Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint

Begriffsbildung im Mathematikunterricht

Anselm Lambert

Preprint No. 77

Saarbrücken 2003

Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Begriffsbildung im Mathematikunterricht

Anselm Lambert
Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Postfach 15 11 50
D – 66041 Saarbrücken
eMail: alambert@math.uni-sb.de

submitted: 03.03.03

Preprint No. 77
Saarbrücken 2003

Herausgegeben von
FR 6.1 — Mathematik
Im Stadtwald
D—66041 Saarbrücken

Fax: + 49 (0) 681 302 4443
eMail: preprint@math.uni-sb.de
WWW : http://www.math.uni-sb.de

Begriffsbildung im Mathematikunterricht

Anselm Lambert, Saarbrücken

Begriffsbildung ist ein allgemein anerkannter und wesentlicher Gegenstand des Mathematikunterrichts. Damit ist es unstrittige Aufgabe der im Unterricht eingesetzten Neuen Medien, speziell auch der Lehr- und Lernprogramme, jene zu unterstützen.
Begriffsbildung findet durch den Einsatz Neuer Medien offensichtlich in einer anderen Lernumgebung als bisher statt. Eine Frage, die nun zu stellen ist, um die dadurch bedingten eingetretenen bzw. notwendigen Veränderungen zu untersuchen, ist die danach, was denn Begriffsbildung sei.
Begriffe und Begriffsbildung sind auf einer ersten Ebene unter *ontogenetischen und kulturhistorischen Aspekten* zu betrachten und enthalten auf einer zweiten Ebene von der *kognitiv*en, *epistemologisch*en oder *soziokulturell*en *Wissensstruktur* abhängige Komponenten. Diese beiden Ebenen sind miteinander verwoben. Die Fachdidaktik bedient sich nun der geeigneten Hilfswissenschaften, von der Psychologie über Pädagogik, Philosophie und Soziologie bis hin zur Geschichte, um ein ganzes Bild von Begriffsbildung in Mathematik und Mathematikunterricht zu erhalten (siehe Abbildung 2).
Das hier vorgestellte theoretische Modell von Begriffsbildung ist deskriptiv in dem Sinne, dass es die vorhandenen Sichtweisen strukturiert, *und normativ*, da es auffordert die genannten Aspekte alle zu berücksichtigen. Es eignet sich für praktische Unterrichtsplanung, -beobachtung und -bewertung durch Lehrkräfte *und bietet sich an als Basis für weitere systematische empirische Untersuchungen.*
Von der im Modell beschriebenen Struktur des ontogenetischen Aspektes des Begriffes Begriffsbildung geführt, tragen wir aus den Befunden empirischer Mathematikdidaktik schließlich ein begründetes systematisches Modell von Zugängen zur Mathematik zusammen, die für die Begriffsbildung im Mathematikunterricht eine entscheidende Rolle spielen.

1 Der Begriff Begriffsbildung in der didaktischen Literatur

Über Mathematik im allgemeinen und Begriff im besonderen wurde schon nachgedacht, bevor es die Fachwissenschaft Didaktik der Mathematik gab. So wie wir aus der Geschichte der Mathematik im Rahmen eines genetischen Unterrichts wertvolle Anregungen für das Machen und Darstellen von Mathematik, also für den Prozess *und* das Produkt Mathematik erhalten können, so liefern uns die Vordenker des Nachdenkens über Mathematik auch heute noch zwar nicht empirisch messend abgesicherte, aber dennoch unverzichtbare wichtige Impulse und Erkenntnisse. Beginnen wir also mit einem Klassiker.

1.1 Ein klassischer Anfang: Gottlob Frege

> Das Wort Begriff wird verschieden gebraucht, teils in einem psychologischen, teils in einem logischen Sinn, teils auch in einer unklaren Mischung aus beiden. [Frege 1892, 64]

Gleich zu Beginn wird hier von dem „Wort“ Begriff gesprochen, das „gebraucht“ wird. Frege beschreibt hier (zumindest implizit), dass der Gebrauch eines Wortes seine Bedeutung ist. Ein Wort, als Zeichen für einen Begriff, ist nicht notwendigerweise der Repräsentant eines Dinges. Sprache ist also nicht wie beim jungen Wittgenstein Abbild der Wirklichkeit, sondern wie beim späten Wittgenstein gilt, dass der Gebrauch eines Wortes in einer Sprache seine Bedeutung ist. Dies gilt auch für die Zeichen der Sprache Mathematik. Begriffe verbergen sich hinter den gebrauchten Zeichen. Wir unterscheiden, wenn nötig, das Zeichen (also das Begriffswort, den Begriffsnamen oder Bezeichner) von dem Begriff, der durch Begriffsinhalt und/oder –umfang gegeben ist. Und davon weiter die Relation von Bezeichner und Begriff. Betrachten wir den Begriff als gegeben und ordnen ihm seinen Bezeichner zu, so nennen wir dies Bezeichnung (oder Ausdruck); umgekehrt ist der Begriff die Bedeutung des Bezeichners:

$$\text{Bezeichnung: Begriff} \mapsto \text{Bezeichner}$$

$$\text{Bedeutung: Bezeichner} \mapsto \text{Begriff}$$

Frege stellt in dem oben angeführten Zitat zwei Aspekte von Begriffsbildung heraus: einen *psychologischen Aspekt* auf der einen und einen logischen, das heißt zeitgenössisch einen *philosophischen Aspekt*, auf einer anderen Seite, die sich in seinen Augen in diesem Spannungsverhältnis – oft in (unerwünschter) Unklarheit – vermischen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es zu zeigen, dass wir bei den Begriffen Begriff und Begriffsbildung neben den beiden von Frege angeführten noch einige weitere Aspekte zu betrachten haben, und davon zu überzeugen, dass wir durch diese Vielgesichtigkeit eher (die erwünschte) Klarheit erlangen.

Unsere Aufgabe ist es also, den vielfältigen Gebrauch des Wortes „Begriff" oder auch des Wortes „Begriffsbildung" aufzuspüren. Die in der Literatur gefundenen Sichtweisen werden dann im zweiten Abschnitt in ein systematisierendes Modell zusammen gefasst. Dann sehen wir weiter.

1.2 „Begriffsbildung" in der aktuellen didaktischen Literatur

Wir wollen im nun Folgenden aus der originär fachdidaktischen und weiterer, der Fachdidaktik nützlichen und von der Fachdidaktik zu nutzenden Literatur zusammentragen, in Verbindung setzen und strukturieren, was wir dort zur Begriffsbildung finden können.

Begriffsbildung im Unterricht; ein fachdidaktischer Einstieg.

Allen, die sich für das Thema Begriffsbildung interessieren, würden wir für einen Einstieg in der Regel gewiss eines der Bücher von Hans-Joachim Vollrath empfehlen. Das ist meist das erste, was einem, mir und den von mir befragten Didaktikern zumindest, zu „Didaktik der Mathematik und Begriffsbildung" einfällt: „Schauen Sie doch mal in den Vollrath!" (insbesondere [Vollrath 1984]). Schauen wir also mal:

> Der Zahlbegriff, der Verknüpfungsbegriff, die Begriffe Term und Gleichung, sowie der Funktionsbegriff bilden sich im Laufe des Algebraunterrichts heraus. [Vollrath 1994, 253]

Hier beschreibt Vollrath den *ontogenetischen Aspekt* von Begriffsbildung [Hischer 1995, 9]. Lesen wir dies exemplarisch, erhalten wir als Verallgemeinerung auf alle Gebiete der Mathematik sinngemäß: *Die Begriffe bilden sich im Mathematikunterricht heraus.* Der Lernende erwirbt (oder konstruiert – je nach Begriffsbildung in der diese beschreibenden Lehr-Lern-Theorie) im Laufe des Unterrichts Begriffe. Aber was heißt „im Unterricht herausbilden"? Wie kommt ein Begriff in eine Unterrichtssituation? Was ist eigentlich ein zu beobachtender Begriff im Unterricht? Wie können wir ihn beobachten und erkennen, ob er erworben (oder konstruiert) wurde? Dazu werden wir in Bälde das epistemologische Dreieck heranziehen.

Vollrath fährt fort:

> Diese Begriffsbildungsprozesse spiegeln bis zu einem gewissen Grade die historische Entwicklung wieder. [Vollrath 1994, 253]

Hier beschreibt Vollrath den *kulturhistorischen Aspekt* von Begriffsbildung [Hischer 1996, 9]. Auch Uwe-Peter Tietze fährt auf diesen beiden Schienen. Er unterscheidet

> Begriffsbildung (a) als Entstehung und Fortentwicklung eines Begriffs im historischen Rahmen der mathematischen Wissenschaft, (b) als Entstehen eines Begriffs im Kopf eines Schülers [...] [Tietze 2000, 56]

Und ergänzt

> [...] (c) als Handlungsabsicht des Lehrers im Unterricht. [Tietze 2000, 56]

Der Begriff kann also nach dieser Vorstellung auch von der Lehrkraft vorgebildet werden, ohne dass er von den Lernenden nachgebildet (erworben oder konstruiert) wird! Es gibt eine Handlungsweise der Lehrkraft, die einen Begriff in den Raum zu stellen vermag, der dort von den Lernenden abgeholt wird oder aber auch nicht.

Zurück zu Vollrath:

> Die Lernenden können sich dieser Begriffsentwicklungen in reflektierenden Phasen des Unterrichts bewusst werden. [Vollrath 1994, 253]

Welcher Begriffsentwicklungen? Das ist nun etwas schwieriger zu verstehen. Meint Vollrath den kulturhistorischen Aspekt? Dafür spricht – entlang: der Gebrauch eines Wortes ist seine Bedeutung – das in beiden Sätzen gebrauchte Wort „Entwicklung", So orientieren sich etwa auch Roland Fischer und Günther Malle bei „Begriffsentwicklung" an der Geschichte der Mathematik [Fischer

/ Malle 1985, 150ff]. Oder meint er (auch) den ontogenetischen Aspekt? Sinn macht beides.

> Beides könnte und wird bildungsbedeutsam sein [...]. [Hischer 1996, 9]

*Bildung*sbedeutsam unter der Perspektive sowohl der Allgemein*bildung* als auch der Begriffs*bildung.* Für unseren Mathematikunterricht heißt das, dass Begriffsbildung unter den beiden Aspekten (ontogenetisch *und* kulturhistorisch) sowohl impliziter als auch expliziter Unterrichtsinhalt sein kann und soll.

Die Lernenden sollten im Mathematikunterricht über die in ihnen stattfindende Begriffsbildung genauso reflektieren und sich genauso dazu äußern können, auch in schriftlicher Form, wie zu der kulturhistorischen Begriffsbildung (die ihnen in inhaltlichen Zusammenhängen gegenüber treten sollte). Äußern können heißt hier: wir sollten den Erwerb dieser Fähigkeit zur Reflexion fordern und fördern und im Unterricht die Zeit und den Raum und damit die Gelegenheit zur Muße dazu zur Verfügung stellen.

In einem ersten Schritt kann dies, wie von Wilfried Herget (in der Tradition von Wagenschein) vielerorts propagiert, in Form von Aufsätzen über Inhalte des Mathematikunterrichts geschehen. Einerseits in „etwas anderen Aufgaben“ mit authentischem Bezug zur Wirklichkeit: an Hand von Zeitungsausschnitten mit fragwürdigen (d.h. des (Nach)fragens würdigen) mathematischen Argumentationen. Andererseits mit authentischem innermathematischem Bezug, etwa in Beantwortung der Fragen „Was ist eine negative Zahl?“ oder „Wozu brauchen wir negative Zahlen?“ – wie von Günter Schmidt (Stromberg) erfolgreich im Unterricht verwirklicht, in sinnvoller Ergänzung zum Rechnen mit negativen Zahlen. Nebenbei: solche Aufsätze ersetzen nicht Rechnen durch Schreiben, sondern betten Rechnen sinnhaft ein; hier wird Unterrichtszeit nicht für vermeintlich Unmathematisches geopfert, sondern vielversprechend investiert.

Es ist ein kleiner zweiter Schritt auch zur Begriffsbildung selbst als Thema vorzustoßen, einerseits die Stärken (und Schwächen) der Sprache Mathematik zu diskutieren, andererseits die Fragen „Wie ich lernte, was eine negative Zahl ist!“ (ontogenetischer Aspekt) oder „Wie die negativen Zahlen in die Mathematik kamen!“ (kulturhistorischer Aspekt) oder beides anzugehen. Wie wir reflektierende, nachdenkliche Fragen, die im Laufe des Unterrichts dann zu eigenen Fragen der Lernenden werden sollten und könnten, weiter systematisch ausdifferenzieren können, finden wir von Susanne Prediger begründet und exemplarisch an der Exponentialfunktion vorgeführt in [Prediger 2002]. Sie klammert dort allerdings den kulturhistorischen Aspekt aus.

Es gibt

> [...] immer wieder Bemühungen, die Schüler zum Schreiben über Mathematik zu bringen. Wer wie Gallin und Ruf einen Weg findet, dass sie [...] aufschreiben, welche Fragen sie besonders berührt, welche Ergebnisse sie beeindruckt haben, welche Erfahrungen für sie aber vielleicht auch schmerzhaft waren, kann ihnen helfen eine persönliche Beziehung zur Mathematik zu gewinnen und wird dabei selbst eine neue Dimension des Mathematikunterrichts kennen lernen. [Vollrath 2001, 151]

Reflektierende mathematische Aufsätze (auch über Aspekte der Begriffsbildung), gerade auch in Alltagssprache, sind darüber hinaus ein wertvoller Beitrag zum selbstgesteuerten Lernen, das notwendige Bedingung eigenständigen lebenslangen Lernens ist.

> Es ist unbestreitbar, dass die Tätigkeit des umgangssprachlichen Kommentierens und Analysierens mathematischer Aktivitäten zur Förderung des Verständnisses und zum Aufbau einer größeren mathematischen Kompetenz beiträgt. In diesem Sinne sind die Aufforderungen von Herget zu unterstützen, häufiger mathematische Aufsätze schreiben zu lassen. [Kaune 2001, 38]

Gerade dann, wenn über die Inhaltsebene hinaus auch auf metakognitive Fragen danach, welche Ideen zu einem Begriff geführt haben, Antworten gesucht werden, um die metakognitive Kompetenz der Schüler zu verstärken (vgl. [Kaune 2001, 39]): Mathematische Aufsätze!

Zurück zu Vollrath:

> Man sollte versuchen, ihnen den Eindruck zu vermitteln, dass diese Begriffsentwicklungen nicht abgeschlossen sind. [Vollrath 1994, 253]

Wir wollen es wieder für beide oben herausgelesenen Aspekte behaupten: Sowohl die ontogenetische als auch die kulturhistorische Begriffsbildung sind nie abgeschlossen. Jeder kann sich individuell weiterentwickeln; niemand kann wissen, wie sich die Mathematik in den nächsten 100 Jahren entwickeln wird.

Der Eindruck kann implizit vermittelt werden, in obigem Beispiel (zum Zahlbegriff) durch den weiteren Ausbau des Zahlensystems: die Lernenden lernen auch noch irrationale Zahlen kennen. Besser aber wird er explizit reflektiert. Es kann im Unterricht nachgezeichnet werden, wie Menschen durch den Auf- und Ausbau von Begriffen in Begriffssystemen sich die Möglichkeit gaben, die Phänomene in der Welt zu ordnen (s.u.), und wie der Erwerb dieser Begriffe und darüber hinaus der Fähigkeit zu reflektierender Begriffsbildung auch den Lernenden diese Möglichkeit schenkt.

Das epistemologische Dreieck

Bei Vollrath heißt es sinngemäß: „Die Begriffe bilden sich heraus“ (s.o.). Dazu kommen wir nun zurück. Aus der Sprachwissenschaft haben Rainer Bromme und Heinz Steinbring für die Didaktik der Mathematik das dort bewährte Werkzeug des epistemologischen Dreiecks übernommen. Wenn man Mathematik als Sprache zu lesen und zu sprechen bereit ist, ist dies durchaus naheliegend.

Begriff

Objekt **Symbol**

Mit dem epistemologischen Dreieck setzen wir Objekt (oder Ding), Zeichen und Begriff in Beziehung. Statt „Zeichen“ finden wir in der Didaktik der Mathematik dann auch den Bezeichner „Symbol“. Mit diesem Modell gehen wir

> [...] davon aus, daß nur die Zeichen- und die Gegenstands-Ebene der Beobachtung zugänglich sind, während sich die Begriffsebene nur indirekt beobachten lässt [...]. [Seeger 1990, 139]

Der Begriff ist in diesem Modell das stattfindende und zu beobachtende Zusammenspiel von Objekt und Zeichen. Der Begriff

> konstituiert sich somit in einem relationalen Gefüge von Objekt(en) (Anwendungskontext), Symbol (Struktur) und Begriffsinhalt. [Bromme / Steinbring 1990, 160]

Dies werden wir gleich noch etwas vertiefen, wenn wir „Begriffssprache“ und damit auch die Zeichen näher betrachten. Eins noch: Vom platonistischen Standpunkt aus, der die mathematischen Ideen als gegeben glaubt, stellt der Begriff diese Interaktion her, vom konstruktivistischen Standpunkt bilden die Interaktionen den Begriff (radikal: die Interaktion *ist* der Begriff).

> Es ist also von der Natur des Wissens her erforderlich, sowohl den formalen Kalkül, als auch die ausgezeichneten Anwendungen, und die Beziehung beider Ebenen im Unterricht zu vermitteln. [Bromme / Steinbring 1990, 162]

Hierin ist eine geeignete begriffsbildende Handlungsabsicht (vgl. Tietze oben) der Lehrkraft zu suchen und zu finden.

Wir haben auf unserer Suche nun auch das Wort (das Zeichen) „epistemologisch“ im Zusammenspiel mit dem Wort (dem Zeichen) „Begriff“ gefunden. Schauen wir uns nun jenes Wort und seinen Gebrauch in der Literatur an, stellen wir fest: epistemologisch bedeutet erkenntnistheoretisch und zwar bezüglich subjektiver oder aber auch intersubjektiver Erkenntnis. Ein solcher Doppelgebrauch kann leicht zu Missverständnissen führen, da hier ein Bezeichner für zwei verschiedene wenn auch nicht disjunkte Begriffe steht. Uns weist er allerdings auf den epistemologischen Doppelaspekt von Begriffsbildung hin, der sowohl unter ontogenetische als auch kulturhistorische Begriffsbildung fällt.

Begriffsschriften und Begriffssprache

Die Idee, eine Schrift zu entwickeln, die Begriffe verarbeitbar macht, ist alt. Sie findet sich bereits im 13. Jahrhundert bei dem katalanischen Philosophen Raimundus Lullus[1]. Auch Gottfried Wilhelm Leibniz, der Erfinder des Binärsystems, hat darüber nachgedacht. Beginnen wir aber auch hier wieder mit unserem Klassiker, mit Frege:

> In den abstrakteren Teilen der Wissenschaft macht sich immer aufs Neue der Mangel eines Mittels fühlbar, Missverständnisse bei anderen und im eigenen Denken zu vermeiden. Beide haben ihre Ursache in der Unvollkommenheit der Sprache. [...] Wenn wir aber das Zeichen einer Vorstellung hervorbringen, [...] so schaffen wir einen festen Mittelpunkt, um den sich Vorstellungen sammeln. Von diesen wählen wir nun wieder eine aus, um ihr Zeichen hervorzubringen. So dringen wir Schritt für Schritt in die Welt unserer Vorstellungen ein und bewegen uns darin nach belieben [...]. [Frege 1882, 89f]

Wichtig ist für Frege also bei einer Begriffssprache und den in dieser verwendeten Zeichen die Unmissverständlichkeit. Haben wir geeignete Zeichen an der Hand, bei denen Darstellung und Vorstellung (möglichst)

[1] Für diesen Hinweis danke ich Hans Schupp.

eineindeutig verbunden sind, können wir diese zur weiteren Begriffsbildung nutzen. Dieser Prozess setzt sich iterativ fort und führt über die Konstruktion von Zeichenhierarchien zur Konstruktion von Begriffshierarchien. Diese Vorstellung von Begriffshierarchien hat Parallelen in der Lernpsychologie nach Ausubel, der Begriffe in Begriffshierarchien gespeichert denkt (vgl. etwa [Straka / Macke 1979, Lehrtext 7]; in seiner Sprache sagen wir hier gerade, dass es eine korrelative Subsumtion zwischen unserer und seiner Vorstellung von Begriffshierarchien gibt.)

Beispiele für Zeichen sind die Symbole unserer mathematischen Formelsprache (etwa mit der uns als Kalkül dienenden Struktur „Körperaxiome"), aber auch die Objekte unserer Geometrie (etwa mit „Konstruktion mit Zirkel und Lineal"), die von den alten Griechen in den Sand gezeichnet und von uns durch die Neuen Medien zu dynamischem Leben erweckt wurden. Und nicht zuletzt natürlich die Worte unserer gesprochenen Sprache.

Darstellung und Vorstellung

Zeichen sind immer nur Darstellungen von Vorstellungen. Die Darstellung, etwa eines Dreiecks, mit Bleistift auf Papier oder mit Kreide an die Tafel oder mit Maus in den Bildschirm gezeichnet, ist nicht gleichzusetzen mit der mathematischen Vorstellung, die wir uns davon machen. Sie ist immer nur eine Abbildung unserer Vorstellung in die Wirklichkeit. Das Zeichen „Dreieck" kann in weitere Begriffsentwicklungen eingebracht werden, wenn der Lernende von seiner Zeichnung so weit zu einem Zeichen zu abstrahieren in der Lage ist, dass er darin die ideale Vorstellung eines Dreiecks sieht.

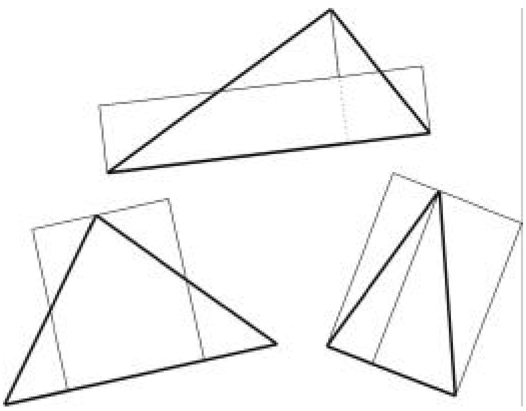


Abbildung 1

Betrachten wir das Beispiel in Abbildung 1, das wir [Vollrath 2001, 86] entnehmen, wo es zur Illustration gestaltpsychologischer Zugänge zur Beweisfindung, als Suche nach der guten Gestalt, verwendet wird.

In unseren Formelzeichen sieht es so aus:

$$A = \frac{g}{2} h = \frac{gh}{2} = g\,\frac{h}{2}$$

Wir sehen hier verschiedene Zeichen (visuelle und formale) zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks. In diesen Zeichen sind verschiedene Beweisideen noch enthalten: Der Flächeninhalt ist das Produkt der Hälfte der Grundseite mit der Höhe bzw. die Hälfte des Produkts aus Grundseite und Höhe bzw. das Produkt der Grundseite mit der Hälfte der Höhe. Dies steht zunächst einmal der formalen Assoziativität im Weg, ganz zu schweigen von der Kommutativität. Erst wenn der (höhere) Begriff Flächeninhalt erworben ist, erst dann sind die formalen Terme wirklich gleich und das Symbol für Flächeninhalt steht weiteren höheren Begriffsbildungen zur Verfügung.

Wir können uns auch diese Situation wieder mit dem epistemologischen Dreieck veranschaulichen, von dem wir inzwischen über seine (symbolische) Darstellung (und deren Anwendung auf die von uns betrachteten Objekte) eine Vorstellung erworben haben. Der Begriff vermittelt hier nun zwischen der Darstellung (als Objekt im epistemologischen Dreieck) und der Vorstellung (als Symbol dort), zwischen der externen und internen Repräsentation, bis zur begrifflichen Identifikation von Darstellung und Vorstellung. Dieser Teil der Begriffsbildung ist nicht direkt zu beobachten.

Unsere Vorstellungen sind von den von uns (individuell) bevorzugten Darstellungen abhängig. Mit „Nimm-Stellung-Aufgaben" zu Vorstellungen und Fehlvorstellungen kann dies zum Thema eines an Begriffsbildung interessierten, diskursiv reflektierenden Mathematikunterrichts werden. Siehe dazu [Kaune 2001, 44f].

Subjektive und intersubjektive Begriffsbildung

Frege hat für uns oben den psychologischen Aspekt der Begriffsbildung ins Spiel gebracht. Was sagt die heutige Lernpsychologie zur Begriffsbildung? Dort finden wir die folgende Unterscheidung (vgl. [Edelmann 1995, 29f.]):

Klassische Theorie:
Logische Struktur Kombination der kritischen Attribute
Prototypentheorie:
Begriffe werden abgespeichert in Form von typischen Objekten

Wir können eine Parallele ziehen: Diese Unterscheidung ist auch die von Mathematik als Produkt, in dem Begriffe durch die klare Beschreibung ihrer kritischen Attribute bestimmt sind, und Mathematik als Prozess, in dem Begriffe abgrenzend durch Beispiele und Gegenbeispiele bestimmt werden.

Jeder weiß, dass ein Dreieck drei Ecken hat, und erkennt ein solches. Aber keiner zählt dazu die Ecken eines Dreiecks, um es über seine logische Struktur als Dreieck zu bestimmen. (Und: Wir können oben auch das epistemologische Dreieck *sehen*, ohne dass ein Dreieck eingezeichnet ist.)

Nebenbei zeigt sich hier auch der kulturhistorische Aspekt von Begriffsbildung am Begriff „Begriffsbildung" in der Lernpsychologie. Die klassische Theorie ist noch stark von den Vorstellungen der Logiker geprägt, die Begriffe durch Begriffsinhalt und Begriffsumfang beschreiben und den Begriffsinhalt, also Definiens und Definiendum, in den Vordergrund stellen. Die neuere Prototypentheorie hat sich nun von diesem historischen Rahmen gelöst.

> Wissen ist in jedem Fall subjektiv, [...] strukturell organisiert [...] eine mentale Konstruktion. [Edelmann 1995, 22]

„Wissen ist subjektiv" kann für uns nur heißen, die Modelle der Psychologie beschreiben nur das subjektive, in den Individuen vorhandene Wissen. Intersubjektives Wissen gibt es dennoch auch, kann aber von den Modellen, die die kognitionspsychologische Struktur des Wissens beschreiben nicht erfasst werden. Der Preis für die Genauigkeit eines Modells ist immer die Einschränkung seiner Reichweite.

Wissen ist in den Modellen der Lernpsychologie in Begriffshierarchien strukturiert (vgl. Ausubel und Gagné nach [Reinmann-Rothmeier / Mandl 2001, 611f]) und muss von den Lernenden in Eigenleistung aktiv erarbeitet werden [Reinmann-Rothmeier / Mandl 2001, 626]. Auf der anderen Seite finden wir aber auch:

> „Wissen" kann [...] als Produkt eines Gemeinwesens, einer „Sprachgemeinschaft" usw. unter epistemologischen Aspekten betrachtet werden. [Seeger 1990, 130]

Das heißt also auch intersubjektiv. Dazu benötigen wir dann allerdings Modelle aus der Soziologie.

Gewollte Begriffsbildung

> Wir sehen theoretische Begriffe außerdem als den Ausdruck bestimmter Sichtweisen von Menschen, als <u>soziale kommunikative Konstrukte</u> an. [Fischer / Malle 1985, 151]

Auch der in der vorliegenden Arbeit gebildete Begriff von Begriffsbildung versteht sich als Diskussionsbeitrag, der die Sichtweise der zitierten Autoren in einer virtuellen Kommunikation fasst.

> Sie ergeben sich nicht zwangsläufig aus der Natur, unserer Wahrnehmung ...

(Der Begriff „Unendlichkeit" ist hier ein gutes Beispiel. Wie ist es mit dem Begriff „Begriff"?)

> ..., sie sind hingegen Ausdruck eines bestimmten Wollens; Ausdruck dessen, dass uns ein gewisser Gesichtpunkt wichtig ist. [...] Es ist in der Regel natürlich nicht der Wille eines einzelnen Menschen, der hier maßgebend ist, es ist das gemeinsame (teilweise unbewusste) Bestreben von Mathematikern, die als Mitglieder der Gesellschaft in einer bestimmten historischen Situation tätig sind. [Fischer / Malle 1985, 151]

Ein solches Wollen formuliert Hans Freudenthal wie folgt:

> Unsere mathematischen Begriffe, Strukturen und Vorstellungen sind erfunden worden als Werkzeuge, um die [...] Phänomene der Welt zu ordnen. [PISA 2000, 142]

Diese Feststellung kann uns als normativer, diskussionswürdiger und –fähiger Standard dienen. Sie liegt auch dem Begriff der Mathematical Literacy der PISA-Studie zu Grunde.

2 Ein systematisierendes Modell

Das Phänomen „Begriffsbildung" aus den Fundstücken aus der Literatur zusammenpuzzelnd können wir ordnend das folgende Bild festhalten: Begriffsbildung zeigt sich auf zwei unterschiedenen, wenngleich miteinander verwobenen Ebenen.

Die hier getroffene Begriffsbildung von Begriffsbildung ist Ausdruck (m)eines Wollens, eine überschaubare Struktur in die Phänomene zu bringen.

> Wichtige Begriffe stellen gewissermaßen Anfangspunkte von Theorien dar und werden ihrerseits durch die Theorien erklärt. Dabei ist es eine nützliche Sichtweise, solche Begriffe als den Ausdruck von Beziehungen im Rahmen eines Netzwerks von Beziehungen, eben der Theorie, zu sehen. „Theoretische Begriffe“ der Mathematik, wie wir diese Begriffe auch nennen wollen, stehen für wesentliche Relationen und entstehen nicht bloß durch Weglassen von Eigenschaften (sogenannte „empirische Abstraktion“) aus anderen Begriffen. Die Entfaltung dieser im Begriff angelegten wesentlichen Relationen führt zu jenem Netzwerk, das wir Theorie nennen. [Fischer / Malle 1985, 151]

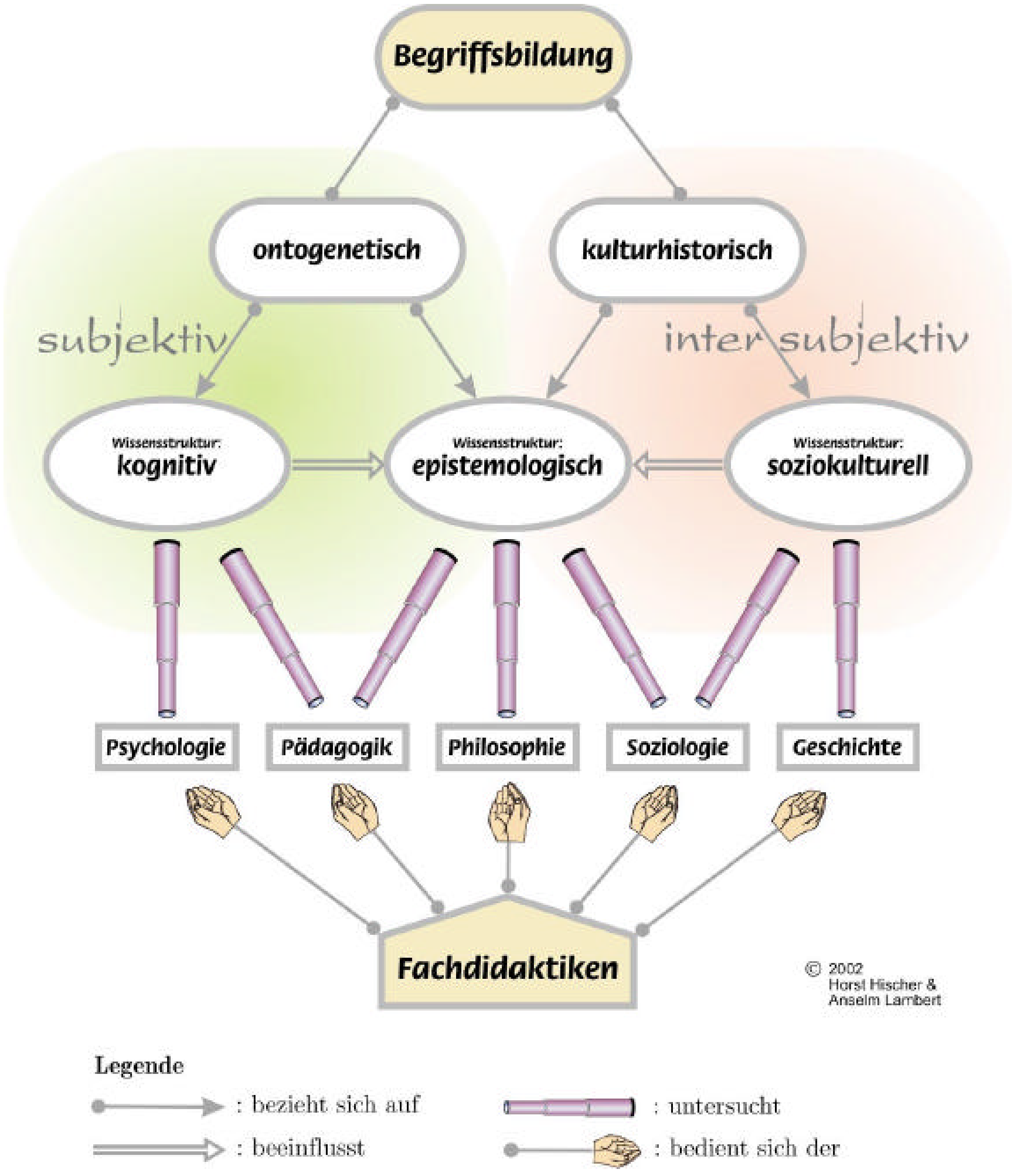


Abbildung 2 [Hischer / Lambert 2002, 145]

3 Erste Anwendungen des Modells

Als reiner Mathematiker könnte ich mich nun zufrieden zurücklehnen und sagen: „Ich habe die Phänomene der Welt geordnet in einem schönen, symmetrischen Diagramm, das die (von mir oder: uns?) betrachteten Aspekte strukturiert.“

Als Didaktiker muss ich (oder: müssen wir?) aber über den theoretischen Erkenntnisfortschritt hinaus auch den praxisrelevanten suchen.

3.1 Begriffsbildung im Mathematikunterricht aus kognitionspsychologischer Sicht

Wir hatten oben schon angesprochen, dass die beiden Modelle der kognitiven Struktur bei der Begriffsbildung in den Begriffsbildenden und den Begriffsgebildeten mit wichtigen Phasen mathematischer Arbeit synchronisieren.

Der Begriff als Produkt rigoroser Mathematik ist immer strikt durch seine charakterisierenden Eigenschaften bestimmt, also ein Begriff klassischer Bauart. Die Frage Wittgensteins, ob ein verschwommener Begriff denn ein Begriff sei, beantwortet die moderne Mathematik des 20. Jahrhunderts mit einem eindeutigen, lauten „Nein!“. Selbst die Begriffe der Fuzzy Theorie, der mathematischen Wissenschaft von der Vagheit, sind strenge mathematische Begriffe.

Im Prozess der Mathematik hingegen arbeiten viele Mathematiker mit prototypischen Repräsentanten der von Ihnen untersuchten und benutzten Begriffe. Die später ausgeschärften Begriffe entstehen im Prozess Mathematik durch die implizite oder explizite Unterscheidung von Beispielen und Gegenbeispielen. Ein Begriff ist das, was er nicht nicht ist. Dies ist auch ein Weg für den Mathematikunterricht. Siehe dazu auch [Hischer / Lambert 2002, S.146ff: 13.3 Begriffsbildung im Unterricht]. Die Didaktik hat sich also um geeignete diskriminante Musterprototypen zu bemühen, die den Lernenden einen Begriff nahe bringen können.

3.2 Zugänge zur Mathematik

Legen wir unser obiges Modell von Begriffsbildung zu Grunde, so behaupten wir, dass der ontogenetische Aspekt von Begriffsbildung in der kognitiven und epistemologischen Wissensstruktur der Lernenden zu suchen ist. Die Wissenschaften, derer sich die Fachdidaktik hier bedienen kann, sind die Psychologie in Form der Kognitionspsychologie und die Philosophie und die Soziologie in Form der Epistemologie.

Kognitive Mathematik

Am Institut für Kognitive Mathematik in Osnabrück untersucht man die Zugänge zur Mathematik im Rahmen eines kognitionspsychologischen Paradigmas. Die dortigen Untersuchungen führten zu folgender (hier stark verkürzten) Begriffsbildung. Es kann zwischen zwei Ausprägungen der kognitiven Struktur unterschieden werden.

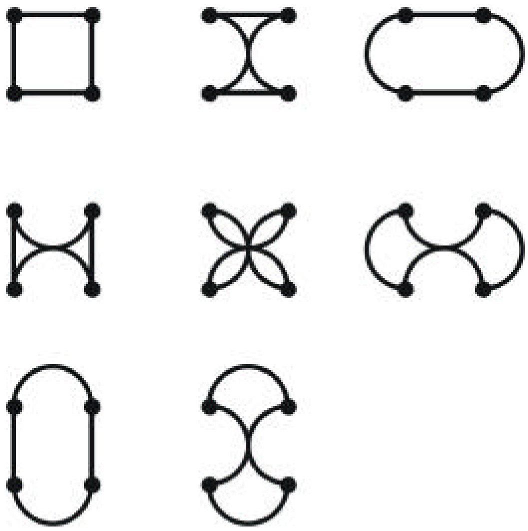
> Wir unterscheiden bei einem Menschen, der sich in seiner Umwelt mittels Kognition Orientierung verschafft, zwischen dem Einsatz einer prädikativen und einer funktionalen kognitiven Struktur. Wir vermuten, dass nicht beide Anteile bei allen Menschen gleich stark ausgeprägt sind. [Schwank 1996, 171]

Diese Strukturen lassen sich wie folgt skizzieren (vgl. [Schwank 1996, 171] und [IKM]):

Prädikative Struktur Auf Beziehungsgeflechte und Ordnungsprinzipien ausgerichtet Feststellung von Eigenschaften und Strukturen **Begriffe sind Relationen** zwischen mathematischen Gegenständen.
Funktionale Struktur Denken in Wirkungsweisen und Handlungen Organisation von Prozessen **Begriffe sind Operationen** zwischen mathematischen Gegenständen.

> Daraus resultiert eine unterschiedliche Haltung in Anbetracht eines Problems. (Wir sprechen nur in solchen Fällen von einem Problem, in denen die Lösung nicht (einfach) durch Anwendung eines erworbenen Schemas hergestellt werden kann.)
>
> Bei der Sichtung eines Problems wird eine unterschiedliche „Brille“ aufgesetzt und so vom Typ her unterschiedliche Akzente gesetzt [...] Die Art des Zurechtlegens des Problems beeinflusst die Begriffsbildung [...]. [Schwank 1996, 171]

Inge Schwank hat Tests zur Bestimmung der individuellen kognitiven Struktur entwickelt [QuaDiPf]:



In dem gegebenen Bild fehlt unten rechts ein Element.

Versuchen Sie sich selbst und finden Sie eine möglichst sinnvolle Ergänzung.

Achten Sie dabei auf Ihre Begründung, warum Sie von Ihrer Lösungsfigur überzeugt sind.

Abbildung 3

Eine Einordnung ihrer Lösung zu der hier gestellten Aufgabe finden Sie in [IKM], weitere erläuterte Beispiele in [Schwank 1996, 178] und [Schwank 1999, 94].

Die rigorose, moderne Mathematik des 20. Jahrhunderts ist prädikativ. Diese Betonung erklang mit dem Einzug der Neuen Mathematik und der damit einschwingenden Strengewelle auch in der Schule und hallt heute noch dort nach.

> Nach Maier/Schweiger pflegt die im 20. Jh. favorisierte mathematische Fachsprache einen Verlautbarungsstil, der sich auch im Vergleich zu anderen Fachsprachen besonders zeitlos, objektivistisch, substantivistisch und redundanzarm-esoterisch gibt. [...] Inzwischen zeigen sich jedoch in der Fachwissenschaft selbst starke Tendenzen zu anwendungsorientiert „robusten“ Mathematikauffassungen, die [...] nach stärker prozessualen Ausdrucks- und Denkweisen verlangen [...]. [Führer 2002, 178].

Es gilt also: Je nach Kontext ist die heutige Mathematik zu Beginn des 21. Jahrhunderts prädikativ oder funktional. Und: Je nach Kontext ist Rigorosität oder Robustheit das Kriterium der Wahrheitsfindung. In der reinen Mathematik führt kein Weg an strenger Beweisführung vorbei, sonst ist es keine. In einem anwendungsbezogenen, mathematischen Modellierungsprozess, in dem die wirkliche Situation verarbeitbar zurechtgestutzt wird, dann in einem mathematischen Modell verarbeitet wird und die so gewonnenen Ergebnisse interpretiert werden, ist entscheidend, dass das Ergebnis einer Überprüfung an der Wirklichkeit, seiner Validierung, standhält (vgl. [Schupp 1988]).

Die heutige Mathematik lebt von Ihrer sprachlichen Vielfalt. Dies hat auch für den Mathematikunterricht Folgen, auch für Idealtypen reiner Mathematik:

> Die Schulgeometrie sollte die dynamischeren Möglichkeiten der Alltagssprache auch begrifflich nutzen. [Führer 2002, 178]

Und die dynamischen Möglichkeiten eines Dynamischen Geometrie Systems als eines visuellen und funktionalen Werkzeugs. Der Zugmodus etwa verlangt auch funktionales Denken in Wirkungsweisen und Handlungen. Eine solche dynamische Geometrie ist dadurch eine andere, als die von den alten Griechen im Sand fixierte, Strukturen beschreibende; sie ist nicht einfach ein Neuer Weg zu alten Zielen. In Ergänzung zur klassischen Geometrie bereichert sie gerade deshalb den Unterricht.

Peter Bender stellt fest:

> DGS und CAS stiften Sinn durch Konkretisierung und Visualisierung von abstrakten Begriffen: Viele Begriffe lassen sich durch ein Tafelbild nur unzureichend veranschaulichen, vor allem jene, die sich aus Parameteränderungen ergeben. [Bender / Schwill 1995]

Dem ist in soweit zuzustimmen, als wir nun auf einfacherem Weg viele Beispiele (und Gegenbeispiele), die prototypisches Begriffslernen ermöglichen, erzeugen können. Offen ist hingegen die Frage, wie Lernende in Abhängigkeit von ihrer kognitiven Präferenz mit DGS umgehen. Die Unterscheidung prädikative vs. funktionale kognitive Struktur legt nahe, dass vor allem funktionale Lernende von diesem beweglichen Werkzeug profitieren, dass hingegen für prädikative Lernende eher eine Sammlung von Einzelbildern die Beziehungsgeflechte offenbart. Es wäre zu erwarten, dass dies sich auch in unterschiedlichem Umgang mit DGS zeigt.

Und da wir gerade bei bewegten Bildern sind: Wir müssen die Frage stellen, welche Lernenden von animierten Funktionsplots profitieren und welche aber mehr von reichhaltigen Einzelbildsammlungen? Oder anders: Wer versteht konkretisierte und visualisierte Parameteränderungen besser im Fluss und wer Schritt für Schritt?

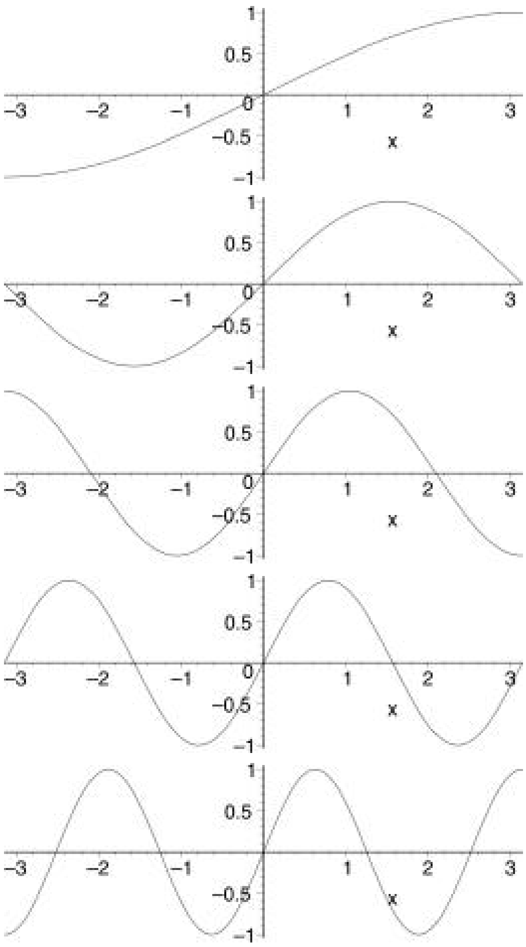


Abbildung 4 a-e

Nur eins scheint klar: Offen sichtlich erhöht ein visueller Zugang zur Mathematik den Nutzen eines visuellen Werkzeugs.

Denkstile: Epistemologien von Mathematikerinnen und Mathematikern

Leone Burton hat 70 professionelle, forschende Mathematikerinnen und Mathematiker sowohl aus der reinen als auch aus der angewandten Mathematik interviewt, um ihre Zugänge zur Mathematik zu erforschen [Burton 1999]. Aufgrund ihrer Interviews unterscheidet sie die folgenden Denkstile:

Stil:	**Denken:**	**Anteil:**
Visual	in Bildern, oft dynamisch	66%
Analytic	symbolisch, formalistisch	37%
Conceptual	in Ideen, klassifizierend	47%

60 % der Interviewten haben zwei der Zugänge, 36 % einen und 4 % alle drei. Ich nenne diese Zugänge im folgenden *visuell, formal, konzeptuell.* Veranschaulichen wir sie uns an einem Beispiel: Gegeben sind eine Gerade, zwei Punkte auf dieser Geraden und zwei sich schneidende Kreise um diese Punkte.

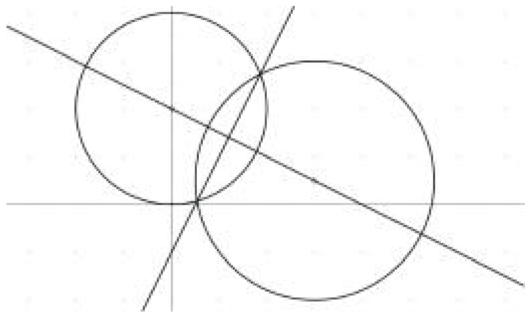


Abbildung 5

Welche Steigung hat die Gerade durch die Schnittpunkte der Kreise?

Lösungen:

1. **formal:** Aufstellen der Kreisgleichungen, Berechnung der Schnittpunkte, Berechnung der Geradengleichung. (Dies ist sehr aufwändig, besonders wenn keine konkreten Kreise gegeben sind).
2. **konzeptuell:** Symmetrie ausnutzen: die Kreise sind symmetrisch, damit sind auch die Schnittpunkte und die durch diese induzierte Gerade symmetrisch zur gegebenen Gerade, also sind die Geraden orthogonal. (Jetzt ist der nötige formale Aufwand zur Berechnung stark reduziert).
3. **visuell:** Das zu beobachtende Phänomen ist: die Geraden stehen senkrecht auf einander. (Das ist hier die geometrische Invariante unter einer Kongruenzabbildung: das Koordinatensystem und damit auch die Steigung sind uninteressant!)

Wir sehen weiter: Auch die (individuell interessierende) Fragestellung hängt vom (individuellen) Denkstil ab.

Von den hier beschriebenen Dialekten der Sprache Mathematik hat nur der formale die Präzision und Reichweite hervorgebracht, die die moderne Mathematik für ihren rigorosen Aufbau benötigt. Aber auch die anderen beiden (oder die möglichen Kombinationen) haben in der Geschichte der Mathematik große Leistungen beim Ordnen der Phänomene ermöglicht und tragen hier zu elegant(er)en (?) Lösungen bei. Im Unterricht sollten die Zugänge nebeneinander und miteinander verwendet werden, mit dem formalen Zugang als primus inter pares.

Burton beschreibt als weitere Dimensionen mathematischen Tuns in der Praxis neben dem Denkstil u.a. Schönheit oder Intuition und Einsicht.

Felix Klein hatte bereits intuitiv eine ähnliche Unterteilung der Denkstile wie Burton vorgeschlagen. Er nannte die Typen Geometer (der sieht, was er denkt), Analytiker (der mit der Formel) und Philosophen (vgl. [Borromeo Ferri 2002, 124]).

Eine weitere Beschreibung von Denkstilen liefert der Mathematiker und Psychologe Jacques Hadamard [Hadamard 1954]. Er unterscheidet einen visuellen und einen analytischen Zugang und stellt als eine wichtige Fähigkeit eines Mathematikers heraus, flexibel zwischen den beiden wechseln zu können.

Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

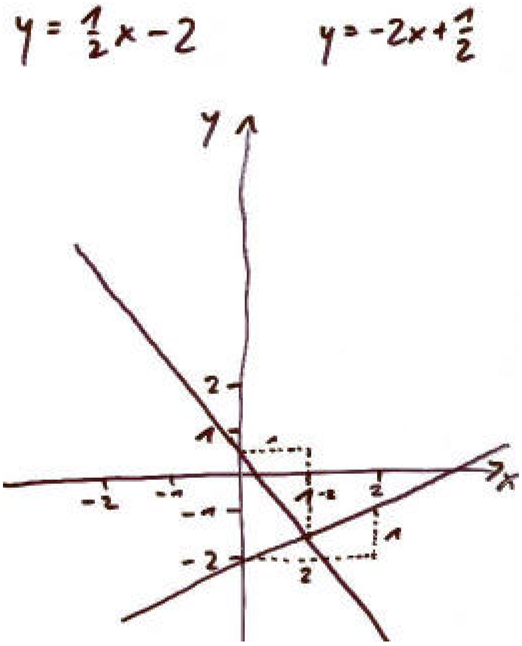


Abbildung 6

Je nach Sichtweise sind zwei Gleichungen gegeben oder zwei Geraden. Der Erwerb der Fähigkeit, zwischen beiden flexibel wechseln zu können, setzt voraus, dass im Unterricht hinreichend oft beide Sichtweisen aufeinander bezogen thematisiert werden. Das Bestimmen des Schnittpunkts der beiden Geraden oder der Lösung des Gleichungssystems ist mathematisch das Selbe in verschiedenen Verpackungen.

Dass die beiden Geraden senkrecht aufeinander stehen, sehen (sehr gute) Visualisten in der obigen Zeichnung, Formalisten lesen es in den Formeln. Für einen formalen Zugang ist „senkrecht aufeinander stehen“ ein eher künstlicher Begriff. Hier liegt dann etwa die Frage nach der Punktmenge näher, die dadurch beschrieben ist, dass sie Lösungsmenge der Gleichungssysteme ist, die dadurch gegeben sind, dass wir in obigem Gleichungssystem jede 2 durch eine Variable ersetzen:

$$y = \frac{1}{a}x - a \qquad y = -ax + \frac{1}{a}$$

Für den Visualisten ist wiederum die Frage nach der Gestalt (dem geometrischen Ort) ebendieser Punktmenge in der Ebene interessant.

Rita Borromeo Ferri untersucht diese Denkstile bei 15-16 jährigen Schülerinnen und Schülern und beginnt eine empirisch begründete Beschreibung zu entwickeln [Borromeo Ferri 2002].

Ein zweidimensionales Modell ...

Fassen wir obige Erkenntnisse zu mathematischen Denkstilen zusammen, erhalten wir ein zweidimensionales, idealtypisches Modell möglicher Zugänge zur Mathematik:

	Prädikativ	**Funktional**
Formal		
Visuell		
Konzeptuell		

... und seine Konsequenzen

Eine empirische Erhebung der Anteile für die einzelnen Zellen dieser Matrix steht noch aus. Nichtsdestotrotz führt uns dieses Modell zu einer wichtigen Einsicht: Um auf die Zugänge der Lernenden zur Mathematik eingehen zu können, muss die Lehrkraft diese und ihren eigenen Zugang kennen.[2]

So schreibt Johann Sjuts zu den hier übernommenen kognitionspsychologischen Unterscheidungen der Osnabrücker Schule:

> Lehraktivitäten müssen sich folglich an den vorhandenen kognitiven Strukturen orientieren. Deren Modifizierungs- und Differentiationspotenzial bildet neben der stoffbezogenen Frage, welche externen Repräsentationen (Darstellungen) zu er-

[2] Ich ordne mich zum einen als funktional zum anderen als visueller Konzeptualist in das Schema ein.

> wünschten internen Repräsentationen (Vorstellungen) führen können bzw. führen, die wesentliche Größe. [Sjuts 2002, 468]

Analoges gilt für die epistemologisch unterschiedenen Zugänge.

> Jugendliche, die über andere mathematische Denkstile verfügen als die betreffende Lehrperson haben demnach größere Schwierigkeiten mit dem Unterricht als Jugendliche, die über Denkstile verfügen, die denen der Lehrperson ähnlich sind. [Borromeo Ferri 2002]

Zur Diskussion

Die ihr nicht eigenen, oben beschriebenen Zugänge muss die Lehrkraft lernen, um sich verständigen zu können, auch wenn diese Dialekte nie zu ihrer Muttersprache werden. Auch die Lernenden sollten versuchen, sich die ihnen nicht eigenen Zugänge der Mitlernenden zu erarbeiten. Dies gilt besonders für den modernen, prädikativ-formalen. Aber dort, wo dieser nicht erlernt wird, mit den anderen eigenen Zugängen aber Phänomene geordnet und Probleme gelöst werden, wird auch Mathematik gemacht, sind diese Fähigkeiten also anzuerkennen.

Die klassische Analysis war auch schon sehr leistungsfähig, bevor ihr Cauchy und Weierstrass ihre heutige formale Strenge verordneten, die Algebra löste konkrete Gleichungen, bevor sie in ihrer modernen Form nach abstrakten Strukturen forschte.

Denkstile sind über die aus ihnen resultierenden Begriffe auch Ausdruck bestimmter Sichtweisen und eines bestimmten Wollens. Die analytische und die synthetische Geometrie etwa drücken ein Interesse an unterschiedlichen geometrischen Phänomenen aus und gehen so verschiedenen Fragen nach. Die Vielfalt der Denkstile trägt wesentlich zur Reichhaltigkeit auch der modernen Mathematik des 20.Jahrhunderts in ihrer kulturhistorischen Tradition – von der Sie sich ja nicht löste, sondern die Sie unter einer pointierten Sichtweise fortführte – bei.

Wie die Untersuchung von Leone Burton zeigt, werden die drei beschriebenen, epistemologisch unterschiedenen Denkstile auch heute immer noch im Prozess Mathematik zum Machen von aktueller Mathematik verwendet, auch wenn wir im Produkt Mathematik in der Regel nur noch den formalen wiederfinden.

In der kulturhistorischen Tradition, in der die heutige Mathematik steht, ist es legitim den Lernenden ihren eigenen Zugang zur Problemlösung und zum Ordnen der Phänomene zu lassen, wenn sie damit mehr erreichen können als mit einem unverstandenen ihnen fremden. Eine wissenschaftliche Arbeit muss als Baustein im Gebäude der modernen Mathematik in der prädikativen und formalen Hochsprache als der derzeitigen Sprache innerwissenschaftlicher Kommunikation gefasst sein, eine Problemlösung einer Aufgabe in der Schule (oder im Leben) kann sich hingegen auch der Dialekte bedienen, solange sie begründbar bleibt. Letzteres – nicht ihre formale Strenge (diese sollte dem Problem angepasst werden) – ist *die* besondere Qualität der Sprache Mathematik. Die Kommunikation mit Anderen, die möglicherweise einen anderen Dialekt sprechen, ist ein weiterer wichtiger – aber eben nicht unbedingt zur Problemlösefähigkeit notwendiger – allgemeinbildender Schritt.

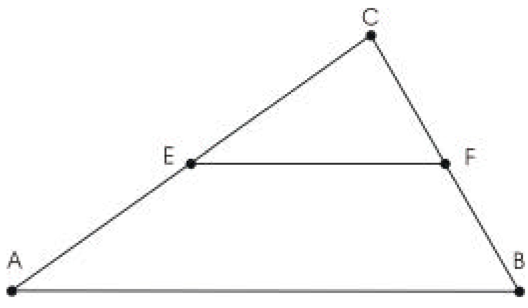
Und zum Abschluss: eine PISA-Aufgabe

Die Aufgaben des internationalen PISA-Tests wurden für den nationalen Test um sogenannte innermathematische ergänzt.

> Es sind der Inhalt der Grundfläche einer Pyramide ([...]) und die Länge der Mittellinie eines Dreiecks (Frage „Dreieck“), beides jeweils als rein mathematische Gegenstände vorgestellt. [PISA 2000, 151]

Betrachten wir die „rein mathematische“ Dreiecksaufgabe:

Dreieck: Die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC ist 6 cm lang. Es werden die Mittelpunkte E und F der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eingezeichnet. Wie lang ist $\overline{EF}$?



[PISA 2000, 152]

Abbildung 7

Dies ist keine (!) Aufgabe der reinen, modernen, prädikativen Mathematik. Warum?: Einzeichnen ist eine (funktionale) Handlung, die Mittelpunkte der Seiten sind uns aber doch mit den Seiten bereits gegeben, wir als moderne Prädikative können sie nur noch benennen. Sie müssen nicht mehr von uns eingezeichnet werden. Strenge beiseite, wichtiger ist: auch diese auf den ersten Blick eher konvergente Aufgabe ermöglicht eine bunte Vielfalt unterschiedlichster Lösungswege:

1. Intuitiv
2. Messen
3. Abrufen von Satzwissen: „Die Mitenparallele im Dreieck ...“
4. Strahlensatz
5. Hineinsehen von kongruenten Dreiecken
6. Analytisch (wird man in diesem Beispiel wohl vermeiden):
    a. Koordinatendarstellung
    b. Vektorzüge

Ein derart buntes Spektrum an Lösungswegen (zu einer praktisch rein mathematischen Aufgabe) ermöglicht und verlangt eine umfassende Diskussion – auch gerade zum Einüben der Kommunikation und Verständigung (allgemeinbildend!) zwischen den individuellen Dialekten der Sprache Mathematik – im Unterricht und entsprechend ganzheitliche Beurteilungen und Bewertungen der Lösungen in einer Klassenarbeit.

Das unaufkündbare Sprachspiel, das unsere Mathematik zur Mathematik macht, ist einzig die objektive Begründbarkeit der Lösung.

Zur vorliegenden Arbeit

In der vorgetragenen Arbeit wird die Systematisierung der in der Literatur zu findenden Beiträge zur Begriffsbildung weiterverfolgt, wie sie von Horst Hischer begonnen wurde. Die in [Hischer 1996] zu findenden Gedanken, von denen auch die vorliegende Arbeit profitiert, dienten als Keimzelle für das hier vorgestellte, vervollständigte Modell zur Begriffsbildung (siehe dazu auch [Hischer / Lambert 2002]). Das durch dieses fundierte Zugangs-Modell wird hier so zum ersten Mal präsentiert.

Ich danke Uwe Peters für seine fruchtbar-kritische Durchsicht des Manusskripts, durch die die Chance erhöht wurde, dass über meine hier vor Ihnen liegende Darstellung meiner Vorstellung von Begiffsbildung bei Ihnen eine meiner Vorstellung zumindest ähnliche erzeugt werden kann.

Literatur

[Arbeitskreis 1996] Hischer, Horst und Weiß, Michael (Hrsg.) *Rechenfertigkeit und Begriffsbildung. Zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. Bericht über die 13. Arbeitskreistagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM vom 22.-25. September 1995* Franzbecker 1996

[Bender / Schwill 1995] Bender, Peter und Schwill, Andreas *Stiften Computeralgebrasysteme Sinn? – Zusammenfassung und Einschätzung der Podiums- und Plenumsdiskussion.* In [Arbeitskreis 1995] S.50-55

[Beiträge 2002] *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002* hrsg. von Peschek, Werner für die GDM. Franzbecker 2002

[Borromeo Ferri 2002] Borromeo Ferri, Rita*: Erste Ergebnisse einer empirischen Studie zu mathematischen Denkstilen von Schülerinnen und Schülern der 9. und 10. Klasse.* In: [Beiträge 2002] S.123-126

[Bromme / Steinbring 1990] Bromme, Rainer und Steinbring, Heinz: *Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozeß.* In: Bromme, Heinz und Seeger, Falk und Steinbring, Heinz: *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* Aulis-Verlag Deubner 1990 S.151-230

[Burton 1999] Burton, Leone: *Mathematics and their epistemologies – and the learning of mathematics.* In: Schwank, Inge (Hrsg.): *European Research in Mathematics Education Vol. 1 Proceedings* FMD 1999 S. 90-105

[Edelmann 1995] Edelmann, Walter: *Begriffsbildung und Wissenserwerb aus lernpsychologischer Sicht.* In: [Arbeitskreis 1995] S.22-30

[Fischer / Malle 1985] Fischer, Roland und Malle, Günther unter Mitarbeit von Bürger, Heinrich: *Mensch und Mathematik Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* BI 1985

[Frege 1882] Frege, Gottlob *Über die wissenschaftliche Berichtigung einer Begriffsschrift.* In: [Patzig 1962]

[Frege 1892] Frege, Gottlob *Begriff und Gegenstand.* In: [Patzig 1962]

[Hadamard 1954] Hadamard, Jacques *The Psychology of invention in the mathematical field.* Dover 1954

[Hischer 1996] In [Arbeitskreis 1996] S.8-19

[Hischer / Lambert 2002] Hischer, Horst und Lambert, Anselm *Begriffsbildung und Computeralgebrasysteme.* In Hischer, Horst: *Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht.* Franzbecker 2002 S.138-166

[IKM] Schwank, Inge *Kognitive Mathematik, Eine Einführung* Unter: www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks.html

[Kaune 2001] Kaune, Christa Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe“. MU 47(1) 2001

[Patzig 1962] Patzig, Günther (Hrsg.) *Gottlob Frege – Funktion Begriff und Bedeutung (Fünf logische Studien).* Vandenhoeck & Ruprecht 1962

[PISA 2000] Klieme, Eckhard und Neubrand, Michael und Lüdtke, Oliver *Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse.* In: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.) *PISA 2000 Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schüler im internationalen Vergleich* Leske + Budrich 2001

[Prediger 2002] Prediger, Susanne *Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht.* In: [Beiträge 2002] S. 399-402

[QuaDiPF] Schwank, Inge *Qualitative Diagnostical Instrument for Predicative versus Functional Thinking.* Test Set, Ver. A-D. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik Osnabrück.

[Reinmann-Rothmeier / Mandl 2001] Reinmann-Rothmeier, Gabi und Mandl, Heinz Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: Krapp, Andreas und Weidenmann, Bernd (Hrsg.) Pädagogische Psychologie. Beltz PVU 4., vollständig überarbeitete Auflage 2001 S. 601-646

[Schupp 1988] Schupp, Hans *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen.* MU 34(6) 1988

[Schwank 1993] Schwank, Inge. *Verschiedene Repräsentationen algorithmischer Begriffe und der Aufbau mentaler Modelle.* MU 39 (3) 1993 S.12-26

[Schwank 1996] Schwank, Inge. *Zur Konzeption prädikativer versus funkionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung.* ZDM 28(6) 1996 S.168-183

[Schwank 1999] Schwank, Inge. *On predicative versus functional cognitive structures.* In: Schwank, Inge (Hrsg.): *European Research in Mathematics Education I.II Vol. 2 Proceedings* FMD 1999 S.85-97

[Seeger 1990] Seeger, Falk *Die Analyse von Interaktion und Wissen im Mathematikunterricht und die Grenzen der Lehrbarkeit.* JMD 11 1990 S. 129-150

[Sjuts 2002] Sjuts, Johann *Analyse von Denkvorgängen und ihre Bedeutung für die Gestaltung von Lernprozessen.* In: [Beiträge 2002] S. 467-470

[Straka / Macke 1979] Straka, Gerald A. und Macke, Gerd *Lehren und Lernen in der Schule.* Kohlhammer 1979

[Tietze 2000] Tietze, Uwe-Peter und Klika, Manfred und Wolpers, Hans (Hrsg.) *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II Band 1 Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis* Vieweg 2., durchgesehene Auflage 2000

[Vollrath 1984] Vollrath, Hans-Joachim *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht.* Klett 1984

[Vollrath 1994] Vollrath, Hans-Joachim A*lgebra in der Sekundarstufe.* BI Wissenschaftsverlag 1994

[Vollrath 2001] Vollrath, Hans-Joachim *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Spektrum 2001