Über ein Rekurrenzkriterium für Irrfahrten und Anwendungen des Auffüllschemas

Florence Micheel

Erklärung

Hiermit erkäre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In– noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit sind zeitdiskrete stochastische Prozesse auf den Zustandsräumen $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, mit unabhängigen und identisch verteilten Zuwächsen. Solche Prozesse werden auch als „Irrfahrten“ bezeichnet. Es sind spezielle Markovprozesse mit diskreter Zeit, deren Übergangswahrscheinlichkeiten sowohl zeitlich als auch räumlich homogen sind. Irrfahrten mit festem Startpunkt zerfallen in zwei Klassen, die rekurrenten, und die transienten Irrfahrten. Als erstes stellt sich natürlich die Frage nach einem Kriterium für Rekurrenz bzw. Transienz, das in der Praxis auch anwendbar ist.
Ferner definiert jede Irrfahrt auch eine Potentialtheorie. Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Definition eines Greenoperators. Im transienten Fall ist die Definition naheliegend. Weniger offensichtlich ist sie bei Rekurrenz.

Eine grundlegende Arbeit zum Thema Irrfahrten ist die Arbeit „Random Walks “ von D. S. Ornstein, die ein elegantes Kriterium für Rekurrenz angibt, und darüber hinaus die Existenz eines Green-Operators auch für rekurrente Irrfahrten nachweist.

Leider sind die Beweise dieser Arbeit schwer verständlich, so daß in den üblichen Vorlesungen diese wichtigen Resultate nur ohne Beweise zitiert werden. Der Grund hierfür ist, daß die Argumente der Arbeit sehr formal sind und den wahrscheinlichkeitstheoretischen Hintergrund nicht mehr erkennen lassen. So ist z. B. erst mit einiger Phantasie erkennbar, daß sich viele der von Ornstein benutzten Argumente auf den wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriff des Auffüllschemas beziehen.

Das Auffüllschema wurde früher von Chacon und Ornstein in einem anderen Zusammenhang entwickelt. Ziel meiner Dissertation ist es, das Rekurrenzkriterium von Ornstein im $\mathbb{R}^d$ und die Existenz eines Green-Operators auch bei Rekurrenz wahrscheinlichkeitstheoretisch zu erklären, um die grundlegenden Resultate der zitierten Arbeit einem weiteren Publikum zugänglich zu machen. Ein erster Versuch, den wahrscheinlichkeitstheoretischen Hintergrund des Ornstein-Kriteriums zu erklären, findet sich meines Wissens in der Saarbrücker Diplomarbeit aus dem Jahre 1995 von Rita Goffing, allerdings nur für Dimension 1.

Zum besseren Verständnis der Resultate von Ornstein habe ich Arbeiten von F. Spitzer herangezogen, die der Arbeit von Ornstein vorangehen, sich aber nur mit dem Zustandsraum $\mathbb{Z}^d$ beschäftigen. Das Rekurrenzkriterium von Spitzer für $\mathbb{Z}^d$ ist ein Spezialfall des Kriteriums von Ornstein für $\mathbb{R}^d$.

Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Z}^d$ gestaltet die Untersuchungen von Irrfahrten auf diesem Raum erheblich einfacher. Einige der Ideen von Spitzer zum Beweis seines Rekurrenzkriteriums lassen sich auf den allgemeineren Fall des $\mathbb{R}^d$ übertragen, andere nicht. Hier verwendet Ornstein neue Ideen. Eine Schlüsselrolle im $\mathbb{R}^d$ spielt dabei das Auffüllschema, ohne daß es in der Arbeit von Ornstein auf Anhieb erkennbar wäre.

Umgekehrt eröffnete mir die Arbeit von Ornstein einen neuen Zugang zur Arbeit von Spitzer. Wendet man nämlich die Ideen von Ornstein auf die Voraussetzungen einer $\mathbb{Z}^d$-wertigen Irrfahrt an, so gestaltet sich die Beweisführung einfacher als in der Originalarbeit von Spitzer. Das Auffüllschema erscheint beim Vergleich beider Arbeiten in einem neuen Licht.

Die Stoppzeiten, die aus ihm hervorgehen, sind nichts anderes, als randomisierte erste Eintrittszeiten, die die bei Spitzer verwendbaren nicht randomisierten ersten Eintrittszeiten ersetzen. Dies habe ich in meiner Arbeit näher ausgeführt.
Doch zunächst sei auf die bereits erwähnten Begriffe meiner Arbeit näher eingegangen:

Eine Irrfahrt bezeichnet man grob dargestellt als „rekurrent“, wenn es Punkte gibt, denen die Irrfahrt unendlich oft beliebig nahe kommt:

Definition 1 *Sei* $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ *eine* $\mathbb{R}^d$*-wertige Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

1. *Ein Punkt* $x \in \mathbb{R}^d$ *heißt „Rekurrenzpunkt“, falls für jede Umgebung* U *dieses Punktes*

$$P(S_n \in U \textit{ unendlich oft }) = 1 \tag{1}$$

   gilt.

2. *Die Menge der Rekurrenzpunkte heißt „Rekurrenzmenge“.*

3. *Eine Irrfahrt heißt „rekurrent“, falls ihre Rekurrenzmenge nichtleer ist. Anderenfalls heißt die Irrfahrt „transient“.*

In der allgemeinen Theorie der Markovprozesse gibt es mehrere Rekurrenzbegriffe, die sich vom obigen Rekurrenzbegriff unterscheiden. In dieser Arbeit wird der Rekurrenzbegriff jedoch ausschließlich im Sinne der Definition 1 verwendet.

Nun ist es in vielen Fällen schwer nachzuprüfen, ob (1) tatsächlich gilt oder nicht. Das Besondere an Irrfahrten ist jedoch, daß ihre Verteilung bereits durch die Verteilung ihrer Zuwächse beschrieben wird, weil letztere eben unabhängig sind. Es stellt sich die Frage, **wie** anhand der Zuwachsverteilung entschieden werden kann, ob Rekurrenz vorliegt oder nicht.

Sind die Zuwächse einer $\mathbb{R}^1$-wertigen Irrfahrt integrabel, so läßt sich die Frage leicht beantworten. Eine Irrfahrt mit integrablen Zuwächsen ist genau dann rekurrent, wenn der Mittelwert der Zuwächse Null ist. So sind z. B. Irrfahrten, deren Zuwachsverteilung die Gaußverteilung mit Mittelwert Null und beliebiger Varianz ist, rekurrent. Auch

$\mathbb{R}^2$-wertige Irrfahrten sind genau dann rekurrent, wenn die Mittelwerte beider Komponenten verschwinden, nun unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Komponenten sogar quadratisch integrierbar sind.

Ab der dritten Dimension ist der Erwartungswert als Kriterium für Rekurrenz irrelevant, da es keine „echt dreidimensionalen“ Irrfahrten gibt, die rekurrent sind. Es gilt nämlich der folgende Satz: [1]

Satz 1 *Sei $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}^3$. Ist die Irrfahrt rekurrent, so existiert eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ durch den Ursprung, so daß*

$$P(S_n \in E \textit{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0) = 1.$$

Das Mittelwertskriterium für die Dimension Eins sagt natürlich nichts über Verteilungen, die keinen Mittelwert besitzen, wie z. B. die Cauchy-Verteilung

$$\mu(\cdot) = \int_{\cdot} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx.$$

Die folgende Aussage scheint zunächst ein allgemein verwendbares Kriterium für Rekurrenz zu liefern:

Satz 2 *Sei $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten im $\mathbb{R}^d$. Ein Punkt x des Zustandsraums ist genau dann ein Rekurrenzpunkt, wenn für jede Umgebung U dieses Punktes*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in U) = +\infty \tag{2}$$

gilt. [2]

Die obige Summe ist nichts anderes als die mittlere Aufenthaltszeit der Irrfahrt in der Umgebung U. Ist der Punkt x ein Rekurrenzpunkt, so ist diese mittlere Aufenthaltszeit trivialerweise unendlich, da die Aufenthaltszeit selbst P-fast sicher unendlich ist. Daß sich umgekehrt von

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \chi_U(S_i)\right] = +\infty \quad \text{auf} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \chi_U(S_i) = +\infty \quad P\text{-fast sicher}$$

[1] Siehe Satz 1.2.2 auf Seite 11

[2] Siehe Satz 1.1.2 auf Seite 2

schließen läßt, mag zunächst überraschen. Der Nachweis dieser Implikation ist jedoch verhältnismäßig einfach.
Rein formal stellt das Kriterium (2) eine Vereinfachung gegenüber (1) dar, da hier eine Aussage über die Verteilung des Prozesses insgesamt auf eine Aussage über die einzelnen Verteilungen der $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ reduziert wird.
Das Problem ist, daß die Verteilung von S_n, die n-te Faltungspotenz der Zuwachsverteilung μ, im Allgemeinen schwer zu berechnen ist. Wesentlich einfacher ist es hingegen, die Fouriertransformierten von Faltungspotenzen zu betrachten.

Die Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ ist die Funktion von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{C}$, die einem Punkt $t \in \mathbb{R}^d$ den komplexen Wert

$$\int e^{i<t;x>} \, d\mu(x)$$

zuordnet. Die Fouriertransformierten von Wahrscheinlichkeitsmaßen werden in der Wahrscheinlichkeitstheorie auch als charakteristische Funktionen der Maße bezeichnet.

Ist φ die charakteristische Funktion von μ, so ist φ^n, die n-te Potenz von φ, die charakteristische Funktion der n-ten Faltungspotenz von μ. Offenbar ist der Umgang mit Potenzen einfacher als der Umgang mit Faltungspotenzen.

Im Jahre 1951 gelang es K. L. Chung und W. H. J. Fuchs, die Rekurrenz einer Irrfahrt über die charakteristische Funktion der Zuwachsverteilung, ohne Annahme der Integrabilität der Zuwächse, zu charakterisieren. Es gilt nämlich:[3]

Satz 3 *Sei $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige, im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei φ die charakteristische Funktion der Zuwachsverteilung. Die Irrfahrt ist genau dann rekurrent, wenn eine beschränkte Umgebung U des Ursprungs existiert, so daß*

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_U Re\left(\frac{1}{1 - r\varphi(t)}\right) \, dt = +\infty. \tag{3}$$

Im Zentrum dieses Kriteriums steht die Funktion

$$\left(\frac{1}{1 - r\varphi(t)}\right),$$

bzw. ihr Realteil. Die Funktion selbst ist für $r \in (0,1)$ gerade die charakteristische Funktion von

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \mu^{*n},$$

[3]Siehe Originalarbeit v. Chung u. Fuchs, [3]

und es ist leicht nachzuweisen, daß ihr Realteil stets positiv ist.

Einen interessanten Spezialfall unter den Irrfahrten bilden diejenigen, deren Zuwachsverteilungen Gitterverteilungen auf $\mathbb{Z}^d$ sind. Eine Irrfahrt mit Zuwachsverteilung und Startverteilung auf $\mathbb{Z}^d$ bewegt sich außerhalb des Gitters $\mathbb{Z}^d$ mit Wahrscheinlichkeit Null. Irrfahrten mit Zuwachsverteilungen auf $\mathbb{Z}^d$ lassen sich somit auch als Irrfahrten im Zustandsraum $\mathbb{Z}^d$ selbst auffassen.
Die in Definition 1 angegebene Bedingung für „Rekurrenzpunkt" kann ersetzt werden durch die folgende Bedingung: Ein Punkt $x \in \mathbb{Z}^d$ ist genau dann Rekurrenzpunkt, wenn

$$P(S_n = x \text{ unendlich oft }) = 1 \text{ gilt.}$$

Im Jahre 1964 gelang es Spitzer, das von Chung und Fuchs entwickelte Rekurrenzkriterium für $\mathbb{Z}^d$-wertige Irrfahrten durch eine elegante Modifikation zu ersetzen, indem er die Funktion

$$\frac{1}{1-\varphi}$$

betrachtete. [4] Diese Funktion besitzt eine Singularität im Ursprung. Ihr Realteil ist stets positiv. Sofern φ nicht die charakteristische Funktion des Dirac-Maßes δ_0 ist, läßt sich stets eine Umgebung des Ursprungs angeben, so daß $1-\varphi$ in der punktierten Umgebung keine Nullstelle besitzt. Es gilt:

Satz 4 *Sei $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine $\mathbb{Z}^d$-wertige, im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei φ die charakteristische Funktion der Zuwachsverteilung. Die Irrfahrt ist genau dann rekurrent, wenn*

$$\int_{(-\pi,\pi)^d} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)\, dt = +\infty.$$

Offen blieb zunächst die Frage, ob ein derartiges Kriterium auch für Irrfahrten gilt, die sich nicht auf ein Gitter beschränken lassen. Daß dies in der Tat gilt, zeigte D. S. Ornstein im Jahre 1969:[5]

Satz 5 *Sei $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}^0\}$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige, im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei φ die charakteristische Funktion der Zuwachsverteilung. Die Irrfahrt ist genau dann rekurrent, wenn eine beschränkte Umgebung U des Ursprungs existiert, so daß*

$$\int_U Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)\, dt = +\infty.$$

[4]Siehe [8], T2 auf Seite 85, und Abschnitt 4.2.1 meiner Arbeit

[5]Siehe Satz 4.1.1 auf Seite 74

So läßt sich beispielsweise anhand von Satz 5 leicht das Rekurrenzverhalten von Irrfahrten bestimmen, deren Zuwachsverteilung die charakteristische Funktion

$$\varphi_\alpha(t) = e^{-|t|^\alpha}, \alpha \in (0, 2),$$

besitzen. Ist $\alpha = 1$, so ist φ_α die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung

$$\mu(\cdot) = \int_{\cdot} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

Für $\alpha = 2$ handelt es sich um die charakteristische Funktion der Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz 2. Da

$$1 - \varphi_\alpha(t) \approx |t|^\alpha \text{ für } t \to 0,$$

ist es mit Hilfe von Satz 5 leicht zu erkennen, daß für $\alpha \in (0, 1)$ Transienz vorliegt, für $\alpha \in [1, 2]$ jedoch Rekurrenz.

Auch läßt sich Satz 1 mit Hilfe von Satz 5 elegant nachweisen. Bislang ist kein Beweis für Satz 1 bekannt, der nicht Satz 3 oder Satz 5 verwendet.

Ein wesentlicher Aspekt bei der Untersuchung von Irrfahrten ist der potentialtheoretische Aspekt. Wichtig ist hier insbesondere die Berechnung eines Green-Operators. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob für beliebige Rekurrenzpunkte x, y die Reihe

$$\sum_{n=1}^{N} (P(\|S_n - x\| < \epsilon) - P(\|S_n - y\| < \epsilon))$$

für $N \to \infty$ konvergiert. Diese Frage wurde für den Spezialfall einer Gitterverteilung im Jahre 1964 durch F. Spitzer beantwortet, und im allgemeinen Fall durch D. S. Ornstein. Spitzer bewies Satz 6, Ornstein bewies Satz 7.

Satz 6 [6] *Sei $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}^d$, wobei $d \in \{1, 2\}$. Ist die Rekurrenzmenge der Irrfahrt gleich der Menge $\mathbb{Z}^d$, so gilt für alle Punkte $x, y \in \mathbb{Z}^d$:*

1. *Die Reihe*

   $$\sum_{n=0}^{\infty} (P(S_n = x) - P(S_n = y))$$

   konvergiert gegen einen endlichen Grenzwert.

[6] Siehe Satz 2.1.1 auf Seite 16

2. *Es existiert eine Funktion $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, so daß die folgende Ungleichung gilt:*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{N} (P(S_n = x) - P(S_n = y)) \right| \leq \beta(|x-y|) \tag{4}$$

Satz 7 [7] *Sei $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine rekurrente Irrfahrt im Zustandsraum $\mathbb{R}^d;\ d \in \{1,2\}$, mit nichtsingulärer Zuwachsverteilung. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine meßbare und beschränkte Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Menge

$$\mathcal{T}(f) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ f(x) \neq 0\}$$

ist beschränkt.

(ii) Es gilt

$$\int f(x)\ dx = 0.$$

Dann folgt:

1. *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(f(S_i))$ *ist konvergent.*

2. *Es existiert ein $B \geq 0$, so daß*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}_0} \left| \sum_{n=0}^{N} \mathbf{E}(f(S_n)) \right| \leq \|f\|_\infty B. \tag{5}$$

Die Konstante B hängt nur vom Durchmesser des Trägers $\mathcal{T}(f)$ ab.

Satz 7 nimmt eine Satz 6 entsprechende Form an, wenn man für f

$$f = \chi_{I_x} - \chi_{I_y}$$

wählt, wobei

$$x, y \ \in \ \mathbb{R}^1, \text{ und } \ \epsilon > 0,$$

[7] Siehe Satz 3.2.1 auf Seite 50

I_x die Kugel um x mit Radius ϵ und I_y die Kugel um y mit Radius ϵ ist. Satz 6 und Satz 7 erlauben es, einen Green-Operator auch im rekurrenten Fall einzuführen. Die Maximalungleichungen (4) und (5) spielen eine zentrale Rolle beim Nachweis der Rekurrenzkriterien von Satz 4 und Satz 5.

Bei den Beweisen der Konvergenzsätze sowie der Sätze 4 und 5 werden Irrfahrten mit unterschiedlichen Startverteilungen benutzt. Ist $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so ist die Verteilung der Folge

$$(S_0, S_1, S_2 \ldots)$$

charakterisiert durch die Verteilung der Zuwächse und die Verteilung von S_0, die Startverteilung. Im folgenden werde die Startverteilung ν als Subskript am Maß P vermerkt. Ist ν ein Dirac-Maß δ_x, so werde das Maß mit

$$P_x$$

notiert. Für das Integral einer integrablen Zufallsvariablen Y wird die folgende Notation eingeführt:

$$\mathbf{E}_\nu(Y) := \int_\Omega Y(\omega)\, dP_\nu(\omega).$$

Ist ν speziell ein Dirac-Maß δ_x, so wird dieses Integral vereinfachend mit

$$\mathbf{E}_x(Y)$$

notiert. Man erhält eine Irrfahrt mit einer bestimmten Startverteilung ν und einer Zuwachsverteilung μ aus einer Irrfahrt mit derselben Zuwachsverteilung, aber $S_0 \equiv 0$, durch Addition mit einer unabhängigen, ν-verteilten Zufallsvariablen.

Ein bei den Beweisen auftretendes Problem besteht darin, eine Irrfahrt mit einer vorgegebenen Startverteilung σ wenn möglich derart zu stoppen, daß die gestoppte Irrfahrt S_τ eine bestimmte Verteilung ζ besitzt.

Zur Konstruktion einer solchen Stoppzeit dient das sogenannte „ Auffüllschema“. Das Auffüllschema wurde von Chacon und Ornstein zum Beweis ihres berühmten Ergodensatzes entwickelt. Beim Auffüllschema wird eine gemäß der Startverteilung σ verteilte Sandmasse in einer Folge von Schritten in ein Loch vom Profil ζ eingefüllt. Dabei wird im k-ten Schritt die aus dem vorangehenden Schritt übriggebliebene Masse σ_{k-1} gemäß dem Verteilungsgesetz μ neu verwirbelt und dann soweit, wie es das Loch ζ_{k-1} zuläßt, eingefüllt. Im Schritt k bleibt die Masse σ_k übrig, die im $(k+1)$-ten Schritt erneut verwirbelt wird und in das unter Umständen verkleinerte Loch ζ_k eingefüllt wird, etc. Den Bewegungen eines einzelnen Sandkorns entspricht ein einzelner Pfad der Irrfahrt. Fällt das Sandkorn im k-ten Schritt in das Loch, so wird der Pfad zum Zeitpunkt k gestoppt.

Nach diesem rekursiven Verfahren erhält man eine Folge $\{\sigma_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ und eine monoton fallende Folge $\{\zeta_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ von endlichen Maßen. Genau dann, wenn sich das Loch durch dieses Verfahren vollständig auffüllen läßt, wenn also

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n(\mathbb{R}^d) = 0 \text{ gilt,}$$

existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum, eine Irrfahrt mit einer „passenden“ Stoppzeit τ, so daß die gestoppte Irrfahrt S_τ die geforderte Verteilung hat. Die Summe der $\{\sigma_i(A); i \in \mathbb{N}_0\}$, wobei $A \in \mathfrak{B}^d$, ist dann nichts anderes als die erwartete Anzahl an Treffern in die Menge A vor dem Zeitpunkt τ:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i(A) = \mathbf{E}_\sigma \left(\sum_{i=0}^{\tau-1} \chi_A(S_i) \right)$$

Allerdings gibt es nicht zu jedem Paar (σ, ζ) eine Lösung. So kann es beispielsweise zu keiner Irrfahrt mit festem Startpunkt Null, d.h. Startverteilung δ_0, und normal-verteilten Zuwächsen, eine Stoppzeit τ derart geben, daß die gestoppte Irrfahrt S_τ beispielsweise eine Dirac-Verteilung δ_x für ein $x \neq 0$ besitzt. Eine Lösung existiert jedoch immer dann, wenn die Rekurrenzmenge die gesamte Menge $\mathbb{R}^d$ umfaßt, und sowohl die Startverteilung als auch die Zielverteilung absolut stetig bezüglich dem Lebesgue-Maß sind.

Die Stoppzeit τ, die aus dem Auffüllschema hervorgeht, könnte man, wie bereits erwähnt, als eine Art randomisierte erste Eintrittszeit ansehen. Es sei daran erinnert, daß bei einer nichtrandomisierten ersten Eintrittszeit in eine Menge A **alle** Pfade der Irrfahrt beim ersten Eintritt in A gestoppt werden. Bei der Stoppzeit, die aus dem Auffüllschema hervorgeht, ist dies anders. Ist A eine Menge, auf der die Zielverteilung ζ „lebt“, d.h. für die

$$\zeta(A^c) = 0$$

gilt, so endet zwar jeder gestoppte Pfad in A, aber die Zeit τ ist nicht notwendigerweise die erste Eintrittszeit. Das quantitative Verhältnis der Pfade, die an einem Punkt $x \in A$ gestoppt werden, zu denjenigen, die noch nicht gestoppt werden, hängt vom Verhältnis der Lochtiefe zur Höhe der angehäuften Sandmasse über dem Loch ab. Ist das Loch tiefer als die Sandmasse über dem Punkt x, so werden alle Pfade gestoppt. Ist das Loch aber kleiner, so wird eine Auswahl derer getroffen, die gestoppt werden. Der Auswahl**mechanismus** wird durch einen unabhängigen Zufall bestimmt. Diejenigen, die nicht gestoppt werden, können zu einem späteren Zeitpunkt an einer anderen Stelle ihre Ruhe finden.

Wenn sich jedoch die Gesamtmasse der Zielverteilung auf einen einzigen Punkt konzentriert, so ist das Loch an dieser Stelle unendlich tief. Das bedeutet, daß jeder Pfad gestoppt wird, sobald er diesen Punkt erreicht hat. Ein Auswahlmechenismus erübrigt sich.

1. Irrfahrten im $\mathbb{R}^d$

1.1. Rekurrenz und Transienz

Definition 1.1.1 *Sei $d \in \mathbb{N}$. Sei $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozeß auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

1. *Man bezeichnet diesen Prozeß als Irrfahrt, falls die Folge seiner Zuwächse $\{S_1 - S_0, S_2 - S_1, S_3 - S_2, \ldots\}$ unabhängig und gleichverteilt ist.*

2. *Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Man bezeichnet eine Irrfahrt als in x startend, falls*

$$S_0(P) = \delta_x \quad \text{gilt.}$$

Definition 1.1.2 *Sei $d \in \mathbb{N}$. Sei $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

a) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ heißt Rekurrenzpunkt der Irrfahrt, falls für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$P(\omega \in \Omega; |S_n(\omega) - x| < \epsilon \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) = 1$$

b) Die Menge der Rekurrenzpunkte heißt Rekurrenzmenge der Irrfahrt.

c) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ heißt möglicher Punkt der Irrfahrt, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$P(\omega \in \Omega; |S_n(\omega) - x| < \epsilon) > 0.$$

d) Eine Irrfahrt heißt rekurrent, falls die Rekurrenzmenge nichtleer ist. Anderenfalls heißt sie transient

Ist eine Irrfahrt rekurrent, so stellt sich die Frage nach der Struktur der Rekurrenzmenge. Der folgende Satz gibt eine Antwort für den Fall, daß die Irrfahrt im Nullpunkt startet.

Satz 1.1.1 *Ist die Rekurrenzmenge einer im Nullpunkt startenden Irrfahrt nichtleer, so ist die Rekurrenzmenge eine abgeschlossene additive Untergruppe des $\mathbb{R}^d$. In diesem Fall ist jeder mögliche Punkt ein Rekurrenzpunkt.*

Einen Beweis für die Dimension $d = 1$ findet man in [2]. Der Beweis für höhere Dimensionen läßt sich genauso durchführen.

Sei μ die Verteilung der Zuwächse und $\mathcal{R}$ die Rekurrenzmenge. Da insbesondere der topologischen Träger

$$\mathcal{S} = \left(\bigcup\{O; O \text{ offen und } \mu(O) = 0\}\right)^c$$

von μ in der Menge der möglichen Punkte enthalten ist, gilt $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^d$ genau dann, wenn μ eine atomare Verteilung ist, deren Atome in $\mathbb{Z}^d$ liegen. Insbesondere gilt $\mathcal{R} = \{0\}$ genau dann, wenn μ das Diracmaß im Nullpunkt ist. Es folgt:

Korollar 1.1.1 *Sei $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine im Nullpunkt startende rekurrente Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$, und sei $\mathcal{R}$ die Rekurrenzmenge.*

1. *Für die Rekurrenzmenge $\mathcal{R}$ gilt*

$$\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$$

genau dann, wenn der Träger der Zuwachsverteilung $\mathbb{Z}^d$ erzeugt.

2. *Besitzt die Zuwachsverteilung einen nichtsingulären Anteil, so gilt*

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^d.$$

Satz 1.1.2 *Sei $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ ist genau dann Rekurrenzpunkt, wenn für jede offene Umgebung U von x gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in U) = \infty$$

Zum Nachweis dieses Kriteriums sei erneut auf [2] verwiesen.

Satz 1.1.3 *Sei $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) *Die Irrfahrt ist rekurrent*

2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gilt :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(|S_n| < \epsilon) = \infty$$

3) *Es existiert ein $\epsilon > 0$, so daß gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(|S_n| < \epsilon) = \infty$$

Aus Satz 1.1.1 und Satz 1.1.2 folgt unmittelbar die Äquivalenz von 1) und 2). Daß aus

3) bereits 2) folgt, ist nicht trivial. Einen Beweis dieser Implikation im eindimensionalen Fall findet man in [2]. Der Beweis für höhere Dimensionen erfolgt entsprechend.

Definition 1.1.3 *Sei σ ein endliches signiertes Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \mathbb{N}$. Sei*

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \\ \varphi(t) \quad &:= \quad \int e^{i<t;x>} d\sigma(x). \end{aligned}$$

Die Funktion φ bezeichnet man als charakteristische Funktion von σ.

Das folgende Kriterium für Rekurrenz zieht die charakteristische Funktion der Zuwachsverteilung heran. Ein Beweis findet sich in der Originalarbeit von K. L. Chung und W. H. J. Fuchs (Vgl. [3]).

Satz 1.1.4 (Chung-Fuchs) *Sei $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige, im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei φ die charakteristische Funktion der Zuwachsverteilung. Die Irrfahrt ist genau dann rekurrent, wenn eine beschränkte Umgebung U des Ursprungs existiert, so daß*

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_U Re\left(\frac{1}{1 - r\varphi(t)}\right)\ dt = +\infty.$$

Ist $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so wird die gemeinsame Verteilung der $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ bereits durch die Verteilung der Zuwächse charakterisiert. So ist z. B. die Rekurrenz bzw. Transienz einer solchen Irrfahrt vorallem eine Eigenschaft ihrer Zuwachsverteilung. Dies soll nun in der folgenden Definition festgehalten werden:

Definition 1.1.4 *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ und sei zu $n \in \mathbb{N}$ μ_n seine n-te Faltungspotenz.*

1) *Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ heißt Rekurrenzpunkt von μ, falls für jede Umgebung U des Punktes gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(U) = \infty$$

2) *Die Menge der Rekurrenzpunkte $\mathcal{R}(\mu)$ heißt Rekurrenzmenge von μ.*

3) *Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ Borel-meßbar. Die numerische Funktion*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\varphi \quad &: \quad \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ \mathcal{G}\varphi(x) \quad &:= \quad \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int \varphi(x+y)\ d\mu_n(y) \end{aligned}$$

heißt Potential von φ.

1.1.1. Irrfahrten mit Rekurrenzmenge $\mathbb{R}^d$

Im folgenden sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum, $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ein $\mathbb{R}^d-$wertiger Prozeß, und $\{P_x,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit

$$(X_0, X_1, X_2 \ldots)(P_x) = \delta_x \otimes \mu \otimes \mu \ldots .$$

Sei ferner $S_n := X_0 + \ldots + X_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $\mathcal{R}(\mu)$ die Rekurrenzmenge von μ.

Lemma 1.1.1 *Ist $\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$, so gilt für jede Menge $A \in \mathfrak{B}^d$:*

$$\mathcal{G}\chi_A \begin{cases} = \infty & \lambda^d - \textit{fast sicher, falls} \quad \lambda^d(A) > 0 \\ < \infty & \lambda^d - \textit{fast sicher, falls} \quad \lambda^d(A) = 0 \end{cases}$$

Beweis:
Sei $A \in \mathfrak{B}^d$. Sei außerdem $h : \mathbb{R}^d \to (0, +\infty)$ eine meßbare, Lebesgue-integrable Funktion. Die Funktion $x \mapsto \int h(y)\chi_A(x+y)dy$ ist stetig. Besitzt A positives Lebesgue-Maß, so ist diese Funktion strikt positiv. Folglich existiert ein $\epsilon > 0$ und eine offene Menge O mit

$$\int h(y)\chi_A(x+y)dy > \epsilon\chi_O(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^d$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int h(y)\mathcal{G}\chi_A(y)dy &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \int h(y)\chi_A(x+y)dy\ d\mu_n(x) \\ &\geq \epsilon\mathcal{G}\chi_O(0) = \infty \end{aligned}$$

Ist A eine Nullmenge, so gilt

$$\int h(y)\ \mathcal{G}\chi_A(y)dy = 0.$$

Dann ist aber $\mathcal{G}\ \chi_A = 0$ fast sicher.

□

Seien

$$\begin{aligned} \tau_A, \sigma_A \quad &: \quad \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ \tau_A \quad &:= \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}_0,\ S_k \in A\} & \text{, falls die Menge nicht leer,} \\ \infty & \text{falls die Menge leer ist,} \end{cases} \\ \sigma_A \quad &:= \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N},\ S_k \in A\} & \text{, falls die Menge nicht leer,} \\ \infty & \text{falls die Menge leer ist,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lcl}
f_A, g_A, h_A & : & \mathbb{R}^d \to [0,1] \\
f_A(x) & := & P_x(\tau_A < \infty) \\
h_A(x) & := & P_x(S_n \in A \text{ unendlich oft}) \\
g_A(x) & := & \chi_A(x) \cdot P_x(\sigma_A = \infty).
\end{array}
\tag{1.1}
$$

Es gilt:

$$f_A = \mathcal{G} g_A + h_A$$

Das Potential von g_A ist damit insbesondere endlich. Gilt für die Rekurrenzmenge

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d,$$

so ist nach Lemma 1.1.1 g_A fast sicher identisch Null. Damit muß auch $\mathcal{G} g_A$ identisch Null sein. Es folgt

$$f_A = h_A \text{ fast sicher.} \tag{1.2}$$

Nach dem $0-1$-Gesetz von Hewitt-Savage nimmt die Funktion h_A nur Werte in $\{0,1\}$ an. Ferner ist sie als $\mu-$harmonische Funktion nach dem Satz von Choquet-Deny fast sicher konstant. Die Funktionen f_A und h_A sind also beide entweder fast sicher identisch Eins oder fast sicher identisch Null. Die Funktion f_A ist auf der Menge A identisch Eins. Ist A eine Menge positiven Lebesgue-Maßes, so sind beide Funktionen identisch Eins.
Ist A eine Nullmenge, so ist das Potential ihrer Indikatorfunktion nach Lemma 1.2 fast sicher identisch Null. Für die Punkte $x \in \mathbb{R}^d$, mit $\mathcal{G}\chi_A(x) < \infty$ hilt nach Borel-Cantelli:

$$h_A(x) = 0$$

Es gilt somit der folgende Satz:

Satz 1.1.5 *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ mit Rekurrenzmenge*

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d.$$

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum mit einer Familie $\{P_x; x \in \mathbb{R}^d\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Sei $(S_n; n \in \mathbb{N}_0)$ eine Folge meßbarer Funktionen, die auf jedem Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P_x)$ eine in x startende Irrfahrt mit μ-verteilten Zuwächsen bildet. Zu $A \in \mathfrak{B}^d$ sei τ_A die Erste Eintrittszeit der Irrfahrt in A. Es gilt:

a)
$$P_x(S_n \in A \textit{ unendlich oft}) = \begin{cases} 1 & \textit{für } \lambda^d\textit{- fast alle } x, \\ & \quad \textit{falls } \lambda^d(A) > 0, \\ & \\ 0 & \textit{für } \lambda^d\textit{- fast alle } x, \\ & \quad \textit{falls } \lambda^d(A) = 0. \end{cases}$$

b)
$$P_x(\tau_A < \infty) = \begin{cases} 1 & \lambda^d - \textit{ fast sicher}, \quad \textit{falls } \lambda^d(A) > 0, \\ 0 & \lambda^d - \textit{ fast sicher}, \quad \textit{falls } \lambda^d(A) = 0. \end{cases}$$

Korollar 1.1.2 *Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ mit Rekurrenzmenge $\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$, so ist die Rekurrenzmenge jeder Irrfahrt mit μ-verteilten Zuwächsen und absolut stetiger Startverteilung gleich dem gesamten Raum $\mathbb{R}^d$.*

Beweis:
Sei ν ein absolut stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$, und sei

$$P_\nu(\cdot) := \int P_x(\cdot)\nu(dx).$$

Dann ist $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ eine Irrfahrt mit μ-verteilten Zuwächsen und Startverteilung ν. Es gilt für jede Menge $A \in \mathfrak{B}^d$ mit positivem Lebesgue-Maß:

$$P_\nu(S_n \in A \text{ unendlich oft }) \quad = \quad \int P_x(S_n \in A \text{ unendlich oft }) \, \nu(dx)$$

Nach dem obigen Satz ist der Integrand aber fast sicher gleich Eins.

□

1.1.2. Eine schärfere Form der Rekurrenz

Definition 1.1.5 *Sei μ ein atomares Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \mathbb{N}$. Sei G die kleinste additive Untergruppe des $\mathbb{R}^d$, die alle Atome von μ enthält. Dann heißt μ exakt rekurrent, falls für jedes $x \in G$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{*n}(\{x\}) = +\infty$$

gilt.

Satz 1.1.6 *Sei μ ein atomares, exakt rekurrentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \mathbb{N}$. Sei G die kleinste additive Untergruppe des $\mathbb{R}^d$, die alle Atome von μ enthält. Sei ferner $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine im Nullpunkt startende, $\mathbb{R}^d$-wertige Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit μ-verteilten Zuwächsen. Dann gilt für jedes $x \in G$:*

$$P\{S_n = x \textit{ unendlich oft}\} = 1$$

Beweis:
Sei $x \in G$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& P(S_n = x \text{ höchstens endlich oft}) = \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = x; S_{n+i} \neq x \ \forall i \in \mathbb{N}) = \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = x; (S_{n+i} - S_n) \neq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}) \\
= & P(S_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = x) \right)
\end{aligned}$$

Da die linke Seite dieser Gleichungskette endlich ist, der Faktor $(\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = x))$ jedoch unendlich ist, muß der andere Faktor gleich Null sein. Es gilt also:

$$\Longrightarrow \quad P(S_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad P\left(S_n = x \text{ höchstens endlich oft}\right) = 0$$

$\square$

Ist μ eine Gitterverteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \mathbb{N}$, so ist die Rekurrenz gleichbedeutend mit der exakten Rekurrenz. Im Allgemeinen gilt dies jedoch nicht. Zur Illustration werden nun zwei Beispiele diskutiert:

Beispiel 1

Sei

$$\begin{aligned} G &= \{n + m\sqrt{2};\ n, m \in \mathbb{Z}\} \\ \text{und } \mu &= \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_{-1} + \delta_{\sqrt{2}} + \delta_{-\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$T \quad : \quad G \to \mathbb{Z}^2$$

$$(n + m\sqrt{2}) \quad \overset{T}{\mapsto} \quad (n, m)$$

bildet die Gruppe G isomorph auf $\mathbb{Z}^2$ ab. Sei σ das Bildmaß von μ unter der Abbildung T. Das Maß σ ist ein atomares Maß, das den Punkten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

jeweils das Gewicht $1/4$ zuordnet. Die Verteilung σ ist rekurrent und besitzt die Rekurrenzmenge $\mathbb{Z}^2$.

Ist $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine $\mathbb{R}^1$-wertige Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Startpunkt 0 und Zuwachsverteilung μ, so ist $\{T(S_n);\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine $\mathbb{R}^2$-wertige Irrfahrt mit Startpunkt $(0,0)$ und Zuwachsverteilung σ. Der zweidimensionale Pfad $\{T(S_n);\ n \in \mathbb{N}_0\}$ trifft P-fast sicher jeden einzelnen Gitterpunkt $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ unendlich oft. Die Menge

$$E = \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} \{T(S_k) = (n, m) \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\}$$

hat also Wahrscheinlichkeit Eins. Nun ist die Menge E identisch mit der Menge

$$\bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} \left\{S_k = (n + \sqrt{2}m) \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Es gilt also:

$$P\left(\bigcup_{x\in G}\{S_k = x \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\}\right) = 1$$

Für Punkte $\xi \in \mathbb{R}$, die außerhalb von G liegen, gilt trivialerweise

$$P\left(\{S_k = \xi \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\}\right) = 0.$$

Da allerdings die Menge G dicht in $\mathbb{R}$ liegt, ist jedes $\xi \in \mathbb{R}$ ein Rekurrenzpunkt. Es gilt also für jedes $\epsilon > 0$:

$$P\left(|S_k - x| < \epsilon \text{ unendlich oft }\right) = 1$$

Beispiel 2

Sei

$$\begin{aligned} G' &= \{n + m\sqrt{2} + l\sqrt{3};\ n, m, l \in \mathbb{Z}\} \\ \text{und } \mu' &= \frac{1}{6}(\delta_1 + \delta_{-1} + \delta_{\sqrt{2}} + \delta_{-\sqrt{2}} + \delta_{\sqrt{3}} + \delta_{-\sqrt{3}}). \end{aligned}$$

Da der Mittelwert von μ' Null ist, ist diese Verteilung offensichtlich rekurrent. Die Rekurrenzmenge ist, da es sich nicht um eine Gitterverteilung handelt, gleich dem gesamten Raum $\mathbb{R}^1$. Die von den Atomen von μ erzeugte Gruppe G' ist jedoch keine Rekurrenzmenge im Sinne der exakten Rekurrenz. Zum Beweis hiervon sei die folgende Abbildung definiert:

$$T' \quad : \quad G' \to \mathbb{Z}^3$$

$$(n + m\sqrt{2} + l\sqrt{3}) \quad \stackrel{T'}{\mapsto} \quad (n, m, l)$$

Die Funktion T' bildet G' isomorph auf $\mathbb{Z}^3$ ab. Das Bildmaß von μ' unter T', das Maß σ', ist gleich der dreidimensionalen symmetrischen Bernoulli-Verteilung, die Gleichverteilung auf die sechs Punkte

$$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Die Verteilung σ' ist, da es sich um eine echt dreidimensionale Verteilung handelt, transient. Ist also $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine im Punkte Null startende Irrfahrt mit Zuwachsverteilung μ' auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so gilt für jeden Punkt $x = n + \sqrt{2}m + \sqrt{3}l, n, m, l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} & P\left(S_k = x \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\right) = \\ = \ & P\left(T(S_k) = (n, m, l) \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\right) \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

Der typische Pfad kommt jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ unendlich oft beliebig nahe. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß der Punkt x unendlich oft **exakt** getroffen wird, beträgt Null.

1.1.3. Notationen

Zunächst seien einige häufig verwendete Notationen erklärt.

1. Zu zwei Mengen A und B aus einem Raum Ω

$$\begin{aligned} A \triangle B &:= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ ihre symmetrische Differenz} \\ A^c &:= \Omega \setminus A \text{ das Komplement von } A \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

2. Ist Ω eine additive Gruppe, so sei für ein einzelnes Element $x \in \Omega$

$$A + x := \{a + x;\ a \in A\}.$$

3. Zu einer natürlichen Zahl d bezeichne $\mathfrak{B}^d$ die σ-Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^d$.

4. Es bezeichne λ^d das d–dimensionale Lebesgue–Maß.

5. Zu einer Verteilung μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ und zu $n \in \mathbb{N}$ bezeichne μ_n ihre n-te Faltungspotenz. Die Verteilung μ_0 sei stets das Dirac-Maß im Ursprung.

6. Für $x \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\delta_x$$

   das auf x konzentrierte Dirac-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$

7. Ist $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und Λ eine bezüglich $S_0, S_1, S_2 \ldots$ meßbare Menge, so bezeichne zu $x \in \mathbb{R}^d$

$$P_x(\Lambda) = P(\Lambda | S_0 = x).$$

   Ist ν eine weitere Verteilung, so sei

$$P_\nu(\cdot) = \int P_x(\cdot)\ d\nu(x)$$

8. Ist $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrable Funktion, so sei

$$\mathbf{E}_x(Y) = \int_\Omega Y\ dP_x,$$

   und entsprechend

$$\mathbf{E}_\nu(Y) = \int_\Omega Y\ dP_\nu.$$

9. Für $d > 1$ und

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d,$$

sind die Relationen „$\leq$" und „$<$" komponentenweise zu verstehen, d.h. es sei „$x \leq y$ "genau dann, wenn $x_i \leq y_i$ für $i = 1, \ldots, d$.
Entsprechend sei
„ $x < y$ " genau dann, wenn $x_i < y_i$ für jedes $i \in \{1, \ldots, d\}$.

10. Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \leq y$ sei

$$\begin{aligned} (x, y) &:= \{\xi \in \mathbb{R}^d; x < \xi < y\} \\ (x, y] &:= \{\xi \in \mathbb{R}^d; x < \xi \leq y\} \\ [x, y) &:= \{\xi \in \mathbb{R}^d; x \leq \xi < y\} \\ [x, y] &:= \{\xi \in \mathbb{R}^d; x \leq \xi \leq y\}. \end{aligned}$$

11. Ist $I \subset \mathbb{R}^1$ ein Intervall und $d \in \mathbb{N}$, so bezeichne

$$I^d := \underbrace{I \times \ldots \times I}_{d-\text{mal}}$$

das d-fache kartesische Produkt von I.

12. Das Skalarprodukt von x und y sei mit „ $<x; y>$ ", „ xy " oder „ $x \cdot y$ " notiert.

1.2. Der Einfluß der Dimension auf das Rekurrenzverhalten

Definition 1.2.1 *Sei $d \in \mathbb{N}$, wobei $d > 1$.*

a) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ heißt echt $d-$dimensional, falls es keinen linearen Unterraum $U \subsetneq \mathbb{R}^d$ gibt, mit

$$\mu(U^c) = 0.$$

b) Eine $\mathbb{R}^d$-wertige, im Nullpunkt startende Irrfahrt heißt echt d-dimensional, falls ihre Zuwachsverteilung echt d-dimensional ist.

Ist eine Irrfahrt im $\mathbb{R}^d$ **nicht** echt d-dimensional, so existiert ein echter linearer Unterraum von $\mathbb{R}^d$, so daß sich die Pfade dieser Irrfahrt fast sicher auf diesen Unterraum beschränken.
Die Frage ist, ob es in jeder Dimension d echt d-dimensionale Irrfahrten gibt, die rekurrent sind. Die Antwort auf diese Frage gibt der folgende Satz:

Satz 1.2.1 *Sei $d \in \mathbb{N}$, wobei $d > 2$. Dann ist jede $\mathbb{R}^d$-wertige, im Ursprung startende Irrfahrt, die echt d-dimensional ist, transient.*

Aus Satz 1.2.1 folgt unmittelbar:

Satz 1.2.2 *Sei $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}^3$. Ist die Irrfahrt rekurrent, so existiert eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ durch den Ursprung, so daß*

$$P(S_n \in E \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0) = 1.$$

Zum Beweis von Satz 1.2.1 ist folgendes Lemma notwendig:

Lemma 1.2.1 *Sei $d \geq 2$ und μ ein echt $d-$dimensionales Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$. Zu $T > 0, i, j = 1 \ldots d$ sei B_T die Kugel um den Ursprung mit Radius T und sei*

$$\alpha_{i,j}(T) := \int_{B_T} x_i x_j \; d\mu(x).$$

Dann existiert ein $T > 0$, so daß die Matrix $(\alpha_{ij}(T))_{i,j=1,\ldots,d}$ positiv definit ist.

Beweis von Lemma 1.2.1:

Sei $T > 0$, D eine Eigenwertmatrix von $\alpha = (a_{i,j}(T))$ und sei $O \in \mathbb{R}^{d,d}$ die Drehung, mit

$O^t\alpha O = D$. Sei $O^t(\mu)$ das Bildmaß von μ unter der Abbildung O^t. Für die Komponenten $\{\beta_{i,j};\ i,j = 1,\ldots,d\}$ der Diagonalmatrix gilt:

$$\begin{aligned}\beta_{i,j} &= \int_{B_T} (O^t x)_i (O^t x)_j \ d\ \mu(x) \\ &= \int_{B_T} y_i y_j \ d\ O^t(\mu)(y)\end{aligned}$$

Ist α nicht positiv definit, so existiert ein $i \in \{1,\ldots,d\}$ mit

$$\int_{B_T} y_i^2 \ d\ O^t(\mu)(y) = 0.$$

Dies impliziert jedoch, daß der Schnitt des linearen Unterraums $\{y_i \neq 0\}$ mit B_T das $O^t(\mu)-$Maß Null haben muß. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\mu\left(O\{y_i \neq 0\} \cap B_T\right) = 0.$$

Es sei nun angenommen, es existiere **kein** $T > 0$, so daß die zugehörige Matrix

$$(\alpha_{i,j}(T))_{i,j=1,\ldots,d}$$

positiv definit sei. Dann existiert zu jedem $T > 0$ ein echter linearer Unterraum $H_T \subsetneqq \mathbb{R}^d$, so daß

$$\mu\left(B_T \setminus H_T\right) = 0.$$

Insbesondere existiert somit eine Folge von linearen Unterräumen $\{H_N;\ N \in \mathbb{N}\}$ mit:

1. H_N ist höchstens $(d-1)$–dimensional
2. $$\mu(B_N \setminus H_N) = 0$$
3. Es existiert kein echter linearer Unterraum

   $$H'_N \subsetneqq H_N,$$

   der Eigenschaften 1. und 2. besitzt.

Da μ insbesondere nicht das Diracmaß im Nullpunkt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$H_{N+k} \neq \{0\}\ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Nun ist

$$B_{N+1} \setminus H_{N+1} \supset B_N \setminus H_{N+1},$$

und somit

$$\mu(B_N \setminus H_{N+1}) = 0.$$

Nach Eigenschaft 3 müssen aber dann die Unterräume H_N und H_{N+1} gleich sein, und induktiv auch alle nachfolgenden Unterräume $\{H_{N+i};\ i \in \mathbb{N}\}$. Folglich existiert ein linearer Unterraum H von kleinerer Dimension als d, so daß

$$\mu(H^c) = 0,$$

im Widerspruch zur Vorraussetzung des Lemmas.

$\square$

Beweis von Satz 1.2.1:
Sei $d > 2$. Sei μ ein echt $d-$dimensionales Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$ und φ seine charakteristische Funktion. Es ist zu zeigen, daß die Rekurrenzmenge von μ leer ist. Nach dem Satz von Chung-Fuchs ist dies gleichbedeutend mit

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_B Re\left(\frac{1}{1 - r\varphi(t)}\right) dt < +\infty$$

für eine Kugel B um den Ursprung. Sei $T > 0$, so daß die in Lemma 1.2.1 definierte Matrix $(\alpha_{ij}(T))$ positiv definit ist. Für $r > 0, t \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 - rRe\,(\varphi(t)) &= \int (1 - r\cos(x \cdot t))\ d\mu(x) \\ &\geq \int_{(-T,T)^d} (1 - r\cos(x \cdot t))\ d\mu(x) \\ &\geq r \int_{(-T,T)^d} (1 - \cos(x \cdot t))\ d\mu(x) \end{aligned}$$

Es existiert ein $\delta > 0$, so daß für $\|x\| < T$ und $\|t\| < \delta$ gilt:

$$1 - \cos(xt) \geq \frac{1}{4}(x \cdot t)^2.$$

Da die quadratische Form

$$t \mapsto \int_{(-T,T)^d} (x \cdot t)^2\ d\mu(x)$$

nach Voraussetzung positiv definit ist, existiert ein $C > 0$ so daß für $\|t\| < \delta$ gilt:

$$1 - rRe\ \varphi(t) \geq r \cdot C\|t\|^2$$

Sei B die Kugel um den Ursprung mit Radius δ. Es folgt für $1/2 < r \leq 1$

$$\int_B Re \left(\frac{1}{1 - r\varphi(t)} \right) dt \leq 2C^{-1} \int_B \frac{1}{\|t\|}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist aber für $d \geq 3$ endlich.

□

Eine weitere Folgerung des obigen Beweises ist die folgende Bemerkung:

Bemerkung 1.2.1 *Sei $d \geq 3$, μ eine echt d-dimensionale Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ und φ ihre charakteristische Funktion. Dann ist die Funktion*

$$Re \left(\frac{1}{1 - \varphi} \right)$$

lokal integrabel.

2. Rekurrenz auf $\mathbb{Z}^d$

In diesem Kapitel werden im Ursprung startende, rekurrente Irrfahrten im $\mathbb{Z}^d, d \in \{1,2\}$ betrachtet. Zentrale Aussage ist Satz 2.1.1, der die Existenz eines Potentialkerns für rekurrente Irrfahrten des oben genannten Typs impliziert. Diese Aussage wurde 1964 von Spitzer nachgewiesen. Spitzer unterscheidet dazu sowohl in der Formulierung als auch in der Beweisführung 3 Fälle:

1. Dimension $d = 2$
   (Seite 121 in [8])
2. Dimension $d = 1$, zweites Moment der Zuwachsverteilung unendlich
   (Dies ist Inhalt von Kapitel VII, 28, von [8])
3. Dimension $d = 1$, zweites Moment der Zuwachsverteilung endlich
   (Dies ist Inhalt von Kapitel VII, 28, [8])

Der Beweis, der in der vorliegenden Dissertation präsentiert wird, verzichtet für das Spitzersche Ergebnis weitgehend auf diese Fallunterscheidung. Außerdem wird eine Maximalungleichung für den Potentialkern bewiesen. Die Idee zu diesem Beweis entstammt dem Beweis von Ornstein für *Theorem* 1 in [6] auf Seite 121. Die Methoden von Ornstein müssen allerdings für die Besonderheiten eines abzählbaren Zustandsraumes modifiziert werden. Dies geschieht im Abschnitt 2.2 .

2.1. Über einen Satz von Spitzer

Im folgenden sei μ ein Wahrscheinlichtkeitsmaß auf $\mathbb{Z}^d$ für $d \in \{1,2\}$. Es sei ferner angenommen, daß der Träger von μ die gesamte Gruppe $\mathbb{Z}^d$ erzeugt. Sei μ_i die $i-$te Faltungspotenz von μ für $i \in \mathbb{N}_0$. Für $x, y \in \mathbb{Z}^d$ und $n \in \mathbb{N}_0$ seien folgende Funktionen definiert:

$$\alpha_n(x,y) := \sum_{i=0}^{n} \mu_i(\{x\}) - \mu_i(\{y\})$$

$$a_n(x) := \alpha_n(0,x) \tag{2.1}$$

$$B(x) := \sup\{|a_n(x)|, |a_n(-x)|; n \in \mathbb{N}_0\} \tag{2.2}$$

Inhalt dieses Kapitels ist der Nachweis des folgenden Satzes:

Satz 2.1.1 *Sei $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}^d$, wobei $d \in \{1, 2\}$. Ist die Rekurrenzmenge der Irrfahrt gleich der Menge $\mathbb{Z}^d$, so gilt für alle Punkte $x, y \in \mathbb{Z}^d$:*

1. *Die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P(S_n = x) - P(S_n = y))$$

konvergiert gegen einen endlichen Grenzwert.

2. *Es existiert eine Funktion $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, so daß die folgende Ungleichung gilt:*

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{N} (P(S_n = x) - P(S_n = y)) \right| \leq \beta(|x - y|) \tag{2.3}$$

Im folgenden sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum, $S : \Omega \to (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}_0}$ meßbar, und $\{P_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß folgendes gilt:

$$(S_0, S_1 - S_0, S_2 - S_1, \ldots)(P_x) = \delta_x \otimes \mu \otimes \mu \otimes \ldots \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

Für P_x-integrable Funktionen Y sei folgende Notation eingeführt:

$$\int Y \; dP_x = \mathbf{E}_x(Y)$$

Zu $A \subseteq \mathbb{Z}^d, A \neq \emptyset$, bezeichne τ_A die erste Treffzeit der Irrfahrt $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ in A, falls dieses Ereignis stattfindet. Falls A nicht getroffen wird, so sei τ_A als unendlich definiert. Die Rekurrenz impliziert jedoch

$$P_x(\tau_A = \infty) = 0.$$

Zum Beweis des Satzes bedarf es noch einiger Vorbereitungen.

2.2. Hilfssätze

Lemma 2.2.1 *Das Supremum $B(x)$ ist für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ endlich.*

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{Z}^d$ und $i \in \mathbb{N}_0$. Sei

$$\begin{aligned} r_i(y) &:= P_x\left(S_i = y; \tau_{\{0\}} > i\right) \quad ; \quad l_i(y) := P_x\left(S_i = y; \tau_{\{0\}} = i\right) \\ \tilde{r}_i(y) &:= P_0\left(S_i = y; \tau_{\{x\}} > i\right) \quad ; \quad \tilde{l}_i(y) := P_0\left(S_i = y; \tau_{\{x\}} = i\right) \end{aligned}$$

$$r = \chi_{\{x\}},\ h = \chi_{\{0\}}.$$

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} l_i$ konvergiert monoton gegen h, und $\sum_{i=0}^{n} \tilde{l}_i$ konvergiert monoton gegen r. Außerdem ergeben sich, wie man leicht nachrechnet, für die oben definierten Funktionen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \mu_i * r &= \sum_{i=0}^{n} r_i + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \mu_k * l_i \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} r_i + \sum_{k=0}^{n} \mu_k * h \\
\sum_{i=0}^{n} \mu_i * h &= \sum_{i=0}^{n} \tilde{r}_i + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \mu_k * \tilde{l}_i \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \tilde{r}_i + \sum_{k=0}^{n} \mu_k * r
\end{aligned}$$

Da

$$\tilde{r}_i(x) = 0$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt, erhält man die Abschätzung

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \mu_i * (r-h)(x) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} r_i(x).$$

Die linke Seite der Ungleichung ist aber nichts anderes als $|a_n(x)|$. Nun ist zu verifizieren, daß die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i(x)$$

endlich ist. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\mu_k(\{-x\}) > 0$. Die Existenz eines solchen Wertes wird durch die Rekurrenz der Irrfahrt garantiert. Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
\mu_k * \sum_{i=0}^{n} r_i(0) &= \int \sum_{i=0}^{n} r_i(-\xi)\, d\mu_k(\xi) \\
&\geq \left(\sum_{i=0}^{n} r_i(x) \right) \mu_k(\{-x\}) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Andererseits gilt die folgende Identität:

$$\mu_k * \left(\sum_{i=0}^{n} r_i \right) = \sum_{i=k}^{n+k} r_i + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n} \mu_j * l_{i+k-j}$$

Da $r_i(0) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, folgt insbesondere an der Stelle 0:

$$\begin{aligned} \mu_k * \sum_{i=0}^{n} r_i(0) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j * \left(\sum_{i=0}^{n} l_{i+k-j} \right)(0) \\ &\leq k \cdot h \leq k \end{aligned}$$

Aus (2.4) folgt somit

$$\sum_{i=0}^{n} r_i(x) \leq \frac{k}{\mu_k\{-x\}},$$

und folglich:

$$B(x) \leq \frac{k}{\mu_k\{-x\}} < +\infty$$

$\square$

Bemerkung 2.2.1 *Aus dem obigen Beweis geht insbesondere hervor, daß*

$$B(x) \leq \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{\tau_{\{0\}}-1} \chi_{\{x\}}(S_i) \right).$$

Lemma 2.2.2 *Sei $y \in \mathbb{Z}^d$. Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit zwei auf diesem Raum definierten Irrfahrten S und S^y und einer endlichen Markovzeit τ, so daß folgendes gilt:*

i) Die Zuwächse von S und S^y sind $\mu-$verteilt.

ii)

$$\begin{aligned} S_0(P) &= \delta_0 \\ S_0^y(P) &= \delta_y \end{aligned}$$

iii) $S_{\tau+n} = S^y_{\tau+n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis:
Sei $N > 0$, so daß die Menge

$$W = \{x \in \mathbb{Z}^d, |x| \leq N\}$$

positives μ-Maß besitzt und $\mathbb{Z}$ von der Menge

$$\{x \in W; \mu\{x\} > 0\}$$

erzeugt wird. Sei p_0 das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, das Punktepaaren $(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ den Wert

$$p_0(\{(x.y)\}) = \begin{cases} \mu\{x\} \cdot \mu\{y\} \cdot (\mu(W))^{-1}, & \text{falls } \|x\| \leq N \text{ und } \|y\| \leq N, \\ \\ \mu(\{x\}), & \text{falls } |x| > N \\ & \text{und } y = x, \\ \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

zuweist. Sind X und Y zwei Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^0, \mathfrak{A}^0, P^0)$ mit gemeinsamer Verteilung

$$(X, Y)(P^0) = p_0,$$

so besitzen sie folgende Eigenschaften:

1. Beide Komponenten sind μ-verteilt.

2. $$\begin{aligned} P^0(\|X\| > N; X \neq Y) &= 0 \\ P^0(\|Y\| > N; X \neq Y) &= 0 \end{aligned}$$

Ihre Differenz $Z = X - Y$ ist aufgrund dieser beiden Eigenschaften beschränkt, und es gilt:

$$\mathbf{E}(Z) = 0$$

Sei $\{(X_i, Y_i),\ i \in \mathbb{N}\}$ eine Folge $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$-wertiger, unabhängiger und gleichverteilter Zufallsvariabler auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit Verteilung

$$(X_1, Y_1)P = p_0.$$

Die Folge der Differenzen

$$\{X_n - Y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

ist ebenfalls unabhängig und gleichverteilt. Der Prozeß

$$\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i);\ n \in \mathbb{N}\}$$

ist also eine $\mathbb{Z}^d$-wertige Irrfahrt mit beschränkten Zuwächsen, deren Mittelwerte verschwinden. Folglich ist diese Irrfahrt rekurrent. Sei nun

$$S_n \; := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ \\ X_1 + \ldots + X_n, & \text{für } n > 0, \end{cases}$$

$$S'_n \; := \begin{cases} y, & \text{für } n = 0, \\ \\ y + Y_1 + \ldots + Y_n, & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Die Folgen $\{S_n;\; n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\{S'_n;\; n \in \mathbb{N}_0\}$ sind zwei Irrfahrten mit μ-verteilten Zuwächsen und verschiedenen Startpunkten, die fast sicher aufeinander treffen. Allerdings bleiben sie nach dem Zeitpunkt des ersten Zusammentreffens nicht notwendigerweise zusammen. Deshalb wird die Folge der $\{Y_n;\; n \in \mathbb{N}_0\}$ derart modifiziert, daß die Marginalverteilungen ihrer Glieder erhalten bleiben, jedoch ihre Werte nach dem Zeitpunkt des ersten Zusammentreffens mit den $\{X_n;\; n \in \mathbb{N}_0\}$ übereinstimmen. Sei also

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}_0; S_k(\omega) = S'_k(\omega)\}, & \text{falls diese Menge nichtleer ist,} \\ +\infty, & \text{sonst,} \end{cases}$$

der Zeitpunkt ihres ersten Zusammentreffens. Sei

$$F_i = \{\tau \le i\} \text{ für } i \in \mathbb{N}_0.$$

Sei ferner

$$Y'_n(\omega) := \begin{cases} y, & \text{falls } n = 0, \\ \\ Y_n, & \text{falls } n > 0 \text{ und } \omega \notin F_{n-1}, \\ \\ X_n, & \text{falls } n > 0 \text{ und } \omega \in F_{n-1}. \end{cases}$$

Die Zufallsvariable Y'_1 ist identisch mit Y_1 und damit μ-verteilt. Sei $n > 1$, $a_1, \ldots a_n$ Punkte in $\mathbb{Z}^d$ und

$$\Lambda = \{Y'_1 = a_1\} \cap \ldots \cap \{Y'_{n-1} = a_{n-1}\}.$$

Nach Definition von Y'_n gilt:

$$P(\Lambda; Y'_n = a_n) \;\; = \;\; P(\Lambda; F_{n-1}; X_n = a_n) + P(\Lambda; F^c_{n-1}; Y_n = a_n) \tag{2.5}$$

Da sowohl X_n als auch Y_n unabhängig von

$$\{Y'_1, \ldots, Y'_n, \chi_{F_{n-1}}\}$$

sind, gilt für die rechte Seite von (2.5)

$$P(\Lambda; F_{n-1}; X_n = a_n) + P(\Lambda; F^c_{n-1}; Y_n = a_n) = P(\Lambda)\mu\{a_n\}.$$

Unter der Annahme, daß die $\{Y_1', \dots, Y_{n-1}'\}$ unabhängig und μ-verteilt sind, ist die rechte Seite der letzten Gleichung gleich dem folgenden Produkt:

$$\mu\{a_1\} \dots \mu\{a_n\}$$

Also sind auch die $\{Y_1', \dots, Y_n'\}$ unabhängig und μ verteilt.
Sei

$$S_n^y = \sum_{i=0}^{n} Y_i'.$$

Nach Konstruktion sind die Funktionen

$$\sum_{i=0}^{\tau} Y_i' \quad \text{und} \quad S_\tau$$

identisch. Ferner sind auch die Folgen $\{X_{\tau+n}, n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\{Y_{\tau+n}', n \in \mathbb{N}_0\}$ identisch. Daher gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$S_{\tau+n}^y = S_{\tau+n}$$

Folglich bilden $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\{S_n^y, n \in \mathbb{N}_0\}$ zwei Irrfahrten mit gleicher Zuwachsverteilung und verschiedenen Startpunkten, die nach endlicher Zeit zusammentreffen und auch zusammenbleiben.

□

Lemma 2.2.3 *Sei $y \in \mathbb{Z}^d$ und $\phi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:*

$$\lim_{m\to\infty} \int \phi \, d\mu_m - \int \phi \, d(\mu_m * \delta_y) = 0$$

Beweis von Lemma 2.2.3:
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und S, S^y, τ Zufallsvariable, die den Aussagen von Lemma 2.2.2 genügen. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int \phi \, d\mu_m - \int \phi \, d(\mu_m * \delta_y) \right| &= \left| \mathbf{E} \left(\phi(S_m) - \phi(S_m^y) \right) \right| \\ &= \left| \mathbf{E} \left(\phi(S_m) - \phi(S_m^y); \tau > m \right) \right|, \end{aligned}$$

da die Funktionen $\phi(S_m)$ und $\phi(S_m')$ auf der Menge $\{\tau \leq m\}$ identisch sind. Für die rechte Seite gilt nun:

$$\left| \mathbf{E} \left(\phi(S_m) - \phi(S_m^y); \tau > m \right) \right| \leq 2\|\phi\|_\infty P(\tau > m)$$

Da τ fast sicher endlich ist, konvergiert die rechte Seite der obigen Ungleichung gegen Null für $m \to \infty$.

□

Definition 2.2.1 *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^d, d \in \{1,2\}$. Dann sei*

$$\begin{aligned} h_{\cdot}(a,b) &: \mathbb{Z}^d \to [0,1] \\ h_x(a,b) &:= P_x(\tau_{\{a\}} < \tau_{\{b\}}) \end{aligned}$$

Satz 2.2.1 *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^d$.*

1. *Ist $d = 1$, so existieren die beiden folgenden Grenzwerte:*

$$\begin{aligned} h^+(a,b) &:= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} h_x(a,b) \\ h^-(a,b) &:= \lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \in \mathbb{Z}}} h_x(a,b) \end{aligned}$$

2. *Ist $d = 2$, so existiert der folgende Grenzwert:*

$$h(a,b) := \lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in \mathbb{Z}^2}} h_x(a,b)$$

Zum Beweis von Satz 2.2.1 sind die folgende Lemmata zu verifizieren:

Lemma 2.2.4 *Seien $a, b, y \in \mathbb{Z}^d, d \in \{1,2\}$. Dann gilt:*

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in \mathbb{Z}^d}} (h_x(a,b) - h_{x+y}(a,b)) = 0$$

Beweis:
Für $x \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} |h_x(a,b) - h_{x+y}(a,b)| &\leq |\mathbf{E}_x(h_{S_n}(a,b))) - \mathbf{E}_{x+y}(h_{S_n}(a,b)))| + \\ &+ |h_x(a,b) - \mathbf{E}_x(h_{S_n}(a,b)))| + \\ &+ |h_{x+y}(a,b) - \mathbf{E}_{x+y}(h_{S_n}(a,b)))| \end{aligned}$$

Zu $\epsilon > 0$ ist $n \in \mathbb{N}$ so wählbar, daß der erste Betrag auf der rechten Seite der Ungleichung für alle $x \in \mathbb{Z}^d$ kleiner ist als ϵ. Sei $z \in \mathbb{Z}^d$.

Zu $c \in \mathbb{Z}^d$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\tau_{\{c\}} \circ \theta_n := \begin{cases} \inf\{k \geq n;\ S_k = c\}, & \text{falls die Menge nichtleer ist,} \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Stoppzeiten

$$\tau_{\{a\}} \text{ und } \tau_{\{a\}} \circ \theta_n$$

sowie

$$\tau_{\{b\}} \text{ und } \tau_{\{b\}} \circ \theta_n$$

auf der Menge

$$\{\tau_{\{a,b\}} \geq n\}$$

jeweils übereinstimmen, folgt aus der Markov-Eigenschaft:

$$\begin{aligned} |h_z(a,b) - \mathbf{E}_z\left(h_{S_n}(a,b)\right)| &\leq \mathbf{E}_z\big(h_{S_n}(a,b);\ \tau_{\{a,b\}} \leq n\big)\big) + P_z(n \leq \tau_{\{a\}} < \tau_{\{b\}}) \\ &\leq 2P_z(\tau_{\{a,b\}} \leq n) \end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert jedoch für $\|z\| \to \infty,\ z \in \mathbb{Z}^d$ gegen Null.

$\square$

Lemma 2.2.5 *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^d, d \in \{1, 2\}$ und sei*

$$\overline{s} := \limsup_{\|x\|\to\infty} h_x(a,b).$$

Zu $\epsilon > 0$ sei ferner

$$\overline{O}_\epsilon := \left\{x \in \mathbb{Z}^d;\ |h_x(a,b) - \overline{s}| < \epsilon\right\}.$$

Es existiert ein $T > 0$, so daß für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ mit $\|x\| > T$ gilt:

$$x \in \overline{O}_\epsilon \text{ oder } -x \in \overline{O}_\epsilon$$

Beweis:
Es sei angenommen, zu jedem $t > 0$ existiere ein $x \in \mathbb{Z}^d, \|x\| > t$, so das sowohl

$$h_x(a,b) \leq \overline{s} - \epsilon \qquad \text{als auch} \qquad h_{-x}(a,b) \leq \overline{s} - \epsilon \text{ gilt.}$$

Dann existiert eine Folge $x_0, x_1, \ldots \in \mathbb{Z}^d$, die die folgende Eigenschaft besitzt:

Für alle $i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j$ und $x \in x_i + \{a, b\}$ gilt:

$$h_x(x_j + a, x_j + b) < s - \frac{9}{10}\epsilon \tag{2.6}$$

Sei $x_0 := 0$. Es sei angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ existiere ein $(n+1)$–Tupel $(x_0, \ldots, x_n) \in (\mathbb{Z}^d)^n$, dessen Komponenten Eigenschaft (2.6) besitzen. Wegen Lemma 2.2.4 existiert ein $t > 0$, so daß für $x \in \mathbb{Z}^d$ mit $\|x\| > t$ und für $z \in \{a, b\}$,$j = 0, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} |h_x(a,b) - h_{x-x_j+z}(a,b)| &< \frac{\epsilon}{10} \\ |h_{-x}(a,b) - h_{-x-x_j+z}(a,b)| &< \frac{\epsilon}{10} \end{aligned}$$

Nach Annahme existiert ein $x' \in \mathbb{Z}^d$, $\|x\| > t$, so daß zusätzlich

$$\begin{aligned} |h_{x'}(a,b) - \overline{s}| &\geq \epsilon \\ |h_{-x'}(a,b) - \overline{s}| &\geq \epsilon \end{aligned}$$

gilt. Dann besitzen mit $x_{n+1} := x'$ auch die Komponenten des $(n+2)$-Tupels die Eigenschaft (2.6).

Sei nun N eine natürliche Zahl, die größer ist als $10/\epsilon$. Nach Definition von $\overline{s}$ und nach Lemma 2.2.4 existiert ein $\xi \in \mathbb{Z}^d$, so daß zugleich

$$\begin{aligned} h_\xi(a,b) &> \overline{s} - \frac{\epsilon}{10} \\ \text{und } \left|h_\xi(a,b) - h_{\xi-x_j}(a,b)\right| &< \frac{\epsilon}{10} \end{aligned}$$

für $j = 0, \ldots, N$ gilt. Damit gilt

$$h_{\xi-x_j}(a,b) > \overline{s} - \frac{2\epsilon}{10} \text{ für } j = 0, \ldots, N. \tag{2.7}$$

Sei τ die erste Eintrittszeit in die Menge

$$\{a, b\} \cup \ldots \cup \{x_N + a, x_N + b\}.$$

Da

$$P_\xi(\tau < +\infty) = \sum_{k=0}^{N} P_\xi(S_\tau \in x_k + \{a, b\}),$$

existiert ein $k \in \{0, \ldots, N\}$, so daß

$$P_\xi(S_\tau \in \{x_k + a, x_k + b\}) < \frac{\epsilon}{10}.$$

Dann gilt,

$$\begin{aligned} h_{\xi-x_k}(a,b) &= h_\xi(x_k + a, x_k + b) \\ &= \sum_{i=0}^{N} \mathbf{E}_\xi\left(h_{S_\tau}(x_k + a, x_k + b);\ S_\tau \in \{x_i + a, x_i + b\}\right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{10} + \overline{s} - \frac{9}{10}\epsilon = \overline{s} - \frac{8}{10}\epsilon, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (2.7).

$\square$

Beweis von Satz 2.2.1:

Zu $a, b \in \mathbb{Z}^d$ und zu $\epsilon > 0$ sei

$$\begin{aligned}
\overline{s} &:= \limsup_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in\mathbb{Z}^d}} h_x(a,b) \\
\underline{s} &:= \liminf_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in\mathbb{Z}^d}} h_x(a,b) \\
\overline{O_\epsilon} &:= \{x \in \mathbb{Z}^d;\ |h_x(a,b) - \overline{s}| < \epsilon\} \\
\underline{O_\epsilon} &:= \{x \in \mathbb{Z}^d;\ |h_x(a,b) - \underline{s}| < \epsilon\}.
\end{aligned}$$

Im Falle $\underline{s} = \overline{s}$ ist nichts zu beweisen. Es sei $\underline{s} < \overline{s}$ angenommen. Sei

$$0 < \epsilon < \frac{(\overline{s} - \underline{s})}{4}.$$

Nach Lemma 2.2.4 und Lemma 2.2.5 existiert zu ϵ ein $T > 0$, so daß für Gitterpunkte $\|x\| > T$ folgendes gilt:

1. Genau einer der Punkte $\{x, -x\}$ ist in $\overline{O_\epsilon}$ enthalten , und der diametral entgegengesetzte liegt in $\underline{O_\epsilon}$.

2. Der Punkt x und seine benachbarten Gitterpunkte liegen entweder alle in $\overline{O_\epsilon}$ oder in $\underline{O_\epsilon}$.

In der Ebene liegen somit entweder alle Gitterpunkte x mit $\|x\| > T$ in $\overline{O_\epsilon}$ oder in $\underline{O_\epsilon}$. Folglich existiert nur ein Häufungswert für $\|x\| \to +\infty$. Auf der Geraden ist die Situation etwas anders. Enthält $\overline{O_\epsilon}$ eine ganze Zahl aus dem Intervall $[T, +\infty]$, so ist bereits das gesamte Intervall in $\overline{O_\epsilon}$ enhalten, und das Intervall $[-\infty, -T]$ ist in $\underline{O_\epsilon}$ enthalten. Indem Fall gilt

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{Z}}} h_x(a,b) = \overline{s} \text{ und } \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\in\mathbb{Z}}} h_x(a,b) = \underline{s}.$$

Enthält umgekehrt $\overline{O_\epsilon}$ eine ganze Zahl aus dem Intervall $[-\infty, -T]$, so gilt

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{Z}}} h_x(a,b) = \underline{s} \text{ und } \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\in\mathbb{Z}}} h_x(a,b) = \overline{s}.$$

$\square$

Lemma 2.2.6 *Sei*

$$\tau = \begin{cases} \inf\{i \in \mathbb{N}_0;\ S_i = x \textit{ oder } 0\}, & \textit{falls die Mange nichtleer ist,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt für jedes $\xi \in \mathbb{Z}^d$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_\xi \left(\sum_{i=0}^{n} (\chi_{\{0\}} - \chi_{\{x\}})(S_i) \right) - \mathbf{E}_\xi \left(\sum_{i=\tau}^{\tau+n} (\chi_{\{0\}} - \chi_{\{x\}})(S_i) \right) = 0$$

Beweis:

Es sei nochmal an die Definition von $B(x)$ erinnert:

$$B(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left| \sum_{i=0}^{n} (\mu_i\{0\} - \mu_i(\{x\})) \right|, \left| \sum_{i=0}^{n} (\mu_i\{0\} - \mu_i(\{-x\})) \right| \right\}$$

Der Wert $B(x)$ ist auch das Supremum der folgenden Menge

$$\left\{ \left| \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}_0 \left[(\chi_{\{0\}} - \chi_{\{x\}})(S_i) \right] \right|, \left| \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}_x \left[(\chi_{\{0\}} - \chi_{\{x\}})(S_i) \right] \right| \right\}$$

Daher sei die folgende Funktion $f : \mathbb{Z}^d \to [-1, 1]$ definiert:

$$f \quad = \quad \chi_{\{0\}} - \chi_{\{x\}}$$

Sei $\xi \in \mathbb{Z}^d$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $M > 0$, so daß

$P_\xi(\tau > M) < \epsilon / B(x)$ gilt.

Es folgt für $n \geq M$:

$$\begin{aligned}
\left| \mathbf{E}_\xi \left(\sum_{i=\tau}^{\tau+n} f(S_i); \tau > M \right) \right| &\leq \epsilon \\
\left| \mathbf{E}_\xi \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i); \tau > M \right) \right| &= \left| \mathbf{E}_\xi^\omega \left(\mathbf{E}_{S_\tau(\omega)}^{\omega'} \left[\sum_{i=0}^{n-\tau(\omega)} f(S_i(\omega') \right] ; M < \tau \leq n \right) \right| \\
&\leq B(x) \cdot \frac{\epsilon}{B(x)}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) - \sum_{i=\tau}^{\tau+n} f(S_i) \right) \right| \leq \\
&\qquad \leq 2\epsilon + \left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=\tau}^{n} f(S_i); \tau \leq M \right) - \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=\tau}^{\tau+n} f(S_i); \tau \leq M \right) \right| \\
&\qquad \leq 2\epsilon + \sum_{j=0}^{M} \sum_{i=0}^{j} \mathbf{E}_x(f(S_{n+i}))
\end{aligned}$$

Der letzte Term strebt aber für $n \to \infty$ gegen 0.

$\square$

Beweis von Satz 2.1.1:
Für $x, y \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\alpha_n(x,y) = a_n(y) - a_n(x).$$

Daher genügt es, die Existenz von

$$a(x) := \lim_{n\to\infty} a_n(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ zu zeigen. Zunächst ist jedoch nachzuweisen, daß für $x, y \in \mathbb{Z}^d$ eine endliche Majorante von $|\alpha_n(x,y)|$ existiert, die nur von dem Abstand beider Punkte zueinander, also von $\|x-y\|$, abhängt.

Da die Irrfahrt rekurrent ist, sind beide Treffzeiten $\tau_{\{x\}}$ und $\tau_{\{y\}}$ P_0-fast sicher endlich. Es folgt daher:

$$\begin{aligned}
|\alpha_n(x,y)| &\le \left|\mathbf{E}_0\left(\sum_{k=0}^{n}(\chi_{\{x\}} - \chi_{\{x\}})(S_k); \tau_{\{x\}} < \tau_{\{y\}}\right)\right| + \\
&+ \left|\mathbf{E}_0\left(\sum_{k=0}^{n}(\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}(S_k)); \tau_{\{y\}} < \tau_{\{x\}}\right)\right| \\
&= \left|\mathbf{E}_0\left(a_{n-\tau_{\{x\}}}(y-x); \tau_{\{x\}} < \tau_{\{y\}}; \tau_{\{x\}} \le n\right)\right| + \\
&+ \left|\mathbf{E}_0\left(a_{n-\tau_{\{y\}}}(x-y); \tau_{\{y\}} < \tau_{\{x\}}; \tau_{\{y\}} \le n\right)\right| \\
&\le B(y-x)P_0\left(\tau_{\{x\}} < \tau_{\{y\}}\right) + B(x-y)P_0\left(\tau_{\{y\}} < \tau_{\{x\}}\right) \\
&= \beta(|x-y|)
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2.1 ist $\beta(|x-y|)$ ein endlicher Wert.

Zum Nachweis der Konvergenz sei angenommen, es existiere eine divergente Folge $\{a_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ für ein $x \in \mathbb{Z}^d$. Dann existiert nach dem Cauchy-Kriterium ein $\gamma > 0$, so daß für beliebig große $K, L \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{i=K+1}^{K+L} \mu_i(\{0\}) - \mu_i(\{x\})\right| > 2\gamma \quad \text{gilt.} \tag{2.8}$$

Sei $f := \chi_{\{0\}} - \chi_{\{x\}}$. Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ folgt aus (2.8):

$$\left|\sum_{i=K+1}^{K+n} - \sum_{i=K+L+1}^{K+L+n} \mathbf{E}_0(f(S_i))\right| > \gamma \tag{2.9}$$

Nach der Dreiecksungleichung ist nämlich die linke Seite der obigen Ungleichung nicht kleiner als

$$\left| \left| \sum_{i=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0 \left(f(S_i) \right) \right| - \left| \sum_{i=K+n}^{K+n+L} \mathbf{E}_0 \left(f(S_i) \right) \right| \right| .$$

Aus der Markoveigenschaft folgt für den zweiten Term:

$$\sum_{i=K+n}^{K+n+L} \mathbf{E}_0 \left(f(S_i) \right) \quad = \quad \sum_{i=0}^{L} \mathbf{E}_0 \left(\mathbf{E}_{S_{K+n}} \left(f(S_) \right) \right)$$

Da die Funktion f einen beschränkten Träger besitzt, konvergieren die Summanden $\mathbf{E}_0(\mathbf{E}_{S_{K+n}}(f(S_j)))$ für $n \to \infty$ gegen Null. Daher folgt unter der Annahme (2.8) für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ Ungleichung (2.9).

Sei nun für $m \in \mathbb{N}_0$

$$\sigma_m := \begin{cases} \inf \{i \geq m;\ S_i \in \{0, x\}\}, & \text{falls die Menge nichtleer ist,} \\ +\infty, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die erste Eintrittszeit der Irrfahrt in die zweipunktige Menge $\{0, x\}$ nach der Zeit m. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_0 \left(\sum_{i=m}^{m+n} f(S_i) - \sum_{i=\sigma_m}^{\sigma_{K+L}+n} f(S_i) \right) = \\ = \quad & \mathbf{E}_0 \left(\mathbf{E}_{S_m} \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) - \mathbf{E}_{S_m} \left(\sum_{i=\sigma_0}^{\sigma_0+n} f(S_i) \right) \right) \end{aligned}$$

Der Integrand

$$\left(\mathbf{E}_{S_m} \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) - \mathbf{E}_{S_m} \left(\sum_{i=\sigma_0}^{\sigma_0+n} f(S_i) \right) \right)$$

ist dem Betrage nach für alle $n, m \in \mathbb{N}$ nicht größer als $2B(x)$ und konvergiert nach Lemma 2.2.6 für $n \to \infty$ gegen Null. Daher konvergiert auch das Integral gegen Null. Es folgt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}_0 \left(\sum_{i=\sigma_K}^{\sigma_K+n} f(S_i) - \sum_{i=\sigma_{K+L}}^{\sigma_{K+L}+n} f(S_i) \right) \quad \geq \quad \frac{\gamma}{2}$$

Beachtet man, daß S_{σ_K} und $S_{\sigma_{K+L}}$ nur die Werte 0 oder x annehmen können, so folgert man

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_0\left(\sum_{i=\sigma_K}^{\sigma_K+n} f(S_i) - \sum_{i=\sigma_{K+L}}^{\sigma_{K+L}+n} f(S_i)\right) = \\ = \; & \mathbf{E}_0\left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right) \cdot \mathbf{E}_0\Big(h_{S_K}(0,x) - h_{S_{K+L}}(0,x)\Big) + \\ + \; & \mathbf{E}_x\left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right) \cdot \mathbf{E}_x\Big(h_{S_K}(x,0) - h_{S_{K+L}}(x,0)\Big). \end{aligned}$$

Behauptung: Für $y, a, b \in \mathbb{Z}^d$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{l\in\mathbb{N}} \mathbf{E}_y\Big(h_{S_k}(a,b) - h_{S_{k+l}}(a,b)\Big) = 0. \tag{2.10}$$

Zum Nachweis dieser Behauptung werden drei Fälle unterschieden.

1. Es sei $d = 1$ und die Zuwachsverteilung besitze ein endliches zweites Moment. Dann folgt nach dem zentralen Grenzwertsatz für jedes $T > |y|$:

$$\lim_{k\to\infty} P_y(S_k > T) = \lim_{k\to\infty} P_y(S_k < -T) = \frac{1}{2}$$

Da die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{z\to+\infty\\ z\in\mathbb{Z}}} h_z(a,b) \text{ und } \lim_{\substack{z\to-\infty\\ z\in\mathbb{Z}}} h_z(a,b)$$

existieren, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $T > |y|$, so daß für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$ die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{E}_y\Big(h_{S_k}(a,b); S_k > T\Big) - \mathbf{E}_y\Big(h_{S_{k+l}}(a,b); S_{k+l} > T\Big)\right| &\leq \epsilon \\ \left|\mathbf{E}_y\Big(h_{S_k}(a,b); S_k < -T\Big) - \mathbf{E}_y\Big(h_{S_{k+l}}(a,b); S_{k+l} < -T\Big)\right| &\leq \epsilon \\ \left|\mathbf{E}_y\Big(h_{S_k}(a,b); |S_k| < T\Big)\right| &\leq \epsilon \\ \left|\mathbf{E}_y\Big(h_{S_{k+l}}(a,b); |S_{k+l}| < T\Big)\right| &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Es folgt insgesamt:

$$\left|\mathbf{E}_y\Big(h_{S_k}(a,b)\Big) - \mathbf{E}_y\Big(h_{S_{k+l}}(a,b)\Big)\right| \leq 4\epsilon$$

2. Sei $d = 1$ und das zweite Moment der Zuwachsverteilung sei unendlich. Dann existiert nur ein Häufungswert für $|z| \to +\infty$, der Grenzwert

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\mathbb{Z}^d}} h_z(a,b).$$

Zum Beweis hiervon sei auf Anhang A.2 verwiesen.

3. Sei $d = 2$. In diesem Fall existiert ebenfalls genau ein Häufungswert für $\{h_z(a,b);\ z \in \mathbb{Z}^d\}$. Dies wurde bereits bewiesen. Auch in den Fällen 2 und 3 folgt (2.10). Da die Faktoren

$$\mathbf{E}_0 \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) \text{ und } \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ dem Betrage nach durch $B(x)$ beschränkt sind, folgt aus (2.10):

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{L,n\in\mathbb{N}} \left| \mathbf{E}_0 \left(\sum_{i=\sigma_K}^{\sigma_K+n} f(S_i) - \sum_{i=\sigma_{K+L}}^{\sigma_{K+L}+n} f(S_i) \right) \right| = 0,$$

im Widerspruch zur Annahme.

□

Korollar 2.2.1 *Es gilt für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$:*

$$a(x) + a(-x) = \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=0}^{\tau_{\{0\}}-1} \chi_{\{x\}}(S_k) \right)$$

Beweis:
Sei $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_n(x) + a_n(-x) &= \sum_{k=0}^{n} P_x(S_k = x) - P_0(S_k = x) \\ &- \left(\sum_{k=0}^{n} P_x(S_k = 0) - P_0(S_k = 0) \right) \end{aligned}$$

Wegen der Rekurrenz gilt für jedes $y \in \mathbb{Z}^d$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt außerdem:

$$P_0(S_k = y) = P_x(S_{\tau_{\{0\}}+k} = y)$$

Daher läßt sich der obige Ausdruck umformen zu

$$\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=0}^{(\tau_{\{0\}}-1)\wedge n} \chi_{\{x\}}(S_k) \right) \tag{2.11}$$

$$- \quad \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=\tau_{\{0\}}\vee(n+1)}^{\tau_{\{0\}}+n} (\chi_{\{0\}} - \chi_{\{x\}})(S_k) \right) \tag{2.12}$$

Es ist zu zeigen, daß der Term (2.12) für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=\tau_{\{0\}}\vee(n+1)}^{\tau_{\{0\}}+n}(\chi_{\{0\}}-\chi_{\{x\}})(S_k)\right) = \\ \mathbf{E}_x\left(\mathbf{E}_{S_{\tau_{\{0\}}}}\left(\sum_{k=0}^{n}(\chi_{\{0\}}-\chi_{\{x\}})(S_k)\right);\tau_{\{0\}}>n\right) + \\ + \quad \mathbf{E}_x^{\omega}\left(\mathbf{E}_{S_{n+1}}^{\omega'}\left(\sum_{k=0}^{\tau_{\{0\}}(\omega)}(\chi_{\{0\}}-\chi_{\{x\}})(S_k(\omega'))\right);\tau_{\{0\}}(\omega)\le n\right)\end{aligned}$$

Der erste Summand ist aber nichts anderes als

$$a_n(x)P_x(\tau_{\{0\}}>n).$$

Da $a_n(x)$ in n beschränkt ist, konvergiert dieser Summand gegen Null.

Bei festem $j \in \mathbb{N}_0$ gilt zum einen:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x\left(\mathbf{E}_{S_n}\left(\sum_{k=0}^{j}(\chi_{\{0\}}-\chi_{\{x\}})(S_k)\right);\tau_{\{0\}}=j\right)=0$$

Zum anderen ist $B(x)P_x(\tau_{\{0\}}=j)$ eine Majorante dieses Terms für alle $n \in \mathbb{N}$, da für jedes $y \in \mathbb{Z}^d$ gilt:

$$\left|\mathbf{E}_y\left(\sum_{k=0}^{j}(\chi_{\{0\}}-\chi_{\{x\}})(S_k)\right)\right| = |\alpha_j(-y,x-y)| \le B(x)$$

Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz ist also auch der zweite Summand eine Nullfolge. Für (2.11) gilt offensichtlich

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{(\tau_{\{0\}}-1)\wedge n}\chi_{\{x\}}(S_k)\right)=\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{(\tau_{\{0\}}-1)}\chi_{\{x\}}(S_k)\right),$$

was zu zeigen war.

$\square$

3. Rekurrenz auf $\mathbb{R}^d$

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht Satz 3.2.1 auf Seite 50, der eine Übertragung von Satz 2.1.1 auf Irrfahrten mit Rekurrenzmenge $\mathbb{R}^d$ statt $\mathbb{Z}^d$ darstellt. Die Aussagen von Satz 3.2.1 wurde im Jahre 1969 von D. S. Ornstein bewiesen und findet sich in [6], *Theorem 1* und *Theorem 2* auf Seite 21. Der Nachweis von *Theorem 1* und *Theorem 2* erfordert mehrere Hilfsmittel, insbesondere das Auffüllschema.
(Vgl. [6], Beweis *Theorem 1, Theorem 2*, S.21-23 sowie Beweis *Lemma* 5, S.36)
Allerdings ist dieses Auffüllschema bei Ornstein nicht erkennbar. In der Saarbrücker Diplomarbeit von Rita Goffing (Vgl. [5], Kapitel 2) wird das Auffüllschema für Dimension 1 eingeführt. Im Abschnitt 3.1 meiner Arbeit wird das Auffüllschema für Dimension 1 und 2 erklärt. Darüber hinaus werden in diesem Abschnitt weiterführende Untersuchungen vorgenommen, die im Rahmen meiner Arbeit wichtig sind. Ferner werden verschiedene Aspekte des Auffüllschemas dargelegt.

3.1. Das Auffüllschema

Im folgenden sei $d \in \{1, 2\}$ und σ, μ, ζ Verteilungen auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$. Das von Chacon und Ornstein [1] entwickelte Auffüllschema dient der Beantwortung der folgenden Frage:

Ist es möglich, eine Irrfahrt mit Startverteilung σ und Zuwachsverteilung μ derart zu stoppen, daß die gestoppte Irrfahrt die gewünschte Verteilung ζ hat?

Genau genommen soll eine Irrfahrt $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Startverteilung σ, Zuwachsverteilung μ, eine Filtration $\{\mathcal{F}_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ mit adaptierter Stoppzeit τ derart angegeben werden, daß S_τ gerade ζ-verteilt ist. Daß es nicht zu jedem Tripel (σ, μ, ζ) eine Lösung gibt, sieht man leicht anhand des folgenden Beispiels:
Sei μ die Standard-Normalverteilung auf $\mathbb{R}^1$, σ das Dirac-Maß im Nullpunkt, und ζ das Dirac-Maß in einem beliebigen Punkt $x \neq 0$. Gäbe es eine Irrfahrt $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ mit einer „passenden“ endlichen Stoppzeit τ, so daß

$$S_\tau(P) = \delta_x,$$

[1] Vgl. [1]

so wäre auch die erste Eintrittszeit τ_x in den Punkt x fast sicher endlich. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall!

Definition 3.1.1 *Sei $d \in \mathbb{N}$, μ eine Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, und $r, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ Wahrscheinlichkeitsdichten.*

1. *Das folgende Rekursionsschema zur Berechnung der Funktionenfolgen*

$$\{r_n,\ p_n,\ l_n,\ \alpha_n : R^d \to \mathbb{R}^+;\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

bezeichnet man als „Auffüllschema“:

$$\begin{aligned}
r_n(x) &:= \begin{cases} (r-h)^+(x), & \textit{falls } n = 0 \\ (\mu * r_{n-1} - p_{n-1})^+(x), & \textit{falls } n > 0 \end{cases} \\
p_n(x) &:= \begin{cases} (h-p_0)^-(x), & \textit{falls } n = 0 \\ (\mu * r_{n-1} - p_{n-1})^-(x), & \textit{falls } n > 0 \end{cases} \\
l_n(x) &:= \begin{cases} h(x) - p_0(x), & \textit{falls } n = 0, \\ p_{n-1}(x) - p_n(x), & \textit{falls } n > 0 \end{cases} \\
\alpha_n(x) &:= \begin{cases} \frac{r_n(x)}{r_n(x)+l_n(x)} & , \textit{falls } r_n(x) > 0 \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

2. *Sei ferner*

$$c_n(x) := \begin{cases} -\log(\alpha_n(x)), & \textit{falls } r_n(x) > 0, \\ +\infty, & \textit{falls } r_n(x) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Zur Anschauung stelle man sich die Gesamtheit der zufälligen Positionen der Irrfahrt zum Zeitpunkt $n = 0$ als eine Sandmasse mit einem Profil vor, die dem Graphen $\mathfrak{G}(r)$ von r entspricht. Unterhalb der Sandmasse befinde sich ein Loch, das im Profil dem Graphen $\mathfrak{G}(-h)$ der Funktion $-h$ nachgebildet ist. Nun fällt gerade soviel Sand in das Loch, wie hineinpaßt. Die verbleibende Sandmasse ist gemäß dem Graphen von r_0 verteilt. Das etwas verkleinerte Loch weist ein Profil der Form $\mathfrak{G}(-p_0)$ auf. Nun wird die Sandmasse nach dem Verteilungsgesetz μ gestreut. So entsteht ein Profil der Form

$\mathfrak{G}(\mu * r_0)$. Diese neu verteilte Sandmasse fällt in das verkleinerte Loch. Durch sukzessives Einfüllen, Streuen und erneutes Einfüllen wird die Gesamtmasse oberhalb des Lochs verkleinert. Der Bewegung eines einzelnen Sandkorns im Laufe der Zeit entspricht ein zufälliger Pfad . Sobald das Sandkorn in das Loch fällt, wird der Pfad gestoppt.

Satz 3.1.1 *Sei $d \in 1, 2$. Sei μ eine Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ mit Rekurrenzmenge*

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d.$$

Seien σ und ζ absolut stetige Verteilungen auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, eine Filtration $\{\mathcal{F}_n; n \in \mathbb{N}_0\}$, eine endliche Stoppzeit τ, und eine adaptierte Irrfahrt $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit μ-verteilten Zuwächsen und Startverteilung σ, so daß

$$S_\tau(P) = \zeta.$$

Beweis: Sei r eine Dichte der Startverteilung σ, und h eine Dichte der Zielverteilung ζ. Seien

$$\{r_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}, \{\ p_n\ n \in \mathbb{N}_0\}\{\ \alpha_n\ n \in \mathbb{N}_0\}, \{\ l_n\ n \in \mathbb{N}_0\},\ \text{und}\ \{c_n\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

die Folgen, die nach dem Auffüllschema aus r, h und μ hervorgehen. Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften für $n \in \mathbb{N}_0$:

1. $0 \leq \sum_{i=0}^n l_i \leq h$
2. $r_0 + l_0 = r$ und $r_n + l_n = \mu * r_{n-1}$ für $n \geq 1$
3. $\int r_n(x) + \sum_{i=0}^n l_i(x) dx = \int r(x) dx$
4. $\{r_n = 0\} \supseteq \{\sum_{i=0}^n l_i < h\}$
5. $\{p_n > 0\} = \{\sum_{i=0}^n l_i < h\}$
6. $c_n \geq 0$

Zu 1: Es ist

$$l_i = p_{i-1} - p_i \geq\ 0 \text{ für jedes } i \in \mathbb{N}.$$

In der Tat, denn im Falle $p_i > 0$ gilt

$$p_i = p_{i-1} - \mu * r_{i-1} < p_{i-1}.$$

Ferner ist

$$\sum_{i=0}^n l_i = h - p_n \leq h.$$

Hieraus folgen ebenfalls 4 und 5 unmittelbar. Formal lassen sich 2 und 3 leicht mittels vollständiger Induktion verifizieren. Die folgenden Überlegungen dienen dem intuitiven Verständnis:

- Der Wert $l_n(x)$ gibt die Menge an Sand an, die der im n-ten Schritt im Punkte x in das Loch eingefüllt wird. Der Wert $r_n(x)$ gibt die Menge an Sand an, die an der Stelle x nach dem Einfüllen übrig bleibt. Addiert man beide Werte, so erhält man die Menge an Sand, die sich nach dem Streuen und vor dem Einfüllen im Punkte x angehäuft hat, also $\mu * r_{n-1}$.

- Addiert man zur Sandmasse, die im n-ten Schritt insgesamt übrig geblieben ist, also zu $\int r_n(x)\ dx$, die Gesamtheit der bereits durchgesickerten Masse, also das Integral

  $$\int (\sum_{i=0}^{n} l_i(x))dx,$$

  so erhält man die insgesamt vorhandene Sandmasse $\int r(x)\ dx$.

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Irrfahrt auf Ω mit μ-verteilten Zuwächsen und Startverteilung σ, und Z eine von der Irrfahrt unabhängige, exponentiell verteilte [2] Zufallsvariable. Sei

$$A_n(\omega) := c_0 \circ S_0(\omega) + \ldots + c_n \circ S_n(\omega) \tag{3.3}$$

und

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0; A_n(\omega) > Z(\omega)\}, & \text{falls die Menge nichtleer ist,} \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{F}_n$ die σ-Algebra, die von den Zufallsvariablen $S_0, \ldots, S_n$ und Z erzeugt wird. Die Familie

$$\{\mathcal{F}_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

bildet eine Filtration. Die Zufallsvariable τ ist offensichtlich eine bezüglich dieser Filtration adaptierte Stoppzeit. Da die Folge $\{A_n(\omega); n \in \mathbb{N}_0\}$ für jedes $\omega \in \Omega$ monoton wachsend ist, gilt

$$\tau(\omega) > n \quad \text{genau dann, wenn} \quad A_n(\omega) \leq Z(\omega).$$

Daher gilt für P-fast-alle $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} P\left(\tau > n | S_0, S_1 \ldots\right)(\omega) &= P\left(A_n \leq Z | S_0, S_1 \ldots\right)(\omega) \\ &= P(\omega' \in \Omega; A_n(\omega) \leq Z(\omega')) \end{aligned}$$

[2] d. h. $P(Z > t) = e^{-t}\ \forall t \geq 0$

Ist $A_n(\omega)$ endlich, so gilt, da Z exponentiell verteilt ist,

$$\begin{aligned} P(\omega' \in \Omega; A_n(\omega) \le Z(\omega')) &= exp\,(-A_n(\omega)) \\ &= \alpha_0(S_0)(\omega) \cdot \ldots \cdot \alpha_n(S_n(\omega)). \end{aligned}$$

Falls $A_n(\omega) = +\infty$, verschwindet der Term

$$P(\omega' \in \Omega; A_n(\omega) \le Z(\omega')).$$

Unendlich ist die numerische Zufallsvariable A_n genau dann, wenn eine der Zufallsvariablen $\alpha_0(S_0), \ldots, \alpha_n(S_n)$ verschwindet, so daß auch in diesem Fall

$$P(\tau > n | S_0, \ldots) = \alpha_0(S_0) \ldots \alpha_n(S_n).$$

Somit ist für jede beschränkte und meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{E}\left[f(S_n); \tau > n\right] = \mathbf{E}\left[f(S_n) \cdot \alpha_0(S_0) \ldots \alpha_n(S_n)\right]. \tag{3.5}$$

Hieraus läßt sich die folgende Identität ableiten:

$$\mathbf{E}\left[f(S_n); \tau > n\right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) r_n(x) dx \tag{3.6}$$

Zum Nachweis der Gleichung (3.6) sei zunächst $n = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[f(S_0); \tau > 0\right] &= \mathbf{E}\left[f(S_0) \cdot \alpha_0(S_o)\right] \\ &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^d; r_0(x) > 0\}} r(x) f(x) \frac{r_0(x)}{r_0(x) + l_0(x)} dx \end{aligned}$$

Nach Eigenschaft 2 auf Seite 34 gilt $r_0 + l_0 = r$. Somit gilt auf der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d;\; r_0(x) > 0\}$:

$$r \cdot \alpha_0 = r_0$$

Gleichung (3.6) gilt also für $n = 0$. Unter der Annahme, Gleichung (3.6) sei wahr für ein $n \ge 0$, folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[f(S_n); \tau > n+1\right] &= \mathbf{E}\left[f(S_{n+1}) \alpha_{n+1}(S_{n+1}); \tau > n\right] \\ &= \int f(x) \alpha_{n+1}(x) \mu * r_n(x) dx. \end{aligned}$$

Nun ist $\alpha_{n+1} > 0$ falls $r_{n+1} > 0$. Folglich läst sich die Integrationsmenge auf der rechten Seite der obigen Identiät auf $\{r_{n+1} > 0\}$ beschränken, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Beachtet man außerdem, daß nach Eigenschaft 2

$$\mu * r_n = r_{n+1} + l_{n+1},$$

erhält man die folgende Identität:

$$\begin{aligned}\int f(x)\alpha_{n+1}(x)\mu * r_n(x)dx &= \int_{\{r_{n+1}>0\}} f(x)\frac{r_{n+1}}{r_{n+1}+l_{n+1}}\mu * r_n(x)\ dx \\ &= \int f(x)r_{n+1}(x)dx\end{aligned}$$

Gleichung (3.6) gilt somit für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Aus (3.6) folgt wiederum

$$\mathbf{E}\left[f(S_n); \tau = n\right] = \int f(x)l_n(x)dx \tag{3.7}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, denn es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[f(S_n); \tau = n\right] &= \mathbf{E}\left[f(S_n); \tau > n-1\right] - \mathbf{E}\left[f(S_n); \tau > n\right] \\ &= \int f(x) \cdot \left(\mu * r_{n-1}(x) - r_n(x)\right) dx.\end{aligned}$$

Nun ist aber $\mu * r_{n-1} - r_n = l_n$, woraus in der Tat (3.7) folgt. Es gilt insbesondere:

$$P(\tau = n) = \int l_n(x)\ dx \tag{3.8}$$

Sei nun

$$S_\tau := \begin{cases} S_n, & \text{falls } \tau = n, n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{falls } \tau = +\infty. \end{cases}$$

Ist die Stoppzeit τ fast sicher endlich, so besitzt S_τ die absolut stetige Verteilung

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} l_n\right)\lambda^d.$$

Sei nun

$$E := \left\{x \in \mathbb{R}^d; \sum_{i=0}^{\infty} l_i(x) < h(x)\right\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}P(\tau = +\infty) &= 1 - \sum_{i=0}^{\infty} P(\tau = i) \\ &= \int h(x)\ dx - \int \sum_{i=0}^{\infty} l_i(x)\ dx \\ &= \int_E \left(h(x) - \sum_{i=0}^{\infty} l_i(x)\right)\ dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Wir zeigen nun die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. $\qquad P(\tau < +\infty) = 1$ und $S_\tau(P) = h\lambda^d$

2. $\qquad P(\tau < +\infty) = 1$

3. Die Menge E ist eine Nullmenge

Falls Aussage 2 gilt, so ist die Menge E nach Gleichung (3.9) eine Nullmenge. Es gilt also auch Aussage 3. Wenn aber E eine Nullmenge ist, sind die beiden Maße

$$h\lambda^d \quad \text{und} \quad (\sum_{k=0}^{\infty} l_k)\lambda^d$$

identisch. Die Funktion h ist also ebenfalls eine Dichte der Verteilung $S_\tau(P)$. Somit gilt auch Aussage 1.
Gilt Aussage 3, so verschwindet nach Gleichung (3.9) die Wahrscheinlichkeit $P(\tau = +\infty)$. Die Aussagen 1, 2 und 3 sind in der Tat äquivalent.

Es sei angenommen, daß E positives Lebesgue-Maß besitzt. Da die gesamte Menge $\mathbb{R}^d$ Rekurrenzmenge der Irrfahrt ist, ist somit die erste Eintrittszeit der Irrfahrt in die Menge E, die Stoppzeit τ_E, P-fast-sicher endlich. Da für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} P(\tau > n) &= P(\tau > n \geq \tau_E) + P(\tau > n; \tau_E > n) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} P(\tau > k;\ S_k \in E) + P(\tau_E > n), \text{ folgt somit} \\ P(\tau = +\infty) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau > k;\ S_k \in E). \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der letzten Ungleichung gilt nach (3.6) die folgende Identität:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\tau > k;\ S_k \in E) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E r_k(x)dx$$

Nun verschwinden aber sämtliche Funktionen $\{r_k;\ k \in \mathbb{N}_0\}$ auf der Integrationsmenge E, da nach Eigenschaft 4 auf Seite 34 die folgenden Mengenbeziehungen gelten:

$$E \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \{\sum_{i=0}^{n} l_i < h\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \{r_n = 0\} \tag{3.10}$$

Es folgt

$$P(\tau = +\infty) = 0.$$

Dann kann aber E keine Menge positiven Lebesgue-Maßes sein. Da jedoch $\lambda^d(E) = 0$ gleichbedeutend ist mit der Aussage 1, ist Satz 3.1.1 bewiesen.

□

Definition 3.1.2 *Sei $d \in \{1,2\}$ und μ eine Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ mit Rekurrenzmenge $\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$. Seien r und h zwei Wahrscheinlichkeitsdichten auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$. Seien $\{r_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}, \{p_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}, \{l_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$, und $\{\alpha_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ die Folgen, die nach dem Auffüllschema aus r, h und μ hervorgehen. Sei außerdem $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\{\mathcal{F}_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Filtration, τ eine fast sicher endliche Stoppzeit und $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine adaptierte Irrfahrt mit $\mu-$verteilten Zuwächsen und Startverteilung $r\lambda^d$, mit*

i) $S_\tau(P) = h\lambda^d$

ii) $P(\tau > n | S_0, S_1, \ldots) = \prod_{i=0}^n \alpha_i(S_i)$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Dann bezeichne $(\Omega^{r,h}, \mathfrak{A}^{r,h}, P^{r,h})$ die Spur der Menge $\{\tau < \infty\}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

b) Zu einer integrablen Funktion Y auf $(\Omega^{r,h}, \mathfrak{A}^{r,h}, P^{r,h})$ bezeichne

$$\mathbf{E}^{r,h}[Y] := \int_{\Omega^{r,h}} Y(\omega)\ dP^{r,h}(\omega).$$

Aus dem Beweis von Satz 3.1.1 geht auch folgendes hervor:

Bemerkung 3.1.1 *Seien $r, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ zwei Wahrscheinlichkeitsdichten. Sei ferner $(\Omega^{r,h}, \mathfrak{A}^{r,h}, P^{r,h})$,$\{\mathcal{F}_n; n \in \mathbb{N}_0\}$, τ und $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ gemäß Definition 3.1.2. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P^{r,h}(S_n \in \cdot;\ \tau > n) &= r_n \lambda^d(\cdot) \\ P^{r,h}(S_n \in \cdot;\ \tau = n) &= l_n \lambda^d(\cdot). \end{aligned}$$

Lemma 3.1.1 *Sei μ ein nichtsinguläres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d, \lambda^d)$, und $L > 0$. Seien $r, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ zwei Wahrscheinlichkeitsdichten, und sei $(\Omega^{r,h}, \mathfrak{A}^{r,h}, P^{r,h})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $\{\mathcal{F}_n; n \in \mathbb{N}_0\}$, einer Stoppzeit τ und einer Irrfahrt $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ gemäß Definition 3.1.2. Ist h eine beschränkte Funktion mit beschränktem Träger $\{h > 0\}$, so existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von μ und von L abhängt, so daß für alle Borelmengen $M \in \mathfrak{B}^d$ mit*

$$\sup\{\|x - y\|; x \in \mathbb{R}^d, h(x) > 0, y \in M\} < L$$

gilt:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{i=0}^{\tau-1} \chi_M(S_i)\right] \leq C \cdot \|h\|_\infty$$

Beweis :
Seien $\{r_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\{l_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ die Folgen, die durch Anwendung des Auffüllschemas aus der Startdichte r, der Zieldichte h und der Zuwachsverteilung μ hervorgehen. Aus Bemerkung 3.1.1 folgt:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{i=0}^{\tau-1} \chi_M(S_i)\right] = \int_M \sum_{i=0}^{\infty} r_i(x)\ dx$$

Sind die Maße $r\lambda^d$ und $h\lambda^d$ identisch, so ist die Aussage des Lemmas trivial. In diesem Fall verschwinden nämlich alle r_i für $i \in \mathbb{N}_0$ fast sicher. Dann gilt aber

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{i=0}^{\tau-1} \chi_M(S_i)\right] = 0.$$

Es sei nun angenommen, daß $r\lambda^d$ und $h\lambda^d$ nicht identisch sind. Sei

$$Z_n := \left\{x \in \mathbb{R}^d; \sum_{i=0}^{n} r_i(x) = 0\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d; h(x) > 0\right\}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Die Menge Z_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Menge positiven Lebesgue-Maßes, wie sich induktiv zeigen läßt:
Da die beiden Maße $r\lambda^d$ und $h\lambda^d$ nicht identisch sind, ihre Gesamtmassen jedoch übereinstimmen, muß jede der beiden Mengen $\{r < h\}$ und $\{r > h\}$ jeweils postives Lebesgue-Maß besitzen. Die Menge $\{r < h\}$ ist aber nichts anderes als die Menge Z_0.
Es sei nun angenommen, $\lambda^d(Z_{n-1})$ wäre positv für ein $n \geq 1$. Ist

$$\int r_n(x)dx = 0,$$

so gilt, da $Z_n = Z_{n-1} \cap \{r_n = 0\}$:

$$\lambda^d(Z_n) = \lambda^d(Z_{n-1})$$

Da nach Induktionsannahme die Menge Z_{n-1} positives Lebsgue-Maß besitzt, hat in diesem Fall auch Z_n positives Lebesgue-Maß.
Für den Fall, daß $\int r_n(x)\ dx > 0$ gilt, betrachte man die Menge

$$Z'_n = \left\{x \in \mathbb{R}^d;\ \sum_{i=0}^{n} l_i(x) < h(x)\right\}.$$

Diese Menge ist nach Eigenschaft 4 auf Seite 34 in der Menge Z_n enthalten. Nach Eigenschaft 3 gilt:

$$\begin{aligned}\int r_n(x)\ dx &= \int (h(x) - \sum_{i=0}^{n} l_i(x))\ dx \\ &= \int_{\{h>0\}} (h(x) - \sum_{i=0}^{n} l_i(x))\ dx\end{aligned}$$

Wäre $\lambda^d(Z'_n) = 0$, so würde die rechte Seite der obigen Gleichung verschwinden. Dies widerspricht jedoch der Annahme, daß r_n ein positives Lebesgue-Integral besitzt. Die Menge Z_n besitzt also auch in dem Fall positives Lebesgue-Maß.

Zu einer nichtnegativen, meßbaren Funktion φ bezeichne $T\varphi$ die Faltung von μ mit φ. Ferner sei für $k \in \mathbb{N}$

$$T^k\varphi$$

die k-fache Anwendung von T auf φ. Die folgende Identität für $k, n \in \mathbb{N}$ läßt sich durch einen Induktionsbeweis verifizieren:

$$T^k\left(\sum_{i=0}^{n} r_i\right) = \sum_{i=k}^{n+k} r_i + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{n} T^j l_{i+k-j} \tag{3.11}$$

Zum Nachweis von (3.11) sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig.
1. Da nach Eigenschaft 2) für jedes $i \in \mathbb{N}_0$

$$Tr_i = r_{i+1} + l_{i+1}$$

gilt, folgt unmittelbar die Aussage für $k = 1$.
2. Es sei angenommen, Identität (3.11) gelte für eine $k \geq 1$. Dann folgt mit der Eigenschaft 2) des Auffüllschemas:

$$\begin{aligned} T^{k+1}\left(\sum_{i=0}^{n} r_i\right) &= T\left(\sum_{i=k}^{n+k} r_i + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{n} T^j l_{i+k-j}\right) \\ &= \sum_{i=k+1}^{n+1+k} r_i + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{n} T^{j+1} l_{i+k-j} + \sum_{i=k+1}^{n+1+k} l_i \\ &= \sum_{i=k}^{n+k+1} r_i + \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{n} T^j l_{i+k+1-j}, \end{aligned}$$

Identität (3.11) ist somit verifiziert.
Man betrachte nun Gleichung (3.11). Da die Summe der $\{l_i;\ i \in \mathbb{N}_0\}$ nicht größer ist als h, wird der zweite Summand auf der rechten Seite von (3.11) durch $k \cdot \|h\|_\infty$ majorisiert. Ist außerdem speziell $x \in Z_{n+k}$, so verschwindet der Term

$$\sum_{i=k}^{n+k} r_i(x).$$

Für $x \in Z_{n+k}$ folgt also:

$$T^k\left(\sum_{i=0}^{n} r_i\right)(x) \leq k\ \|h\|_\infty \tag{3.12}$$

Zu einem Maß m auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ bezeichne m' die Dichte seines absolut stetigen Anteils. Es gilt für die linke Seite der Identiät (3.12):

$$\begin{aligned} T^k\left(\sum_{i=0}^n r_i\right)(x) &= \int \left(\sum_{i=0}^n r_i(x-y)\right) d\mu_k(y) \\ &\geq \int \left(\sum_{i=0}^n r_i(x-y)\right) \mu_k'(y)\ dy \\ &= \int \left(\sum_{i=0}^n r_i(y)\right) \mu_k'(x-y)\ dy \\ &\geq \int_M \left(\sum_{i=0}^n r_i(y)\right) \mu_k'(x-y)\ dy \end{aligned}$$

Wir behaupten nun:

Zu $L > 0$ existiert ein Index $K \in \mathbb{N}$ und ein $\alpha > 0$ so daß für Kugel $B(0; L)$ mit Radius L um den Ursprung folgendes gilt:

$$\mu_K' > \alpha\chi_{B(0;L)}$$

Es sei daran erinnert, daß die Zuwachsverteilung μ nichtsingulär ist und die Rekurrenzmenge $\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$ besitzt.
Zum Beweis dieser Behauptung sei $t > 0$ so, daß

$$\int \mu'(y) \wedge t\ dy > 0.$$

Sei ferner g das Faltungsprodukt der Funktion

$$\min\{\mu'(y), t\}$$

mit sich selbst. Die Funktion g ist als Faltungsprodukt zweier integrabler und beschränkter Funktionen stetig. Wegen $\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$ existiert folglich ein $\delta > 0$, so daß

$$\sum_{i=1}^\infty \mu_i * g = +\infty$$

in einer Umgebung $B(0; \delta)$ mit Radius δ um den Ursprung. Daher existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $\alpha > 0$, so daß für die Funktion $f_0 := \mu_k * g$ gilt:

$$f_0 \geq \alpha\chi_{B(0,\delta)}$$

Sei nun

$$f_1 := f_0 * f_0.$$

Es existiert ein $\alpha_1 > 0$, so daß die Funktion f_1 in einer Kugel mit Radius $\frac{3}{2}\delta$ um den Ursprung die Konstante α_1 majorisiert. Ist

$$f_2 = f_1 * f_1,$$

so existiert $a_2 > 0$, so daß

$$f_2 > \alpha_2$$

auf der Kugel mit Radius $(\frac{3}{2})^2\delta$ um den Ursprung. Man erhält induktiv eine Folge $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ mit der Eigenschaft, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine positive Konstante α_n existiert, die auf der Kugel mit Radius $(\frac{3}{2})^n\delta$ um den Ursprung eine Minorante von f_n ist. Für $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{3}{2}\right)^N > L$$

existiert daher ein $\alpha_N > 0$, so daß f_N auf der Kugel mit Radius L um den Ursprung mindestens α_N beträgt. Für

$$K := 2^N(k+2)$$

gilt aber

$$f_N \le \mu'_K.$$

Es existiert also in der Tat ein Index $K \in \mathbb{N}$, so daß μ'_K auf $B(0, L)$ eine positive Minorante α besitzt.

Ist $x \in Z^n_{n+K}$ und $y \in M$, so ist der Abstand beider Punkte zueinander, der Wert $\|x - y\|$, nach Voraussetzung des Lemmas nicht größer als L. Daher folgt :

$$\begin{aligned} T^K\left(\sum_{i=0}^{n} r_i\right)(x) &\ge \int_M \sum_{i=0}^{n} r_i(y) \cdot \mu'_K(x-y)dy \\ &\ge \alpha \int_M \sum_{i=0}^{n} r_i(y)\ dy \end{aligned}$$

Mit $C := K/\alpha$ ist also

$$\int_M \sum_{i=0}^{n} r_i(x)\ dx \le C\|h\|_\infty \ \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{i=0}^{\tau-1} \chi_M(S_i)\right] = \lim_{n\to\infty} \int_M \sum_{i=0}^{n} r_i(x) \le C\|h\|_\infty$$

$\square$

Falls die Zieldichte h beschränkt ist und einen beschränkten Träger besitzt, so impliziert Lemma 3.1.1 insbesondere, daß die Funktion

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i$$

lokal integrierbar, und somit auch fast sicher endlich ist.

Satz 3.1.2 *Sei μ eine nichtsinguläre Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ mit Rekurrenzmenge*

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d, \textit{ wobei } d \in \{1, 2\}.$$

Sei $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Irrfahrt mit μ-verteilten Zuwächsen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.
Dann existiert zu jedem beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}^d$ eine positive Konstante B mit der folgenden Eigenschaft:
Für jede meßbare und beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

i) $\{x \in \mathbb{R}^d;\ f(x) \neq 0\} \subseteq I$

ii) $\displaystyle\int f(x)\ dx = 0$

gilt:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left| \int \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i(\omega)) \right) dP(\omega) \right| \leq B \cdot \|f\|_\infty$$

Beweis:
1. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, daß

$$\int f^+(x)\ dx = 1 \text{ gilt.}$$

2. Es genügt, die Aussage des Satzes für Irrfahrten mit festem Startpunkt zu zeigen. Ist nämlich $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Irrfahrt mit einer beliebigen Startverteilung, so gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \Big| S_0\right)\right]$$

Gilt die Aussage des Satzes für Irrfahrten mit festem Startpunkt, so folgt insbesondere für den bedingten Mittelwert:

$$\left|\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \Big| S_0\right)\right| \leq B\ \|f\|_\infty$$

Für den Mittelwert dieser bedingten Erwartung gilt dann auch:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}\left[\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right]\right| &\leq \mathbf{E}\left[\left|\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\Big| S_0\right)\right|\right] \\ &\leq B\,\|f\|_\infty \end{aligned}$$

3. Es genügt ferner, zu zeigen, daß eine Konstante $b > 0$ existiert, so daß für jede Funktion f, die den Bedingungen i) und ii) des Satzes genügt, die folgende Ungleichung für λ^d-fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}_x[f(S_i)]\right| \leq b\,\|f\|_\infty \tag{3.13}$$

Zu einem Maß ν auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ bezeichne ν' seinen absolut stetigen Anteil, und $\nu^\perp$ seinen singulären Anteil. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$m_n = \sum_{i=0}^{n} \mu_i.$$

Da die Zuwachsverteilung ν einen nicht verschwindenden absolut stetigen Anteil besitzt, existiert eine Konstante $\gamma > 0$, so daß

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n^\perp(\mathbb{R}^d) < \gamma.$$

Sei $\tilde{f} = f(-\cdot)$. Nun ist

$$\mathbf{E}_x\left[\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right] = m_n' * \tilde{f}(-x) + m_n^\perp * \tilde{f}(-x). \tag{3.14}$$

Da

$$\left|m_n^\perp * \tilde{f}(-x)\right| \leq \gamma\|f\|_\infty \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}^d,$$

folgt mit (3.13) und (3.14)

$$\left|m_n' * \tilde{f}(-x)\right| \leq (b+\gamma)\|f\|_\infty \text{ für fast jedes } x \in \mathbb{R}^d.$$

Da die Funktion

$$x \mapsto m_n' * \tilde{f}(x)$$

stetig ist, gilt die obige Ungleichung auch für **jedes** $x \in \mathbb{R}^d$. Somit gilt:

$$\mathbf{E}_x\left[\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right] \leq (b+2\gamma)\|f\|_\infty \text{ für fast jedes } x \in \mathbb{R}^d$$

4. Seien

$$r(x) = \tilde{f}^+(x) \quad \text{und} \quad h(x) = \tilde{f}^-(x).$$

Seien

$$\{r_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \{p_n;\ n \in \mathbb{N}_0\} \text{ und } \{l_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

die Folgen, die nach dem Auffüllschema aus der Startdichte r und der Zieldichte h hervorgehen. Seien ferner

$$\{r'_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}\ ,\ \{p'_n;\ n \in \mathbb{N}_0\} \text{ und } \{l'_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

die Folgen, die ebenfalls aus dem Auffüllschema hervorgehen, diesmal aber mit der Startdichte h und der Zieldichte r. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelten die folgenden beiden Identitäten für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{i=0}^{n} T^i r(x) = \sum_{i=0}^{n} r_i(x) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} T^k l_i(x) \tag{3.15}$$

$$\sum_{i=0}^{n} T^i r'(x) = \sum_{i=0}^{n} r'_i(x) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} T^k l'_i(x) \tag{3.16}$$

Es genügt, Identität (3.15) nachzuweisen. Dazu betrachte man eine Irrfahrt $\{\bar{S}_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{A}}, \bar{P})$ mit einer Stoppzeit $\bar{\tau}$, so daß folgendes gilt:

i) $\bar{S}_0(\bar{P}) = r\lambda^d$
ii) $\bar{P}(\bar{S}_n \in \cdot;\ \bar{\tau} > n) = r_n\lambda^d$

Die Existenz einer solchen Irrfahrt wurde bereits im Beweis von Satz 3.1.1 diskutiert. Die Funktion $T^k r$ ist für $k \in \mathbb{N}_0$ gerade die Dichte der Verteilung $\bar{S}_k(\bar{P})$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}(T^k r)\lambda^d &= \bar{P}(\bar{S}_k \in \cdot;\ \bar{\tau} > k) + \sum_{i=0}^{k} \bar{P}(\bar{S}_k \in \cdot;\ \bar{\tau} = i) \\ &= r_k\lambda^d + \sum_{i=0}^{k} (T^{k-i} l_i)\lambda^d\end{aligned}$$

Identität (3.15) ergibt sich somit durch Summation nach k.
Ferner gilt nach Satz 3.1.1 fast sicher:

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_i = h$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} l'_i = r$$

Wegen (3.15) und (3.16) und den beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} T^k l_i &\leq \sum_{k=0}^{n} T^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} l_i\right) \\ \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} T^k l_i' &\leq \sum_{k=0}^{n} T^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} l_i'\right) \end{aligned}$$

gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} T^i r(-x) - \sum_{i=0}^{n} T^i h(-x)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty}(r_i(-x) + r_i'(-x)) \tag{3.17}$$

Andererseits ist für jedes $x \in \mathbb{R}^d$

$$\sum_{i=0}^{n} T^i r(-x) - \sum_{i=0}^{n} T^i h(-x) = \mathbf{E}_x\left[\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right].$$

Zum Nachweis des Satzes ist also die Existenz einer Konstanten $b > 0$ zu verifizieren, die nur von dem Intervall I und der Zuwachsverteilung μ abhängt, so daß fast sicher gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(r_i + r_i') \leq b \cdot \|f\|_\infty$$

5. Hierzu ist zu zeigen, daß die Funktion

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty}(r_i + r_i')$$

fast sicher endlich ist und die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$T\varphi = \varphi \tag{3.18}$$

Nach Lemma 3.1.1 sind die Funktionen $\sum_{i=0}^{\infty} r_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} r_i'$ lokal integrabel und damit insbesondere fast sicher endlich. Es gelten ferner die folgenden Identitäten für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Spezialfälle der Identiät (3.11) sind:

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=0}^{n} r_i\right) &= \sum_{i=0}^{n} r_i + r_{n+1} - r_0 + \sum_{i=0}^{n+1} l_i \\ T\left(\sum_{i=0}^{n} r_i'\right) &= \sum_{i=0}^{n} r_i' + r_{n+1}' - r_0' + \sum_{i=0}^{n+1} l_i' \end{aligned}$$

Durch Grenzwertbildung für $n \longrightarrow \infty$ erhält man schließlich Identität (3.18). Nach Satz A.1.1 im Anhang A.1 ist φ fast sicher gleich einer endlichen Konstanten β.

6. Es bleibt die Existenz einer Konstanten b nachzuweisen, die unabhängig von f ist, für die gilt:

$$\beta \leq b \cdot \|f\|_\infty$$

Nach Lemma 3.1.1 existiert eine Konstante $C > 0$, die lediglich vom Durchmesser des Intervalls I abhängt, so daß folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \int_I \sum_{i=0}^{\infty} r_i(y)\ dy &\leq C\|f\|_\infty \\ \int_I \sum_{i=0}^{\infty} r_i'(y)\ dy &\leq C\|f\|_\infty \end{aligned}$$

Da die Summe $\sum_{i=0}^{\infty} r_i(y) + \sum_{i=0}^{\infty} r_i'(y)$ fast sicher identisch der Konstanten β ist, folgt:

$$\beta \leq \frac{2C}{\lambda^d(I)}\|f\|_\infty$$

Mit

$$b = \frac{2C}{\lambda^d(I)}$$

gilt also fast sicher

$$\sum_{i=0}^{\infty}(r_i(y) + r_i'(y)) \leq b\|f\|_\infty,$$

was zu beweisen war.

$\square$

Bemerkungen zum Auffüllschema:

Man betrachte Ungleichung (3.17). Nach dieser Ungleichung gilt für Borelmengen A:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(P_r(S_k \in A) - P_h(S_k \in A))\right| \leq \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1}\chi_A(S_k)\right] + \mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1}\chi_A(S_k)\right]$$

Bei einer Rekurrenten Irrfahrt mit Rekurrenzmenge $\mathbb{Z}^d$ statt $\mathbb{R}^d$ erhält man eine ganz ähnliche Ungleichung, wenn man beispielsweise $r\lambda^d$ durch das Dirac–Maß in einen Punkt $x \in \mathbb{Z}^d$ und $h\lambda^d$ durch das Dirac–Maß im Ursprung ersetzt (Vgl. Beweis zu Lemma 2.2.1 auf Seite 16):

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(P_x(S_k = y) - P_0(S_k = y)\right| \leq \mathbf{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_{\{0\}}-1}\chi_{\{y\}}(S_k)\right] + \mathbf{E}_0\left[\sum_{k=0}^{\tau_{\{x\}}-1}\chi_{\{y\}}(S_k)\right]$$

Gewissermaßen ist die Stoppzeit τ, die aus dem Auffüllschema hervorgeht, eine Verallgemeinerung der ersten Eintrittszeit in einen Punkt.

3.2. Ein Green-Operator im rekurrenten Fall

Sei μ eine Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \mathbb{N}$. Zu einer beschränkten Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{P}g(x) &:= \int g(x+y)\, d\mu(y) \\ \text{und } \triangle g(x) &:= g - \mathcal{P}g(x). \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{P}^n$ die Identität falls $n = 0$ und die n-te Iterierte von $\mathcal{P}$ falls $n > 0$. Für $n > 0$ gilt:

$$\mathcal{P}^n g(x) = \int g(x+y)\, d\mu^{*n}(x).$$

Nun stellt sich die Frage, ob es zu einer gegebenen beschränkten Funktion $h : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ eine Funktion g gibt, mit

$$\triangle g = h. \tag{3.19}$$

Diese Frage wird in der Literatur auch als das „Poisson-Problem“ bezeichnet. Ist $h \equiv 0$, bezeichnet man alle Funktionen g, die (3.19) erfüllen, als **harmonisch** .
Ist die Rekurrenzmenge von μ leer, so ist eine Lösung von (3.19) wenigstens lokal leicht anzugeben: Ist nämlich Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^d$ und

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{falls } x \in \Omega \\ 0, & \text{falls } x \notin \Omega, \end{cases}$$

so ist die Funktion

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n \bar{h}$$

eine beschränkte Funktion mit der Eigenschaft

$$\triangle g = \bar{h}.$$

Ist hingegen die Rekurrenzmenge von μ nichtleer, so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n \bar{h}$$

im allgemeinen unendlich.

Ein natürlicher Ansatz zu einer Lösung von (3.19) im rekurrenten Fall wäre, falls möglich, die Angabe einer reellen Zahlenfolge $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ so daß

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}(\bar{h}(S_i)) - A_n;\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

konvergiert. Abgesehen von dem Poisson-Problem ist dies auch für das Verständnis rekurrenter Irrfahrten von Interesse, weil die Angabe einer solchen Folge $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ Aufschluss über das Wachstum der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(\bar{h}(S_i))$ gibt.
Für den Fall, daß μ einen nichtsingulären Anteil besitzt, gilt der folgende Satz:

Satz 3.2.1 *Sei $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ eine rekurrente Irrfahrt im Zustandsraum $\mathbb{R}^d$; $d \in \{1,2\}$, mit nichtsingulärer Zuwachsverteilung. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Menge

$$\mathcal{T}(f) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ f(x) \neq 0\}$$

ist beschränkt.

(ii) Es gilt

$$\int f(x)\ dx = 0.$$

Dann folgt:

1. *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(f(S_i))$ *ist konvergent.*

2. *Es existiert ein $B \geq 0$, so daß*

$$\sup_{N \in \mathbb{N}_0} \left| \sum_{n=0}^{N} \mathbf{E}(f(S_n)) \right| \leq \|f\|_\infty B. \tag{3.20}$$

Die Konstante B hängt nur vom Durchmesser des Trägers $\mathcal{T}(f)$ ab.

Beachtet man, daß

$$f(\cdot) = \bar{h}(\cdot + x) - \bar{h}(\cdot)$$

eine Funktion ist, die den Voraussetzungen des obigen Satzes genügt, so erkennt man:

Bemerkung 3.2.1 *Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ existiert*

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}^i \bar{h}(x) - \sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}^i \bar{h}(0) \right).$$

Für die Funktion g gilt:

$$\triangle g = h$$

Bemerkung 3.2.2 *Auf die Voraussetzung einer nichtsingulären Zuwachsverteilung in Satz 3.2.1 kann nicht verzichtet werden.*

Beispiel:
Man betrachte die Verteilung

$$\mu = \frac{1}{4}(\delta_{\sqrt{2}} + \delta_{-\sqrt{2}} + \delta_1 + \delta_{-1}),$$

die bereits auf Seite 7 diskutiert wurde. Diese Verteilung ist atomar. Ihre Rekurrenzmenge ist gleich $\mathbb{R}^1$. Dabei kommt den Punkten aus der additiven Untergruppe

$$G_2 = \{n + \sqrt{2}m;\ n, m \in \mathbb{Z}\}$$

eine besondere Rolle zu: Für jeden Punkt $x \in G_2$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\{x\}) = +\infty.$$

Sei nun

$$\begin{aligned} N &= \{\sqrt{2}\} \\ f &= \chi_N \end{aligned}$$

Die Funktion f ist beschränkt, besitzt einen beschränkten Träger und es gilt $\int f(x)\ dx = 0$.

$$\text{Da} \quad \mathbf{E}(f(S_i)) = \mu_i\{\sqrt{2}\} \quad \text{und} \quad \sqrt{2} \in G_2,$$

gilt jedoch

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}(f(S_i)) = +\infty.$$

Beweis von Satz 3.2.1:

Die Maximalungleichung (3.20) ist Inhalt von Satz 3.1.2. Sie spielt im Beweis der Konvergenzaussage eine wesentliche Rolle. Es sei darauf hingewiesen, daß die Konstante B nicht von der Startverteilung abhängt. Es gilt daher für jede Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die den Voraussetzungen von Satz 3.1.2 und Satz 3.2.1 genügt:

$$\sup \left\{ \left| \mathbf{E}_x(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)) \right| \ ; x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N} \right\} \leq B\|f\|_\infty \tag{3.21}$$

Zum Beweis der Konvergenzaussage von Satz 3.2.1 sind einige Hilfssätze notwendig.

Lemma 3.2.1 *Sei μ eine nichtsinguläre Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \{1, 2\}$, mit Rekurrenzmenge*

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d.$$

Sei $\epsilon > 0$. Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\mathbb{R}^d$-wertigen Irrfahrten $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\{S_n^a, n \in \mathbb{N}_0\}, a \in \mathbb{R}^d$, die folgende Eigenschaften besitzen:

a) Ihre Zuwächse sind unabhängig und μ-verteilt. Für die Startverteilungen gilt:

$$S_0(P) = \delta_0, \quad S_0^a(P) = \delta_a$$

b) Die Stoppzeiten

$$\tau^a(\omega) := \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}_0, \|S_k(\omega) - S_k^a(\omega)\| < \epsilon\} & , \quad \textit{falls die Menge nichtleer ist,} \\ \infty, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

sind P-fast sicher endlich für jedes $a \in \mathbb{R}^d$.

c) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\left\| S_{\tau^a+n} - S^a_{\tau^a+n} \right\| < \epsilon \quad \textit{P-fast sicher}$$

d) Es gilt für jedes $T > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\|a\|\le T} P(\tau^a > n) \right) = 0$$

Beweis:
Sei $N > 0$, so daß die Kugel

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| < N\}$$

positives $\mu-$Maß besitzt und die Einschränkung von μ auf K nichtsingulär ist. Sei

$$\begin{aligned} p_0 \quad &: \quad \mathfrak{B}^d \otimes \mathfrak{B}^d \to [0,1] \\ p_0(\Lambda) \quad &:= \quad \frac{1}{\mu(K)} \mu \otimes \mu(\Lambda \cap (K \times K)) + \int_{K^c} \delta_\Lambda((x,x))\, d\mu(x) \\ & \quad\quad \text{für } \Lambda \in \mathfrak{B}^d \otimes \mathfrak{B}^d. \end{aligned}$$

Ein Paar von Zufallsvariablen (X, Y) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^0, \mathfrak{A}^0, P^0)$ mit gemeinsamer Verteilung

$$(X, Y)(P^0) = p_0$$

besitzt folgende Eigenschaften:

$$i) \quad X(P^0) = Y(P^0) = \mu$$

$$\begin{aligned} ii) \quad & P^0(\|X\| > N; Y \neq X) = 0 \\ & P^0(\|Y\| > N; Y \neq X) = 0 \end{aligned}$$

Ist $A \in \mathfrak{B}^d$, so gilt nämlich:

$$\begin{aligned} P^0(X \in A) &= p_0(A \times \mathbb{R}^d) \\ &= \frac{1}{\mu(K)} \mu \otimes \mu \ (AK \times K) + \int_{K^c} \chi_{A \times \mathbb{R}^d}(x,x) \ d\mu(x) \\ &= \mu(AK) + \mu(AK^c) \end{aligned}$$

Entsprechend zeigt man $P^0(Y \in A) = \mu(A)$.
Sei

$$D = \{(x,x); \ x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Es gilt

$$P^0(\|X\| > N; Y \neq X) = p_0 \left((K^c \times \mathbb{R}^d) \cap D^c \right)$$

Die Menge

$$\Lambda' = (K^c \times \mathbb{R}^d) \cap D^c$$

ist eine Menge aus dem Komplement der Menge $K \times K$. Daher ist

$$p_0(\Lambda') = \int_{K^c} \chi_{\Lambda'}(x,x) \ d\mu(x).$$

Da die Indikatorfunktion der Menge Λ' auf D verschwindet, verschwindet das obige Integral.
Entsprechend zeigt man

$$P^0(\|X\| > N; Y \neq X) = 0.$$

Die Eigenschaften i) und ii) gelten also in der Tat. Dann ist die Differenz $Z = X - Y$ eine beschränkte Zufallsvariable mit Mittelwert

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y) = 0.$$

Ferner ist die Verteilung von Z nichtsingulär.

Sei

$$(\Omega, \mathfrak{A}, P) = (\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d \otimes \mathfrak{B}^d, p_0)^{\mathbb{N}},$$

und sei für $i \in \mathbb{N}$

$$X_i, Y_i \quad : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\begin{aligned} X_i(\omega^1, \omega^2) &= \omega_i^1 \\ Y_i(\omega^1, \omega^2) &= \omega_i^2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\omega^1 &= (\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_i^1, \ldots) \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}} \\
\omega^2 &= (\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_i^2, \ldots) \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}
\end{aligned}
$$

Koordinatenabbildungen. Sei außerdem

$$Z_i = X_i - Y_i.$$

Die $\{Z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ sind unabhängig, gleichverteilt und fast sicher beschränkt mit Mittelwert

$$\mathbf{E}(Z_1) = 0.$$

Bildet man aus ihnen die Folge ihrer Partialsummen

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} Z_i;\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

so erhält man eine rekurrente Irrfahrt mit Rekurrenzmenge $\mathbb{R}^d$. Zu $a \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\tau^a = \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N};\ \| \sum_{i=1}^n Z_i - a\| < \epsilon\}, & \text{falls die Menge nichtleer ist und } \|a\| \geq \epsilon \\ 0, & \text{falls } \|a\| < \epsilon, \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

die erste Eintrittszeit dieser Irrfahrt in die offene Kugel $K(a;\epsilon)$ um den Punkt a mit Radius ϵ. Sei außerdem

$$F_k^a := \{\tau^a \leq k\}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$Y_n^a(\omega) := \begin{cases} a & \text{für } n = 0, \\ X_n(\omega) & \text{für } \omega \in F_{n-1}^a, \\ Y_n(\omega) & \text{für } \omega \notin F_{n-1}^a. \end{cases}$$

Die Folge der $\{Y_n^a;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gerade so konstruiert, daß ihre Glieder nach dem Zeitpunkt τ_a mit $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ übereinstimmen. Im Spezialfall $\|a\| < \epsilon$ gilt

$$Y_n^a = X_n$$

für jedes $n > 0$. Somit ist die Folge der $\{Y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ trivialerweise unabhängig und μ verteilt.
Sei nun aber $\|a\| \geq \epsilon$. Es ist zu zeigen, daß die $\{Y_n^a;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ auch in diesem Fall unabhängig und μ-verteilt sind:

Die Zufallsvariable Y_1^a ist identisch mit Y_1 und damit μ-verteilt. Es sei angenommen, daß die $Y_1^a, \dots, Y_n^a$ für ein $n \geq 1$ unabhängig und μ-verteilt sind. Seien $A_1, \dots, A_{n+1}$ Borelmengen im $\mathbb{R}^d$ und

$$\Lambda := \bigcap_{i=1}^{n} \{Y_i^a \in A_i\}$$

Nach Definition von Y_{n+1}^a ist

$$P(\Lambda; Y_{n+1}^a \in A_{n+1}) = P(\Lambda; F_n^a;\ X_{n+1} \in A_{n+1}) + P(\Lambda; \Omega \setminus F_n^a;\ Y_{n+1} \in A_{n+1}).$$

Nun sind sowohl X_{n+1} als auch Y_{n+1} unabhängig von

$$Y_1^a, \dots, Y_n^a \quad \text{und} \quad F_n^a.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} P(\Lambda; Y_{n+1}^a \in A_{n+1}) &= \mu(A_{n+1})\Big(P(\Lambda;\ F_n^a) + P(\Lambda;\ \Omega \setminus F_n^a)\Big) \\ &= \mu(A_{n+1})\mu(A_n)\dots\mu(A_1) \end{aligned}$$

Folglich sind auch die $Y_1^a, \dots, Y_{n+1}^a$ unabhängig und μ-verteilt.

Seien

$$\begin{aligned} S_n^a &:= \sum_{i=0}^{n} Y_i^a \\ \text{und } S_n &:= \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i, & \text{für } n > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Folge $\{S_n^a;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Irrfahrt mit Startpunkt a, die die Irrfahrt $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ zum Zeitpunkt τ^a bis auf einen Abstand von maximal ϵ annähert. Da die Zuwächse beider Irrfahrten nach τ^a identisch sind, bleibt der Abstand ab diesem Zeitpunkt erhalten . Es gilt also für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\|S_{\tau+n}(\omega) - S_{\tau^a+n}^a(\omega)\| = \|\sum_{i=0}^{\tau^a}(X_i(\omega) - Y_i^a(\omega))\| < \epsilon$$

Die Aussagen a),b) und c) des Lemmas sind somit bewiesen. Es bleibt noch Aussage d) zu verifizieren:
Zu jedem $a \in \mathbb{R}^d$ existiert eine offene Umgebung $U(a)$, so daß der Schnitt aller Kugeln $\{K(a'; \epsilon); a' \in U(a)\}$ eine nichtleere, offene Menge J(a) enthält. Da die erste Eintrittszeit der Irrfahrt $\{\sum_{i=1}^{n} Z_i, n \in \mathbb{N}\}$ in $J(a)$, $\tau_{J(a)}$, fast sicher endlich ist, folgt

$$P(\tau^b > n) \leq P(\tau_{J(a)} > n)$$

für jedes $b \in U(a)$. Da sich die abgeschlossene Kugel $K(0;T)$ bereits durch endlich viele Umgebungen $U(a), \|a\| \leq T$ überdecken läßt, ist die Konvergenz gleichmäßig für $a \in K(0;T)$, was zu beweisen war.

$\square$

Lemma 3.2.2 *Sei μ eine nichtsinguläre rekurrente Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \{1,2\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^d$ sei*

$$\sigma_n^a := \mu_n - (\mu_n * \delta_a).$$

a) Sei $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Es gilt für alle $a \in \mathbb{R}^d$:

$$\lim_{n\to\infty} \int |\sigma_n^a * g(x)| \ dx = 0$$

b) Für die Totalvariation des signierten Maßes σ_n^a, den Wert $\|\sigma_n^a\|$, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n^a\| = 0 \tag{3.22}$$

Die Konvergenz in Teil a) und Teil b) ist jeweils gleichmäßig für a auf kompakten Mengen.

Beweis: Es genügt, die Aussage a) für den Fall, daß g die Indikatorfunktion eines beschränkten Intervalls ist, zu verifizieren:

Ist nämlich g eine beliebige L^1-Funktion, so läßt sie sich in der L^1-Metrik durch Linearkombinationen von Indikatorfunktionen beschränkter Intervalle approximieren. Sei $g_\epsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine solche Linearkombination mit

$$\|g - g_\epsilon\|_1 \leq \epsilon.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int |\sigma_n^a * g(x)|\, dx &\leq \underbrace{\int |\sigma_n^a * (|g - g_\epsilon|)(x)|\, dx}_{\leq \|\sigma_n^a\| \int |g-g_\epsilon|} + \int |\sigma_n^a * g_\epsilon(x)|\, dx \\ &\leq 2\epsilon + \int |\sigma_n^a * g_\epsilon(x)| \ dx\end{aligned}$$

Unter der Annahme, die Aussage des Lemmas wäre für Treppenfunktionen bewiesen, gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \int |\sigma_n^a * g(x)| \ dx \leq 2\epsilon$$

für jedes $\epsilon > 0$.

Der Beweis des Lemmas läßt sich nun auf den Fall $g = \chi_{(0,c]}$ für $c > 0$ reduzieren. Es werden folgende Hifsbehauptungen bewiesen:

1) Ist q ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1)$, so gilt für $t > 0$:

$$\int q((x, x+t]dx \leq 2q(\mathbb{R}^1) \cdot t \tag{3.23}$$

2) Ist q ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2)$, so gilt für $t = (t_1, t_2);\ t_1, t_2 > 0$:

$$\int_{R^2} q[x, x+t)dx \leq 4q(\mathbb{R}^2)t_1t_2 \tag{3.24}$$

Zu 1): Es gilt

$$\begin{aligned}
\int q(x, x+t]dx &= \lim_{N\to\infty}\left(\int_{-N}^{N} q(x, +\infty)\ dx - \int_{-N+t}^{N+t} q(x, +\infty)\ dx\right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty}\left(\int_{-N}^{-N+t} q(x, +\infty)\ dx + \int_{N}^{N+t} q(x, +\infty)\ dx\right) \\
&\leq 2t \cdot q(\mathbb{R}^1)
\end{aligned}$$

Behauptung 2) folgt aus 1), denn ist gilt nach Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} q[x, x+t)dx &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} q\Big((x_1, x_1+t] \times (x_2, x_2+t_2]\Big)\, dx_2\right)\, dx_1 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} 2t_2 q\Big((x_1, x_1+t_1] \times \mathbb{R}^1\Big) \\
&\leq 4t_1t_2q(\mathbb{R}^2)
\end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$. Nach Lemma 3.2.1 existieren Irrfahrten $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$,$\{S_n^a; n \in \mathbb{N}_0\}$, für $a \in \mathbb{R}^d$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Zuwächse sind μ-verteilt,
2.
$$\begin{aligned}
S_0(P) &= \delta_0 \\
S_0^a(P) &= \delta_a
\end{aligned}$$
3. Zu jedem $a \in \mathbb{R}^d$ existiert eine endliche Stoppzeit τ^a, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}_0$
$$\{\|S_n - S_n^a\| < \epsilon\} \subseteq \{\tau^a \leq n\}.$$
4. Dabei gilt für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{a\in K} P(\tau^a > n)\right) = 0$$

Damit gilt:

$$\int \left| \int g(x+y)\ d\sigma_n^a(y) \right|\ dx \ = \ \int |P(S_n \in (x, x+c]) - P(S_n^a \in (x, x+c])|\, dx$$

Unterteilt man den Raum Ω in $\{\tau^a > n\}$ und $\{\tau^a \leq n\}$, so erhält man die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\int |P(S_n \in (x, x+c]) - P(S_n^a \in (x, x+c])|\, dx \leq \\
&\qquad \leq \ \int |P(S_n \in (x, x+c]; \tau^a > n) - P(S_n^a \in (x, x+c]; \tau^a > n)|\, dx \\
&\qquad + \ \int |P(S_n \in (x, x+c]; \tau^a \leq n) - P(S_n^a \in (x, x+c]; \tau^a \leq n)|\, dx
\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}
q^a(\cdot) \ &:= \ P(S_n^a \in \cdot | \tau^a > n) \\
\text{und } \ q(\cdot) \ &:= \ P(S_n \in \cdot | \tau^a > n).
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\int |P(S_n \in (x+c]; \tau^a > n) - P(S_n^a \in (x, x+c]; \tau^a > n)|\ dx \leq \\
&\qquad \leq \ P(\tau^a > n) \left(\int q(x, x+c]\ dx + \int q^a(x, x+c]\ dx \right)
\end{aligned}$$

In $d = 1$ ist die letzte Zeile nach (3.23)

$$\leq 4cP(\tau^a > n),$$

in $d = 2$ ist diese nach (3.24)

$$\leq 8c_1c_2P(\tau^a > n).$$

Der Term $P(\tau^a > n)$ konvergiert nach Lemma (3.2.1) gegen Null für $n \to \infty$, und zwar gleichmäßig für $|a|$ auf kompakten Mengen.
Sei

$$P^0(\cdot) := P(\cdot | \tau \leq n).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\int |P(S_n \in (x, x+c]; \tau^a \leq n) - P(S_n^a \in (x, x+c]; \tau^a \leq n)|\, dx = \\
&\qquad = \ \int \left| P^0\Big(\{S_n \in (x, x+c]\} \triangle \{S_n^a \in (x, x+c]\} \Big) \right|\ dx \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Je nach Dimension des Zustandsraumes gelten die folgenden Abschätzungen:

i) Für Dimension $d = 1$ gilt:

$$\int \Big| P^0\Big(\{S_n \in (x, x+c]\} \triangle \{S_n^a \in (x, x+c]\}\Big)\Big| \ dx \leq 4\epsilon$$

ii) Für Dimension $d = 2$ gilt:

$$\int \Big| P^0\Big(\{S_n \in (x, x+c]\} \triangle \{S_n^a \in (x, x+c]\}\Big)\Big| \ dx \leq 16\epsilon^2$$

Zum Beweis von i) und ii) sei

$I_x := (x, x+c]$ für $x \in \mathbb{R}^d$.

Zu i) : Falls $\tau \leq n$, $S_n \in I_x$, und $S_n^a \notin I_x$, so folgt für S_n^a:

$S_n^a \in (x-\epsilon, x]$ oder $S_n^a \in (x+c, x+c+\epsilon]$.

Falls $\tau \leq n$, $S_n \notin I_x$, und $S_n^a \in I_x$, so folgt für S_n:

$S_n \in (x-\epsilon, x]$ oder $S_n \in (x+c, x+c+\epsilon]$

Hieraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
&\int \Big| P^0\Big(\{S_n \in (x, x+c]\} \triangle \{S_n^a \in (x, x+c]\}\Big)\Big| \ dx \leq \\
\leq \ & \int P^0(S_n^a \in (x-\epsilon, x]) \ dx + \int P^0(S_n^a \in (x+c, x+c+\epsilon]) \ dx + \\
+ \ & \int P^0(S_n \in (x-\epsilon, x]) \ dx + \int P^0(S_n \in (x+c, x+c+\epsilon]) \ dx + \\
= \ & 2\int \big| P^0(S_n^a \in (x, x+\epsilon]) \big| \ dx + 2\int \big| P^0(S_n \in (x, x+\epsilon]) \big| \ dx
\end{aligned}$$

Die Anwendung von (3.23) auf die Spezialfälle

$$\begin{aligned}
t = \epsilon \text{ und } \ q(\cdot) &= P^0(S_n^a \in \cdot) \\
\text{bzw. } t = \epsilon \text{ und } \ q(\cdot) &= P^0(S_n \in \cdot)
\end{aligned}$$

liefert nun:

$$\int \Big| P^0\Big(\{S_n \in (x, x+c]\} \triangle \{S_n^a \in (x, x+c]\}\Big)\Big| \ dx \leq 2 \cdot 2\epsilon + 2 \cdot 2\epsilon = 8\epsilon$$

Zu ii): Sei

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie im Fall $d = 1$ folgert man:

$$\begin{aligned}
\int \Big| P^0\Big(\{S_n \in (x, x+c]\} \triangle \{S_n^a \in (x, x+c]\}\Big)\Big| \; dx \leq \\
&\leq \; 2 \int P^0(S_n \in (x, x+\epsilon v]) \; dx + 2 \int P^0(S_n^a \in (x, x+\epsilon v]) \; dx \\
&\leq \; 2 \cdot 4\epsilon^2 + 2 \cdot 4\epsilon^2 = 16\epsilon^2
\end{aligned}$$

Es folgt insgesamt für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2,\ \epsilon \in (0, 1)$:

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{a\in K} \int |\sigma_n^a * g(x)| \, dx \right) \leq 16\epsilon$$

Zum Beweis von Teil b) sei $\delta > 0$. Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so daß die Gesamtmasse des singulären Anteils von μ_k, das Maß μ_k^s, nicht mehr als $\delta/2$ beträgt. Sei f_k Dichte des absolut stetigen Anteils von μ_k. Da

$$\sigma_{n+k}^a = \sigma_n^a * \mu_k,$$

gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$|\sigma_{n+k}^a| \leq |\sigma_n^a * \mu_k^s| + \int |\sigma_n^a * f_k(x)| \, dx$$

Der erste Summand ist nach Voraussetzung nicht größer als δ. Der zweite Summand ist nichts anderes, als

$$\int |\sigma_n^a * f_k(x)| \, dx.$$

Die Anwendung von Teil a) des Lemmas auf den Spezialfall $g = f_k$ liefert, daß der obige Ausdruck für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert.

$\square$

Korollar 3.2.1 *Sei M eine Indexmenge und $\{g_m, m \in M\}$ eine Familie Lebesgue-integrabler, gleichgradig beschränkter Funktionen. Falls μ nichtsingulär ist, folgt für jedes $T > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\in M, |a|\leq T} |\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_a \left[f_m(S_n)\right]| \right) = 0$$

Beweis : Sei $(\sigma_n^a)^+ - (\sigma_n^a)^-$ die Hahn-Jordan-Zerlegung von σ_n^a und sei

$$c := \sup\{|f_m(x)|, x \in \mathbb{R}, m \in M\}.$$

Es gilt für jedes $m \in M, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left| \int f_m d\sigma_n^a \right| \;&\leq\; \left| \int f_m d(\sigma_n^a)^+ \right| + \left| \int f_m d(\sigma_n^a)^- \right| \\
&\leq\; c \cdot ((\sigma_n^a)^+ + (\sigma_n^a)^-) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung: Ist g Lebesgue-integrabel und beschränkt, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbf{E}_x - \mathbf{E}_{x+a}\left[g(S_n)\right]| = 0$$

Korollar 3.2.2 *Es genügt, Satz 3.2.1 für stetige Funktionen zu zeigen.*

Beweis:
Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit beschränktem Träger und

$$\int f(x)\; dx = 0.$$

Die Faltung von f mit der Indikatorfunktion des Einheitswürfels $\chi_{(0,1)^d}$ ist stetig. Sei

$$g := f * \chi_{(0,1)^d}.$$

Es sei angenommen, die Reihe

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}_x[g(S_i)];\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

konvergiere für jedes $x \in \mathbb{R}^d$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle natürlichen Zahlen K, L mit $K > N$ und $L > 0$ gilt:

$$\left| \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0\left[g(S_n)\right] \right| < \epsilon$$

Es folgt für die Funktion f:

$$\left| \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0\left[f(S_n)\right] \right| \;\leq\; \epsilon + \left| \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0\left[f(S_n)\right] - \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0\left[g(S_n)\right] \right|$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite der Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0\left[f(S_n)\right] - \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0\left[g(S_n)\right] \right| = \\
= &\left| \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0\left[f(S_n)\right] - \sum_{n=K+1}^{K+L} \int_{(0,1)^d} \mathbf{E}_x\left[f(S_n)\ \right] dx \right| \\
\leq &\int_{(0,1)^d} \left| \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_x\left(\mathbf{E}_{S_K}\left[\sum_{n=1}^{L} f(S_n) \right] \right) \right| dx
\end{aligned}$$

Sei zu $L \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\varphi_L \quad &: \quad \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\
\varphi(z) \quad &:= \quad \mathbf{E}_z\left[\sum_{n=1}^{L} f(S_n) \right]
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.1.2 existiert eine Konstante $B > 0$ mit

$$\sup_{L\in\mathbb{N}; z\in\mathbb{R}^d} |\varphi(z)| < B.$$

Die Folge der $\{\varphi_L; L \in \mathbb{N}\}$ ist somit gleichgradig beschränkt. Nach Korollar 3.2.1 folgt somit

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)^d} |\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_x (\varphi_L(S_k))| \; dx = 0.$$

Es gilt daher für beliebige L und hinreichend große K:

$$\left| \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0 [f(S_n)] - \sum_{n=K+1}^{K+L} \mathbf{E}_0 [g(S_n)] \right| \leq \epsilon$$

□

Definition 3.2.1 *Seien A, B Borelmengen in $\mathbb{R}^d$, und sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann sei*

$$h_x(A, B) := P_x(\tau_A < \tau_B).$$

Satz 3.2.2 *Ist die Zuwachsverteilung μ der Irrfahrt nichtsingulär, und die Rekurrenzmenge $\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$, so gilt für alle beschränkten Borelmengen $A, B \in \mathbb{R}^d$:*

1) Falls $d = 1$, so existieren die beiden Grenzwerte

$$\begin{aligned} h_+(A, B) &:= \lim_{x\to+\infty} h_x(A, B) \\ h_-(A, B) &:= \lim_{x\to-\infty} h_x(A, B) \end{aligned}$$

1) Falls $d = 2$, so existiert der Grenzwert

$$h(A, B) := \lim_{\|x\|\to\infty} h_x(A, B)$$

Lemma 3.2.3 *Sei μ ein nichtsinguläres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ mit Rekurrenzmenge $\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$ für $d \in \{1, 2\}$. Seien $A, B \in \mathfrak{B}^d$ beschränkte Mengen. Sei $C \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann gilt*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \left(\sup_{a\in C} (h_x(A, B) - h_{x+a}(A, B)) \right) = 0$$

Beweis von Lemma 3.2.3:
Sei $C \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge, und sei $\sigma_n^a = \mu_n - \mu_n * \delta_a$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^d$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein natürliches n, so daß die Totalvariation von σ_n^a , $\|\sigma_n^a\|$, für jedes $a \in C$ kleiner ist als ϵ. Zu diesem n existiert ein $T > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| > T$ gilt:

$$P_x(\tau_{A\cup B} \leq n) < \epsilon$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathfrak{B}^d$ sei

$$\tau_M \circ \theta_n := \begin{cases} \inf\{k \geq n;\ S_k \in M\}, & \text{falls die Menge nichtleer,} \\ +\infty, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die um n verschobene erste Eintrittszeit in M. Da auf der Menge

$$\{\tau_{A\cup B} \geq n\}$$

die Markovzeiten τ_A und $\tau_A \circ \theta_n$, sowie τ_B und $\tau_B \circ \theta_n$ identisch sind, folgt nach der Markoveigenschaft:

$$\begin{aligned} P_x(\tau_A < \tau_B; \tau_{A\cup B} \geq n) &= \mathbf{E}_x\left(P_{S_n}(\tau_A < \tau_B); \tau_{A\cup B} \geq n\right) \\ &= \mathbf{E}_x\left(h_{S_n}(A,B); \tau_{A\cup B} \geq n\right) \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} |h_x(A,B) - \mathbf{E}_x(h_{S_n}(A,B))| &\leq P_x(\tau_A < \tau_B < n) + \mathbf{E}_x\left(h_{S_n}(A,B); \tau_{A\cup B} < n\right) \\ &\leq 2P_x(\tau_{A\cup B} \leq n) \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|y\| > T$ und $\|y + a\| > T$ für alle $a \in C$ folgt:

$$\begin{aligned} |h_y(A,B) - h_{y+a}(A,B)| &\leq 4\epsilon + |\mathbf{E}_y - \mathbf{E}_{y+a}(h_{S_n}(A,B))| \\ &= 4\epsilon + \left|\int h_\xi(A,B)\sigma_n^a(d\xi)\right| \\ &\leq 4\epsilon + \|\sigma_n^a\| \leq 5\epsilon \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.4 *Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ beschränkte Borelmengen und sei $\epsilon > 0$. Sei*

$$\begin{aligned} \overline{s} &:= \limsup_{\|x\|\to\infty} h_x(A,B) \\ \overline{O}_\epsilon &:= \{x \in \mathbb{R}^d; |h_x - \overline{s}| < \epsilon\}. \end{aligned}$$

Dann existiert ein $T > 0$, so daß für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| > T$ gilt:

$$x \in \overline{O}_\epsilon \text{ oder } -x \in \overline{O}_\epsilon$$

Beweis:
Unter der Annahme die Aussage des Lemmas wäre falsch, existiert eine $\mathbb{R}^d$-wertige Folge $\{x_i; i \in \mathbb{N}_0\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) $x_0 = 0$

ii) Für alle $i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j$ und $x \in (A \cup B) + x_i$ gilt:

$$h_x(A + x_j, B + x_j) < \overline{s} - \frac{9}{10}\epsilon$$

Aus Lemma 3.2.3 und der Annahme, es existiere zu jedem $T > 0$ ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$,$\|x\| > T$ mit $x \notin \overline{O}_\epsilon$ und $-x \notin \overline{O}_\epsilon$, folgt: Es existiert ein $x_1 \in \mathbb{R}^d$, mit:

1. $x_1, -x_1 \notin \overline{O}_\epsilon$
2. $|h_{x_1}(A, B) - h_{x_1+y}(A, B)| < \frac{1}{10}\epsilon$ für $y \in A \cup B$
3. $|h_{-x_1}(A, B) - h_{-x_1+y}(A, B)| < \frac{1}{10}\epsilon$ für $y \in A \cup B$

Das bedeutet aber für $y \in A \cup B$:

$$\begin{aligned} h_y(A + x_1, B + x_1) &< \overline{s} - \frac{9}{10}\epsilon \\ h_{x_1+y}(A, B) &< \overline{s} - \frac{9}{10}\epsilon \end{aligned}$$

Man nehme an, es existieren Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ für ein $n \geq 1$ mit i) und ii). Sei $E_n = \cup_{i=0}^n (A \cup B) + x_i$. Dann existiert ein $x_{n+1} \in \mathbb{R}^d$, so daß

$$\begin{aligned} x_{n+1}, -x_{n+1} &\notin \overline{O}_\epsilon \\ |h_{x_{n+1}}(A, B) - h_{x_{n+1}+y'}(A, B)| &< \frac{1}{10}\epsilon \\ |h_{-x_{n+1}}(A, B) - h_{-x_{n+1}+y}(A, B)| &< \frac{1}{10}\epsilon \end{aligned}$$

gilt für alle $y \in E_n$ und $y' = y'' - x_i,\ i = 0, \ldots, n, y'' \in A \cup B$. Diese Ungleichungen implizieren zusammen:

$$\begin{aligned} h_{x_{n+1}+y'}(A, B) = h_{x_{n+1}+y''}(A + x_i, B + x_i) &< \overline{s} - \frac{9}{10}\epsilon \\ h_{-x_{n+1}+y}(A, B) = h_y(A + x_{n+1}, B + x_{n+1}) &< \overline{s} - \frac{9}{10}\epsilon \end{aligned}$$

Folglich besitzt auch das $(n + 2)$-Tupel $(x_0, \ldots, x_n, x_{n+1})$ die Eigenschaften i) und ii).

Sei N eine natürliche Zahl, die größer ist als $10/\epsilon$. Sei ferner $\xi \in \mathbb{R}^d$ ein Punkt mit

$$\begin{aligned} h_\xi(A,B) &> \overline{s} - \frac{\epsilon}{10} \\ \text{und } |h_\xi(A,B) - h_{\xi - x_i}(A,B)| &< \frac{\epsilon}{10} \text{ für } i = 0, \ldots, N. \end{aligned}$$

Dann ist

$$h_\xi(A + x_i, B + x_i) > \overline{s} - 2\epsilon/10 \text{ für jedes } i = 0, \ldots, N.$$

Sei τ die erste Eintrittszeit der Irrfahrt in die Menge E_N. Sei

$$\rho = S_\tau(P_\xi)$$

und

$$\rho_j(\cdot) = \rho(\cdot \cap ((A \cup B) + x_j)) \text{ für } j = 0, \ldots N.$$

Es existiert ein $k \in \{0, \ldots, N\}$ mit $\rho_k(\mathbb{R}^d) \leq \epsilon/10$. Nach der Markoveigenschaft gilt:

$$\begin{aligned} h_\xi(A + x_k, B + x_k) &= \mathbf{E}_\xi \left(h_{S_\tau}(A + x_k, B + x_k) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{N} \int h_y(A + x_k, B + x_k)\; d\rho_j(y) \\ &\leq \frac{\epsilon}{10} + \sum_{j=0, j \neq k}^{N} \int \underbrace{h_y(A + x_k, B + x_k)}_{\leq \overline{s} - \frac{9}{10}\epsilon}\; d\rho_j(y) \\ &\leq \overline{s} - \frac{8}{10}\epsilon, \end{aligned}$$

was offensichtlich nicht sein kann.

$\square$

Beweis von Satz 3.2.2:
Sei $\underline{s} := \liminf_{\|x\| \to \infty} h_x(A,B)$. Zu $\epsilon > 0$ sei

$$\underline{O}_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^d;\ |h_x(A,B) - \underline{s}| < \epsilon\}.$$

Es sei $\underline{s} < \overline{s}$ angenommen. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < (\overline{s} - \underline{s})/4$, und die beiden Mengen $\overline{O}_\epsilon$ und $\underline{O}_\epsilon$ sind disjunkt. Nach Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.4 existiert ein $T > 0$, so daß für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| > T$ folgende Bedingungen gelten:

1. Es gilt entweder $x \in \overline{O}_\epsilon$ und $-x \in \underline{O}_\epsilon$, oder $-x \in \overline{O}_\epsilon$ und $x \in \underline{O}_\epsilon$.

2. $x \in \overline{O}_\epsilon \Rightarrow B(x,1) \subset \overline{O}_e$

3. $x \in \underline{O}_\epsilon \Rightarrow B(x,1) \subset \underline{O}_\epsilon$

Sei $d = 1$.
Enthält $\overline{O}_\epsilon$ ein Element aus $(T, +\infty)$, so ist bereits das gesamte Intervall $(T, +\infty)$ in $\overline{O}_\epsilon$ enthalten, und das Intervall $(-\infty, -T)$ ist in $\underline{O}_\epsilon$ enthalten. In dem Fall folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} h_x(A,B) &= \overline{s} \\ \lim_{x\to-\infty} h_x(A,B) &= \underline{s}\end{aligned}$$

Enthält aber $\overline{O}_\epsilon$ ein Element aus $(-\infty, -T)$, so gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} h_x(A,B) &= \overline{s} \\ \lim_{x\to+\infty} h_x(A,B) &= \underline{s}\end{aligned}$$

In der Dimension $d = 2$ implizieren die erste und zweite Bedingung bereits, daß $\overline{O}_\epsilon$ die gesamte Menge $\{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| > T\}$ enthalten muß. Der Satz ist somit bewiesen.

□

Lemma 3.2.5 *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die den Voraussetzungen von Satz 3.2.1 genügt. Unter der Annahme, daß die Reihe $\{\sum_{i=0}^n \mathbf{E}[f(S_i)]\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ nicht konvergiert, folgt:*
Es existiert ein $\eta > 0$, so daß zu jedem $N \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $K > N$ und $L > 0$ existieren, mit

$$\left|\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_{S_K}\left[\sum_{i=0}^n f(S_i)\right] - \mathbf{E}_{S_{K+L}}\left[\sum_{i=0}^n f(S_i)\right]\right)\right| > \eta \tag{3.26}$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Ist die Reihe divergent, so existiert nach dem Cauchy-Kriterium ein $\eta > 0$, so daß zu jedem $N \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $L > 0$ und $K > N$ existieren, so daß gilt:

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=K+1}^{K+L} f(S_i)\right] > 2\eta$$

Es folgt für $n > L$:

$$\begin{aligned}&\left|\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_{S_K}\left[\sum_{i=0}^n f(S_i)\right] - \mathbf{E}_{S_{K+L}}\left[\sum_{i=0}^n f(S_i)\right]\right)\right| \geq \\ \geq\ &\left|\left|\mathbf{E}\left[\sum_{i=K+1}^{K+L} f(S_i)\right]\right| - \left|\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_{S_{K+n}}\left[\sum_{i=1}^{L} f(S_i)\right]\right)\right|\right|\end{aligned}$$

Da die Funktion f einen kompakten Träger besitzt, konvergiert $z \mapsto \mathbf{E}_z(\sum_{i=1}^L f(S_i))$ gegen Null für $|z| \to \infty$. Es sei $T > 0$ so gewählt, daß $|\mathbf{E}_z \left[\sum_{i=1}^L f(S_i)\right]| < \eta/2$ für $|z| > T$. Zu diesem T gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$P(|S_{K+n}| \leq T) \leq \frac{\eta}{2 \int |f| \; \|f\|_\infty B}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_{S_{K+n}}\left[\sum_{i=0}^{L} f(S_i)\right]\right)\right| &\leq \mathbf{E}\left(\left|\mathbf{E}_{S_{K+n}}\left[\sum_{i=1}^{L} f(S_i)\right| ; |S_{K+n}| \leq T\right]\right) + \\ &+ \mathbf{E}\left(\left|\mathbf{E}_{S_{K+n}}\left[\sum_{i=1}^{L} f(S_i)\right]\right| ; |S_{K+n}| > T\right)\end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach der Wahl von n ebenfalls kleiner als $\eta/2$. Der zweite Summand ist nach Korollar 3.21 nicht größer als $\eta/2$. Es folgt, wie behauptet, Ungleichung (3.26).

□

Lemma 3.2.6 *Es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right) - \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=\tau_I}^{\tau_I+n} f(S_i)\right) = 0$$

Beweis :
Nach Satz 3.1.2 existiert eine Konstante $B \geq 0$, die nur vom Durchmesser des Intervalls I abhängt, so das

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d, n\in\mathbb{N}} \left|\mathbf{E}_\xi \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right)\right| \leq B\|f\|_\infty.$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^d$. Da die erste Eintrittszeit τ_I fast sicher endlich ist, existiert zu $\epsilon > 0$ ein $M > 0$, so daß

$$P_x(\tau_I > M) < \frac{\epsilon}{B} \text{ gilt.}$$

Es folgt für $n \geq M$:

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}_x \left(\sum_{i=\tau_I}^{\tau_I+n} f(S_i); \tau_I > M\right)\right| &\leq \mathbf{E}_x \left(\left|\mathbf{E}_{S_{\tau_I}} \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right)\right| ; \tau_I > M\right) \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

Da die Funktion f außerhalb des Intervalls I verschwindet, gilt

$$\sum_{i=0}^{n} f(S_i) = \sum_{i=\tau_I \wedge n}^{n} f(S_i).$$

Es folgt daher:

$$\begin{aligned}
\left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i); \tau_I > M \right) \right| &= \left| \mathbf{E}_x^{\omega} \left(\mathbf{E}^{\omega'}_{S_{\tau_I}(\omega)} \left[\sum_{i=0}^{n-\tau_I(\omega)} f(S_i(\omega')) \right]; M < \tau_I \leq n \right) \right| \\
&\leq B \cdot \frac{\epsilon}{B},
\end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) - \sum_{i=\tau_I}^{\tau_I+n} f(S_i) \right) \right| \leq \\
\leq \ & 2\epsilon + \left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=\tau_I}^{n} f(S_i); \tau_I \leq M \right) - \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=\tau_I}^{\tau_I+n} f(S_i); \tau_I \leq M \right) \right| \\
\leq \ & 2\epsilon + \sum_{j=0}^{M} \sum_{i=0}^{j} \mathbf{E}_x(f(S_{n+i}))
\end{aligned}$$

Da f und die Menge $\{\xi \in \mathbb{R}^d; f(\xi) \neq 0\}$ beschränkt ist, strebt der letzte Term strebt für $n \to \infty$ gegen 0.

□

Beweis von Satz (3.2.1):
Nach Korollar (3.2.2) kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Stetigkeit der Funktion f angenommen werden. Da f einen kompakten Träger besitzt, ist sie damit auch gleichmäßig stetig. Ist aber f gleichmäßig stetig, so ist die Folge von Funktionen

$$\left\{ x \mapsto \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right); n \in \mathbb{N} \right\}$$

gleichgradig gleichmäßig stetig:
Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{B}$$

Sei $t := y - x$ und $f_t := f(\cdot + t)$. Dann gilt:

$$\left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) - \mathbf{E}_y \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) \right| =$$

$$= \left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) - \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i + t) \right) \right|$$
$$= \left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} (f - f_t)(S_i) \right) \right|$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion f folgt für die Differenz von f und f_t:

$$\|f - f_t\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{B}$$

Die Anwendung von Satz 3.1.2 auf die Funktion $f - f_t$ liefert:

$$\left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} (f - f_t)(S_i) \right) \right| \leq B \cdot \|f - f_t\|_\infty \leq \epsilon$$

Unter der Annahme, die Aussage des Satzes wäre falsch, gilt nach Lemma 3.2.5 und Lemma 3.2.6:
Es gibt eine positive Zahl η, so daß zu jedem $N \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $K > N, L > 0$ existieren, so daß für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \mathbf{E} \left[\mathbf{E}_{S_{\sigma_K}} \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) \right] - \mathbf{E} \left[\mathbf{E}_{S_{\sigma_{K+L}}} \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) \right] \right| \geq \frac{\eta}{2} \tag{3.27}$$

Sei $0 < \epsilon < \eta/32$. Es existiert eine Partition des Intervalls I in Teilintervalle $J_1, \ldots, J_l$, mit der Eigenschaft, daß für je zwei Punkte $x, y \in I$, die sich in dem gleichen Teilintervall befinden, gilt:

$$\left| \mathbf{E}_x \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) - \mathbf{E}_y \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) \right| < \epsilon \tag{3.28}$$

Für $i = 1, \ldots, l$ bezeichne $J_i' := I \setminus J_j'$. Es werden drei Fälle untersucht:

Fall 1: Die Dimension d des Zustandsraumes $\mathbb{R}^d$ ist gleich 1 und die Verteilung μ besitzt ein endliches zweites Moment $\int x^2 d\mu(x)$.

Fall 2: Es gilt $d = 1$ und $\int x^2 d\mu(x) = \infty$

Fall 3: Es gilt $d = 2$

Zum Fall 1:
Im Fall 1 existiert nach dem zentralen Grenzwertsatz zu jedem $\epsilon > 0$ und zu jedem $T > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$, so daß für $k \geq m$ gilt:

$$\begin{aligned} |P(S_k > T) - \tfrac{1}{2}| &\leq \tfrac{\epsilon}{B} \\ |P(S_k < -T) - \tfrac{1}{2}| &\leq \tfrac{\epsilon}{B} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Nach Satz 3.2.2 existieren die folgenden Grenzwerte für $i = 1, \dots, l$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_i^+ &:= \lim_{u\to+\infty} h_u(J_i, I \setminus J_i) \\ \tilde{h}_i^- &:= \lim_{u\to-\infty} h_u(J_i, I \setminus J_i) \end{aligned}$$

Dann existiert ein $T > 0$, so daß für $x > T$ und für $i = 1, \dots, l$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| h_x(J_i, I \setminus J_i) - \tilde{h}_i^+ \right| &< \tfrac{\epsilon}{l\cdot B} \\ \left| h_{-x}(J_i, I \setminus J_i) - \tilde{h}_i^- \right| &< \tfrac{\epsilon}{l\cdot B} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Sei nun $k \geq M$ und $x_1 \in J_1, \dots, x_l \in J_l$ beliebig. Es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\mathbf{E} \left[\mathbf{E}_{S_{\sigma_k}} \left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right) \right] - \sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{x_j} \left[\sum_{i=0}^{n} f(S_i) \right] (h_j^+ + h_j^-) \right) = 0 \tag{3.31}$$

Nachweis von (3.31): Zur Vereinfachung der Notation sei

$$\Sigma^n = \sum_{i=0}^{n} f(S_i).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{E}_{\sigma_k}(\Sigma^n)] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{S_k}\left(\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}(\Sigma^n)\right)\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{S_k}\left(\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}(\Sigma^n)\right); |S_k| \leq T\right] + \\ &+ \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{S_k}\left(\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}(\Sigma^n)\right); S_k > T\right] + \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{S_k}\left(\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}(\Sigma^n)\right); S_k < -T\right] \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt

$$\mathbf{E}\left[\left|\mathbf{E}_{S_k}\left(\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}(\Sigma^n)\right)\right|; |S_k| \leq T\right] \leq P(|S_k| < T).$$

Die rechte Seite verschwindet für $k \to \infty$. Für den zweiten Summanden gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}\left(\mathbf{E}_{S_k}\left[\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}(\Sigma^n)\right]; S_k > T\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{x_j}(\Sigma^n)\, \tilde{h}_j^+ \right| \\ \leq & \sum_{j=1}^{l} \left| \mathbf{E}\left(\mathbf{E}_{S_k}\left[\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}\left(\Sigma^n; \tau_{J_j} < \tau_{J_i'}\right)\right]; S_k > T \right) - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{x_j}(\Sigma^n)\, \tilde{h}_j^+ \right| \\ \leq & \sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}_{S_k}\left[\left| \mathbf{E}_{S_{\tau_I}}(\Sigma^n) - \mathbf{E}_{x_j}(\Sigma^n) \right| ; \tau_{J_j} < \tau_{J_j'} \right]; S_k > T \right) + \end{aligned}$$

$$+ \quad \sum_{i=1}^{l} \mathbf{E}_{x_j}\left(\Sigma^n\right) \mathbf{E}\left(\left|h_{S_k}(J_j, J_j') - \tilde{h}_j^+\right| \; ; \; S_k > T\right)$$

$$+ \quad \sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{x_j}\left(\Sigma^n\right) \tilde{h}_j^+ |P(S_k > T) - \frac{1}{2}|$$

Da die Punkte S_{τ_I} und x_j auf der Menge $\{\tau_{J_j} < \tau_{J_j'}\}$ in dem gleichen Partitionsintervall liegen, ist der erste Summand nach Voraussetzung (3.28) nicht größer als ϵ. Auf der Menge $\{S_k > T\}$ gilt nach Voraussetzung (3.30)

$$\left|h_{S_k}(J_j, J_j') - \tilde{h}_j^+\right| < \frac{\epsilon}{l \cdot B}.$$

Folglich ist auch der zweite Summand nicht größer als ϵ. Nach (3.29) ist auch der dritte Summand kleiner als ϵ. Folglich ist der Term

$$\left|\mathbf{E}\bigg(\mathbf{E}_{S_k}\left[\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}\left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i); \tau_{J_j} < \tau_{J_j'}\right)\right]; S_k > T\bigg) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{x_j}\left(\Sigma^n\right) \tilde{h}_j^+\right| < 3\epsilon.$$

Ebenso zeigt man, daß

$$\left|\mathbf{E}\bigg(\mathbf{E}_{S_k}\left[\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}\left(\Sigma^n\right); \tau_{J_j} < \tau_{J_j'}\right]; S_k < -T\bigg) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{x_j}\left(\Sigma^n\right) \tilde{h}_j^-\right| < 3\epsilon.$$

Es gilt insgesamt:

$$\left|\mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{S_{\sigma_k}}\left(\Sigma^n\right)\right] - \sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{x_j}\left[\Sigma^n\right]\left(h_j^+ + h_j^-\right)\right| < 8\epsilon$$

Es gilt also in der Tat (3.31). Folglich liegen für hinreichend große K die beiden Terme

$$\mathbf{E}\bigg(\mathbf{E}_{S_K}\left[\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}\left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right)\right]\bigg)$$

und

$$\mathbf{E}\bigg(\mathbf{E}_{S_{K+L}}\left[\mathbf{E}_{S_{\tau_I}}\left(\sum_{i=0}^{n} f(S_i)\right)\right]\bigg)$$

beliebig nahe beieinander, im Widerspruch zu (3.27).

Zum Fall 2:

In diesem Fall sind zu beschränkten Borelmengen A, B die beiden folgenden Grenzwerte identisch:

$$\lim_{x \to +\infty} h_x(A, B) = \lim_{x \to -\infty} h_x(A, B)$$

Zum Beweis dieser Gleichung sei auf Satz A.2.1 des Anhangs A.2 verwiesen.

Sei also

$$h(A,B) = \lim_{\|x\|\to\infty} h_x(A,B).$$

Auch im Fall 3 existiert nach Satz 3.2.2, Teil b), existiert der Grenzwert $h(A,B) = \lim_{\|x\|\to\infty} h_x(A,B)$. Sei also

$$\tilde{h}_j := \lim_{\|x\|\to\infty} h_x(J_j, J_j') \quad \text{für } j = 1 \dots l.$$

Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $T > 0$, so daß für hinreichend große $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{S_m} \left(\mathbf{E}_{S_{\tau_I}} (\Sigma^n) \right); |S_m| > T \right] - \sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}_{x_j} (\Sigma^n)\, \tilde{h}_j \right| < 3\epsilon$$

Es folgt für K und $L \in \mathbb{N}$ hinreichend groß

$$\left| \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{S_K} - \mathbf{E}_{S_{K+L}} \left(\mathbf{E}_{S_{\tau_I}} (\sum_{i=0}^{n} f(S_i)) \right) \right] \right| < 8\epsilon,$$

im Widerspruch zu (3.27). Der Satz ist vollständig bewiesen.

$\square$

4. Die Rekurrenzkriterien von Ornstein und Spitzer

Mittelpunkt dieses Kapitels ist das Rekurrenzkriterium, das von 1969 von D.S. Ornstein entwicket wurde, und das Rekurrenzkriterium von Spitzer aus dem Jahre 1964, das sich allerdings auf $\mathbb{Z}^d$-wertige Irrfahrten bezieht.

4.1. Problemstellung

Es sei nochmals an die bisherigen Kriterien für Rekurrenz erinnert:
Sei μ eine Verteilung auf $\mathbb{R}^d$, wobei $d \in \mathbb{N}$, und φ ihre charakteristische Funktion. Die Rekurrenzmenge von μ ist nichtleer, genau dann, wenn für jede beschränkte Umgebung U des Ursprungs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{*n}(U) = +\infty \text{ gilt.}$$

Da die n-te Faltungspotenz von μ für große n im Allgemeinen schwer zu berechnen ist, ist dieses Kriterium in der Praxis wohl kaum anwendbar. Anders verhält es sich mit der Charakterisierung von Chung-Fuchs (vgl. [3]), die es erlaubt, anhand des Verhaltens von φ in der Nähe des Ursprungs auf Rekurrenz oder Transienz zu schließen:

Die Rekurrenzmenge ist nichtleer, genau dann, wenn für eine beschränkte Umgebung U des Ursprungs

$$\liminf_{r \nearrow 1} \int_U Re\left(\frac{1}{1 - r\varphi(t)}\right) dt = +\infty \text{ gilt.}$$

Im Zentrum dieses Kriteriums steht der Realteil der Funktion

$$\left(\frac{1}{1 - r\varphi(t)}\right) \quad \text{für } r \in (0, 1),$$

die nichts Anderes ist, als die charakteristische Funktion des Maßes

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \mu^{*n}.$$

Im Jahre 1964 gelang es Spitzer, statt

$$Re\left(\frac{1}{1-r\varphi}\right) \text{ für } r \in (0,1), \text{ direkt den Term } Re\left(\frac{1}{1-\varphi}\right)$$

zur Bestimmung des Rekurrenzverhaltens heranzuziehen, allerdings nur für $\mathbb{Z}^d$-wertige Irrfahrten. (Siehe [8], **T2** auf S. 85)
Später, im Jahre 1969, gelang es Ornstein, das Kriterium von Spitzer für $\mathbb{R}^d$-wertige Irrfahrten zu verallgemeinern. (Siehe [6], S. 34, *Theorem 1.*)

Es gilt nämlich:

Satz 4.1.1 *Sei* $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *eine* $\mathbb{R}^d$*-wertige, im Nullpunkt startende Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$*. Sei* φ *die charakteristische Funktion der Zuwachsverteilung. Die Irrfahrt ist genau dann rekurrent, wenn eine beschränkte Umgebung* U *des Ursprungs existiert, so daß*

$$\int_U Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)\, dt = +\infty. \tag{4.1}$$

Ornstein verwendet im wesentlichen die gleiche Beweisstruktur, die auch Spitzer verwendet. Leider ist sowohl die Ähnlichkeit mit dem Spitzer–Beweis als auch der Einsatz des Auffüllschemas nicht zu erkennen. Der probabilistische Hintergrund geht, ähnlich wie bei [6], Seite 21, *Theorem 1*, selbst bei der Formulierung der Sätze unter. Eine erste Übersetzung des Ornstein–Beweises in die Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie findet man in der Saarbrücker Diplomarbeit von Rita Goffing für die Dimension 1 (Siehe [5]). Allerdings kommt auch hier die Spitzersche Beweisidee nicht heraus.

Ziel des Abschnitts 4.2 meiner Arbeit ist es, einen allgemein zugänglichen Beweis zu präsentieren. Um das Verständnis der Grundidee zu erleichtern, wird im Paragraphen 4.2.1 der Beweis für den Spezialfall einer Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ durchgeführt. Dies ist der Beweis Spitzers (Vgl. [8], S. 85, **T2**). Anschließend wird der allgemeine Fall, insbesondere für höhere Dimensionen, dargelegt. Dabei werden die Parallelen zu Spitzer herausgearbeitet und die Bedeutung des Auffüllschemas erklärt.

4.2. Beweis von Satz 4.1.1

Es sei angenommen, für eine beschränkte Umgebung U des Ursprungs sei

$$\int_U Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) dt = +\infty.$$

Sei $\{r_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine reelle Zahlenfolge mit

$$r_n \nearrow 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\int_U Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_U Re\left(\frac{1}{1-r_n\varphi(t)}\right) dt,$$

was wiederum

$$\limsup_{r\nearrow 1} \int_U Re\left(\frac{1}{1-r\varphi(t)}\right) dt = +\infty$$

impliziert. Nach dem Satz von Chung-Fuchs ist dies gleichbedeutend mit

$$\mathcal{R}(\mu) \neq \emptyset.$$

Umgekehrt sei nun angenommen, daß

$$\mathcal{R}(\mu) \neq \emptyset.$$

Es genügt, Identität (4.1) für eine beschränkte Umgebung U im Falle $d \leq 2$ zu zeigen:

Ist die Dimension d des Zustandsraumes größer als 2, so existiert, wie aus dem Beweis von Satz 1.2.1 hervorgeht, eine Drehung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, so daß für das Bildmaß $\mu' = T(\mu)$ gilt:

$$\mu'(x \in \mathbb{R}^d; x_3 = \ldots x_d = 0) = 1.$$

Sei φ' die charakteristische Funktion von μ'. Es gilt:

i) $\mathcal{R}(\mu') = T\mathcal{R}(\mu)$,

ii) $\displaystyle\int_B Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) dt = \int_B Re\left(\frac{1}{1-\varphi'(t)}\right) dt$

für jede Kugel B mit Mittelpunkt 0.

Sei nun

$$\begin{array}{ccc} p & : \mathbb{R}^d \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, \ldots, x_d) & \stackrel{p}{\longmapsto} & (x_1, x_2) \end{array}$$

die Projektion auf die Ebene. Sei $\mu'' = p(\mu')$ und φ'' die charakteristische Funktion von μ''. Es gilt für jedes $s \in \mathbb{R}^2$ und $t \in \mathbb{R}^{d-2}$:

$$\varphi'(s,t) = \varphi''(s)$$

Dies impliziert für $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_{(-\epsilon,\epsilon)^d} Re\left(\frac{1}{1-\varphi'(t)}\right) dt = \\
&\quad = \int_{(-\epsilon,\epsilon)^{d-2}} \left(\int_{(-\epsilon,\epsilon)^2} Re\left(\frac{1}{1-\varphi'(s,t)}\right) d\lambda^2(s)\right) d\lambda^{d-2}(t) \\
&\quad = (2\epsilon)^{d-2} \int_{(-\epsilon,\epsilon)^2} Re\left(\frac{1}{1-\varphi''(s)}\right) ds
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\mathcal{R}(\mu'') = p\mathcal{R}(\mu') \neq \emptyset.$$

Falls (4.1) für die Ebene verifiziert ist, so folgt

$$\int_{(-\epsilon,\epsilon)^2} Re\left(\frac{1}{1-\varphi''(s)}\right) ds = +\infty,$$

und damit auch

$$\int_{(-\epsilon,\epsilon)^d} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) dt = +\infty.$$

4.2.1. Der Spezialfall einer Gitterverteilung

Man betrachte den einfachen Spezialfall, daß die Zuwachsverteilung von der Gestalt

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x \delta_x, \text{ wobei } \omega_x \geq 0 \text{ und } \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x = 1 \text{ ist.}$$

Für $d = 1$ ist die charakteristische Funktion φ einer solchen Verteilung (2π)-periodisch. Für $d = 2$ gilt entsprechend

$$\varphi(t_1 + 2\pi, t_2 + 2\pi) = \varphi(t_1, t_2) \text{ für alle } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Eine Irrfahrt mit dieser Zuwachsverteilung und einem Startpunkt $x \in \mathbb{Z}^d$ nimmt ausschließlich Werte in $\mathbb{Z}^d$ mit positiver Wahrscheinlichkeit an. Daher ist es sinnvoll, statt des Raumes $\mathbb{R}^d$ den Raum $\mathbb{Z}^d$ als Zustandsraum aufzufassen. Sei also μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge von $\mathbb{Z}^d$ mit Rekurrenzmenge $\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{Z}^d$. Es sei angenommen, für die charakteristische Funktion φ gelte

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) < +\infty. \tag{4.2}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Z}^d$ sei

$$a_n(z) = \sum_{i=0}^{n} (\mu_i\{0\} - \mu_i\{z\}).$$

Nach Satz 2.1.1 konvergiert die Folge $\{a_n(z);\ n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $z \in \mathbb{Z}^d$ gegen einen endlichen Wert $a(z)$.
Nach der Inversionsformel für charakteristische Funktionen folgt für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$a(x) + a(-x) = \frac{2}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1-\cos(x\cdot t)}{1-\varphi(t)}\, dt$$

Wegen der Symmetrie des Cosinus und wegen $\varphi(-\cdot) = -\overline{\varphi(\cdot)}$ gilt:

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1-\cos(x\cdot t)}{1-\varphi(t)}\, dt = \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} [1-\cos(xt)] Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) dt \tag{4.3}$$

Andererseits gilt nach Korollar 2.2.1 auf Seite 30:

$$a(x) + a(-x) = \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=0}^{\tau_{\{0\}}-1} \chi_{\{x\}}(S_k) \right) \tag{4.4}$$

Es folgt daher

$$\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=0}^{\tau_{\{0\}}-1} \chi_{\{x\}}(S_k) \right) \quad = \quad \frac{2}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} (1 - \cos(x \cdot t) Re \left(\frac{1}{1-\varphi(t)} \right) \, dt. \tag{4.5}$$

Wäre (4.2) endlich, so folgte aus dem Lemma von Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{|x| \to +\infty} a(x) + a(-x) = \frac{2}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} Re \left(\frac{1}{1-\varphi(t)} \right) \, dt$$

Zu jedem $T > 0$ existiert sei $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_k(\{0\}) > 2T.$$

Ferner existiert ein $L > 0$, so daß für $|x| > L$ gilt:

$$(N+1) \sum_{k=0}^{N} P_0(S_k = x) < T.$$

Es folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=0}^{\tau_{\{0\}}-1} \chi_{\{x\}}(S_k) \right) &= \\
&= \mathbf{E}_0 \left(\sum_{k=0}^{\tau_{\{-x\}}-1} \chi_{\{0\}}(S_k) \right) \\
&\geq \mathbf{E}_0 \left(\sum_{k=0}^{N} \chi_{\{0\}}(S_k) \right) - \mathbf{E}_0 \left(\sum_{k=\tau_{\{-x\}}}^{N} \chi_{\{0\}}(S_k); \tau_{\{-x\}} \leq N \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mu_k\{0\} - \mathbf{E}_0^{\omega} \left(\mathbf{E}_{-x} \left[\sum_{k=0}^{N-\tau_{-x}(\omega)} \chi_{\{0\}}(S_k) \right]; \tau_{\{-x\}}(\omega) \leq N \right) \\
&> 2T - (N+1) \sum_{k=0}^{N} P_0(S_k = x) > T
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} (a(x) + a(-x)) = +\infty,$$

im Widerspruch zur Annahme.

4.2.2. Der allgemeine Fall

Es genügt, Identität (4.1) für den Fall zu verifizieren, daß μ einen nichttrivialen absolut stetigen Anteil besitzt. Ist die Verteilung μ nämlich singulär, so existiert eine nichtsinguläre Verteilung μ' mit charakteristiescher Funktion φ', so daß folgendes gilt:

$$
\begin{aligned}
&i) \quad \mathcal{R}(\mu) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{R}(\mu') \neq \emptyset \\
&ii) \quad Re\left(\frac{1}{1-\varphi}\right) \text{ lokal integrabel} \Leftrightarrow Re\left(\frac{1}{1-\varphi'}\right) \text{ lokal integrabel}
\end{aligned}
$$

Zum Beweis hierzu sei auf den Anhang A.3 verwiesen.

Sei also μ eine nichtsinguläre Verteilung auf $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^d)$ mit nichtleerer Rekurrenzmenge. Da μ einen nichtverschwindenden, bezüglich dem Lebesgue-Maß absolut stetigen Anteil besitzt, gilt für die Rekurrenzmenge von μ:

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$$

Sei $I_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ und $I_x = I_0 + x$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Sei außerdem

$$\rho_x = (2\chi_{I_0} - \chi_{I_x} - \chi_{I_{-x}}).$$

Die Funktion ρ_x ergibt sich aus der Faltung von $(2\delta_0 - \delta_x - \delta_{-x})$ mit χ_{I_0}. Sei

$$
\hat{\rho_x}(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{2\sin(t/2)}{t}\right)(1-\cos(xt)), & \text{für } d = 1, \\ \\ 2\left(\frac{2\sin(t_1/2)}{t_1}\right)\left(\frac{2\sin(t_2/2)}{t_2}\right)(1-\cos(xt)), & \text{für } d = 2. \end{cases}
$$

Die Abbildung $\hat{\rho_x}$ ist gerade die charakteristische Funktion von ρ_x. Sie ist nicht integrabel. Ihr Produkt mit der charakteristischen Funktion von $\chi_{I_0}\lambda^d$, der Funktion

$$\mathbb{R}^d \ni t \mapsto \hat{\chi_{I_0}}(t) = \prod_{i=1}^{d}\left(\frac{2\sin(t_i/2)}{t_i}\right),$$

ist jedoch integrabel. Seien

$$
\begin{aligned}
k, k_\epsilon \quad &: \quad \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+, \ \epsilon > 0 \\
k(x) \quad &= \quad \begin{cases} \left(\frac{2\sin(t/2)}{t}\right)^4 & \text{für } d = 1, \\ \\ \left(\frac{2\sin(t_1/2)}{t_1}\right)^4 \left(\frac{2\sin(t_2/2)}{t_2}\right)^4 & \text{für } d = 2, \end{cases} \\
\text{und } k_\epsilon(x) \quad &= \quad k(\epsilon x).
\end{aligned}
$$

Die Funktionen k_ϵ ist für jedes $\epsilon > 0$ integrabel und symmetrisch. Für ihre Fouriertransformierte $\hat{k_\epsilon}(t) = \int e^{i(t\cdot x)} k_\epsilon(x)\, dx$ gilt:

$$\hat{k_\epsilon} = 2\pi\left(\frac{1}{\epsilon^d}\chi_{(-\frac{\epsilon}{2},\frac{\epsilon}{2})^d}\right)^{*4}$$

Die Menge $\{\hat{k_\epsilon} \neq 0\}$ ist in $(-2\epsilon, 2\epsilon)^d$ enthalten und somit beschränkt. Es gilt die folgenden Identität:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int k_\epsilon * \chi_{I_0} * \rho_x \; d\mu_i \;\; = \;\; \frac{2}{(2\pi)^d} \int \hat{k_\epsilon}(t) \, (\hat{\chi_{I_0}}(t))^2 \, \frac{1-\cos(xt)}{1-\varphi(t)} \; dt \tag{4.6}$$

Die Analogie zu Spitzer ist nun offensichtlich. Die linke Seite von 4.6 entpricht

$$a(x) + a(-x)$$

bei Spitzer.

Wegen der Symmetrie der Faktoren $\hat{k_\epsilon}, \hat{\chi_{I_0}}$ und $1 - \cos(xt)$ gilt für die rechte Seite von (4.6):

$$\begin{aligned} & \int \hat{k_\epsilon}(t)(\hat{\chi_{I_0}}(t))^2 \frac{1-\cos(xt)}{1-\varphi(t)} \; dt = \\ = \; & \int \hat{k_\epsilon}(t)(\hat{\chi_{I_0}}(t))^2 (1-\cos(xt)) Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) \; dt \\ \leq \; & \|k_\epsilon\|_1 \int_{B(0,2\epsilon)} (1-\cos(xt)) Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) \; dt \end{aligned}$$

Unter der Annahme, der Realteil von $(1-\varphi)^{-1}$ sei lokal integrabel, folgt

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \int\limits_{B(0,2\epsilon)} (1-\cos(xt)) Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) \; dt = \int\limits_{B(0,2\epsilon)} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) \; dt.$$

Wir werden jedoch folgendes zeigen:

$$\limsup_{\|x\|\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \int k_\epsilon * \chi_{I_0} * \rho_x \; d\mu_i = +\infty \tag{4.7}$$

Für $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \int k_\epsilon * \chi_{I_0} * \chi_{I_0}(\xi) \; d\mu_i(\xi) \;\; &= \;\; \int k_\epsilon(y) \left(\int_{I_x} \int \chi_{I_{x+y}}(z+\xi) \; d\mu_i(\xi) \; dz \right) dy \\ & \;\;\;\;\; \int k_\epsilon(y) \left(\int_{I_0} \int \chi_{I_y}(z+\xi) \; d\mu_i(\xi) \; dz \right) \\ \int k_\epsilon * \chi_{I_0} * \chi_{I_x}(\xi) \; d\mu_i(\xi) \;\; &= \;\; \int k_\epsilon(y) \left(\int_{I_0} \int \chi_{I_{x+y}}(\xi+z) \; d\mu_i(x) \; dz \right) \\ \int k_\epsilon * \chi_{I_0} * \chi_{I_{-x}}(\xi) \; d\mu_i(\xi) \;\; &= \;\; \int k_\epsilon(y) \left(\int_{I_x} \int \chi_{I_y}(z+\xi) \; d\mu_i(\xi) \; dz \right) \end{aligned}$$

Bei der ersten Gleichung beachte man die folgende Identität:

$$\chi_{I_0} * \chi_{I_0} = \chi_{I_x} * \chi_{I_{-x}}$$

Sei nun $r = \chi_{I_x}$ und $h = \chi_{I_0}$. Da

$$\chi_{I_0} * \rho_x = (\chi_{I_0} * \chi_{I_0}) + \left(\chi_{I_x} * \chi_{I_{-x}}\right) - \left(\chi_{I_0} * \chi_{I_{-x}}\right) - (\chi_{I_0} * \chi_{I_x}),$$

folgt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \int k_\epsilon * \chi_{I_0} * \rho_x(\xi)\, d\mu_i(\xi) = & \qquad (4.8) \\ = \int \left(\mathbf{E}_r \left[\sum_{i=0}^{n} \chi_{I_{x+y}}(S_i) \right] - \mathbf{E}_h \left[\sum_{i=0}^{n} \chi_{I_{x+y}}(S_i) \right] \right) k_\epsilon(y)\, dy & + \\ + \int \left(\mathbf{E}_r \left[\sum_{i=0}^{n} \chi_{I_y}(S_i) \right] - \mathbf{E}_h \left[\sum_{i=0}^{n} \chi_{I_y}(S_i) \right] \right) k_\epsilon(y)\, dy & \end{aligned}$$

Da die linke das Analogon zu $a(x) + a(-x)$ im $\mathbb{R}^d$ ist, sollte es auch in Anlehnung an Korollar 2.2.1 auf Seite 30 eine Entsprechung zu

$$\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=0}^{\tau_{\{0\}}-1} \chi_{\{x\}}(S_k) \right) \quad \text{geben.}$$

Man betrachte erneut das Auffüllschema aus Abschnitt 3.1, mit r als Startverteilung und h als Zielverteilung. Es gilt:

Lemma 4.2.1 *Zu $r = \chi_{I_x}$ und $h = \chi_{I_0}$ sei $(\Omega^{r,h}, \mathfrak{A}^{r,h}, P^{r,h})$ ein gemäß Definition 3.1.2 spezifizierter Wahrscheinlichkeitsraum, $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ die zugehörige Irrfahrt und τ die-Markovzeit mit*

$$S_\tau(P^{r,h}) = h\lambda^d.$$

Es gilt für jedes $y \in \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \chi_{I_0} * \rho_x(z-y)\, d\mu_n(z) = \mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_{x+y}}(S_n) \right] - \mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_y}(S_n) \right]$$

Dabei ist

$$\left\{ \sum_{n=0}^{n} \int \chi_{I_0} * \rho_x(z-y)\, d\mu_n(z);\ n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}^d \right\}$$

beschränkt.

Beweis von Lemma 4.2.1:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{m} \int \chi_{I_0} * \rho_x(z-y)\ d\mu_n(z) = \\
= &\sum_{n=0}^{m} \left(\int_{I_x} \int \chi_{I_{x+y}}(z+\xi)\ d\mu_n(\xi)\ dz - \int_{I_0} \int \chi_{I_{x+y}}(z+\xi)\ d\mu_n(\xi)\ dz \right) \\
- &\sum_{n=0}^{m} \left(\int_{I_x} \int \chi_{I_y}(z+\xi)\ d\mu_n(\xi)\ dz - \int_{I_0} \int \chi_{I_y}(z+\xi)\ d\mu_n(\xi)\ dz \right) \\
= &\Bigg(\mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=0}^{m} \chi_{I_{x+y}}(S_n) - \sum_{n=\tau}^{\tau+m} \chi_{I_{x+y}} \right] \\
- &\mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=0}^{m} \chi_{I_y}(S_n) - \sum_{n=\tau}^{\tau+m} \chi_{I_y}(S_n) \right] \Bigg) \\
= &\left(\mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=0}^{m\wedge(\tau-1)} \chi_{I_{x+y}}(S_n) \right] - \mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=0}^{m\wedge(\tau-1)} \chi_{I_y}(S_n) \right] \right) \\
- &\left(\mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=\tau\vee(m+1)}^{\tau+m} \chi_{I_{x+y}}(S_n) \right] - \mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=\tau\vee(m+1)}^{\tau+m} \chi_{I_y}(S_n) \right] \right)
\end{aligned}$$

Für zwei Intervalle gleichen Maßes I und J sei

$$\delta(I,J) = \sup\{|\xi - \eta|;\ \xi \in I, \eta \in J\}.$$

Zunächst ist die Existenz einer endlichen Majoranten von

$$\left| \mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=\tau\vee(m+1)}^{\tau+m} (\chi_I - \chi_J)(S_n) \right] \right|$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und für alle Paaren I, J von maßgleichen Intervallen mit gleichem $\delta(I,J)$ zu zeigen.
Nach Bemerkung 3.21 existiert zu jedem $\delta \geq 0$ eine Konstante $B(\delta) \geq 0$, mit

$$\sup\{|\mathbf{E}_x(\sum_{n=1}^{k}(\chi_I - \chi_J)(S_n))|; x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}\} = B(\delta)$$

für alle Paare I, J maßgleicher Intervalle mit $\delta(I,J) = \delta$. Dann folgt aber:

$$\left| \mathbf{E}^{r,h} \left[\sum_{n=\tau\vee(m+1)}^{\tau+m} (\chi_I - \chi_J)(S_n) \right] \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathbf{E}^{r,h}\left[\left|\mathbf{E}_{S_m(\omega)}\left(\sum_{n=1}^{\tau(\omega)}(\chi_I-\chi_J)(S_n)\right)\right|;\tau(\omega)\leq m\right]\\
&+ \mathbf{E}^{r,h}\left[\left|\mathbf{E}_{S_\tau(\omega)}\left(\sum_{n=0}^{m}(\chi_I-\chi_J)(S_n)\right)\right|;\tau(\omega)> m\right]
\end{aligned}
$$

Da beide Integranden auf der rechten Seite kleiner sind als $B(\delta)$, ist $B(\delta)$ eine Majorante für das Integral auf der linken Seite. Nun ist nachzuweisen, daß für Intervalle I und J gleichen Lebesgue-Maßes gilt:

$$
\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=\tau\vee(m+1)}^{\tau+m}(\chi_I-\chi_J)(S_n)\right]=0 \tag{4.9}
$$

Sei $\epsilon>0$ und $K\in\mathbb{N}$, so daß

$$
P^{r,h}(\tau>K)<\epsilon/B(\delta).
$$

Dann gilt für $m>K$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=\tau\vee(m+1)}^{\tau+m}(\chi_I-\chi_J)(S_n);\tau>K\right]\\
&\leq \mathbf{E}^{r,h}\left[\mathbf{E}_{S_m}\left(\sum_{n=1}^{\tau(\omega)}(\chi_I-\chi_J)(S_n)\right);m\geq\tau(\omega)>K\right]+\\
&+ \mathbf{E}^{r,h}\left[\mathbf{E}_{S_\tau}\left(\sum_{n=0}^{m}(\chi_I-\chi_J)(S_n)\right);\tau>K,\tau>m\right]
\end{aligned}
$$

Beide Summanden sind aber jeweils kleiner als ϵ. Es bleibt zu zeigen, daß

$$
\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=m+1}^{m+\tau}(\chi_I-\chi_J)(S_n);\tau\leq K\right]=0
$$

gilt. Dazu sei $L>0$, so daß I und J in $(-L,L)$ enthalten sind. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=m+1}^{k+m}(\chi_I-\chi_J)(S_n)\right]\right|\leq\\
&\leq \sum_{n=m+1}^{m+k}\mathbf{E}^{r,h}\left[(\chi_I+\chi_J)(S_n),|S_n|<L\right]\\
&\leq 2\sum_{n=m+1}^{m+k}P^{r,h}(|S_n|<L)
\end{aligned}
$$

Die k Summanden konvergieren aber gegen Null für $m \to \infty$. Man erhält insgesamt:

$$\limsup_{m\to\infty} \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=\tau\vee(m+1)}^{\tau+m} (\chi_I - \chi_J)(S_n)\right] \leq 2\epsilon$$

Da diese Ungleichung für jedes $\epsilon > 0$ gilt, folgt (4.9). Man betrachte nun

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{m\wedge(\tau-1)} \chi_J(S_n)\right],$$

wobei $J = I_{x+y}$ oder $J = I_y$. Nach Satz 3.1.2 existiert eine Konstante $c(x) > 0$, so daß

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{m\wedge(\tau-1)} \chi_J(S_n)\right] \leq c(x),$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{(\tau-1)} \chi_J(S_n)\right] \leq c(x)$$

$\square$

Aus Lemma (4.2.1) und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt unmittelbar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int k_\epsilon * \chi_{I_0} * \rho_x(\xi)\ d\mu_n(\xi) =$$
$$= \int dy\ k_e(y) \left(\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_{x+y}}(S_n)\right] - \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_y}(S_n)\right]\right)$$

Es sei daran erinnert, daß die Dichte des Maßes

$$\mathfrak{B}^d \ni A \mapsto \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_A(S_n)\right] + \mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_A(S_n)\right]$$

konstant ist. Daher gilt:

$$\left|\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] - \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_{x+y}}(S_n)\right]\right| \quad =$$
$$\left|\mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] - \mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_{x+y}}(S_n)\right]\right|$$

Es sei $\mathcal{I} := \int k_\epsilon(y)\, dy$. Sei $v > 0$ so daß

$$\int_{(-v,v)^d} k_\epsilon(y)\, dy \geq \frac{3}{4}\mathcal{I}.$$

Nach Lemma 3.1.1 auf Seite 39 existiert ein $D > 0$, so daß für $\|y\| < v$ gilt:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{i=0}^{\tau-1} \chi_{I_{x+y}}(S_i)\right] \leq \frac{D}{2}$$

Dabei hängt die Konstante D nur von dem Wert

$$\sup\{\|\xi - \eta\|;\ r(\xi) > 0, \eta \in I_{x+y}\}$$

ab. Sie ist daher insbesondere unabhängig von x. Es folgt:

$$\left|\mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] - \mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_{x+y}}(S_n)\right]\right| \quad \leq \quad D \tag{4.10}$$

Es gilt außerdem für jedes $\|y\| < v$:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_y}(S_n)\right] \quad \leq \quad D \tag{4.11}$$

$$\mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] \quad \leq \quad D \tag{4.12}$$

Ferner gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] - \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_y}(S_n)\right] = \\ = \quad & \mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_y}(S_n)\right] - \mathbf{E}^{h,r}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] \\ \geq \quad & -\tfrac{D}{2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Daraus lassen sich die folgenden Ungleichungen herleiten:

$$\int k_\epsilon(y)\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_{x+y}}(S_n)\right]\, dy \quad \geq \quad \frac{3}{4}\mathcal{I} \;\cdot\; \left(\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] - D\right)$$

$$\begin{aligned} & \int k_\epsilon(y) \; \left(\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_{x+y}}(S_n)\right] - \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_y}(S_n)\right]\right) \; dy \\ & \quad \geq \quad \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] - 2\mathcal{I}D \end{aligned}$$

Schließlich genügt, um den Beweis von (4.7) zu vollenden, folgendes zu zeigen:

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] = +\infty \tag{4.14}$$

Man beachte hierbei, daß mit größer werdendem $\|x\|$ auch die Distanz zwischen dem Träger der Startverteilung $r = \chi_{I_x}$ und dem Träger der Zielverteilung $h = \chi_{I_0}$ größer wird. Sei $A > 0$. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$\sum_{n=0}^{N} \mu_n(I_0) \geq 2A$$

Nun gilt für das Integral in (4.14):

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] \geq \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{N} \chi_{I_x}(S_n)\right] - \mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=\tau}^{N} \chi_{I_x}(S_n); \tau < N\right]$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite gilt:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{N} \chi_{I_x}(S_n)\right] = \sum_{n=0}^{N} \mu_n(I_0) \geq 2A$$

Für den zweiten Term gilt:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=\tau}^{N} \chi_{I_x}(S_n); \tau < N\right] \leq (N+1) \cdot P^{r,h}(\tau < N)$$

Nun konvergiert

$$(N+1) \cdot P^{r,h}(\tau < N)$$

gegen Null für $\|x\| \to 0$. In der Tat, denn aus

$$S_\tau \in I_0$$

folgt:

$$\begin{aligned} P^{r,h}(\tau \leq N) &\leq P^{r,h}(\tau_{I_0} \leq N) \\ &\leq \sum_{i=0}^{N} P^{r,h}(S_i \in I_0) \end{aligned}$$

Sei B die Kugel mit Mittelpunkt $-x$ und Radius $\sqrt{2}$. Es gilt

$$P^{r,h}(S_i \in I_0) \leq \mu_i(B) \to 0 \text{ für } \|x\| \to +\infty.$$

Folglich gilt für hinreichend große $\|x\|$:

$$\mathbf{E}^{r,h}\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \chi_{I_x}(S_n)\right] > A$$

Da die letzte Ungleichung für alle $A > 0$ gilt, folgt (4.7).

□

A. Anhang

A.1. Der Satz von Choquet-Deny

Definition A.1.1 *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \mathbb{N}$. Sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ $\mu * \delta_x-$integrabel ist.*

a) Die Funktion h heißt $\underline{\mu-\text{harmonisch}}$, falls für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$h(x) = \int h(x+y)\ d\mu(y) \tag{A.1}$$

b) Die Funktion heißt $\underline{\mu-\text{harmonisch fast sicher}}$, falls Gleichung (A.1) für alle $x \in \mathbb{R}^d$ außerhalb einer Nullmenge gilt.

Satz A.1.1 (Choquet-Deny) *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, dessen Träger die gesamte additive Gruppe $\mathbb{R}^d$ erzeugt. Sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\mu-$harmonisch fast sicher.*

a) Ist h beschränkt , so ist h Lebesgue-fast sicher konstant.

b) Ist μ rekurrent mit

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$$

und ist $h \geq 0$, so ist h Lebesgue-fast sicher konstant.

Im folgenden sei $d \in \{1, 2\}$ und μ eine Verteilung auf $\mathbb{R}^d$, deren Träger $\mathbb{R}^d$ erzeugt.

Lemma A.1.1 *Sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig und $\mu-$harmonisch.*

a) Ist die Funktion h beschränkt, so ist sie konstant.

b) Falls $h \geq 0$ und

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d,$$

so ist h konstant.

Beweis von Lemma A.1.1:
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{F}_n$ die von $S_0, \ldots, S_n$ erzeugte σ-Algebra und

$$M_n = h(S_n).$$

Die $\mu-$Harmonizität der Funktion h impliziert

$$h(x) = \mathbf{E}_x(h(S_n))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $x \in \mathbb{R}^d$.

Der Prozeß $\{M_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$. In der Tat, denn die $\mu-$Harmonizität der Funktion h impliziert

$$h(x) = \mathbf{E}_x(h(S_n))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $x \in \mathbb{R}^d$. Nach der Markov-Eigenschaft gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(h(S_n)|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbf{E}_{S_{n-1}}(h(S_1)) \\ &= h(S_{n-1}) \\ &= M_{n-1}. \end{aligned}$$

Ist h beschränkt, so ist die Folge $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrabel. Der Prozeß konvergiert in diesem Fall sowohl P_x-fast sicher als auch im Mittel gegen eine Zufallsvariable M_∞. Es gilt insbesondere P_x-fast sicher

$$\mathbf{E}_x(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n \tag{A.2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Der Grenzwert M_∞ ist P_x-fast sicher gleich einer Konstanten $c(x)$. Wegen (A.2) ist dann aber auch $M_n = c(x)$ P_x-fast sicher für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Aus Gleichung (A.2) für $n = 0$ folgt insbesondere

$$\mathbf{E}_x(M_\infty|\mathcal{F}_0) = M_0 = h(x),$$

und damit

$$c(x) = h(x)$$

Es folgt für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ aus dem Träger von μ:

$$h(x+y) = h(x) \tag{A.3}$$

Zum Beweis der Konstanz der Funktion h genügt es, zu zeigen, daß (A.3) für alle $y \in \mathbb{R}^d$ gilt. Sei hierzu

$$N := \{y \in \mathbb{R}^d; h(x+y) = h(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Wegen der Stetigkeit von h ist die Menge N abgeschlossen. Seien $y_1, y_2 \in N$. Dann ist auch ihre Summe $y_1 + y_2$ ein Element von N, denn es gilt:

$$\begin{aligned} h\left(x + (y_1 + y_2)\right) &= h\left((x + y_1) + y_2\right) \\ &= h\left(x + y_1\right) = h(x) \end{aligned}$$

Ist $y \in N$, so ist auch $-y$ aus N, denn es gilt:

$$\begin{aligned} h(x) &= h\left((x - y) + y\right) \\ &= h(x - y) \end{aligned}$$

Also ist N eine abgeschlossene additive Untergruppe von $\mathbb{R}^d$, die den Träger von μ enthält. Die einzige Untergruppe von $\mathbb{R}^d$, mit dieser Eigenschaft, ist nach Voraussetzung aber $\mathbb{R}^d$ selbst. Damit ist Teil a) des Lemmas bewiesen.

Für den Beweis des Teils b) sei $d \leq 2$ und

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d$$

vorausgesetzt. Aus

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x|M_n| &= \mathbf{E}_x(M_n) + 2\mathbf{E}_x(M_n^-) \\ &\leq h(x) + 2\max_{y \in \mathbb{R}^d} h^-(y) \end{aligned}$$

folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbf{E}_x|M_n| < \infty.$$

Nach dem Martingalkonvergenzsatz folgt die P_x-fast sichere Konvergenz der Folge gegen eine Zufallsvariable M_∞. Diese ist wiederum P_x-fast sicher gleich einer Konstanten $c(x)$. Es ist zunächst zu zeigen, daß $c(x) = h(x)$ gilt. Sei hierzu $\epsilon > 0$ und O eine offene Umgebung von x mit

$$|h(x) - h(y)| < \epsilon/4$$

für $y \in O$. Wegen der Rekurrenz der Irrfahrt gilt P_x-fast sicher für unendlich viele $n \in \mathbb{N}_0$:

$$h(S_n) \in O$$

Da andererseits P_x-fast sicher für hinreichend große n

$$|h(S_n) - c(x)| < \frac{\epsilon}{4}$$

gilt, muß $|c(x) - h(x)| < \epsilon/2$ gelten. Da diese Ungleichung für jedes ϵ gilt, folgt die Identität $c(x) = h(x)$. Es sei angenommen, h wäre nicht konstant. Dann existieren zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) aus $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, mit

$$h(x_0) = y_0, \quad h(x_1) = y_1, \quad x_0 \neq x_1; \quad y_0 \neq y_1.$$

Wegen der Stetigkeit von h existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung O_0 von x_0, mit

$$|h(\xi_0) - y_0| \quad < \quad \frac{\epsilon}{2}$$

für $\xi_0 \in O_0$. Die Rekurrenz der Irrfahrt impliziert einerseits, daß $P_{x_1}-$fast sicher unendlich oft gilt:

$$|h(S_n) - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$$

Andererseits gilt $P_{x_1}-$fast sicher für n hinreichend groß:

$$|h(S_n) - y_1| < \frac{\epsilon}{2}$$

Folglich gilt:

$$|y_0 - y_1| < \epsilon$$

Da diese Ungleichung für jedes $\epsilon > 0$ gilt, können y_0 und y_1 nicht verschieden sein, im Widerspruch zur Annahme.

$\square$

Lemma A.1.2 *Seien ν^+, ν^- Borelmaße auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ und sei ν^- endlich. Sei $\nu = \nu^+ - \nu^-$ und es gelte*

$$\mu * \nu = \nu.$$

a) Ist die Faltung $\nu * \varphi$ für jedes $\varphi \in C_c$ beschränkt, so ist das signierte Maß ν ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes.

b) Ist ν ein Maß und gilt

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d,$$

so ist ν ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes.

Beweis:
Zu $\varphi \in C_c^+$ sei $h := \nu * \varphi$. Diese Funktion ist stetig. Aus der Faltungsinvarianz von ν mit μ folgt

$$\mu * h = h.$$

Ist $\tilde{h}$ die Funktion $x \mapsto h(-x)$, so ist die Faltungsinvarianz von h mit μ gleichbedeutend mit der $\mu-$Harmonizität von $\tilde{h}$. Unter der Voraussetzung von Teil a) ist die Funktion h beschränkt. Die gespiegelte Funktion $\tilde{h}$ ist somit $\mu-$harmonisch, stetig und beschränkt. Nach Lemma A.1.1, Teil a) ist sie folglich konstant. Das signierte Maß ν ist also ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes. Unter den Voraussetzungen von Teil b) ist $\tilde{h}$ ebenfalls konstant, so daß ν auch in diesem Fall ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes ist.

$\square$

Beweis von Satz A.1.1:

Sei ν das Borelmaß mit der Dichte $\tilde{h}$. Die fast sichere Harmonizität von h ist gleichbedeutend mit der $\mu-$Invarianz von ν. Ist h beschränkt, so genügt ν den Voraussetzungen des Lemmas A.1.2, Teil a). In diesem Fall existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\nu = c \cdot \lambda^d$ und damit gilt $h = c$ fast sicher. Unter den Voraussetzungen von Teil b) existiert ein $c \in \mathbb{R}_+$ mit $\nu = c\lambda^d$, und es folgt $h = c$ fast sicher.

□

A.2. Über die Grenzwerte h^+ und h^-

Satz A.2.1 *Sei $\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ eine rekurrente, reellwertige Irrfahrt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zuwachsverteilung μ. Für beschränkte Borelmengen $A, B \in \mathfrak{B}^1$ und $x \in \mathbb{R}^1$ sei*

$$h_x(A, B) = P_x(\tau_A < \tau_B).$$

Falls $\int x^2 d\mu(x) = +\infty$ und die beiden Grenzwerte

$$\begin{aligned} h^+(A, B) &= \lim_{x \to +\infty} h_x(A, B) \\ h^-(A, B) &= \lim_{x \to -\infty} h_x(A, B) \end{aligned}$$

existieren, so gilt

$$h^+(A, B) = h^-(A, B).$$

Beweis:

Sei N die erste Eintrittszeit in die positive Halbachse $(0, +\infty)$, und N' die erste Eintrittszeit in die negative Halbachse $(-\infty, 0]$. Da $\mathbf{E}_0(S_1^2) = +\infty$, ist mindestens eines der beiden Momente $\mathbf{E}_0(S_N)$, $\mathbf{E}_0(-S_{N'})$ unendlich (Vgl. [4], S. 575). Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, daß $\mathbf{E}_0(S_N) = \infty$. Es gilt für jedes positive α:

$$\lim_{x \to -\infty} h_x((-\alpha, \alpha), (\alpha, +\infty)) = 0 \tag{A.4}$$

Zum Beweis von (A.4)

$$N_k := \begin{cases} N & , \quad \text{falls } k = 1, \\ N_{k-1} + \tau_{(0,+\infty)} \circ \theta_{N_{k-1}} & , \quad \text{falls } k > 1, \end{cases}$$

der Zeitpunkt des k-te Sprungs der Irrfahrt in positiver Richtung. Ferner sei $Y_k := S_{N_k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Sei ν die Verteilung von Y_1. Die Folge $\{Y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ ist eine transiente Irrfahrt mit Zuwachsverteilung ν.

Sei außerdem für Borelmengen $C \subseteq \mathbb{R}^1$ die numerische Zufallsvariable σ_C die erste Eintrittszeit der Irrfahrt Y_k in die Menge C. Sei $u : \mathbb{R}^1 \to [0,1]$:

$$u(x) := \begin{cases} P_x(\sigma_{(-\alpha,\alpha)} < \sigma_{(\alpha,+\infty)}) & , \quad \text{falls } x < -\alpha, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Funktionen u und $h((-\alpha,\alpha),(\alpha,+\infty))$ auf $(-\infty,-\alpha)$ übereinstimmen, genügt es, $\lim_{x\to-\infty} u(x) = 0$ zu zeigen. Sei

$$f(x) := P_x(Y_1 \in (-\alpha,\alpha)).$$

Für beschränkte, reellwertige Funktionen φ bezeichne

$$\mathcal{P}\varphi(x) := \mathbf{E}_x(\varphi(Y_1)),$$

und

$$\mathcal{G}\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_x(\varphi(Y_n)).$$

Da die Irrfahrt $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ transient ist, ist $\mathcal{G}$ endlich. Die Funktion u erfüllt die Funktionalgleichung

$$u = \mathcal{P}u + f, \tag{A.5}$$

und ist folglich ν-superharmonisch. Jede Lösung der Gleichung (A.5) ist Summe des Potentials $\mathcal{G}f$ und einer ν-harmonischen Funktion. Ist u' eine weitere Lösung von (A.5) mit

$$\lim_{x\to+\infty} u'(x) = 0, \tag{A.6}$$

so ist die Differenz $h := u - u'$ harmonisch. Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.$$

Die Harmonizität von h impliziert

$$h(\cdot) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_\cdot(h(Y_n)).$$

Da für jedes $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} Y_n = +\infty$ P_x-fast sicher gilt, muß die rechte Seite der Gleichung aber gleich Null sein. Es gibt also keine andere Lösung von (A.5) mit Bedingung (A.6), als das Potential $\mathcal{G}f$, oder einfach formuliert:

$$u = \mathcal{G}f.$$

Zum Beweis von (A.4) genügt es also,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathcal{G}f(x) = 0 \tag{A.7}$$

zu zeigen.

Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} G_x &: \mathfrak{B} \to [0, +\infty] \\ G_x(A) &= \mathcal{G}\chi_A(x). \end{aligned}$$

Wegen der Transienz ist $G_x(A)$ ein für beschränkte Mengen endlich. Ferner konvergiert die Familie $\{G_x, x \in \mathbb{R}\}$ in der vaguen Topologie für $x \to -\infty$ gegen das Nullmaß (vgl [7]). Folglich gilt für jede Riemann-integrable Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to -\infty} \mathcal{G}g(x) = 0 \tag{A.8}$$

Gleichung (A.8) gilt ebenfalls für die sogenannten direkt-Riemann-integrablen Funktionen, d.h. Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) Die beiden Reihen

$$\underline{\sigma}_\delta := \delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \inf\{g(x); (n-1)\ \delta \leq x < n\delta\}$$

und

$$\overline{\sigma}_\delta := \delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup\{g(x); (n-1)\ \delta \leq x < n\delta\}$$

konvergieren für jedes $\delta > 0$.

2) Es gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \underline{\sigma}_\delta = \lim_{\delta \to 0} \overline{\sigma}_\delta = \int g(x)\ dx$$

Zum Nachweis von (A.7) genügt es folglich, zu verifizieren, daß f direkt Riemann integrabel ist. Zum Nachweis sei $\delta > 0$ gegeben. Für

$$x \in \Big[(n-1)\delta, n\delta\Big), n \in \mathbb{Z}$$

gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \nu(-x + (-\alpha, \alpha)) \\ &\leq \mu(-n\delta - \alpha, -(n-1)\delta + \alpha] \end{aligned}$$

Es folgt für die Obersumme $\overline{\sigma}_\delta$:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_\delta &\leq \delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(-n\delta-\alpha, -(n-1)\delta+\alpha)} d\nu \\ &\leq \delta \left(\left[\frac{2\alpha}{\delta} + 2 \right] \right) < \infty \end{aligned}$$

Die beiden Reihen $\underline{\sigma}_\delta$ und $\overline{\sigma}_\delta$ sind also endlich. Zur Abschätzung ihrer Differenz beachte man, daß für $x, y \in [n\delta - \delta, n\delta), x < y$, gilt:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq \nu\left((-x-\alpha, -x+\alpha)\triangle(-y-\alpha, -y+\alpha)\right)\\ &\leq \nu\left(-\alpha + (-x, -y)\right) + \nu\left(\alpha + (-x, -y)\right)\\ &\leq \nu\left([-n\delta - \delta, -n\delta) - \alpha\right) + \nu\left([-n\delta - \delta, -n\delta) + \alpha\right)\end{aligned}$$

Es folgt

$$\overline{\sigma}_\delta - \underline{\sigma}_\delta \leq \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu\left([-n\delta - \delta, -n\delta) - \alpha\right) + \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu\left([-n\delta - \delta, -n\delta) + \alpha\right) \leq 2\delta,$$

und damit, wie behauptet, (A.4).
Zum Beweis des Satzes seien $\epsilon > 0$ und $\alpha > 0$ so gewählt, daß die Mengen A und B in $(-\alpha, \alpha)$ enthalten sind, und für $y > \alpha$ gilt :

$$\left|h_y(A, B) - h^+(A, B)\right| < \epsilon$$

Für $x < -\alpha$ gilt:

$$P_x\left(\tau_{(\alpha,+\infty)} < \tau_{(-\alpha,\alpha)} \leq \tau_A < \tau_B\right) \leq$$

$$h_x(A, B) \leq h_x((-\alpha, \alpha), (\alpha, +\infty)) + P_x\left(\tau_{(\alpha,+\infty)} < \tau_{(-\alpha,\alpha)} \leq \tau_A < \tau_B\right)$$

Nach A.4 gilt

$$\lim_{x\to-\infty} h_x((-\alpha, \alpha), (\alpha, +\infty))$$

Außerdem folgt aus der starken Markoveigenschaft:

$$P_x\left(\tau_{(\alpha,+\infty)} < \tau_{(-\alpha,\alpha)} \leq \tau_A < \tau_B\right) = \mathbf{E}_x\left(h_{S_{\tau_{(\alpha,+\infty)}}}(A, B); \tau_{(\alpha,+\infty)} < \tau_{(-\alpha,\alpha)}\right)$$

Es folgt:

$$\limsup_{x\to-\infty} \left|h_x(A, B) - h^+(A, B)\right| \leq \limsup_{x\to-\infty} \mathbf{E}_x\left(\left|h_{S_{\tau_{(\alpha,+\infty)}}}(A, B) - h^+(A, B)\right|\right) \leq \epsilon$$

Satz (A.2.1) ist somit bewiesen.

□

A.3. Ein Momenten-Problem

Satz A.3.1 *Sei μ eine Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, wobei $d \in \{1, 2\}$. Falls μ kein Dirac-Maß ist, existiert eine nichtsinguläre Verteilung μ' auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$, so daß folgendes gilt:*

i) $\mathcal{R}(\mu) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{R}(\mu') \neq \emptyset$

ii) $Re\left(\frac{1}{1-\varphi}\right)$ *lokal integrabel* $\Leftrightarrow$ $Re\left(\frac{1}{1-\varphi'}\right)$ *lokal integrabel*

Beweis für $d = 2$**:**

Lemma A.3.1 *Sei* μ *eine Verteilung auf* $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2)$*. Falls* μ *kein Dirac-Maß ist, existiert eine nichtsinguläre Verteilung* μ' *auf* $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2)$*, so daß folgendes gilt:*

$$\begin{array}{ll} i) & \displaystyle\int x_i^k \; d(\mu - \mu')(x) = 0 \textit{ für } i, k = 1, 2 \\ ii) & \displaystyle\int x_i x_j \; d(\mu - \mu')(x) = 0 \textit{ für } i, j = 1, 2 \\ iii) & \displaystyle\int x_i^2 |x_j| \; d(\mu - \mu')(x) < +\infty \textit{ für } i, j = 1, 2 \end{array}$$

Beweis von Lemma A.3.1:
Da μ kein Dirac-Maß ist, existiert ein $N > 0$, so daß in dem Quadrat $(-N, N)^2$ mindestens zwei Punkte des Trägers von μ enthalten sind. Sei

$$u(\cdot) := \frac{1}{\mu(-N, N)^2} \mu(\cdot \cap (-N, N)^2).$$

Zum Beweis des Lemmas genügt es, eine Verteilung m zu finden, mit

$$\begin{array}{ll} j) & \displaystyle\int x_i^k \; d(u - m)(x) = 0 \text{ für } i, k = 1, 2 \\ jj) & \displaystyle\int x_i x_j \; d(u - m)(x) = 0 \text{ für } i, j = 1, 2 \\ jjj) & \displaystyle\int x_i^2 |x_j| \; d(u - m)(x) < +\infty \text{ für } i, j = 1, 2 \end{array}$$

Dann besitzt nämlich

$$\mu'(\cdot) = \mu((-N, N)^2) m(\cdot) + \mu(\cdot \cap (\mathbb{R}^2 \setminus (-N, N)^2))$$

die geforderten Eigenschaften.

1. Zu einem Punkt $\alpha \in \mathbb{R}^2$ und zu einer 2×2-Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}, \text{ mit } c_{11}, c_{22} > 0 \text{ und } c_{12} \leq \sqrt{c_{11} c_{22}},$$

existiert eine Verteilung v_C mit

$$\int x_i dv_C(x) = \alpha_i \text{ für } i = 1, 2 \tag{A.9}$$

$$\int x_i x_j dv_C(x) = c_{ij} \text{ für } i \leq j, i, j \in \{1, 2\}. \tag{A.10}$$

Es genügt, dies für $c_{11} = c_{22} = 1$ und $\alpha = 0$ zu verifizieren. Ist dies nämlich für diesen Spezialfall nachgewiesen, so existiert eine affine Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine Covarianzmatrix

$$C_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \gamma \in [-1, 1],$$

so daß (A.9) und (A.10) für

$$v = T(v_C)$$

erfüllt sind. Zum Nachweis für den angegebenen Spezialfall sei

$$\overline{v} = \frac{1}{2}\delta_{\binom{1}{1}} + \frac{1}{2}\delta_{\binom{-1}{-1}}$$

$$\underline{v} = \frac{1}{2}\delta_{\binom{-1}{1}} + \frac{1}{2}\delta_{\binom{1}{-1}}$$

Für $\lambda \in [0, 1]$ sei

$$w_\lambda = \lambda\overline{v} + (1 - \lambda)\underline{v}$$

Zu einer gegebenen Matrix C_γ existiert genau ein λ, so daß w_λ die Covarianzmatrix C_γ besitzt. Behauptung 1 ist also in der Tat richtig.

2. Sei m' die zweidimensionale Standard Normalverteilung. Sei

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \int x_i du(x) \\ c_{ij} &= \int x_i x_j du(x) \\ c'_{ij} &= \begin{cases} 2c_{ij} - 1, & \text{falls } i = j \\ 2c_{ij}, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad \text{für } i, j \in \{1, 2\},\ i \leq j. \end{aligned}$$

Es existiert eine Verteilung w mit

$$\begin{aligned} \int x_i dw(x) &= \alpha_i \\ \int x_i x_j dw(x) &= c'_{ij} \text{ für } i, j \in \{1, 2\},\ i \leq j. \end{aligned}$$

Dann erfüllt die Linearkombination

$$m = \frac{1}{2}m' + \frac{1}{2}w$$

die Bedingungen j), jj) und jjj).

$\square$

Lemma A.3.2 *Sind μ und μ' echt zweidimensionale Verteilungen auf* $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2)$*, so daß i),ii) und iii) erfüllt sind, so sind die Rekurrenzmengen $\mathcal{R}(\mu)$ und $\mathcal{R}(\mu)$ entweder* **beide leer** *oder* **beide nichtleer**.

Beweis von Lemma A.3.2
Sei φ die charakteristische Funktion von μ, und φ' die charakteristische Funktion von μ'. Ist U eine beschränkte Umgebung des Ursprungs, so gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{r \nearrow 1} \int_U Re\left(\frac{1}{1-r\varphi(t)}\right)\, dt = +\infty \\ \Leftrightarrow \quad & \\ & \lim_{r \nearrow 1} \int_U Re\left(\frac{1}{1-r\varphi'(t)}\right)\, dt \end{aligned} \tag{A.11}$$

Es gilt nämlich:

1. Es existiert eine positive Konstante c, so daß für $\|t\|$ hinreichend klein

$$|1-\varphi(t)||1-\varphi(t)| > c\|t\|^4.$$

2. Wegen der Bedingungen i), ii) und iii) ist

$$|\varphi(t) - \varphi'(t)| = \mathcal{O}(\|t\|^3) \text{ für } \|t\| \to 0.$$

Folglich gilt für $r \in [0,1]$:

$$\left|\frac{1}{1-r\varphi(t)} - \frac{1}{1-r\varphi'(t)}\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\|t\|}) \quad \text{für } \|t\| \to 0$$

Damit ist aber

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_U \left|\frac{1}{1-r\varphi(t)} - \frac{1}{1-r\varphi'(t)}\right|\, dt < +\infty.$$

□

Lemma A.3.3 *Seien μ und μ' echt zweidimensionale Verteilungen auf* $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2)$*, so daß i),ii) und iii) erfüllt sind. Sei φ die charakteristische Funktion von μ und φ' die charakteristische Funktion von μ'. Dann gilt für $\epsilon > 0$:*

$$\int_{(-\epsilon,\epsilon)^2} Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)\, dt = +\infty$$

genau dann, wenn

$$\int_{(-\epsilon,\epsilon)^2} Re\left(\frac{1}{1-\varphi'(t)}\right)\, dt = +\infty$$

Beweis
Wie aus dem Beweis von Lemma A.3.2 hervorgeht, ist

$$\left| \frac{1}{1-\varphi(t)} - \frac{1}{1-\varphi'(t)} \right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\|t\|}) \quad \text{für } \|t\| \to 0$$

und damit lokal integrabel.

□

Sei μ' eine nichtsinguläre Verteilung, die Eigenschaften i), ii) und iii) aus Lemma A.3.1 besitzt. Nach Lemma A.3.2 gilt einerseits

$$\mathcal{R}(\mu') \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{R}(\mu) \neq \emptyset.$$

Andererseits folgt aus Lemma A.3.3 für jede beschränkte Umgebung U des Ursprungs:

$$\int_U Re\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right)\, dt = +\infty \Leftrightarrow \int_U Re\left(\frac{1}{1-\varphi'(t)}\right)\, dt = +\infty$$

Anmerkungen zum Beweis für $d = 1$:

Ähnlich wie im Fall $d = 2$ wird μ' so konstruiert, daß für hinreichend kleine t die Funktionen φ und φ' „hinreichend nahe beieinander“ liegen. Allerdings reicht es im Fall $d = 1$ nicht aus, daß

$$|\varphi(t) - \varphi'(t)| = \mathcal{O}(|t|^3) \text{ für } t \to 0,$$

da die Funktion $1/|t|$ hier, anders als in der Ebene, keine integrable Majorante bildet. Die Verteilung μ' sollte folgende Bedingungen Erfüllen:

$$i') \quad \int x^i d(\mu - \mu')(x) = 0 \text{ für } i = 1, 2, 3$$

$$ii') \quad \int x^4 d(\mu - \mu')(x) < +\infty$$

Sind aber Bedingungen i') und ii') erfüllt, so ist die Differenz beider charakteristischer Funktionen viermal stetig differenzierbar. Die Ableitungen bis einschließlich der dritten Ordnung verschwinden. Dann ist aber

$$\left| \frac{1}{1-\varphi(t)} - \frac{1}{1-\varphi'(t)} \right| = \mathcal{O}(1) \quad \text{für } \|t\| \to 0.$$

und folglich lokal integrabel. Für die Einzelheiten der Konstruktion von μ' sei auf [6], Seite 34–35 verwiesen.

□

Liste der Symbole

Allgemein

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$Re(\omega)$	Der Realteil einer komplexen Zahl ω
$\bar{\omega}$	Der konjugiert komplexe Wert von ω
λ^d	Das d-dimensionale Lebesgue-Maß
x oder $<x;y>$	Skalarprodukt zweier Punkte x und y
$\Vert x\Vert$	Die euklidische Norm eines Punktes $x \in \mathbb{R}^d$
f, g, h, r	Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$
$\int f(x)\ dx$	Lebesgue-Integral von f
$\Vert f\Vert_\infty$	Die Supremumsnorm der Funktion f
$\Vert f\Vert_1$	$\int \vert f(x)\vert dx$
A, B, Ω	Mengen
$A \setminus B$	$\{a \in A; a \notin B\}$ Differenz zweier Mengen A und B
$A \triangle B$	$A \setminus B \cup B \setminus A$; Symmetrische Differenz von A und B
A^c	Das Komplement einer Menge A in einem Raum $\Omega \supseteq A$
χ_A	Die Indikatorfunktion von A

Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

$\mathfrak{B}^d$	Die σ-Algebra der d-dimensionalen Borelmengen
$f\lambda^d$	bzgl. dem Lebesgue-Maß absolut stetiges Borelmaß mit Dichte f
Ω	Nichtleere Menge
$\mathfrak{A}$	σ-Algebra auf Ω
P	Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$
$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum
$\mathbf{E}[Y]$	Erwartungswert einer integrablen Zufallsvariablen Y
$T(P)$	Das Bildmaß von P unter einer meßbaren Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$
δ_x	Dirac-Maß im Punkte x
μ, ν	Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$; sog. Verteilungen

$\mu * \nu$	Faltung zweier Verteilungen μ und ν
μ^{*n} oder μ_n	n-te Faltungspotenz von μ
φ	charakteristische Funktion (siehe Definition 1.1.3 auf Seite 3)
	Irrfahrten
$\{S_n; n \in \mathbb{N}_0\}$	Irrfahrt (siehe Definition 1.1.1 auf Seite 1)
$\mathbf{E}_x(Y)$	Bedingte Erwartung: $\mathbf{E}[Y\|S_0 = x]$, x Punkt des Zustandsraumes, Y integrable Zufallsvariable
$\mathbf{E}_\nu(Y)$	$\int \mathbf{E}_x(Y)\ d\nu(x)$; ν Startverteilung der Irrfahrt
$P_x(\cdot)$	$P(\cdot\|S_0 = x)$
$P_\nu(\cdot)$	$\int P_x(\cdot)\ d\nu(x)$
$\mathcal{R}$	Rekurrenzmenge (siehe Definition 1.1.2 auf Seite 1)
$\mathcal{R}(\mu)$	Rekurrenzmenge einer Irrfahrt mit Startverteilung δ_0 und Zuwachsverteilung μ
τ_A	Die erste Eintrittszeit der Irrfahrt in die Menge A
$\tau_A \circ \theta_n$	Die erste Eintrittszeit der Irrfahrt in die Menge A nach der Zeit n
$h_x(A, B)$	$P_x(\tau_A < \tau_B)$, wobei A, B Borelmengen, x Punkt des Zustandsraumes
$h_x(a, b)$	$P_x(\tau_{\{a\}} < \tau_{\{b\}})$, wobei $a, b, x \in \mathbb{Z}^d$; Irrfahrt $\mathbb{Z}^d$-wertig
$a_n(x)$	$= \sum_{i=0}^n (\mu^{*i}\{0\} - \mu^{*i}\{0\}), x \in \mathbb{Z}^d$; siehe 2.1 auf Seite 15
$a(x)$	$= \lim_{n\to\infty} a_n(x)$
	Auffüllschema (Vgl. Abschnitt 3.2)
r	Dichte der Startverteilung $S_0(P)$
h	Dichte der Zielverteilung $S_\tau(P)$
$(\Omega^{r,h}, \mathfrak{A}^{r,h}, P^{r,h})$	Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine Irrfahrt mit Startverteilung $r\lambda^d$ und Zuwachsverteilung μ sowie eine endl. Stoppzeit τ existiert, s .d. $S_\tau(P) = h\lambda^d$; (s. Definition 3.1.2 auf Seite 39)
τ	Im Zusammenhang mit dem Auffüllschema die Stoppzeit, die aus dem Auffüllschema mit Startverteilung $r\lambda^d$ und Zielverteilung $h\lambda^d$ hervorgeht

Literaturverzeichnis

[1] Chacon, R. ; Ornstein, D. S.
A general ergodic theorem
Illinois J. Math. 4 1960, pp. 153–160

[2] Chung, K. L.
A course in probability theory
Second Edition
Academic Press New York and London

[3] Chung, K. L. ; Fuchs, W. H. J. ,
On the distribution of values of sums of random variables
Mem. Amer. Math. Soc. **1951** no. 6

[4] Feller, William
An introduction to probability theory and its applications, vol. 2
Wiley, New York, 1964

[5] Goffing, Rita
Ein Rekurrenzkriterium für reellwertige Irrfahrten
Diplomarbeit, Saarbrücken 1996

[6] Ornstein, D. S.
Random walks. I
Trans. Amer. Math. Soc. 138 (1969), 1-43

[7] Revuz, D.
Markov chains, Revised edition
North-Holland, Amsterdam New York Oxford pp. 40-74

[8] Spitzer, Frank
Principles of random walk
Princeton, N. J. , 1964