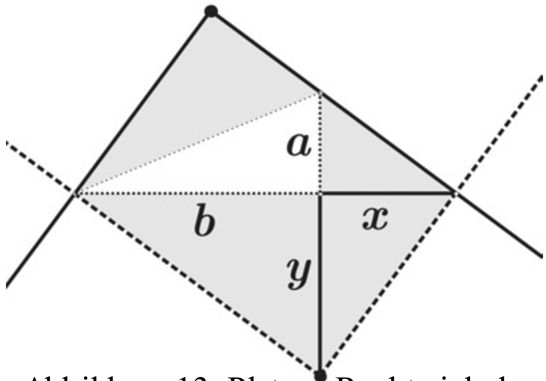

Abbildung 13: Platons Rechtwinkelapparat in Lösungsstellung

$$a : x = x : y = y : b$$

Diese „Lösung" passt jedoch nicht zur philosophischen Grundhaltung Platons, und so wird vermutet, dass er nur zeigen wollte, wie einfach die Lösung des Delischen Problems sei, wenn man sich *nicht* auf Zirkel und Lineal beschränkt.

Eine andere, weitaus spätere Lösung stammt von **Erathostenes von Knidos** (276 – 194), und zwar handelt es sich nicht nur um eine ideelle, gedachte Lösung, sondern Erathostenes hat einen konkreten mechanischen Apparat konstruiert, den er „Mesolabium" nannte. Wie war das Mesolabium konzipiert?

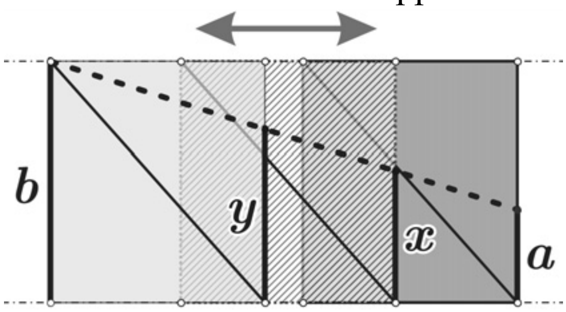

Abbildung 14: Mesolabium des Erathostenes — Ausgangsstellung

Es besteht aus drei kongruenten rechteckigen Täfelchen, die überlappend in drei kongruenten Paaren aus jeweils zwei parallelen Schienen horizontal frei beweglich sind (Abbildung 14, dort etwa: Das Täfelchen ganz links liegt oben, darunter dann das mittlere und darunter, also ganz unten, das rechte). Auf jedem Täfelchen ist eine Diagonale markiert, und zwar sind alle drei Diagonalen aufgrund der Kongruenz und der Anordnung der Täfelchen parallel. Wie wird nun damit das Delische Problem gelöst?

Wegen des Satzes von Hippokrates ist es zu einem ebenen Problem äquivalent, nämlich zur Ermittlung von zwei mittleren Proportionalen, d. h.: Zu zwei gegebenen Längen a und b mit $a < b$ sind zwei Längen x und y gesucht mit $a : x = x : y = y : b$. Für b nehmen wir die Höhe des linken Täfelchens, und a markieren wir auf der rechten vertikalen Kante des rechten Täfelchens. Damit können wir jeden beliebigen Fall erfassen, weil wir davon abweichende gegebene Längen nur mit Hilfe des Strahlensatzes umzuwandeln brauchen.

Nun denken wir uns ein Gummiband zwischen den oberen Endpunkten dieser beiden markierten Strecken a und b gespannt (dick gestrichelt in Abbildung 14) und verschieben die Täfelchen so weit, dass sich das Gummiband und die Diagonalen jeweils auf der rechten Kante eines Täfelchens schneiden und damit zwei neue Strecken der Längen x und y auf den beiden mittleren Kanten kennzeichnen (Abbildung 15). Dieses ist eine manuelle Approximation, die überraschend schnell zufriedenstellend „konvergiert". Der Strahlensatz weist dann aus, dass die beiden so erzeugten Streckenlängen x und y die gesuchten mittleren Proportionalen sind.

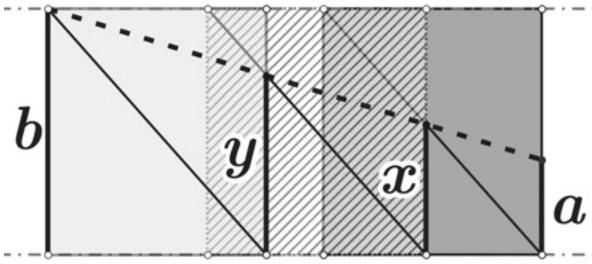

Abbildung 15: Mesolabium — Lösung

Die rechteckigen Täfelchen des von Erathostenes erfundenen Mesolabiums bestanden aus Holz, Metall oder Elfenbein (Cantor 1880; 285). Natürlich hatte er kein Gummiband verwendet – man kann dieses Verfahren auch mit einem angelegten Lineal realisieren, und es lässt sich sehr schön mit einem Dynamischen Geometriesystem simulieren (vgl. http://hischer.de/mathematik/didaktik/neuemedien/).

(Cantor 1880; 286) schreibt mit Bezug auf den erwähnten Brief des Erathostenes an den König Ptolemäus bezüglich des Problems der Würfelverdoppelung zur Bedeutsamkeit dieser Erfindung:

> *Erathostenes schlug diese seine Erfindung so hoch an, dass er zum ewigen Gedächtnisse derselben ein Exemplar als Weihgeschenk in einem Tempel aufhängen liess. Die von ihm selbst entworfene Inschrift, welche die Gebrauchsanweisung enthielt, soll das mehrgenannte Schlussepigramm des erathostenischen Briefes sein.*

Literatur

Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig: Teubner. 1. Auflage 1880, 3. Auflage 1907.

Hischer, Horst: Klassische Probleme der Antike — Beispiele zur „Historischen Verankerung". In: Blankenagel, Jürgen & Spiegel, Wolfgang (Hrsg.): Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik — Festschrift für Harald Scheid. Stuttgart / Düsseldorf / Leipzig: Klett 2000, S. 97 – 118.