

Stetigkeitsaussagen über den Boltzmannschen Kollisionsoperator

Dissertation

zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

von

RALF KIRSCH

Saarbrücken
2004

Tag des Kolloquiums: 22. Dezember 2004

Dekan: Univ.-Prof. Dr. J. Eschmeier

Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr. S. Rjasanow
Univ.-Prof. Dr. A. K. Louis
Univ.-Prof. Dr. R. Duduchava

Einleitung

Die mathematische Beschreibung des Verhaltens verdünnter Gase erfolgt durch die Boltzmann-Gleichung, die im Jahr 1872 erstmals aufgestellt wurde. Dabei handelt es sich um eine Integro-Differentialgleichung für die gesuchte Verteilungsdichtefunktion der Gaspartikel.

Während der freie Flug der Gaspartikel durch einen linearen Differentialoperator beschrieben wird, erfolgt die mathematische Modellierung der gleichzeitig stattfindenden Partikelkollisionen durch einen bilinearen Integraloperator. Sowohl die theoretische Betrachtung als auch die numerische Behandlung dieses Kollisionsoperators stellt die größte Herausforderung im Umgang mit der Boltzmann-Gleichung dar.

Als klassische Anwendung der Boltzmann-Gleichung ist die Simulation des Wiedereintritts von Raumfahrzeugen in die Erdatmosphäre zu nennen. Daneben gibt es Varianten der Gleichung, die der Modellierung von Verkehrsflüssen, Ionisationsvorgängen oder dem Ladungstransport in Halbleitern dienen. Ferner werden Versionen der Boltzmann-Gleichung zur mathematischen Untersuchung von volkswirtschaftlichen Fragestellungen eingesetzt.

Vor dem Hintergrund dieser immer länger werdenden Liste von Anwendungen besteht die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit darin, den Boltzmannschen Kollisionsoperator hinsichtlich seiner Abbildungseigenschaften auf vollständig normierten und metrischen Funktionenräumen eingehend zu studieren. Im Hinblick auf die Konstruktion deterministischer numerischer Verfahren und der damit verbundenen Konsistenz- und Stabilitätsanalysen wird dabei Wert auf die explizite Darstellung der in den Normabschätzungen auftretenden Konstanten gelegt. In manchen Fällen werden alternativ explizite obere Schranken für die betreffenden Konstanten angegeben. Ausgenommen hiervon sind jene Konstanten, die durch die Verwendung nichttrivialer Interpolations- oder Einbettungsaussagen in die Abschätzungen einfließen.

Manche der hier bewiesenen Stetigkeitsaussagen sind aus früheren Arbeiten zu diesem Thema bekannt. Die entsprechenden Untersuchungen in dieser Arbeit beschränken sich allerdings nicht darauf, die bereits geführten Beweise lediglich zu wiederholen und die Konstanten in expliziter Form zu erhalten. Vielmehr werden die jeweiligen Aussagen unter Voraussetzungen betrachtet, die einerseits neue, transparentere Beweismethoden erlauben und andererseits keine zusätzliche Einschränkung im Zusammenhang mit der Boltzmann-Gleichung darstellen.

Als zweite Thematik werden die Lösungen des Anfangswertproblems zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung betrachtet. In diesem Zusammenhang werden die zeitliche Entwicklung der Momente der Lösung, die Stabilität der Lösung bezüglich

der Anfangsbedingung und Galerkin-Petrov-Methoden zur numerischen Behandlung studiert.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

In Kapitel 1 werden zunächst Aspekte und Begriffe der kinetischen Gastheorie kurz umrissen, wobei der Fall der verdünnten Gase den Schwerpunkt bildet. Es folgt die Vorstellung der Boltzmann-Gleichung als mathematisches Modell für diese Phänomene und eine Zusammenfassung ihrer wichtigsten Eigenschaften. Das Interesse an der räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung wird begründet und mit einer kurzen Vorstellung von Lösungsbegriffen und Aussagen über deren Existenz verbunden. Zum Schluss wird ein für die weiteren Betrachtungen nützliches Lemma formuliert und bewiesen.

Das zweite Kapitel beginnt mit der Definition der in dieser Arbeit betrachteten Funktionenräume und der Zusammenstellung ihrer Eigenschaften. Im Anschluss werden einige für die späteren Untersuchungen wichtige Ungleichungen formuliert und bewiesen. Betrachtungen und Bemerkungen zum Boltzmannschen H -Funktional schließen das Kapitel ab.

Die Hauptresultate dieser Arbeit finden sich in Kapitel 3. Nach einer kurzen Zusammenfassung bereits bekannter Stetigkeitsaussagen über den Kollisionoperator werden die in diesem Kapitel verwendeten Voraussetzungen angegeben und diskutiert. Auf dieser Grundlage wird die Stetigkeit des Operators auf gewichteten $\mathbb{L}_p$ -Räumen untersucht und die gewonnenen Resultate im Anschluss auf gewichtete Sobolev- und Besselpotentialräume übertragen. Die Konstruktion von metrischen Räumen, für die der Kollisionoperator stetig ist und Abschätzungen bezüglich exponentiell gewichteter Normen schließen das Kapitel ab.

Das vierte Kapitel widmet sich wichtigen und interessanten *a priori*-Abschätzungen für die Lösungen des Anfangswertproblems zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung: Zuerst wird die zeitliche Entwicklung der $\mathbb{L}_1$ -Momente untersucht und damit im Anschluss die Stabilität der Lösung bezüglich der Anfangsbedingung nachgewiesen. Die Beweismethoden in diesem Kapitel orientieren sich an früheren Arbeiten zu diesen Themen. Die hier vorliegende Fassung ist weitgehend selbstkonsistent und gibt die in den Abschätzungen vorkommenden Konstanten in expliziter Form an.

Nach einer kurzen Übersicht über etablierte deterministische numerische Verfahren behandelt Kapitel 5 die Galerkin-Petrov-Approximation für die räumlich homogene Boltzmann-Gleichung. Die Betrachtungen werden auf ganz allgemeine Art und Weise angestellt, um die wesentlichen und allen konkreten Realisierungen der Approximation gemeinsamen Aspekte herauszuarbeiten. Ferner werden zwei für die praktische Umsetzung relevante Zusatzannahmen erörtert und Bedingungen angegeben, unter denen die physikalischen Erhaltungssätze auch für die approximative Lösung gelten. Die Diskussion der geglätteten Partikel als mögliche Wahl für die Ansatzfunktionen beendet die Untersuchungen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. S. Rjasanow für die Unterstützung sowie die äußerst hilfreichen Diskussionen und Anmerkungen bei der Forschung zu diesem Thema herzlich bedanken.

Mein Dank gilt ferner Herrn Prof. Dr. R. Duduchava für die fruchtbare Zusammenarbeit. Seine Diskussionsbereitschaft eröffnete mir die Möglichkeit, an seinen außerordentlich umfangreichen Kenntnissen und Erfahrungen auf dem Gebiet der Theorie der Funktionenräume teilzuhaben.

Zusammenfassung

Diese Dissertation befasst sich hauptsächlich mit der Stetigkeit des Boltzmannschen Kollisionsoperators auf normierten und metrischen Räumen. Die für die Kollisionskerne des Operators getroffenen Annahmen sind im Wesentlichen äquivalent zur Grad-Bedingung. Als Funktionenräume werden die gewichteten Lebesgue-, Sobolev- und Besselpotentialräume betrachtet. Bei den entsprechenden Normabschätzungen werden die beteiligten Konstanten bis auf wenige Ausnahmen explizit angegeben.

Desweiteren werden die Lösungen des Anfangswertproblems für die räumlich homogene Boltzmann-Gleichung hinsichtlich der zeitlichen Entwicklung der $\mathbb{L}_1$ -Momente und der Stabilität bezüglich der Anfangsbedingung untersucht.

Die Galerkin-Petrov-Verfahren zur numerischen Approximation der räumlich homogenen Gleichung werden von einem allgemeinen Standpunkt aus betrachtet.

Abstract

This thesis deals mainly with continuity properties of the Boltzmann collision operator in normed and metric spaces. The collision kernel of the operator is supposed to meet requirements which are essentially equivalent to Grad's cutoff assumption. Function spaces considered in this thesis are the weighted Lebesgue, Sobolev and Bessel potential spaces. Up to a few exceptions, all constants involved in the estimates are given in explicit form.

Further considerations deal with the solutions to the initial value problem for the spatially homogeneous Boltzmann equation. Here, the evolution of moments in $\mathbb{L}_1$ and stability with respect to the initial condition are investigated.

Galerkin-Petrov methods for the numerical approximation of the spatially homogeneous problem are considered from a general point of view.

Inhaltsverzeichnis

1	Kinetische Gastheorie und Boltzmann-Gleichung	1
1.1	Mathematische Modellierung von Gasen	2
1.2	Die Boltzmann-Gleichung	4
1.2.1	Das Hartkugelmodell	5
1.2.2	Interaktionsmodelle und Kollisionskerne	10
1.3	Invarianzeigenschaften und schwache Formulierungen	13
1.4	Makroskopische Größen, Kollisionsinvarianten, Erhaltungsgleichungen .	19
1.5	Die räumlich homogene Gleichung	23
1.5.1	Gleichgewichtsverteilungen und H -Theorem	25
1.5.2	Lösungsbegriffe und Existenz von Lösungen	27
1.6	Ein nützliches technisches Lemma	30
2	Funktionenräume und Ungleichungen	33
2.1	Funktionenräume	33
2.1.1	Räume integrierbarer Funktionen	33
2.1.2	Sobolev- und Besselpotentialräume	37
2.1.3	Interpolation und Differentiation in Banach-Räumen	40
2.2	Elementare Ungleichungen und punktweise Abschätzungen	42
2.2.1	Elementare Ungleichungen	42
2.2.2	Povzner-Ungleichungen	44
2.2.3	Weitere Abschätzungen für die Gewichtsfunktion	47
2.2.4	Abschätzungen für die Exponentialfunktion	49
2.3	Anmerkungen zum H -Funktional	52
3	Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators	57
3.1	Eigenschaften der Kollisionsfrequenz	61
3.2	$\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_1$ -Abschätzungen	64
3.2.1	Der Verlustterm	64
3.2.2	Der Gewinnterm	65
3.3	$\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_p$ -Abschätzungen	70
3.3.1	Der Verlustterm	71
3.3.2	Der Gewinnterm	71
3.4	Stetigkeit in Besselpotentialräumen	73

3.4.1	Abschätzungen in gewichteten Sobolev- und Besselpotentialräumen	74
3.4.2	Der adjungierte Gewinnterm und Glättungseigenschaften	77
3.5	Stetigkeit in metrischen und exponentiell gewichteten Räumen	81
3.5.1	Metrische Räume	81
3.5.2	Normabschätzungen für $\mathbb{L}_1^\Theta$ -Funktionen	83
4	Momente und Stabilität in $\mathbb{L}_1$	89
4.1	Zeitliche Entwicklung der $\mathbb{L}_1$ -Momente	91
4.2	$\mathbb{L}_1$ -Stabilität bezüglich der Anfangsbedingung	99
5	<i>a priori</i>-Betrachtung: Galerkin-Petrov-Methoden	103
5.1	Die Galerkin-Petrov-Approximation	107
5.2	Die diskretisierte Gleichung	109
5.2.1	Die Massenmatrix und diskrete Erhaltungsgrößen	109
5.2.2	Die Kollisionsmatrizen	111
5.3	Praktische Aspekte	112
5.3.1	Reduktion des Aufwands	112
5.3.2	Approximation der Anfangsbedingung	114
5.3.3	Ein Beispiel für die Ansatzfunktionen	115
	Abschließende Bemerkungen	119
	Literaturverzeichnis	121

Kapitel 1

Kinetische Gastheorie und Boltzmann-Gleichung

In diesem einführenden Kapitel wird nach einer kurzen allgemeinen Darstellung der mathematischen Modellierung von Gasen auf die spezielle Problematik der so genannten *verdünnten Gase* eingegangen.

Die Boltzmann-Gleichung als mathematische Beschreibungsform der zeitlichen Entwicklung des Gaszustandes für diese Situation wird vorgestellt, wobei weniger die Herleitung der Gleichung im Vordergrund steht, sondern vielmehr die Betrachtung der mikroskopischen Vorgänge und die entsprechenden mathematischen Objekte bei der Darstellung der Wechselwirkung von Partikeln in den Mittelpunkt rückt.

Invarianzeigenschaften und schwache Formulierungen des Boltzmannschen Kollisionsoperators, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit von Relevanz sind, werden in einem eigenen Abschnitt detaillierter vorgestellt, da die hierzu benötigten Umformungen dem besseren Verständnis des Operators dienlich sind.

Es folgt die Herstellung des Zusammenhangs zwischen der Beschreibung des Gaszustandes auf der Ebene der Boltzmann-Gleichung und den makroskopisch beobachtbaren und in Anwendungen eigentlich interessierenden Größen.

Historisch, theoretisch und numerisch spielt die so genannte räumlich homogene Boltzmann-Gleichung eine eigenständige und bedeutende Rolle in der kinetischen Gastheorie. Dies zu motivieren, auf Besonderheiten dieser Form der Gleichung einzugehen und einen kurzen Überblick über Lösbarkeitsresultate zu geben, ist Aufgabe von Abschnitt 1.5.

Zum Abschluss wird ein Lemma formuliert und bewiesen, das sich bei der Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators als äußerst nützlich erweisen wird.

Die Umformungen und Argumentationen der Abschnitte 1.2, 1.3 und 1.4 sind meist formaler Natur. In diesem Sinn sind die dort angegebenen „Beweise“ der Aussagen zu verstehen. Alle dort formulierten Aussagen können in der gebotenen mathematischen Strenge bewiesen werden und auf die entsprechenden Quellen wird vor allem in Abschnitt 1.5 verwiesen.

1.1 Mathematische Modellierung von Gasen

„Die mechanische Wärmetheorie setzt voraus, daß sich die Moleküle der Gase keineswegs in Ruhe, sondern in der lebhaftesten Bewegung befinden. Wenn daher auch der Körper seinen Zustand gar nicht verändert, so wird doch jedes einzelne Molekül seinen Bewegungszustand beständig verändern, und ebenso werden sich die verschiedenen Moleküle gleichzeitig nebeneinander in den verschiedensten Zuständen befinden.“

L. BOLTZMANN [15]

Unter einem Gas versteht man eine Gesamtheit von N_p Partikeln, die sich in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) befinden. Der Zustand des Gases zur Zeit $t \in \mathbb{R}_+$ ist vollständig bekannt, wenn man Masse $m > 0$, Position $x \in \Omega$ und Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ eines jeden Gasparkels kennt. Im Rahmen der klassischen Mechanik ist die Masse eines Partikels unabhängig von der Zeit und der Gaszustand zur Zeit t wird durch

$$Z(t) = \{(m_i, x_i(t), v_i(t)) : i = 1, \dots, N_p\}$$

beschrieben. In einem elektrisch neutralen Gas und unter Vernachlässigung der Gravitationskräfte bleiben nur noch zwei Faktoren, die die geradlinig-gleichförmige Bewegung der Gasteilchen verhindern:

- Die Interaktion der Partikel mit dem Rand des Gebiets
- und die Interaktion der Partikel untereinander.

Während die Wechselwirkung mit dem Rand allen fluiddynamischen Fragestellungen gemeinsam ist und hier nicht weiter betrachtet werden soll, kann man anhand des Einflusses der Partikelinteraktion auf die zeitliche Entwicklung des Gaszustands mehrere physikalische Situationen unterscheiden:

- Als ersten Extremfall die *Knudsen-Gase*, die hinsichtlich ihrer Teilchendichte so stark verdünnt sind, dass die Teilchenwechselwirkungen vernachlässigt werden können.
- Als zweites Extrem das Fluid als dichtes *Kontinuum*, beschrieben durch die Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen.

Es stellt sich die Frage, wie Gase, deren Zustand sich zwischen diesen beiden Extremen befindet, zu modellieren sind. Dass diese Fragestellung nicht rein akademischer Natur ist, zeigt das Beispiel der Erdatmosphäre in ca. 80 km Höhe und der Bedarf an der numerischen Simulation des Wiedereintritts von Raumfahrzeugen in die Atmosphäre. Kennzeichnend für die erwähnte Zwischensituation sind die folgenden Eigenschaften:

- Das Gas ist zu dünn, um es mit den Methoden der Kontinuumsmechanik korrekt zu beschreiben.

- Andererseits ist das Fluid zu dicht, um Kollisionen vernachlässigen zu dürfen.
- Man kann jedoch annehmen, dass an einer Wechselwirkung nicht mehr als zwei Partikel beteiligt sind.

Als weitere Vereinfachung soll angenommen werden, dass das Gas homogen ist, d.h. alle Partikel dieselbe Masse besitzen und dass es sich nicht um Moleküle handelt: Die Bewegung der Gasteilchen ist ausschließlich translatorischer Natur.

Sind die physikalischen Regeln bekannt, nach denen zwei Partikel miteinander wechselwirken, z.B. indem man die Kraft, die sie aufeinander ausüben, explizit angeben kann, so kann man im Prinzip mit Hilfe der Newtonschen Gesetze aus einem gegebenen Anfangszustand $Z(0)$ für alle $t > 0$ den jeweils herrschenden Zustand berechnen. Diese Vorgehensweise beinhaltet jedoch sowohl praktische als auch prinzipielle Schwierigkeiten:

- Unter Normbedingungen ist die Anzahl der Gasteilchen in einem Kubikmeter von der Größenordnung 10^{27} . Im Gegensatz zum Knudsen-Gas müssen die Wechselwirkungen aller möglichen Interaktionspartner simuliert werden, was zu einem unrealistisch hohen Rechenaufwand führt.
- Ein Vergleich mit Messdaten ist unmöglich: Nach der Heisenbergschen Unschärferelation kann man Ort und Impuls eines Partikels niemals gleichzeitig beliebig genau messen.
- Die Modellierung auf dieser mikroskopischen Ebene enthält zu viele bzw. irrelevante Informationen: Das Modell unterscheidet durch willkürliche Nummerierung künstlich zwischen gleichartigen Partikeln und in praktischen Anwendungen ist man an Größen wie Dichte, Druck und Temperatur interessiert, nicht an Position und Geschwindigkeit eines bestimmten Teilchens.
- Auf makroskopischer Ebene stationäre Zustände sind mikroskopisch alles andere als zeitlich konstant und können mit einem derart detaillierten Modell nicht erfasst werden.

Als Ausweg liegt es nahe, solchen Zwischensituationen mit einer adäquaten Beschreibung zu begegnen. Um die Vorteile eines kontinuierlichen Modells für ein diskretes Objekt wie ein Partikelkollektiv nutzen zu können, bedient man sich einer probabilistischen Herangehensweise.

Dazu betrachtet man für eine messbare Menge $\mathcal{Z}_x \times \mathcal{Z}_v \subset \Omega \times \mathbb{R}^3$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich zur Zeit t ein Partikel mit einer Geschwindigkeit aus der Menge $\mathcal{Z}_v$ im Teilgebiet $\mathcal{Z}_x$ befindet. Für diese Wahrscheinlichkeit, bezeichnet mit

$$P_t((x(t), v(t)) \in \mathcal{Z}_x \times \mathcal{Z}_v),$$

nimmt man an, dass es eine zugehörige nichtnegative Dichtefunktion f gibt, d.h.

$$P_t((x(t), v(t)) \in \mathcal{Z}_x \times \mathcal{Z}_v) = \int_{\mathcal{Z}_x} \int_{\mathcal{Z}_v} f(t, x, v) dv dx.$$

Ausgehend von einem Anfangszustand, repräsentiert durch $f_0(x, v)$, benötigt man eine Entwicklungsgleichung für die gesuchte Verteilungsdichte $f(t, x, v)$ für $t > 0$. Für den Fall, dass die Partikel durch binäre elastische Kollisionen miteinander wechselwirken, wird die zeitliche Entwicklung durch die *Boltzmann-Gleichung* beschrieben.

1.2 Die Boltzmann-Gleichung

„Will man daher nicht bloß beiläufige Werte der in der Gastheorie vorkommenden Größen mutmaßen, sondern eine exakte Theorie derselben in Angriff nehmen, so muß vor allem die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände bestimmt werden, welche an einem und demselben Moleküle im Verlaufe einer sehr langen Zeit und an den verschiedenen Molekülen gleichzeitig vorkommen, d.h. es muß berechnet werden, wie sich die Zahl jener Moleküle, deren Zustand zwischen gewissen Grenzen liegt, zur Gesamtanzahl der Moleküle verhält.“

L. BOLTZMANN [15]

Wenn man wie in Abschnitt 1.1 von elektrisch neutralen Gasteilchen ausgeht und die Einwirkung der Gravitationskräfte keine Rolle spielen, so ist die zeitliche Entwicklung der Verteilungsdichte für ein Knudsen-Gas gegeben durch

$$\forall t \geq 0, x \in \Omega, v \in \mathbb{R}^3 : f(t, x, v) = f_0(x - vt, v),$$

wobei für $x \in \partial\Omega$ die Randbedingungen zu berücksichtigen sind. Da die Partikel sich untereinander nicht beeinflussen und keine äußeren Kräfte wirken, bewegt sich der Anfangszustand entlang der Partikeltrajektorien.

Der obige Ausdruck ist gerade die Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_t f(t, x, v) + (v \cdot \nabla_x) f(t, x, v) = 0 \quad , \quad f(0, x, v) = f_0(x, v) .$$

Der Differentialoperator in dieser Gleichung beschreibt diejenigen Änderungen von f , die durch den freien Flug der Partikel hervorgerufen werden und wird daher auch *Transportoperator* oder *Transportterm* genannt.

Andererseits ist der Transportterm gleichzeitig das totale Differential von f nach der Zeit t und es ist der Einfluss der binären Kollisionen miteinzubeziehen. Dies geschieht mit Hilfe eines *Kollisionsterms*, der von der Verteilungsdichte f selbst abhängt:

$$\partial_t f(t, x, v) + (v \cdot \nabla_x) f(t, x, v) = Q(f, f)(t, x, v) . \quad (1.1)$$

Die Aufgabe des Kollisionsterms, auch *Kollisionsoperator* oder *Kollisionsintegral* genannt, ist die folgende:

Zur Zeit t finden in einem beliebig kleinen Raumvolumen um die Position x Kollisionen statt, bei denen eines der beteiligten Teilchen die Geschwindigkeit v erhält. In Geschwindigkeitspaaren ausgedrückt:

$$(v', w') \mapsto (v, w) . \quad (1.2)$$

Die Anzahl solcher Kollisionen ist zu bestimmen.

Hiervon ist zu subtrahieren die Anzahl jener Kollisionen zur selben Zeit t und im selben Volumen, bei denen ein Partikel zuvor die Geschwindigkeit v besaß und nach der Wechselwirkung beide Kollisionspartner eine von v verschiedene Geschwindigkeit besitzen:

$$(v, w) \mapsto (v^*, w^*) \quad , \quad v^* \neq v \neq w^* . \quad (1.3)$$

Zur mathematischen Erfassung dieser Gewinn- und Verlustbilanz benötigt man die folgenden Informationen:

- Die möglichen Geschwindigkeitskombinationen, die zum Gewinn bzw. Verlust von Teilchen mit Geschwindigkeit v führen.
- Die zeitliche Häufigkeit, mit der die betreffenden Kollisionen stattfinden.

1.2.1 Das Hartkugelmodell

„Sei irgend ein Raum mit sehr vielen Gasmolekülen erfüllt, deren jedes ein materieller Punkt ist. Jedes Molekül fliege während des größten Teiles der Zeit geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort. Nur wenn sich zwei Moleküle zufällig sehr nahe kommen, beginnen sie aufeinander einzuwirken. Ich nenne diesen Vorgang, während dessen zwei Moleküle aufeinander einwirken, einen Zusammenstoß der beiden Moleküle,“

L. BOLTZMANN [15]

Um die Betrachtungen zu vereinfachen, modelliert man die Partikel als harte Kugeln mit Durchmesser d_p , die nur durch Stöße miteinander wechselwirken und sich ansonsten nicht gegenseitig beeinflussen. Die Kollisionen seien dabei vollkommen elastisch, d.h. es gilt die Erhaltung von Impuls

$$v' + w' = v + w , \quad (1.4)$$

und Energie

$$|v'|^2 + |w'|^2 = |v|^2 + |w|^2 . \quad (1.5)$$

Dabei ist $|\cdot|$ die euklidische Norm eines Vektors, (v', w') das Geschwindigkeitspaar vor der Wechselwirkung und (v, w) dasjenige nach der Kollision.

Am einfachsten lässt sich die Wechselwirkung beschreiben, wenn man einen Kollisionspartner mit doppeltem Durchmesser und als ruhend annimmt. Den zweiten Partner modelliert man als Punkt, der sich mit der *relativen Geschwindigkeit* $v' - w'$ bewegt. Bezeichnet

$$\mathbf{n} \in S^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| = 1\}$$

den Richtungsvektor, der vom Mittelpunkt des ruhenden Partikels auf den zweiten Partikel zeigt, so findet eine Kollision offensichtlich nur statt, wenn

$$(v' - w') \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad (1.6)$$

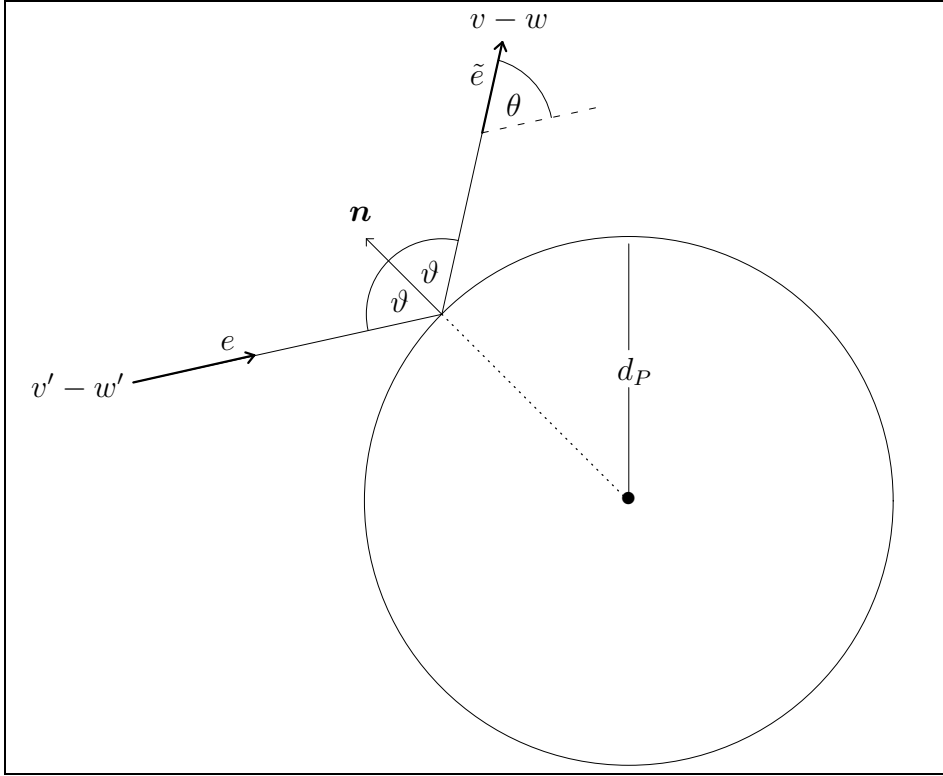


Abbildung 1.1: Elastische binäre Kollision im Hartkugelmodell.

gilt. Da die Kollision vollkommen elastisch ist, wird die relative Geschwindigkeit an der Ebene senkrecht zu $\mathbf{n}$ gespiegelt, d.h. die relative Geschwindigkeit $v - w$ nach erfolgter Kollision ist gegeben durch (siehe Abb. 1.1)

$$v - w = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)(v' - w'). \quad (1.7)$$

Addiert und subtrahiert man die Impulserhaltung (1.4) von dieser Gleichung, so erhält man die Geschwindigkeitstransformation

$$v = v' - ((v' - w') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad w = w' + ((v' - w') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad (1.8)$$

oder äquivalent

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mathcal{K}(\mathbf{n}) \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} I - \mathbf{n}\mathbf{n}^T & \mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ \mathbf{n}\mathbf{n}^T & I - \mathbf{n}\mathbf{n}^T \end{pmatrix}.$$

Für alle $\mathbf{n}$ erfüllt die Transformation $\mathcal{K}(\mathbf{n})$

$$\mathcal{K}(\mathbf{n}) = \mathcal{K}(\mathbf{n})^{-1},$$

so dass aus (1.8) unmittelbar

$$v' = v - ((v - w) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad w' = w + ((v - w) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (1.9)$$

folgt. Für elastische Kollisionen muss also bezüglich der Parametrisierung nicht die Unterscheidung (1.2) und (1.3) vorgenommen werden. Bei inelastischen Kollisionen verhält sich dies anders.

Es folgt, dass alle Geschwindigkeitspaare (v', w') , die durch (1.9) mit einem $\mathbf{n}$ nach (1.6) gegeben sind, bei der Kollision einen Partikel mit Geschwindigkeit v erzeugen. Dadurch sind alle Konstellationen bestimmt, die einen Gewinn an Partikeln mit Geschwindigkeit v zur Folge haben.

In welchen Situationen führt die Kollision eines Paares mit Geschwindigkeiten v und w wieder zu einem Partikel mit Geschwindigkeit v oder w ? Dazu bemerkt man zunächst, dass die Vertauschung $v \leftrightarrow w$ zur Vertauschung $v' \leftrightarrow w'$ führt und man sich deshalb auf die Fälle $v' = v$ und $v' = w$ beschränken kann. Der erste Fall kann nur eintreten, wenn

$$v - w \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow (v - w) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.10)$$

gilt, und man spricht dann von einer schleifenden Kollision (engl. *grazing collision*). Der zweite Fall liegt vor, wenn

$$v - w \parallel \mathbf{n}$$

gilt, d.h. die Kollision ist frontal (engl. *frontal collision*). An (1.9) erkennt man, dass in dieser Situation die beiden Partikel lediglich ihre Geschwindigkeiten tauschen. Da die Partikel nicht unterschieden werden, hat aus statistischer Sicht keine Kollision stattgefunden. In allen anderen Situationen kommt es zum Verlust an Partikeln mit Geschwindigkeit v .

Mit diesen Vorbetrachtungen lässt sich die folgende Form des Kollisionsoperators verstehen:

$$Q(f, f)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+^2} ((v - w) \cdot \mathbf{n}) \left(f(t, x, v') f(t, x, w') - f(t, x, v) f(t, x, w) \right) d\mathbf{n} dw, \quad (1.11)$$

wobei

$$S_+^2 = \{\mathbf{n} \in S^2 : (v - w) \cdot \mathbf{n} \geq 0\}.$$

Zunächst fällt auf, dass die Abhängigkeit von t und x nur über die Verteilungsdichte f selbst gegeben ist und der Operator lediglich auf die Geschwindigkeitsvariable wirkt. Die Ursache hierfür ist der *Boltzmann-Grad-Grenzübergang*

$$N_p \rightarrow \infty, \quad d_p \rightarrow 0 \quad : \quad N_p d_p^2 = \text{const.}$$

Dies bedeutet anschaulich, dass die Partikel zu Punkten zusammenschrumpfen, gleichzeitig aber die Partikelanzahl so erhöht wird, dass der Gesamtquerschnitt aller Partikel konstant bleibt. In diesem Sinne ist das Gas als verdünnt anzusehen.

Der Ausdruck $(v - w) \cdot \mathbf{n}$ drückt die Kollisionshäufigkeit beim Hartkugelmodell aus: Ob es in einem Zeitabschnitt der Länge Δt zu einer Kollision kommt, hängt von der Projektion der relativen Geschwindigkeit auf die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte ab (siehe Abb. 1.1). Die Integration über S_+^2 berücksichtigt alle räumlichen

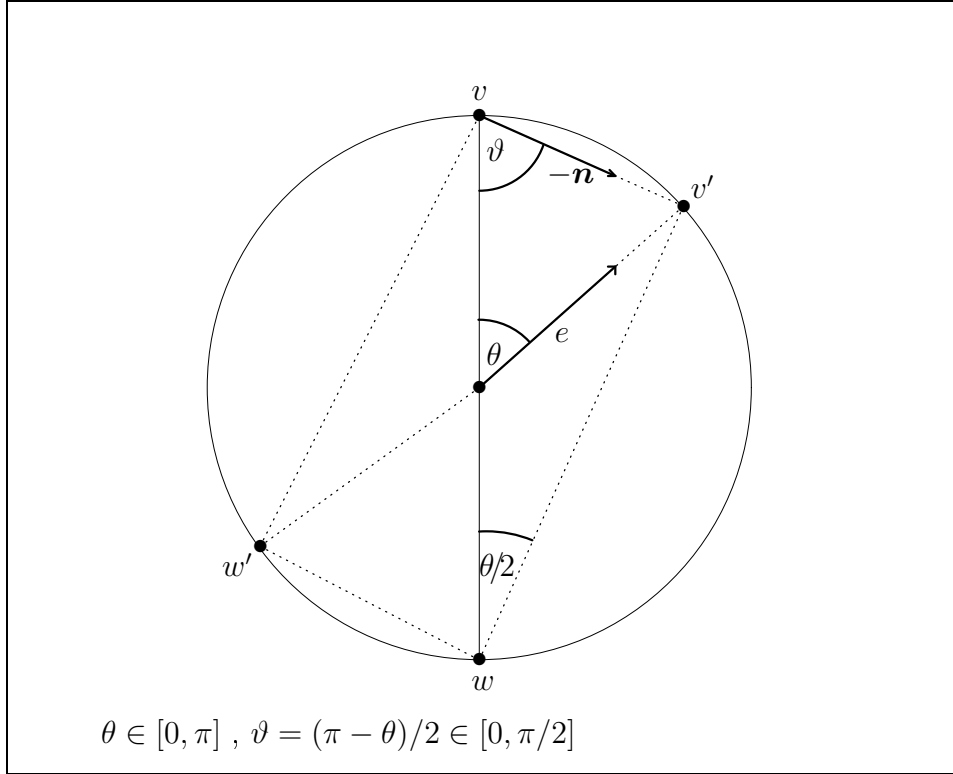


Abbildung 1.2: Die Parametrisierung der Geschwindigkeiten v' und w' nach (1.9) bzw. (1.13).

Konstellationen, die der Kollisionsbedingung (1.6) genügen.

Eine mathematische strenge Herleitung der Boltzmann-Gleichung ist alles andere als trivial: Erstmals gelang dies GRAD [27]; eine weitere Darstellung findet sich in [20].

Ein Nachteil der Darstellung (1.11) ist die Tatsache, dass der Integrationsbereich bezüglich der Variablen $\mathbf{n}$ von der relativen Geschwindigkeit $v - w$ abhängt. Diese Abhängigkeit lässt sich durch den Übergang zu einer anderen Parametrisierung der Geschwindigkeitstransformation beseitigen:

Wegen der Householder-Gestalt (1.7) der Transformation von $v - w$ muss es einen eindeutig bestimmten Einheitsvektor $e \in S^2$ geben, so dass

$$v' - w' = |v - w| e \quad (1.12)$$

gilt (siehe Abb. 1.1). Addition bzw. Subtraktion dieser Gleichung und der Impulserhaltung (1.4) liefert die alternative Darstellung

$$v' = \frac{1}{2}(v + w + |v - w| e) \quad , \quad w' = \frac{1}{2}(v + w - |v - w| e) . \quad (1.13)$$

Der geometrische Zusammenhang zwischen den beiden Varianten der Geschwindigkeitstransformationen ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

Für fixierte $v, w \in \mathbb{R}^3$ betrachtet man nun allgemein ein Integral der Form

$$I(F_1, F_2) = \int_{S_+^2} F_1(v'(\mathbf{n}), w'(\mathbf{n}), v, w) F_2\left(|v - w|, \frac{(v - w) \cdot \mathbf{n}}{|v - w|}\right) ((v - w) \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{n}, \quad (1.14)$$

wobei durch die Notation $v'(\mathbf{n})$ und $w'(\mathbf{n})$ die Abhängigkeit der gestrichenen Geschwindigkeiten von $\mathbf{n}$ nach (1.9) hervorgehoben werden soll.

Wählt man zur Integration bezüglich Kugelkoordinaten das Koordinatensystem so, dass der Polarwinkel mit dem Winkel ϑ aus Abbildung 1.2 übereinstimmt, so lässt sich das Integral umschreiben zu

$$I(F_1, F_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F_1(v'(\vartheta, \eta), w'(\vartheta, \eta), v, w) F_2(|v - w|, \cos \vartheta) |v - w| \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\eta. \quad (1.15)$$

Definitionsgemäß besteht zwischen dem Einfallswinkel ϑ und dem Streuwinkel θ der folgende Zusammenhang (siehe Abb. 1.1 und 1.2):

$$\vartheta = \frac{\pi - \theta}{2}. \quad (1.16)$$

Daraus folgt

$$\cos \vartheta = \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}, \quad (1.17)$$

ferner gilt

$$\cos \vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) = \frac{1}{2} \sin(\pi - 2\vartheta) = \frac{1}{2} \sin \theta \quad (1.18)$$

und mit $d\theta = -2d\vartheta$ geht (1.15) über in

$$I(F_1, F_2) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_1(v'(\theta, \eta), w'(\theta, \eta), v, w) F_2\left(|v - w|, \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}\right) |v - w| \sin \theta d\theta d\eta. \quad (1.19)$$

Die Winkel θ und η stellen aber gerade den Vektor e dar, der die gesamte Einheitskugeloberfläche durchläuft. Mit $de = \sin \theta d\theta d\eta$ ergibt sich schließlich

$$I(F_1, F_2) = \frac{1}{4} \int_{S^2} F_1(v'(e), w'(e), v, w) F_2\left(|v - w|, \sqrt{\frac{1 - \mu}{2}}\right) |v - w| de,$$

wobei $v'(e)$ und $w'(e)$ gemäß (1.13) gegeben sind und $\mu = \mu(v, w, e)$ definiert ist durch

$$\mu = \frac{(v - w) \cdot e}{|v - w|} = \cos \theta. \quad (1.20)$$

Für die spezielle Wahl

$$F_1(v', w', v, w) = f(v')f(w') - f(v)f(w) \quad , \quad F_2\left(|v - w|, \frac{(v - w) \cdot \mathbf{n}}{|v - w|}\right) \equiv 1$$

erhält man die alternative Darstellung des Kollisionsoperators bezüglich der Geschwindigkeitstransformation (1.13):

$$Q(f, f)(v) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} |v - w| \left(f(v')f(w') - f(v)f(w) \right) de dw. \quad (1.21)$$

Der Einfluss der relativen Geschwindigkeit auf die Integration über die Einheitskugelfläche ist damit beseitigt.

1.2.2 Interaktionsmodelle und Kollisionskerne

Die allgemeinste Formulierung des Kollisionsintegrals in der bilinearen Form lautet

$$Q(f, g)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - w, e) \left(f(v')g(w') - f(v)g(w) \right) de dw, \quad (1.22)$$

bzw. für die Geschwindigkeitstransformation (1.9):

$$Q(f, g)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} \bar{B}(v - w, \mathbf{n}) \left(f(v')g(w') - f(v)g(w) \right) d\mathbf{n} dw,$$

wobei der jeweilige *Kollisionskern* B bzw. $\bar{B}$ die Art der Wechselwirkung der Partikel modelliert. So hatten sich beim Hartkugellmodell die Darstellungen

$$B(v - w, e) = \frac{1}{4} |v - w| \quad \text{bzw.} \quad \bar{B}(v - w, \mathbf{n}) = (v - w) \cdot \mathbf{n}$$

ergeben.

Wenn die Partikel über eine gewisse Distanz hinweg Kräfte aufeinander ausüben, z.B. durch ein Potential der Form

$$V(r) = C_\gamma r^{-\gamma},$$

wobei $\gamma > 1$, C_γ eine Konstante und r den relativen Abstand zweier Partikel bezeichnet, so kann man zeigen, dass der Kollisionskern die Gestalt

$$\bar{B}(v - w, \mathbf{n}) = |v - w|^{1-4/\gamma} \bar{b}(\cos \vartheta) \quad (1.23)$$

besitzt (siehe [19]). Dabei ist ϑ der Winkel zwischen $v - w$ und $\mathbf{n}$ in der Geschwindigkeitstransformation (1.9). Die Funktion $\bar{b}$ lässt sich nicht explizit angeben, es lässt sich jedoch zeigen, dass gilt:

$$\bar{b}(\cos \vartheta) = \mathcal{O}\left((\pi/2 - \vartheta)^{-(1+2/\gamma)}\right) \quad , \quad \vartheta \rightarrow \pi/2. \quad (1.24)$$

Dies bedeutet, dass eine Singularität für schleifende Kollisionen auftritt.

Definiert man für $\gamma > 1$

$$\lambda = 1 - \frac{4}{\gamma}, \quad (1.25)$$

so gilt stets $\lambda \in (-3, 1]$ und (1.24) schreibt sich um in

$$\bar{b}(\cos \vartheta) = \mathcal{O}((\pi/2 - \vartheta)^{-(3-\lambda)/2}) \quad , \quad \vartheta \rightarrow \pi/2. \quad (1.26)$$

Anders als für das Hartkugelmodell muss in dieser Situation die Funktion F_2 in (1.15) folgendermaßen gewählt werden:

$$F_2(|v - w|, \cos \vartheta) = \frac{\bar{b}(\cos \vartheta)}{\cos \vartheta} |v - w|^{\lambda-1}.$$

Unter Berücksichtigung von (1.16) und (1.17) definiert man

$$b_\lambda(\cos \theta) = \sqrt{2} \frac{\bar{b}(\sqrt{(1 - \cos \theta)/2})}{\sqrt{1 - \cos \theta}} = \frac{\bar{b}(\cos \vartheta)}{\cos \vartheta}. \quad (1.27)$$

Wegen $\sin \theta = \mathcal{O}(\theta)$ für $\theta \rightarrow 0$ und (1.17) gilt

$$\sqrt{1 - \cos \theta} = \mathcal{O}(\theta) \quad , \quad \theta \rightarrow 0. \quad (1.28)$$

Mit (1.16) und (1.26) folgt hieraus

$$b_\lambda(\cos \theta) = \mathcal{O}(\theta^{-(5-\lambda)/2}) \quad , \quad \theta \rightarrow 0. \quad (1.29)$$

Analog zu (1.19) erhält man für den Kollisionsoperator unter Verwendung von (1.27)

$$\begin{aligned} Q(f, f)(v) = \\ \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (f(v'(\theta, \eta))f(w'(\theta, \eta)) - f(v)f(w)) |v - w|^\lambda b_\lambda(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\eta dw, \end{aligned} \quad (1.30)$$

und es gilt wegen (1.29)

$$b_\lambda(\cos \theta) \sin \theta = \mathcal{O}(\theta^{-(3-\lambda)/2}) \quad , \quad \theta \rightarrow 0. \quad (1.31)$$

Einsetzen von (1.20) in (1.30) liefert schließlich

$$Q(f, f)(v) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f(v')f(w') - f(v)f(w)) |v - w|^\lambda b_\lambda(\mu) de dw, \quad (1.32)$$

so dass man die folgende allgemeine Form des Kollisionskerns bezüglich der Geschwindigkeitstransformation (1.13) erhält:

$$B(|v - w|, e) = b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda \quad , \quad \lambda \in (-3, 1] \quad , \quad \mu = \frac{(v - w) \cdot e}{|v - w|}. \quad (1.33)$$

Wechselwirkungspotentiale, für die $0 < \lambda \leq 1$ gilt, heißen *hart*, für $\lambda \in (-3, 0)$ *weich*. Die Funktion b_λ heißt *Winkelanteil* des Kollisionskerns und $|v - w|^\lambda$ wird *kinetischer Anteil* genannt.

Da der Kollisionsoperator Gewinn und Verlust an Partikeln mit Geschwindigkeit v bilanziert, erscheint es natürlich, den Operator in einen *Gewinnterm*

$$Q_+(f, g)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda f(v') g(w') de dw, \quad (1.34)$$

und einen *Verlustterm*

$$Q_-(f, g)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda f(v) g(w) de dw, \quad (1.35)$$

aufzuspalten. Stellt man im Verlustterm das Integral über S^2 in Kugelkoordinaten dar und substituiert $\mu = \cos \theta$, so erkennt man, dass für die Wohldefiniertheit von Q_- die so genannte *Grad-Bedingung*

$$C_b = 2\pi \int_{-1}^1 b_\lambda(\mu) d\mu < \infty \quad (1.36)$$

erfüllt sein muss ([28]). Dies ist jedoch nach den obigen Betrachtungen im allgemeinen nicht der Fall, z.B. folgt aus (1.28) und (1.29)

$$b_\lambda(\mu) = \mathcal{O}((1 - \mu)^{-(5-\lambda)/4}) \quad , \quad \mu \rightarrow 1. \quad (1.37)$$

Für Zentralkraftpotentiale mit $\gamma < \infty$ besitzt der Winkelanteil des Kollisionskerns eine nichtintegrierbare Singularität. Für $\mu \rightarrow -1$ ist $b_\lambda(\mu) = \mathcal{O}(1)$.

Physikalisch besagt die Grad-Bedingung (1.36), dass die schleifenden Kollisionen vernachlässigt werden können. Dies kann so interpretiert werden, dass die Partikel über ein Potential mit endlicher Reichweite $\Delta R_{\max}$ interagieren. Der Streuwinkel θ hängt eindeutig vom so genannten Streuparameter r ab und es kommt nur zur Kollision, wenn $|r| \leq \Delta R_{\max}$ gilt (siehe Abb. 1.3).

Ist die Bedingung (1.36) erfüllt, so lässt sich (1.35) weiter zerlegen:

$$Q_-(f, g)(v) = C_b f(v) \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda g(w) dw = f(v) L[g](v), \quad (1.38)$$

wobei der lineare Operator

$$L[g](v) = C_b \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda g(w) dw \quad (1.39)$$

Kollisionsfrequenz genannt wird.

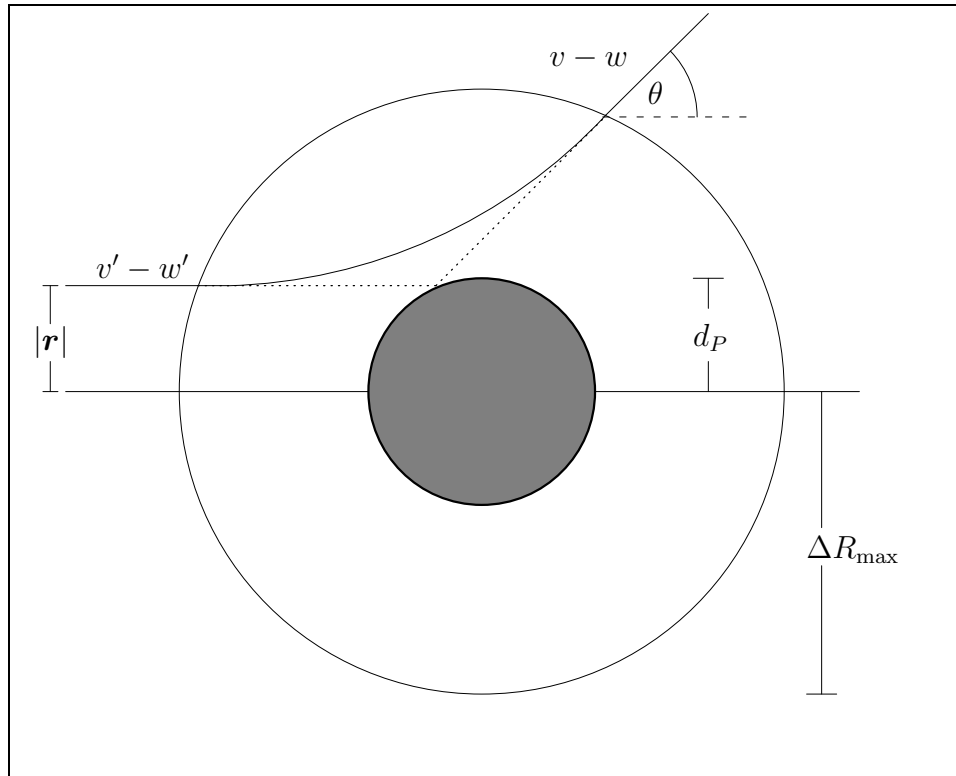


Abbildung 1.3: Relative Bahnkurve im Hartkugelmodell (gepunktet) und für ein Potential mit endlicher Reichweite.

Als weitere Vereinfachung und aus Gründen der Anpassungsfähigkeit von numerischen Simulationen wurde von BIRD [8] das VHS-Modell (*variable hard spheres model*) vorgeschlagen. Dabei geht man von einem Kollisionskern der Gestalt

$$B(|v - w|, e) = C_\lambda |v - w|^\lambda \quad , \quad C_\lambda > 0 \quad , \quad \lambda \in (-3, 1] \quad (1.40)$$

aus. Das Modell hat sich in praktischen Anwendungen gut bewährt, nicht nur bei der Simulation von homogenen monoatomaren Gasen, sondern auch für Gasgemische und im Falle mehratomiger Moleküle.

Speziell sind hierin enthalten das Hartkugelmodell ($\lambda = 1$) und für $\lambda = 0$ die *Maxwell-(Pseudo-)Moleküle*.

1.3 Invarianzeigenschaften und schwache Formulierungen des Kollisionsoperators

Nicht nur aus rein physikalischen Gründen interessant, sondern bei der mathematischen Untersuchung auch bedeutsam ist die Tatsache, dass sich die Anwendung von Translationen und Rotationen auf die Geschwindigkeitsvariablen ungestört auf den Kollisionsoperator überträgt.

Zur Untersuchung dieser Eigenschaft definiert man für $z \in \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{T}_z f(v) = f(v - z),$$

und $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sei eine orthogonale Matrix. An der Geschwindigkeitstransformation (1.13) erkennt man unmittelbar die Gültigkeit von

$$(v - z, w - z) \mapsto (v' - z, w' - z),$$

und da man im Kollisionsintegral statt bezüglich der Variablen w ebenso gut bezüglich der Variablen $w + z$ über $\mathbb{R}^3$ integrieren kann, folgt unmittelbar

$$\forall z \in \mathbb{R}^3 : Q(\mathcal{T}_z f, \mathcal{T}_z g)(v) = \mathcal{T}_z Q(f, g)(v). \quad (1.41)$$

Die Invarianz unter orthogonalen Transformationen sieht man folgendermaßen ein: Ersetzt man bei der Integration über die Einheitssphäre die Variable e durch $\tilde{e} = \mathcal{U}e$, dann gilt $d\tilde{e} = de$ und

$$\mathcal{U}v' = \frac{1}{2}(\mathcal{U}v + \mathcal{U}w + |\mathcal{U}v - \mathcal{U}w| \tilde{e}) \quad , \quad \mathcal{U}w' = \frac{1}{2}(\mathcal{U}v + \mathcal{U}w - |\mathcal{U}v - \mathcal{U}w| \tilde{e}).$$

Ferner gilt wegen

$$\mu = \frac{(v - w) \cdot e}{|v - w|} = \frac{\mathcal{U}(v - w) \cdot \tilde{e}}{|\mathcal{U}(v - w)|},$$

dass μ invariant unter orthogonalen Transformationen von v , w und e ist. Setzt man $\tilde{w} = \mathcal{U}w$, so gilt $d\tilde{w} = dw$, $|v - w| = |\mathcal{U}v - \tilde{w}|$ und es folgt mit den obigen Betrachtungen:

$$\begin{aligned} Q(f \circ \mathcal{U}, g \circ \mathcal{U})(v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda \left(f(\mathcal{U}v') g(\mathcal{U}w') - f(\mathcal{U}v) g(\mathcal{U}w) \right) de dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |\mathcal{U}v - \tilde{w}|^\lambda \left(f(\mathcal{U}v') g(\mathcal{U}w') - f(\mathcal{U}v) g(\tilde{w}) \right) d\tilde{e} d\tilde{w} \\ &= Q(f, g)(\mathcal{U}v). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Sowohl zur Untersuchung theoretischer Aspekte der Gleichung als auch im numerischen Kontext ist es hilfreich, alternative Formen des Kollisionsoperators anzugeben. So ist etwa für Stabilitäts- und Eindeutigkeitsaussagen sowie bei der Betrachtung von Galerkin-Petrov-Methoden die symmetrische Form des Kollisionsoperators die geeignete Variante. Diese ist zunächst rein algebraisch definiert als

$$\mathcal{Q}(f, g)(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - w, e) \left(f(v') g(w') + f(w') g(v') - f(v) g(w) - f(w) g(v) \right) de dw. \quad (1.43)$$

Zusätzlich betrachtet man eine Form der Symmetrisierung, die sich auf die Kollisionsgeometrie stützt:

Die Vertauschung $e \leftrightarrow -e$ führt zu den Vertauschungen $\mu \leftrightarrow -\mu$, $v' \leftrightarrow w'$ und $S_-^2 \leftrightarrow S_+^2$. Damit erhält man für die bilineare Variante des Kollisionsoperators:

$$\begin{aligned}
Q(f, g)(v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda \left(f(v')g(w') - f(v)g(w) \right) de dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \left(\int_{S_+^2} b_\lambda(\mu) \left(f(v')g(w') - f(v)g(w) \right) de \right. \\
&\quad \left. + \int_{S_-^2} b_\lambda(\mu) \left(f(v')g(w') - f(v)g(w) \right) de \right) dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \left(\int_{S_+^2} b_\lambda(\mu) \left(f(v')g(w') - f(v)g(w) \right) de \right. \\
&\quad \left. + \int_{S_+^2} b_\lambda(-\mu) \left(f(w')g(v') - f(v)g(w) \right) de \right) dw.
\end{aligned}$$

Mit der Indikatorfunktion für eine Menge Ω

$$\mathbf{1}_\Omega(y) = \begin{cases} 1 & , y \in \Omega \\ 0 & , y \notin \Omega \end{cases},$$

folgt für die quadratische Form des Kollisionsintegrals die Darstellung

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \int_{S^2} (b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)) \mathbf{1}_{[0,1]}(\mu) \left(f(v')f(w') - f(v)f(w) \right) de dw. \quad (1.44)$$

Wendet man dieselben Umformungen auf den algebraisch symmetrisierten Operator an und setzt

$$\tilde{b}_\lambda(\mu) = (b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)) \mathbf{1}_{[0,1]}(\mu), \quad (1.45)$$

so erhält man

$$\mathcal{Q}(f, g)(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \int_{S^2} \tilde{b}_\lambda(\mu) \left(f(v')g(w') + f(w')g(v') - f(v)g(w) - f(w)g(v) \right) de dw. \quad (1.46)$$

Diese Varianten des Operators mit symmetrisiertem Kollisionskern werden sich bei der Untersuchung der Abbildungseigenschaften als vorteilhaft erweisen. Es ist klar, dass sich die eingangs bewiesenen Invarianzeigenschaften sofort auf den symmetrischen Kollisionsoperator $\mathcal{Q}$ übertragen.

Von besonderer Bedeutung ist die schwache Formulierung des Kollisionsoperators:

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \psi(v) dv \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(f, g)(v) \psi(v) dv, \quad (1.47)$$

wobei ψ so zu wählen ist, dass der Ausdruck wohldefiniert ist. Ist dies der Fall, so gilt der folgende

Satz 1.3.1. *Unabhängig von f und g gilt für geeignete Testfunktionen ψ :*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \psi(v) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda \left(f(v') g(w') - f(v) g(w) \right) \left(\psi(v) - \psi(v') \right) de dw dv. \end{aligned}$$

Beweis. In den Koordinaten

$$U = \frac{v + w}{2}, \quad u = \frac{v - w}{2}, \quad dw dv = 8dU du,$$

ausgedrückt, lautet die schwache Formulierung des Kollisionsoperators

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \psi(v) dv \\ &= 2^{3+\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} b_\lambda(\mu) |u|^\lambda \psi(U+u) \int_{S^2} \left(f(U+|u|e) g(U-|u|e) - f(U+u) g(U-u) \right) de du dU. \end{aligned}$$

Führt man die Integration bezüglich u in den Kugelkoordinaten

$$R = |u|, \quad \tilde{e} = \frac{u}{|u|}, \quad du = R^2 dR d\tilde{e},$$

aus, so erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \psi(v) dv = \\ & 2^{3+\lambda} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \int_{S^2} R^{2+\lambda} \psi(U+R\tilde{e}) b_\lambda(\mu) \left(f(U+Re) g(U-Re) - f(U+R\tilde{e}) g(U-R\tilde{e}) \right) de d\tilde{e} dU dR. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von $\mu = \tilde{e} \cdot e$ vertauscht man die Rollen von e und $\tilde{e}$, setzt $\tilde{u} = Re$ und erhält

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \psi(v) dv \\ &= 2^{3+\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |\tilde{u}|^\lambda \psi(U+|\tilde{u}|\tilde{e}) \left(f(U+\tilde{u}) g(U-\tilde{u}) - f(U+|\tilde{u}|\tilde{e}) g(U-|\tilde{u}|\tilde{e}) \right) d\tilde{e} d\tilde{u} dU. \end{aligned}$$

Die Koordinatentransformation

$$v = U + \tilde{u} \quad , \quad w = U - \tilde{u} \quad , \quad d\tilde{u} dU = \frac{1}{8} dv dw$$

führt zu

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \psi(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda \psi(v') \left(f(v)g(w) - f(v')g(w') \right) d\tilde{e} dv dw \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \psi(v') dv . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Entsprechend erhält man für den symmetrischen Kollisionsoperator:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(f, g)(v) \psi(v) dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \left(f(v')g(w') + f(w')g(v') \right. \\ &\quad \left. - f(v)g(w) - f(w)g(v) \right) \left(\psi(v) - \psi(v') \right) d\tilde{e} dv dw . \end{aligned}$$

Ersetzt man im Integral auf der linken Seite v durch w , so tauschen auf der rechten Seite die Variablen v und w ihre Rollen und man erhält insgesamt die Darstellung

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(f, g)(v) \psi(v) dv \\ &= \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \left(f(v')g(w') + f(w')g(v') - f(v)g(w) - f(w)g(v) \right) \\ &\quad \times \left(\psi(v) + \psi(w) - \psi(v') - \psi(w') \right) d\tilde{e} dv dw . \end{aligned}$$

Für die quadratische Form des Kollisionsoperators ergibt sich hieraus sofort

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(v) \psi(v) dv &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \left(f(v')f(w') - f(v)f(w) \right) \\ &\quad \times \left(\psi(v) + \psi(w) - \psi(v') - \psi(w') \right) d\tilde{e} dv dw . \quad (1.48) \end{aligned}$$

Die bisher gezeigten Darstellungen der schwachen Form des Kollisionsintegrals sind für alle Kollisionskerne der Form (1.33) gültig. Kann man Q bzw. $\mathcal{Q}$ in Gewinn- und Verlustterm aufspalten, so erhält man mit denselben Umformungen wie in Satz 1.3.1:

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_+(f, g)(v) \psi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda f(v)g(w) \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \psi(v') d\tilde{e} dv dw , \quad (1.49)$$

woraus für den ganzen Operator folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \psi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda f(v) g(w) \int_{S^2} b_\lambda(\mu) (\psi(v') - \psi(v)) de dw dv. \quad (1.50)$$

Für den symmetrischen Kollisionsterm erhält man daraus die schwache Formulierung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(f, g)(v) \psi(v) dv \\ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda f(v) g(w) \int_{S^2} b_\lambda(\mu) (\psi(v') + \psi(w') - \psi(v) - \psi(w)) de dw dv. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Die entsprechende Variante für den quadratischen Kollisionsterm ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(v) \psi(v) dv \\ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda f(v) f(w) \int_{S^2} b_\lambda(\mu) (\psi(v') + \psi(w') - \psi(v) - \psi(w)) de dw dv. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Bemerkung 1.3.2.

- a) Die Formulierung (1.50) kann auch als Definition des Kollisionsoperators dienen, wenn die Grad-Bedingung (1.36) nicht erfüllt und somit keine Auspaltung in Gewinn- und Verlustterm möglich ist. Die Idee hierbei ist, dass die Differenz der Testfunktionen die Singularität von b_λ behebt. Da die Singularität an der Stelle $\mu = 1$ nach (1.37) von einer Ordnung < 2 ist, genügt es hierfür, dass

$$\left| \int_{S^2} b_\lambda(\mu) (\psi(v') - \psi(v)) de \right| \leq F_\psi(v, w) \int_{-1}^1 b_\lambda(\mu) (1 - \mu) d\mu$$

mit einer im Hinblick auf f und g hinreichend integrierbaren oder beschränkten Funktion $F_\psi(v, w)$ gilt.

Umgekehrt wurde von VILLANI [51] nachgewiesen, dass für $\gamma \leq 1$, d.h. $\lambda \leq -3$, nicht einmal mehr (1.50) eine sinnvolle Definition des Kollisionsoperators erlaubt. Dies ist nicht weiter problematisch, da die durch $\gamma \leq 1$ repräsentierten Interaktionsmodelle nicht den der Boltzmann-Gleichung zugrunde liegenden Annahmen entsprechen.

- b) Wie später eingehender diskutiert werden wird, sind die schwachen Formulierungen von Q , $\mathcal{Q}$ und Q_+ ein sehr nützliches Werkzeug bei der theoretischen Untersuchung

und numerischen Behandlung des Kollisionsoperators. Für den Fall etwa, dass die Testfunktion isotrop ist,

$$\psi = \psi(|\cdot|),$$

kann man bei fixierten $v, w \in \mathbb{R}^3$ durch Anwendung einer orthogonalen Transformation die Integration über die Einheitssphäre derart in Kugelkoordinaten ausführen, dass der Polarwinkel der Kugelkoordinaten mit $\theta = \arccos(\mu)$ übereinstimmt. Von dieser Möglichkeit wird an mehreren Stellen Gebrauch gemacht werden.

1.4 Makroskopische Größen, Kollisionsinvarianten und Erhaltungsgleichungen

„Lediglich dem Umstande, daß selbst die regellosesten Vorgänge, wenn sie unter denselben Verhältnissen vor sich gehen, doch jedesmal dieselben Durchschnittswerte liefern, ist es zuzuschreiben, daß wir auch im Verhalten warmer Körper bestimmte Gesetze wahrnehmen.“

L. BOLTZMANN [15]

Makroskopische Größen

Die Lösung $f(t, x, v) \geq 0$ der Boltzmann-Gleichung ist für alle $t \geq 0$ eine Verteilungsdichtefunktion und beschreibt den Zustand des Gases auf der probabilistischen Ebene. In konkreten Anwendungen ist man aber an physikalisch mehr oder weniger direkt messbaren *makroskopischen* Größen interessiert und es muss geklärt werden, wie man aus der Kenntnis von f solche Größen gewinnt. Dies geschieht durch Integration des Produkts aus Verteilungsdichte und geeigneter Funktionen in v über den gesamten Geschwindigkeitsraum, also der Bildung spezieller Momente der Verteilungsdichte:

- Momente nullter Ordnung:
Die *Dichte* ρ ist definiert als

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv. \quad (1.53)$$

- Momente erster Ordnung:
Die *mittlere Geschwindigkeit* $\mathbf{v}$ ist

$$\rho(t, x) \mathbf{v}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) dv. \quad (1.54)$$

- Momente zweiter Ordnung:
Der *Impulsfluss* $\mathbf{M}$ ist

$$\mathbf{M}(t, x) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j f(t, x, v) dv \right)_{i,j=1}^3, \quad (1.55)$$

und die *mittlere Gesamtenergiedichte* E definiert man als

$$E(t, x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dv = \frac{1}{2} \text{tr}(M(t, x)) , \quad (1.56)$$

wobei $\text{tr}(\cdot)$ die Spur bezeichnet.

Mit der Aufspaltung

$$v = \mathbf{v} + (v - \mathbf{v}) ,$$

und unter Beachtung von

$$\int_{\mathbb{R}^3} (v - \mathbf{v}(t, x)) f(t, x, v) dv = 0 , \quad (1.57)$$

lassen sich weitere makroskopische Größen ableiten und zueinander in Beziehung setzen:

Der *Spannungstensor* P ,

$$P(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} (v - \mathbf{v})(v - \mathbf{v})^T f(t, x, v) dv , \quad (1.58)$$

steht mit dem Impulsfluss (1.55) in der Beziehung

$$M(t, x) = \rho(t, x) \mathbf{v}(t, x) \mathbf{v}^T(t, x) + P(t, x) .$$

Die mittlere *innere Energiedichte* (oder *thermische Energiedichte*) e

$$\rho(t, x) e(t, x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v - \mathbf{v}(t, x)|^2 f(t, x, v) dv = \frac{1}{2} \text{tr}(P(t, x)) \quad (1.59)$$

summiert sich mit der mittleren kinetischen Energiedichte zur Gesamtenergiedichte:

$$E(t, x) = \frac{1}{2} \rho(t, x) |\mathbf{v}(t, x)|^2 + \rho(t, x) e(t, x) .$$

Der *Druck* $p(t, x)$ ist gegeben durch

$$p(t, x) = \frac{1}{3} \text{tr}(P(t, x)) , \quad (1.60)$$

und man erhält durch Vergleich mit (1.59):

$$p(t, x) = \frac{2}{3} \rho(t, x) e(t, x) . \quad (1.61)$$

Schließlich ist die *Temperatur* T durch

$$\rho(t, x) T(t, x) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - \mathbf{v}(t, x)|^2 f(t, x, v) dv = \frac{2}{3} \rho(t, x) e(t, x) = p(t, x) , \quad (1.62)$$

gegeben, in Übereinstimmung mit der Zustandsgleichung für ideale Gase. Diese beinhaltet üblicherweise die universelle Gaskonstante, die im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet wird. Statt dessen wird eine renormierte Temperaturdefinition verwendet.

- Momente dritter Ordnung:

Die *Energieflussdichte* $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\mathbf{r}(t, x) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} v_i |v|^2 f(t, x, v) dv \right)_{i=1}^3, \quad (1.63)$$

und man bestätigt mit der obigen Aufspaltung der Geschwindigkeit sofort, dass

$$\mathbf{r}(t, x) = \rho(t, x) \mathbf{v}(t, x) \left(\frac{|\mathbf{v}(t, x)|^2}{2} + e(t, x) \right) + P(t, x) \mathbf{v}(t, x) + \mathbf{q}(t, x),$$

wobei der *Wärmeflussvektor* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ als

$$\mathbf{q}(t, x) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (v_i - \mathbf{v}_i(t, x)) |v - \mathbf{v}(t, x)|^2 f(t, x, v) dv \right)_{i=1}^3 \quad (1.64)$$

definiert ist.

Damit sind alle mechanisch und thermodynamisch relevanten makroskopischen Größen aus der Verteilungsdichtefunktion abgeleitet. Speziell erkennt man, dass aus der Kenntnis der 4 Momente nullter und erster Ordnung, der 6 Einträge auf und oberhalb der Diagonalen des symmetrischen Spannungstensors und der drei Komponenten des Wärmeflussvektors alle anderen Größen abgeleitet werden können.

Wahrscheinlichkeitstheoretisch gesprochen: Die makroskopischen Größen sind bestimmt durch 13 (z.T. zentrierte) Momente der Verteilungsdichtefunktion f .

Kollisionsinvarianten

Unter den im letzten Unterabschnitt definierten Größen sind Dichte, Impuls und Energie dadurch ausgezeichnet, dass bei einer elastischen Kollision auf mikroskopischer Ebene die entsprechenden Größen Masse, Gesamtimpuls und -energie des Partikel-paares erhalten bleiben. Ihre zeitliche Entwicklung auf makroskopischer Ebene ist daher von eigenem Interesse.

Definition 1.4.1. Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Kollisionsinvariante*, wenn sie die Eigenschaft

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^3 : \phi(v') + \phi(w') = \phi(v) + \phi(w)$$

besitzt. v', w' sind dabei gemäß (1.13) (bzw. (1.9)) definiert.

Aus dieser Definition und der schwachen Formulierung des symmetrischen Kollisionsoperators (1.51) folgert man sofort die folgende makroskopische Sichtweise der Kollisionsinvarianten:

Satz 1.4.2. *Eine messbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Kollisionsinvariante, wenn gilt:*

$$\forall f, g : \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, g)(v) \phi(v) dv = 0.$$

Die Frage nach der Existenz und der Gestalt solcher Funktionen gibt der folgende

Satz 1.4.3. *Eine messbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Kollisionsinvariante, wenn gilt:*

$$\phi(v) = a |v|^2 + \mathbf{b} \cdot v + c,$$

wobei $a, c \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ beliebig sind.

Dass solche Funktionen Kollisionsinvarianten sind, folgt unmittelbar aus der Definition sowie der Erhaltung von Masse, Impuls und Energie bei einer elastischen Kollision. Die umgekehrte Richtung ist weitaus weniger trivial. Den Beweis für stetige Funktionen findet man in [7] und [19]. Die Ausweitung des Resultats auf messbare Funktionen ist u.a. in [4] und [20] zu finden.

Begrifflich soll an dieser Stelle vereinbart werden, dass die Funktionen

$$\phi_0(v) \equiv 1 \quad , \quad \phi_i(v) = v_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad , \quad \phi_4(v) = \frac{1}{2} |v|^2 \quad (1.65)$$

Basiskollisionsinvarianten genannt werden. Alle anderen Kollisionsinvarianten lassen sich offensichtlich in eindeutiger Weise als Linearkombinationen der ϕ_i darstellen.

Makroskopische Erhaltungsgleichungen

Für die mit den Basiskollisionsinvarianten zusammenhängenden makroskopischen Größen kann man mit Hilfe von Satz 1.4.2 Evolutionsgleichungen ableiten. Dazu multipliziert man die Boltzmann-Gleichung

$$\partial_t f(t, x, v) + (v \cdot \nabla_x) f(t, x, v) = Q(f, f)(t, x, v),$$

jeweils mit ϕ_i für $i = 0, \dots, 4$ und integriert bezüglich der Geschwindigkeit v über $\mathbb{R}^3$. Aus den Definitionen von Dichte (1.53), mittlerer Geschwindigkeit (1.54), innerer Energiedichte (1.59), der Definition des Spannungstensors (1.58) und des Wärmeflussvektors (1.64) erhält man das folgende System makroskopischer Erhaltungsgleichungen:

gen:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.66)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}^T + \mathbf{P}) = 0 \quad (1.67)$$

$$\partial_t \left(\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^3 \mathbf{v}_j (\mathbf{P})_{ij} + q_i \right) = 0 \quad (1.68)$$

Dabei wurde die Abhängigkeit der beteiligten Größen von (t, x) aus Übersichtlichkeitsgründen weggelassen. Man hat 5 Gleichungen für die 13 Unbekannten ρ , $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{P}_{ij}$ ($i \leq j$) und q_i , was bedeutet, dass man zusätzliche Abschlussrelationen benötigt.

1.5 Die räumlich homogene Gleichung

„Die Anzahl der Moleküle im Raume r , deren lebendige Kraft (kinetische Energie - Anm. d. A.) zur Zeit t zwischen x und $x + dx$ liegt, will ich mit $f(x, t)dx$ bezeichnen. Dieselbe wird im allgemeinen davon abhängen, wo ich den Raum r im Raume R konstruiere. [...] Dann würde die Anzahl $f(t, x)dx$ verschieden ausfallen, je nachdem ich den Raum r rechts oder links im Raume R konstruiere. Wenn nun dies nicht der Fall ist, wenn die Anzahl $f(t, x)dx$ zu einer gegebenen Zeit vollkommen gleich ausfällt, wo immer ich den Raum r im Raume R konstruieren mag, so sage ich, die Verteilung der lebendigen Kraft sei zur Zeit t eine gleichförmige, d.h. also nichts anderes, als die Moleküle mit den verschiedenen lebendigen Kräften sind gleichförmig untereinander gemischt.“

L. BOLTZMANN [15]

Die räumlich inhomogene Boltzmann-Gleichung (1.1) ist sowohl aus theoretischer als auch numerischer Sicht ein komplexes mathematisches Objekt. Im Bereich der Theorie erschwert die Tatsache, dass der Transportoperator die Ableitung bezüglich x mit der Geschwindigkeitsvariablen verbindet, die Untersuchung von Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Mit sehr restriktiven Voraussetzungen war ein erster Erfolg in dieser Richtung in der Arbeit [22] zu verzeichnen.

Das Auffinden von analytischen Lösungen ist bis auf triviale Fälle ein hoffnungsloses Unterfangen, so dass man auf approximative Lösungen angewiesen ist. Die Probleme bei der numerischen Lösung der Gleichung lassen sich verdeutlichen, wenn man die Gleichung auf einem Orts- und Geschwindigkeitsgitter diskretisiert betrachtet:

$$\{x_i : i = 1, \dots, N_x\} \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 1, 2, 3) \quad , \quad \{v_j : j = 1, \dots, N_v\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

Für jeden Zeitpunkt t ist an N_x Positionen jeweils für N_v Geschwindigkeitspunkte ein fünfdimensionales Integral auszuwerten. Verwendet man hierzu z.B. eine Quadraturformel, die auf die gewählten Geschwindigkeitspunkte zurückgreift und zusätzlich

N_e Punkte auf der Einheitssphäre für die Approximation des inneren Integrales verwendet, so ist der Aufwand von der Größenordnung $N_x N_v^2 N_e$. Schon für räumlich zweidimensionale Fälle ist der numerische Aufwand enorm.

Wie das Zitat zu Beginn des Abschnitts zeigt, hat bereits Boltzmann selbst zur Vereinfachung seiner theoretischen Untersuchungen die *räumlich homogene Gleichung* betrachtet, bei der die Verteilungsdichte als vom Ort unabhängig angesehen wird.

Das zugehörige Anfangswertproblem für die räumlich homogene Boltzmann-Gleichung lautet

$$\begin{aligned}\partial_t f(t, v) &= Q(f, f)(t, v) \\ f(0, v) &= f_0(v).\end{aligned}\tag{1.69}$$

Auch im Hinblick auf die Numerik ist die räumlich homogene Gleichung bedeutsam: Beim so genannten *Operator-Splitting* löst man zunächst die Transportgleichung, d.h. man führt für ein Zeitintervall $[t, t + \Delta t/2]$ einen Freiflugschritt ohne Kollisionen, aber unter Berücksichtigung der Randbedingungen durch. Die so erhaltene Approximation an f dient als Anfangsbedingung für das im Anschluss für jeden Gitterpunkt x_i zu lösende Anfangswertproblem zur räumlich homogenen Gleichung auf dem Zeitintervall $[t + \Delta t/2, t + \Delta t]$.

Da die Verteilungsdichte nur noch von t und v abhängt, sind die in Abschnitt 1.4 definierten Größen Funktionen der Zeit. Es folgt als unmittelbare Konsequenz aus den makroskopischen Erhaltungsgleichungen (1.66)-(1.68):

Proposition 1.5.1. *Für jede Lösung f des Anfangswertproblems (1.69) gilt notwendigerweise*

$$\rho(t) \equiv \rho(0) \quad , \quad \mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}(0) \quad , \quad E(t) \equiv E(0) \quad .$$

Die makroskopischen Pendanten jener Größen, die mikroskopisch bei einer Kollision erhalten bleiben, sind ebenfalls zeitlich konstant.

Geht man in (1.69) von f_0 über zur Anfangsbedingung

$$\tilde{f}_0 = \frac{1}{\rho_f(0)} f_0(v + \mathbf{v}_f(0)) \quad ,$$

mit

$$\rho_f(0) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v) dv \quad , \quad \mathbf{v}_f(0) = \int_{\mathbb{R}^3} v f_0(v) dv \quad ,$$

so folgt offensichtlich

$$\tilde{\rho}(0) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}_0(v) dv = 1 \quad , \quad \tilde{\mathbf{v}}(0) = \int_{\mathbb{R}^3} v \tilde{f}_0(v) dv = 0 \quad .$$

Die Translationsinvarianz des Kollisionsoperators, die zu Beginn von Abschnitt 1.3 festgestellt wurde, liefert zusammen mit der Erhaltungseigenschaft aus Proposition 1.5.1:

Korollar 1.5.2. *Für das Anfangswertproblem zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung (1.69) genügt es, solche Anfangsbedingungen f_0 zu betrachten, für die*

$$\rho(0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(0) = 0$$

gilt.

1.5.1 Gleichgewichtsverteilungen und H -Theorem

„Infolge der Zusammenstöße werden vielmehr einige Moleküle größere, andere kleinere Geschwindigkeiten annehmen, bis sich endlich eine solche Verteilung der Geschwindigkeiten unter den Molekülen hergestellt hat, daß dieselbe durch die Zusammenstöße nicht weiter verändert wird.“

L. BOLTZMANN [15]

Wie das Zitat zeigt, war Boltzmann davon überzeugt, dass sich der Zustand des Gases mit der Zeit einer stationären Lösung des Anfangswertproblems (1.69), einem *Gleichgewichtszustand* also, annähert. Vorarbeit in dieser Richtung wurde von niemand Geringerem als MAXWELL [36] geleistet. Maxwell fand, dass das Gleichgewicht dargestellt wird durch die nach ihm benannte Verteilung

$$M(v) = A \exp(-B |v - c|^2) \quad , \quad A, B > 0 \quad , \quad c \in \mathbb{R}^3. \quad (1.70)$$

Aus (1.4) und (1.5) folgt unmittelbar, dass

$$Q(M, M)(v) \equiv 0$$

gilt. Boltzmann gelang sogar der Nachweis, dass dies die einzigen nichtnegativen reellwertigen Funktionen mit dieser Eigenschaft sind und er beschäftigte sich intensiv damit, zu zeigen, dass die Lösung von (1.69) mit der Zeit einer solchen Maxwell-Verteilung zustrebt. Das von ihm erfundene Hilfsmittel hierzu ist das H -Funktional

$$H[f] = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) \log(f(v)) \, dv. \quad (1.71)$$

Vergleicht man (1.70) mit den Definitionen (1.53), (1.54) und (1.62), so erhält man die folgende alternative Darstellung der Maxwell-Verteilungen:

$$M_{\rho, \mathbf{v}, T}(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v - \mathbf{v}|^2}{2T}\right). \quad (1.72)$$

Es liegt nahe, zu einer gegebenen Funktion f mit M_f diejenige eindeutig bestimmte Maxwell-Verteilung zu bezeichnen, deren Dichte, mittlere Geschwindigkeit und Temperatur mit den entsprechenden makroskopischen Größen von f übereinstimmen. Die von Boltzmann angeführten Argumente und erzielten Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Satz 1.5.3. a) Für jede fast überall positive Funktion $f \neq 0$ gilt:

$$Q(f, f)(v) \equiv 0 \iff f(v) = M(v).$$

b) Für jede fast überall nichtnegative Funktion f gilt die Boltzmann-Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(v) \log(f(v)) dv \leq 0,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(v) = M(v)$.

c) Für jede Lösung f von (1.69) gilt das H-Theorem:

$$\frac{d}{dt} H[f](t) \leq 0,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(t, v) = M_{f_0}(v)$.

Beweis. a) Dass der Kollisionsoperator für Maxwell-Verteilungen verschwindet, wurde bereits bemerkt. Umgekehrt ist $Q(f, f)(v) = 0$ gleichbedeutend mit

$$f(v')f(w') = f(v)f(w) \iff \log(f(v')) + \log(f(w')) = \log(f(v)) + \log(f(w))$$

für fast alle $v, w \in \mathbb{R}^3$. Das aber heißt, dass $\log f$ eine Kollisionsinvariante sein muss. Aus Satz 1.4.3 und der Definition (1.70) folgt nach entsprechender Definition der beteiligten Konstanten die Behauptung.

b) Setzt man in (1.48) $\psi(v) = \log(f(v))$, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(v) \log(f(v)) dv = \\ \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \left(f(v')f(w') - f(v)f(w) \right) \log \left(\frac{f(v)f(w)}{f(v')f(w')} \right) d\epsilon dw dv. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass für alle $y_1, y_2 > 0$ die Ungleichung

$$(y_1 - y_2) \log \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \leq 0$$

gilt und Gleichheit nur für $y_1 = y_2$ eintreten kann. In diesem Fall muss aber nach Teil a) notwendigerweise $f(v) = M(v)$ gelten.

c) Differentiation von

$$H[f](t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \log(f(t, v)) dv$$

nach t ergibt

$$\frac{d}{dt}H[f](t) = \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(t, v) \log(f(t, v)) dv + \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(v) dv.$$

Das zweite Integral verschwindet, da $\phi_0(v) \equiv 1$ eine Kollisionsinvariante ist. Auf das erste Integral wendet man die Boltzmann-Ungleichung aus Teil b) an. Die Behauptung über die Gleichheit folgt aus Proposition 1.5.1. ■

Ferner kann man zeigen, dass für alle nichtnegativen f , für die Dichte, mittlere Geschwindigkeit und Temperatur endlich sind, stets gilt:

$$H[f] \geq H[M_f].$$

Hieraus folgerte Boltzmann in Verbindung mit dem H -Theorem, dass für jede Lösung von (1.69) gilt:

$$f(t, v) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} M_{f_0}(v).$$

Zeitgenossen von Boltzmann sahen einen Widerspruch darin, dass aus der reversiblen Mechanik, die den Kollisionstransformationen (1.9) zu Grunde liegt, sich eine Gleichung ableitet, in der eine Zeitrichtung laut H -Theorem ausgezeichnet ist. Boltzmann gelang es trotz einiger Bemühungen nicht, die Zweifel an der Korrektheit seiner Gleichung auszuräumen. Heute hingegen ist die Existenz irreversibler Prozesse keine Streitfrage mehr und für die Boltzmann-Gleichung ist geklärt, dass der Boltzmann-Grad-Grenzübergang für diesen Verlust der Reversibilität verantwortlich ist.

1.5.2 Lösungsbegriffe und Existenz von Lösungen

BOLTZMANN [15] selbst konnte die Lösbarkeit der räumlich homogenen Gleichung mit den mathematischen Methoden, die ihm gegeben waren, nachweisen, indem er sich auf eine diskrete Variante der Gleichung zurückzog.

Der erste Nachweis einer punktweisen Lösung von (1.69) für das Hartkugelmodell gelang CARLEMAN [18], der isotrope stetige Anfangsbedingungen f_0 mit dem asymptotischen Verhalten

$$f_0(|v|) = o(|v|^{-6}) \quad , \quad |v| \rightarrow \infty$$

betrachtete. Unter diesen Voraussetzungen gelang ihm der Nachweis, dass die Lösung eindeutig ist und das H -Theorem gilt. Ferner zeigte er die punktweise Relaxation zur Maxwell-Verteilung für $t \rightarrow \infty$. Auf Carleman geht auch die (formale) Darstellung der Lösung mit Hilfe des Duhamel-Prinzips zurück:

$$f(t, v) = f_0(v) \exp\left(-\int_0^t L[f](\tau, v) d\tau\right) + \int_0^t Q_+(f, f)(s, v) \exp\left(-\int_s^t L[f](\tau, v) d\tau\right) ds \quad (1.73)$$

POVZNER [46] konnte die Voraussetzungen an die Anfangsbedingung abschwächen, indem er

$$f_0(v)(1 + |v|^4) \in \mathbb{L}_1,$$

verlangte (zur Definition der Funktionenräume siehe Kapitel 2). Als Hilfsmittel verwendete er dazu die nach ihm benannten Ungleichungen (siehe Abschnitt 2.2.2).

Eine umfassende und systematische Arbeit zu Fragen der Existenz, Eindeutigkeit, Positivität und Relaxation zur Maxwell-Verteilung wurde von ARKERYD in [3] und [4] durchgeführt. Er entwickelte maßgeblich die im Hinblick auf die Definition von Dichte, mittlerer Geschwindigkeit und Temperatur bedeutsame $\mathbb{L}_1$ -Theorie zum räumlich homogenen Anfangswertproblem:

Satz 1.5.4. (ARKERYD [3])

Für den Kollisionskern gelte die Abschätzung

$$B(v - w, e) \leq C_B(1 + |v|^\lambda + |w|^\lambda), \quad (1.74)$$

wobei $0 \leq \lambda \leq 2$. Die Anfangsbedingung besitze die Eigenschaften

$$f_0 \geq 0 \quad , \quad f_0 \log f_0 \in \mathbb{L}_1 \quad , \quad f_0(1 + |\cdot|^\kappa) \in \mathbb{L}_1$$

für ein $\kappa > 2$. Dann existiert eine Lösung $f \geq 0$ zum Anfangswertproblem (1.69) mit den Eigenschaften:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \varphi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v) \varphi(v) dv \quad , \quad \varphi(v) = 1, v, |v|^2,$$

und

$$f(t, \cdot)(1 + |\cdot|^\kappa) \in \mathbb{L}_1.$$

Speziell gilt für $t_1 > 0$ die Ungleichung

$$\forall t \in [0, t_1] : \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v)(1 + |v|^\kappa) dv \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)(1 + |v|^\kappa) dv,$$

wobei die Konstante C_1 nur von t_1 , C_B sowie der Dichte und Gesamtenergie der Anfangsbedingung abhängt.

Zum Beweis ging Arkeryd zunächst von Kollisionskernen aus, die auch in v und w beschränkt sind. Die Existenz einer Lösung für ein begrenztes Zeitintervall folgt für solche Interaktionen sofort und lässt sich wegen der Erhaltung der Dichte auf die gesamte Zeitachse ausdehnen. Die Hauptaufgabe besteht darin, die Positivität von $f(t, \cdot)$ für alle t und die Gültigkeit des H -Theorems nachzuweisen. Der Beweis von Satz 1.5.4 gelingt schließlich dadurch, dass man Kollisionskerne mit der Eigenschaft (1.74) durch eine Folge gleichmäßig beschränkter Kerne approximiert und mit Hilfe des H -Theorems und des Dunford-Pettis-Kriteriums (siehe [26]) nachweist, dass die

zugehörige Folge von Lösungen schwach kompakt in $\mathbb{L}_1$ ist. Eine geeignete Teilfolge konvergiert dann schwach gegen eine $\mathbb{L}_1$ -Funktion, die eine Lösung von (1.69) ist. Diese Beweismethode ist für die Theorie der Boltzmann-Gleichung bis heute die Vorgehensweise schlechthin.

In [4] setzte Arkeryd wie zuvor Povzner voraus, dass $f_0(1 + |\cdot|^4) \in \mathbb{L}_1$ und konnte zeigen, dass die Lösung für $t \rightarrow \infty$ im $\mathbb{L}_1$ -Sinn gegen die der Anfangsbedingung zugehörige Maxwell-Verteilung M_{f_0} konvergiert.

10 Jahre später entwickelte Arkeryd eine Lösbarkeitstheorie in $\mathbb{L}_\infty$, unter der Voraussetzung $f_0 \in \mathbb{L}_1^{(2)} \cap \mathbb{L}_\infty^{(\nu)}$ (siehe [6]).

Es wurde bereits gesagt, dass das Auffinden analytischer Lösungen für die Boltzmann-Gleichung, selbst in der räumlich homogenen Situation, ein extrem schwieriges Unterfangen ist. Von großem Wert ist daher die Arbeit von BOBYLEV [9], in der durch Betrachtung der Fourier-transformierten Gleichung eine Klasse analytischer Lösungen für den Fall der Maxwell-Moleküle identifiziert wurde.

Auf Arkeryds Arbeit [6] aufbauend wurden von GUSTAFSSON in [29] und [30] die $\mathbb{L}_p$ -Eigenschaften der Lösungen für harte Interaktionspotentiale sehr detailliert untersucht.

Die für harte Potentiale schwächsten Voraussetzungen an die Anfangsbedingung, die die Existenz einer nichtnegativen Lösung unter Erhaltung von Masse und Energie garantieren, wurden in MISCHLER/WENNBERG [41] angegeben. Es genügt, dass die Anfangsbedingung

$$f_0(1 + |\cdot|^2) \in \mathbb{L}_1$$

erfüllt. Auf das H -Theorem muss man allerdings in diesem Fall verzichten.

Weniger entwickelt ist die Lösungstheorie für Kollisionskerne, die Singularitäten im Winkelanteil und/oder im kinetischen Anteil besitzen. Es war wiederum Arkeryd, der in [5] den Lösungsbegriff erweiterte und das Anfangswertproblem (1.69) für den Fall $-1 < \lambda \leq 0$ betrachtete. Die für diese λ im Winkelanteil auftretende Singularität konnte mit der in Bemerkung 1.3.2 a) erwähnten Idee durch Verwendung der Taylor-Entwicklung der Testfunktionen an der Stelle v behoben werden. Ausgehend von der schwachen Formulierung (1.50), die auch für die Geschwindigkeitstransformation (1.9) gilt, definierte Arkeryd eine *schwache Lösung* von (1.69) als eine Funktion f , die die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \psi(t, v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v) \psi(0, v) dv + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f(\tau, v) \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, v) dv d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+^2} \bar{B}(v - w, \mathbf{n}) f(\tau, v) f(\tau, w) (\psi(\tau, v') - \psi(\tau, v)) d\mathbf{n} dw dv d\tau, \quad (1.75) \end{aligned}$$

erfüllt für alle Testfunktionen ψ , die zusammen mit ihren ersten partiellen Ableitungen nach t und v gleichmäßig beschränkt sind. Es gelang der Beweis der Existenz

solcher Lösungen und der schwachen Stabilität bezüglich der Anfangsbedingung: Für eine Folge f_0^n von Anfangsbedingungen, die schwach in $\mathbb{L}_1$ gegen f_0 konvergieren, kann man aus der Folge $f^n(t, \cdot)$ der zugehörigen (schwachen) Lösungen eine Teilfolge auswählen, die schwach in $\mathbb{L}_1$ gegen die Lösung $f(t, \cdot)$ des ursprünglichen Anfangswertproblems konvergiert. Auch (und gerade) für die schwachen Lösungen führte die Verwendung des Dunford-Pettis-Kriteriums zum Ziel.

VILLANI [52] führte eine weitere Klasse von schwachen Lösungen auf der Basis von regulären Distributionen ein, d.h. die Testfunktionen wurden als beliebig oft differenzierbar und mit kompaktem Träger angenommen. Dies war nötig, um die von Arkeryd nicht betrachteten Fälle $-3 < \lambda \leq -1$ behandeln zu können. Mit denselben Argumenten wie Arkeryd konnte auch hier die Existenz und schwache Stabilität bewiesen werden, erweitert um eine Version des H -Theorems.

Für die räumlich inhomogene Gleichung ist die Theorie weitaus weniger entwickelt. Neben der bereits erwähnten Arbeit [22] sollen hier auch die Beiträge [1] und [2] genannt werden, in denen mathematische Hilfsmittel eingeführt wurden, die der Untersuchung der Boltzmann-Gleichung allgemein, speziell jedoch der Betrachtung des Kollisionoperators in dieser Arbeit zugute kommen.

Natürlich ist damit nur ein sehr kleiner Teil der Arbeiten zur Existenz von Lösungen und ihrer Eigenschaften erwähnt worden. Weitere Quellen werden in weiteren Verlauf dieser Arbeit im jeweiligen Zusammenhang genannt.

1.6 Ein nützliches technisches Lemma

Die Anwendung des folgenden Lemmas wird die Beweisführung bei einigen Normabschätzungen für den Gewinnterm des Kollisionoperators entscheidend vereinfachen:

Lemma 1.6.1. *Für $\lambda, \gamma > -3$ seien $h_\lambda : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Sei ferner w' für fixiertes $v \in \mathbb{R}^3$ durch (1.13) definiert. Dann gilt*

$$\int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} h_\lambda(\mu) |v - w|^\gamma F(w') dw de = 2\pi 2^{(\gamma+3)/2} \int_{-1}^1 \frac{h_\lambda(\mu)}{(1 + \mu)^{(\gamma+3)/2}} d\mu \int_{\mathbb{R}^3} |v - z|^\gamma F(z) dz, \quad (1.76)$$

sofern die Integrale auf der rechten Seite existieren.

Beweis. Der Beweis besteht im Wesentlichen darin, die Jacobi-Determinante

$$\det \left(\frac{dw}{dz} \right)$$

bezüglich der Größe

$$\mu(z, e) = \frac{(v - z) \cdot e}{|v - z|} \quad (1.77)$$

darzustellen, wobei $e \in S^2$ und $v \in \mathbb{R}^3$ fixiert sind. Damit gilt für das Integral auf der linken Seite von (1.76) $\mu = \mu(w, e)$. Die Variable $z \in \mathbb{R}^3$ sei wie w' dargestellt als

$$z = \frac{1}{2}(v + w - |v - w|e). \quad (1.78)$$

Man berechnet

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{2} \left(I + \frac{v-w}{|v-w|} e^T \right) \Rightarrow \det \left(\frac{dz}{dw} \right) = \frac{1}{8} (1 + \mu(w, e)).$$

Ferner gilt

$$2|v-z|^2 = 2|v-w-(z-w)|^2 = \frac{|v-w|^2}{2} \left| \frac{v-w}{|v-w|} + e \right|^2 = |v-w|^2 (1 + \mu(w, e)). \quad (1.79)$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung

$$2(v-z) = (v-w) + |v-w|e$$

das Skalarprodukt mit e und quadriert anschließend, ergibt sich

$$4|v-z|^2 \mu(z, e)^2 = |v-w|^2 (1 + \mu(w, e))^2,$$

woraus durch Vergleich mit (1.79) folgt:

$$\mu(w, e) = 2\mu(z, e)^2 - 1 \quad \text{und} \quad |v-w| = \frac{|v-z|}{\mu(z, e)}.$$

Die gesuchte Darstellung der Jacobi-Determinante lautet damit:

$$\det \left(\frac{dw}{dz} \right) = 4\mu(z, e)^{-2}.$$

Beim Übergang von der Integrationsvariablen w zur Variablen z ist folgendes zu beachten: Durchläuft w (für fixierte $e \in S^2$ und $v \in \mathbb{R}^3$) den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$, so durchläuft z wegen (1.78) den Halbraum (siehe Abb. 1.2)

$$\{z \in \mathbb{R}^3 : \mu(z, e) \geq 0\}.$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} h_\lambda(\mu) |v-w|^\gamma F(w') dw de \\ &= 4 \int_{S^2} \int_{\{z: \mu(z, e) \geq 0\}} \frac{h_\lambda(2\mu(z, e)^2 - 1)}{\mu(z, e)^{2+\gamma}} |v-z|^\gamma F(z) dz de \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^3} |v-z|^\gamma F(z) \int_{\{e: \mu(z, e) \geq 0\}} \frac{h_\lambda(2\mu(z, e)^2 - 1)}{\mu(z, e)^{2+\gamma}} de dz. \end{aligned}$$

Für die Behandlung des inneren Integrals wählt man zur Parametrisierung der Hemisphäre $\{z : \mu(z, e) \geq 0\}$ eine orthogonale Matrix $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, deren dritte Spalte gerade durch $(v-z)/|v-z|$ gegeben ist und für die gilt:

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{U} \begin{pmatrix} \cos \eta \sqrt{1-\mu} \\ \sin \eta \sqrt{1-\mu} \\ \sqrt{1+\mu} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad -1 \leq \mu \leq 1.$$

Es folgt hieraus

$$\mu(z, e) = \sqrt{\frac{1 + \mu}{2}} \quad , \quad de = \frac{2^{-3/2}}{\sqrt{1 + \mu}} d\eta d\mu ,$$

und man erhält, wie behauptet:

$$4 \int_{\{e; \mu(z, e) \geq 0\}} \frac{h_\lambda(2\mu(z, e)^2 - 1)}{\mu(z, e)^{2+\gamma}} de = 2\pi 2^{(\gamma+3)/2} \int_{-1}^1 \frac{h_\lambda(\mu)}{(1 + \mu)^{(\gamma+3)/2}} d\mu .$$

■

Bemerkung 1.6.2. In anderer Fassung wurde dieses Lemma ursprünglich in [1] sowie später in [2] formuliert und bewiesen. Es ist im Zusammenhang mit der Boltzmann-Gleichung unter dem Namen *Cancellation lemma* bekannt.

Kapitel 2

Funktionenräume und Ungleichungen

In diesem Kapitel werden die Definitionen der im Rahmen dieser Arbeit am häufigsten betrachteten Funktionenräume angegeben und einige ihrer Eigenschaften zusammengefasst. Als weitere mathematische Hilfsmittel werden die Interpolation zwischen Banach-Räumen und die Differentiation in Banach-Räumen kurz vorgestellt.

Es folgen Formulierung und Beweis einer Reihe von Ungleichungen, die für die Untersuchung des Kollisionoperators bzw. der Eigenschaften der Lösungen des räumlich homogenen Anfangswertproblems von Bedeutung sein werden.

Der letzte Abschnitt widmet sich der Frage, welche Integrierbarkeitsvoraussetzungen von der Verteilungsdichtefunktion erfüllt werden müssen, um die Wohldefiniertheit des H -Funktional zu gewährleisten.

2.1 Funktionenräume

Aus rein physikalischen Überlegungen heraus wird man von Anfangsbedingungen und Lösungen der Boltzmann-Gleichung verlangen, dass Masse, Impuls und Energie endlich sind. Wegen der Definition dieser makroskopischen Größen leitet sich aus dieser Forderung ab, dass die Funktion bzgl. der Geschwindigkeit in einem entsprechend gewichteten $\mathbb{L}_1$ -Raum liegen muss. Es liegt nahe, die Boltzmann-Gleichung bzw. den Kollisionoperator für solche Funktionen zu untersuchen. Da man beim Gewinnterm gewisse Glättungseffekte beobachten kann, lohnt sich auch das Studium dieses Operators in entsprechenden Funktionenräumen, namentlich in gewichteten Sobolev- und Besselpotentialräumen.

2.1.1 Räume integrierbarer Funktionen

- 1) Für $1 \leq p < \infty$ definiert man den Raum der p -fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen durch

$$\mathbb{L}_p = \{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\mathbb{L}_p} < \infty\} ,$$

wobei

$$\|f\|_{\mathbb{L}_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(v)|^p dv \right)^{1/p}.$$

- 2) Im Falle $p = \infty$ definiert man den Raum $\mathbb{L}_\infty$ der *wesentlich beschränkten Funktionen* durch die Forderung, dass für diese

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}^3} |f(v)|$$

endlich ist.

- 3) Für $\nu \in \mathbb{R}$ definiert man die *gewichteten $\mathbb{L}_p$ -Räume* durch

$$\mathbb{L}_p^{(\nu)} = \{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \langle \cdot \rangle^\nu f \in \mathbb{L}_p\} \quad , \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Die *Gewichtsfunktion* ist dabei definiert als

$$\langle v \rangle^\nu = (1 + |v|^2)^{\nu/2} \quad , \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Die entsprechende Norm lautet also jeweils

$$1 \leq p < \infty : \|f\|_{\mathbb{L}_p^{(\nu)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\nu} |f(v)|^p dv \right)^{1/p},$$

bzw.

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty^{(\nu)}} = \operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu |f(v)|.$$

Verteilungsdichten f mit endlicher Dichte, Impuls und Energie sind also genau jene, für die $f \in \mathbb{L}_1^{(2)}$ gilt.

Für Funktionen

$$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

werden die entsprechenden Räume mit $\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^d)$ bzw. $\mathbb{L}_p^{(\nu)}(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet.

Von dem folgenden fundamentalen Satz wird häufig Gebrauch gemacht werden. Beweise finden sich in [26] und [58].

Satz 2.1.1. (Hölder-Ungleichung)

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und der konjugierte Exponent durch

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & , \quad 1 < p < \infty \\ \infty & , \quad p = 1 \\ 1 & , \quad p = \infty \end{cases} \quad (2.2)$$

definiert (kurz: $1/p + 1/p' = 1$). Dann gilt für $f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathbb{L}_{p'}(\mathbb{R}^d)$:

$$fg \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \|fg\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{\mathbb{L}_{p'}(\mathbb{R}^d)} ,$$

in Integralform für $p < \infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(v) g(v)| \, dv \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(v)|^p \, dv \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(v)|^{p'} \, dv \right)^{1/p'}.$$

Das folgende Lemma wird im Rahmen dieser Arbeit nur für den Fall $d = 3$ verwendet. Um die Abhängigkeit der beteiligten Größen von der Dimension klar herauszustellen, wird es für den allgemeinen Fall formuliert und bewiesen.

Lemma 2.1.2. *Es seien $\nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$.*

a) *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist für $\nu_1 \leq \nu_2$ die Einbettung*

$$\mathbb{L}_p^{\langle \nu_2 \rangle}(\mathbb{R}^d) \subset \mathbb{L}_p^{\langle \nu_1 \rangle}(\mathbb{R}^d)$$

stetig.

b) *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^\nu \, dv < \infty \Leftrightarrow \nu < -d.$$

c) *Sei $p > 1$ und $f \in \mathbb{L}_p^{\langle \nu_1 \rangle}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:*

$$f \in \mathbb{L}_1^{\langle \nu_2 \rangle}(\mathbb{R}^d) \iff \nu_2 < \nu_1 - \frac{d}{p'},$$

wobei $p' = p/(p-1)$. *Genauer:*

$$\|f|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu_2 \rangle}}\| \leq C_{d,p,\nu_1,\nu_2} \|f|_{\mathbb{L}_p^{\langle \nu_1 \rangle}}\| \quad (2.3)$$

mit der Konstanten

$$C_{d,p,\nu_1,\nu_2} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^{p'(\nu_2-\nu_1)} \, dv \right)^{1/p'}, & 1 < p < \infty \\ \int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^{\nu_2-\nu_1} \, dv, & p = \infty \end{cases}. \quad (2.4)$$

Beweis. a) Für $\nu_1 \leq \nu_2$ gilt punktweise $\langle v \rangle^{\nu_1} \leq \langle v \rangle^{\nu_2}$ und damit

$$\|f|_{\mathbb{L}_p^{\langle \nu_1 \rangle}}(\mathbb{R}^d)\| \leq \|f|_{\mathbb{L}_p^{\langle \nu_2 \rangle}}(\mathbb{R}^d)\|. \quad (2.5)$$

- b) Notwendigerweise muss $\nu < 0$ gelten. Bezeichnet χ_d das Oberflächenmaß der $(d-1)$ -dimensionalen Einheitskugeloberfläche, so erhält man unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^\nu dv &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |v|^2)^{\nu/2} dv \\ &= \chi_d \int_0^\infty r^{d-1} (1 + r^2)^{\nu/2} dr \\ &\stackrel{(\nu < 0)}{\leq} \chi_d \left(\int_0^1 r^{d-1} (1 + r^2)^{\nu/2} dr + \int_1^\infty r^{\nu+d-1} dr \right). \end{aligned}$$

Das erste Integral ist offensichtlich unabhängig von der Dimension d und dem Exponenten ν durch 1 beschränkt. Das zweite ist genau dann konvergent, wenn $\nu + d - 1 < -1 \Leftrightarrow \nu < -d$ gilt, der Wert des Integrals ist in diesem Fall $1/(\nu + d)$. Es folgt

$$\forall \nu < -d : \int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^\nu dv \leq \chi_d \left(1 - \frac{1}{\nu + d} \right). \quad (2.6)$$

- c) Im Fall $1 < p < \infty$ erhält man durch Aufspalten des Exponenten und Anwendung der Hölder-Ungleichung:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^{\nu_2} |f(v)| dv \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^{p\nu_1} |f(v)|^p dv \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^{p'(\nu_2 - \nu_1)} dv \right)^{1/p'}.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist nach Voraussetzung endlich. Nach Teil b) existiert das zweite Integral genau dann, wenn

$$p'(\nu_2 - \nu_1) < -d \iff \nu_2 < \nu_1 - \frac{d}{p'}.$$

Analog hat man im Fall $p = \infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^{\nu_2} |f(v)| dv \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v \rangle^{\nu_2 - \nu_1} dv \right) \operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}^d} |\langle v \rangle^{\nu_1} f(v)|,$$

und das Integral auf der rechten Seite existiert, wenn $\nu_2 - \nu_1 < -d$. ■

Bemerkung 2.1.3. Speziell besagt Teil c) des vorangegangenen Lemmas, dass die Einbettung

$$\mathbb{L}_p^{(\nu)} \hookrightarrow \mathbb{L}_1^{(2)}$$

stetig ist, wenn

$$\nu > 2 + 3/p'.$$

Damit ist klar, wie man das Gewicht in $\mathbb{L}_p$ mindestens wählen muss, um die Endlichkeit von Dichte, Impuls und Energie zu gewährleisten.

Für den dreidimensionalen Geschwindigkeitsraum erhält man aus (2.4) und (2.6) die folgende obere Schranke für die Stetigkeitskonstante:

$$C_{3,p,\nu_1,\nu_2} \leq \left(4\pi \left(1 - \frac{1}{3 + p'(\nu_2 - \nu_1)} \right) \right)^{(p-1)/p} = \left(4\pi \frac{(3 + \nu_2 - \nu_1)p - 4}{(3 + \nu_2 - \nu_1)p - 3} \right)^{(p-1)/p}, \quad (2.7)$$

für $1 < p < \infty$ und

$$C_{3,\infty,\nu_1,\nu_2} \leq 4\pi \frac{2 + \nu_2 - \nu_1}{3 + \nu_2 - \nu_1} \quad (2.8)$$

für $p = \infty$.

Im Zusammenhang mit der Boltzmann-Gleichung bietet es sich an, den Funktionenraum

$$\mathbb{L}_1^\Theta = \{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \exp(\Theta |\cdot|^2) f \in \mathbb{L}_1\} \quad (2.9)$$

für $\Theta > 0$ mit der Norm

$$\|f\|_{\mathbb{L}_1^\Theta} = \|\exp(\Theta |\cdot|^2) f\|_{\mathbb{L}_1} = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(\Theta |v|^2) |f(v)| \, dv \quad (2.10)$$

zu betrachten. Die Maxwellverteilungen fallen beispielsweise unter diese Kategorie.

2.1.2 Sobolev- und Besselpotentialräume

Für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}_0^3$ einen Dreifachindex,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i$$

den Betrag des Index und

$$\partial^\alpha g(v) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} v_1 \partial^{\alpha_2} v_2 \partial^{\alpha_3} v_3} g(v).$$

Mit der komponentenweisen Ordnung der Multiindizes,

$$\beta \preceq \alpha \iff \beta_i \leq \alpha_i \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

und dem dreidimensionalen Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^3 \binom{\alpha_i}{\beta_i},$$

schreibt sich die dreidimensionale Fassung der Leibnizschen Produktregel folgendermaßen:

$$\partial^\alpha (g_1(v) g_2(v)) = \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta g_1(v)) (\partial^{\alpha-\beta} g_2(v)). \quad (2.11)$$

Für $s \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist der *Sobolev-Raum* $\mathbb{W}_p^s$ definiert als

$$\mathbb{W}_p^s = \{g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \forall |\alpha| \leq s : \partial^\alpha g \in \mathbb{L}_p\}.$$

Bezüglich der Norm

$$\|g\|_{\mathbb{W}_p^s} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha g\|_{\mathbb{L}_p}^p \right)^{1/p}, \quad (2.12)$$

ist $\mathbb{W}_p^s$ ein Banach-Raum. Im Falle $p = \infty$ ist die Summe natürlich durch das Maximum über alle α zu ersetzen.

Für $\nu \in \mathbb{R}$ ist der *gewichtete Sobolev-Raum* $\mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle}$

$$\mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle} = \{g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \langle \cdot \rangle^\nu g \in \mathbb{W}_p^s\}$$

ebenfalls ein Banach-Raum, wenn er mit der Norm

$$\|g\|_{\mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle}}' = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha (\langle \cdot \rangle^\nu g)\|_{\mathbb{L}_p}^p \right)^{1/p}, \quad (2.13)$$

oder der äquivalenten Norm

$$\|g\|_{\mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\langle \cdot \rangle^\nu \partial^\alpha g\|_{\mathbb{L}_p}^p \right)^{1/p} \quad (2.14)$$

verstanden wird.

Bezeichnet C^∞ den Raum aller unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen, so ist der *Schwartz-Raum* der schnell fallenden glatten Funktionen definiert als

$$\mathbb{S} = \{g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}, g \in C^\infty : \forall \nu \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N}_0^3 : \exists C_{\nu, \alpha} : |\langle \cdot \rangle^\nu \partial^\alpha g| \leq C_{\nu, \alpha}\}.$$

Eine Folge (g_n) von Schwartz-Funktionen heißt in $\mathbb{S}$ gegen 0 konvergent, wenn gilt

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N}_0^3 : \lim_{n \rightarrow \infty} \|\langle \cdot \rangle^\nu \partial^\alpha g_n\|_{\mathbb{L}_\infty} \rightarrow 0,$$

und eine Folge heißt konvergent in $\mathbb{S}$ mit Grenzwert $g \in \mathbb{S}$, wenn $(g_n - g) \rightarrow 0$ im angegebenen Sinne gilt. Die bezüglich dieser (lokalconvexen) Topologie auf $\mathbb{S}$ stetigen linearen Funktionale heißen *temperierte Distributionen* und der zugehörige Raum wird mit $\mathbb{S}'$ bezeichnet.

Die Fourier-Transformation ist definiert als

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} g(v) \exp(i(v \cdot \xi)) dv,$$

wobei ι die imaginäre Einheit bezeichnet. Die inverse Fourier-Transformation lautet:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(v) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\xi) \exp(-\iota(v \cdot \xi)) d\xi.$$

Mit Hilfe des Automorphismus'

$$\mathcal{F} : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S} \quad , \quad \mathcal{F}^{-1} : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S},$$

lässt sich die Fourier-Transformation von temperierten Distributionen erklären und die Definition der Sobolev-Räume verallgemeinern:

Für $s \in \mathbb{R}$ und $1 < p < \infty$ ist der *Besselpotentialraum* $\mathbb{H}_p^s$ definiert als

$$\mathbb{H}_p^s = \{g \in \mathbb{S}' : \|g\|_{\mathbb{H}_p^s} < \infty\},$$

wobei die Norm gegeben ist durch

$$\|g\|_{\mathbb{H}_p^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}^{-1}(\langle \cdot \rangle^s \hat{g})(v)|^p dv \right)^{1/p}, \quad \hat{g} = \mathcal{F}(g). \quad (2.15)$$

Im Spezialfall $p = 2$ folgt aus der Parseval'schen Identität

$$\|g\|_{\mathbb{L}_2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \|\mathcal{F}(g)\|_{\mathbb{L}_2},$$

dass die Besselpotentialnorm die einfachere Gestalt

$$\|g\|_{\mathbb{H}_2^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle \xi \rangle^{2s} (\mathcal{F}(g)(\xi))^2 d\xi \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

hat. Dies ist identisch mit der Definition der Sobolev-Räume $\mathbb{W}_2^s$ für $s \in \mathbb{R}$. Noch allgemeiner gilt:

Satz 2.1.4. (siehe [50], 2.5.6)

Für $1 < p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}_0$ sind $\mathbb{W}_p^s$ und $\mathbb{H}_p^s$ isomorph: Es existieren Konstanten $C'_s \geq C''_s > 0$ mit

$$C''_s \|g\|_{\mathbb{H}_p^s} \leq \|g\|_{\mathbb{W}_p^s} \leq C'_s \|g\|_{\mathbb{H}_p^s}.$$

Schließlich ist für $\nu \in \mathbb{R}$ der *gewichtete Besselpotentialraum* $\mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle}$ analog zu den gewichteten Sobolev-Räumen definiert durch

$$\mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle} = \{g \in \mathbb{S}' : \langle \cdot \rangle^\nu g \in \mathbb{H}_p^s\} \quad , \quad \|g\|_{\mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle}} = \|\langle \cdot \rangle^\nu g\|_{\mathbb{H}_p^s}. \quad (2.17)$$

Bemerkung 2.1.5. Satz 2.1.4 besagt also auch, dass für $s \in \mathbb{N}_0$ die gewichteten Sobolev- und Besselpotentialräume isomorph sind.

2.1.3 Interpolation und Differentiation in Banach-Räumen

Die Interpolation zwischen Banach-Räumen wird benutzt, um von einer bereits bekannten Normstetigkeit eines Operators auf die Stetigkeit bezüglich anderer Normen zu schließen. Dieses wirkungsvolle funktionalanalytische Werkzeug wird bei der Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators öfter eingesetzt werden.

Die Differentiation von Abbildungen mit Werten in einem Banach-Raum wird sowohl bei der Stabilitätsanalyse des Anfangswertproblems für die räumlich homogene Boltzmann-Gleichung als auch bei der Untersuchung der zeitlichen Entwicklung der Momente der Lösung eine Rolle spielen.

Interpolation

Für beliebige Banach-Räume $\mathbb{V}$, $\bar{\mathbb{V}}$ sei der Raum der stetigen linearen Operatoren

$$\mathcal{A} : \mathbb{V} \longrightarrow \bar{\mathbb{V}}$$

mit $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \bar{\mathbb{V}})$ bezeichnet. Seien $\mathbb{V}, \mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1$ Banach-Räume mit

$$\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}.$$

Das Paar $(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1)$ heißt Interpolationspaar. Eine Abbildung, die jedem solchen Paar einen Banach-Raum $\mathbb{F}(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1)$ zuordnet, heißt *Interpolationsfunktork*, wenn gilt

1. $\mathbb{V}_0 \cap \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{F}(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1) \subset \mathbb{V}_0 + \mathbb{V}_1$, wobei

$$\mathbb{V}_0 + \mathbb{V}_1 = \{X_0 + X_1 : X_i \in \mathbb{V}_i, i = 0, 1\}.$$

2. Für jedes weitere Interpolationspaar $(\bar{\mathbb{V}}_0, \bar{\mathbb{V}}_1)$ und jeden Operator

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_0, \bar{\mathbb{V}}_0) \cap \mathcal{L}(\mathbb{V}_1, \bar{\mathbb{V}}_1),$$

gilt, dass die Einschränkung des Operators im folgenden Sinne stetig ist:

$$\mathcal{A}|_{\mathbb{F}(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1)} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1), \mathbb{F}(\bar{\mathbb{V}}_0, \bar{\mathbb{V}}_1))$$

Existiert zusätzlich eine Konstante $C > 0$, so dass für jeden solchen Operator $\mathcal{A}$ die Operatornorm die Ungleichung

$$\|\mathcal{A}|_{\mathcal{L}(\mathbb{F}(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1), \mathbb{F}(\bar{\mathbb{V}}_0, \bar{\mathbb{V}}_1))}\| \leq C \|\mathcal{A}|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}_0, \bar{\mathbb{V}}_0)}\|^{1-\sigma} \|\mathcal{A}|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}_1, \bar{\mathbb{V}}_1)}\|^\sigma$$

mit $\sigma \in [0, 1]$ gilt, so heißt der Interpolationsfunktork vom Typ σ . In diesem Fall schreibt man

$$\mathbb{F}(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1) = (\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1)_\sigma.$$

Die für die Besselpotentialräume im Rahmen dieser Arbeit benötigten Interpolations- und Einbettungsaussagen sind im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 2.1.6. *Es sei $1 < p < \infty$ und $\sigma \in [0, 1]$. Dann gilt:*

a) ([50], 2.4.7(2) und 2.3.5(2))

Für alle $1 < p_0, p_1 < \infty$ und $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\mathbb{H}_{p_0}^{s_0}, \mathbb{H}_{p_1}^{s_1})_\sigma = \mathbb{H}_p^s, \text{ wobei } s = (1 - \sigma)s_0 + \sigma s_1, \frac{1}{p} = \frac{1 - \sigma}{p_0} + \frac{\sigma}{p_1}.$$

b) ([50], 2.7.1(2))

Für $1 < p_0 < p_1 < \infty$ und $s_1 < s_0$ ist die Einbettung

$$\mathbb{H}_{p_0}^{s_0} \subsetneq \mathbb{H}_{p_1}^{s_1}$$

stetig, wenn zusätzlich

$$s_0 - \frac{3}{p_0} \geq s_1 - \frac{3}{p_1}$$

gilt.

Differentiation in Banachräumen

Sei $T > 0$, $\mathbb{V}$ ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und Dualraum $\mathbb{V}^*$. Eine Abbildung

$$\Phi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{V}$$

heißt $\mathbb{V}$ -differenzierbar in $t \in [0, T]$, wenn es ein $\Phi'(t) \in \mathbb{V}$ gibt, so dass

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (\Phi(t + \tau) - \Phi(t)) - \Phi'(t) \right\| = 0$$

gilt. $\Phi'(t)$ heißt $\mathbb{V}$ -Ableitung von Φ in t und man schreibt kurz:

$$\Phi'(t) = \frac{d\Phi}{dt}(t).$$

Sei $X \in \mathbb{V}$ beliebig. Als *Subdifferential* der Norm von X bezeichnet man die Menge

$$\partial \|X\| = \{X^* \in \mathbb{V}^* : \forall Y \in \mathbb{V} : \|X + Y\| \geq \|X\| + X^*(Y)\} \subset \mathbb{V}^*.$$

Zwischen der $\mathbb{V}$ -Ableitung, der Ableitung der Norm $\|\cdot\|$ und den Subdifferentialen besteht der folgende Zusammenhang:

Satz 2.1.7. (siehe [35])

Sei $\Phi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{V}$ stetig bzgl. $\|\cdot\|$ und auf $[0, T]$ fast überall $\mathbb{V}$ -differenzierbar. Ist zusätzlich $\|\Phi(\cdot)\|$ (im üblichen Sinne) differenzierbar für fast alle $t \in [0, T]$ so gilt fast überall auf $[0, T]$:

$$\forall X^* \in \partial \|X\| : \frac{d}{dt} \|\Phi(t)\| = X^* \left(\frac{d\Phi}{dt}(t) \right).$$

Bemerkung 2.1.8. Ist $\|\Phi(\cdot)\|$ von beschränkter Variation auf dem Intervall $[0, T]$, so ist $\|\Phi(\cdot)\|$ auch differenzierbar für fast alle $t \in [0, T]$ (siehe [39]).

2.2 Elementare Ungleichungen und punktweise Abschätzungen

Sowohl für die Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators als auch der Eigenschaften der Lösung des räumlich homogenen Anfangswertproblems werden Ungleichungen für $|v|$, $\langle v \rangle^\nu$ etc. eine entscheidende Rolle spielen. In all diesen Fällen kann das Problem auf eine Dimension reduziert werden. Obwohl die entstehenden Ungleichungen nur elementare Funktionen beinhalten, sind die zugehörigen Beweise nicht immer trivial.

2.2.1 Elementare Ungleichungen

Lemma 2.2.1. *Sei $\nu \geq 2$.*

a) *Für $R \geq 0$ und alle $y \in [0, 1]$ gilt:*

$$0 \leq \frac{(1 + R^2(1 + y))^{\nu/2+1} - (1 + R^2(1 - y))^{\nu/2+1}}{R^2 y} \leq \frac{(1 + 2R^2)^{\nu/2+1} - 1}{R^2}.$$

b) *Für alle $y \geq 0$ gilt*

$$(1 + y^2)^{\nu/2+1} - 1 \leq (2 + y^2)^{\nu/2} y^2.$$

c) *Es sei $C_\nu = 2^{\nu/2} - 1$. Dann gilt für alle $y \in [0, 1]$*

$$(1 + y^2)^{\nu/2} - 1 - y^\nu \leq C_\nu (y + y^\nu).$$

Beweis.

a) Wegen $(1 + R^2(1 + y))^{\nu/2+1} \geq (1 + R^2(1 - y))^{\nu/2+1}$ ist die linke Ungleichung offensichtlich gültig. Die rechte Seite ist äquivalent zu

$$h_{\nu,R}(y) = \frac{(1 + 2R^2)^{\nu/2+1} - 1}{R^2} y - \frac{(1 + R^2(1 + y))^{\nu/2+1} - (1 + R^2(1 - y))^{\nu/2+1}}{R^2} \geq 0.$$

Für die zweite Ableitung dieser Funktion gilt wegen $\nu \geq 2$

$$h''_{\nu,R}(y) = -\frac{\nu(\nu+2)}{4} R^2 \left((1 + R^2(1 + y))^{\nu/2-1} - (1 + R^2(1 - y))^{\nu/2-1} \right) \leq 0,$$

d.h. $h_{\nu,R}$ ist konkav. Wegen $h_{\nu,R}(0) = h_{\nu,R}(1) = 0$ folgt die Behauptung. $h_{\nu,R}(1) = 0$ bedeutet speziell, dass die Abschätzung scharf ist.

b) Zum Beweis definiert man die Hilfsfunktionen

$$h_{1,\nu}(y) = (1 + y^2)^{\nu/2+1} - 1 \quad \text{und} \quad h_{2,\nu,\varepsilon}(y) = (2 + y^2)^{\nu/2+\varepsilon} y^2.$$

Die ersten Ableitungen lauten jeweils

$$h'_{1,\nu}(y) = (\nu + 2)(1 + y^2)^{\nu/2} y$$

und

$$h'_{2,\nu,\varepsilon}(y) = (\nu + 2\varepsilon)y^3(2 + y^2)^{\nu/2-1+\varepsilon} + 2y(2 + y^2)^{\nu/2+\varepsilon}.$$

Daraus folgt

$$(h_{2,\nu,\varepsilon} - h_{1,\nu})'(y) = y \left((\nu + 2\varepsilon)(2 + y^2)^{\nu/2-1+\varepsilon} y^2 + 2(2 + y^2)^{\nu/2+\varepsilon} - (\nu + 2)(1 + y^2)^{\nu/2} \right).$$

Der erste Summand in Klammern auf der rechten Seite ist offensichtlich nichtnegativ. Unter Beachtung von $2^{\nu/2+1+\varepsilon} > \nu + 2$ für alle $\nu \geq 2$ und an der Tatsache, dass

$$\frac{(1 + y^2)^{\nu/2}}{(2 + y^2)^{\nu/2+\varepsilon}},$$

streng monoton fällt, erkennt man, dass die beiden verbliebenen Terme die strikte Ungleichung

$$2(2 + y^2)^{\nu/2+\varepsilon} > (\nu + 2)(1 + y^2)^{\nu/2}$$

erfüllen. Die Funktion $h_{2,\nu,\varepsilon} - h_{1,\nu}$ ist also streng monoton wachsend für $y > 0$ und unabhängig von $\varepsilon > 0$ gilt $h_{1,\nu}(0) = h_{2,\nu,\varepsilon}(0) = 0$. Hieraus folgt für $y > 0$ die strikte Abschätzung

$$h_{1,\nu}(y) < h_{2,\nu,\varepsilon}(y),$$

und aus Stetigkeitsgründen für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Behauptung.

c) Die Funktionen

$$g_{1,\nu}(y) = (1 + y^2)^{\nu/2} \quad \text{und} \quad g_{2,\nu}(y) = C_\nu(y + y^{\nu-1}) + 1 + y^\nu$$

sind beide konvex, wie man jeweils leicht an der zweiten Ableitung erkennt. Die Sekante von $g_{1,\nu}$ zwischen 0 und 1 lautet

$$S_\nu(y) = C_\nu y + 1,$$

und gleichzeitig ist dies die Tangente an die Funktion $g_{2,\nu}$ im Punkt 0. Wegen der Konvexität der Funktionen folgt

$$\forall y \in [0, 1] : g_{1,\nu}(y) \leq S_\nu(y) \leq g_{2,\nu}(y),$$

und daraus unmittelbar die Behauptung. ■

Bemerkung 2.2.2. Es gibt Anlass zur Vermutung, dass die Konstante C_ν aus Lemma 2.2.1 c) nicht optimal ist, sondern vielmehr die Ungleichung mit

$$\tilde{C}_\nu = 2^{\nu/2-1} - 1$$

gelten sollte. Ein Beweis hiervon liegt allerdings nicht auf der Hand. Es bleibt jedoch festzuhalten, dass die hier verwendete Konstante C_ν immer noch die beste explizit angegebene ist, die sich in der Literatur bisher finden lässt.

Korollar 2.2.3. Sei $\nu \geq 2$. Dann gilt für $y_1, y_2 \geq 0$:

$$(y_1^2 + y_2^2)^{\nu/2} - y_1^\nu - y_2^\nu \leq C_\nu (y_1 y_2^{\nu-1} + y_1^{\nu-1} y_2).$$

Dabei ist $C_\nu = 2^{\nu/2} - 1$.

Beweis. Für $y_1 = 0$ oder $y_2 = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt. Für den Fall $y_1 \neq 0 \neq y_2$ betrachte man die Funktion

$$F_\nu(y_1, y_2) = \frac{(y_1^2 + y_2^2)^{\nu/2} - y_1^\nu - y_2^\nu}{y_1 y_2^{\nu-1} + y_1^{\nu-1} y_2},$$

die homogen vom Grad 0 und symmetrisch in y_1 und y_2 ist. Daher kann man ohne Einschränkung $0 \leq y_1 < y_2$ annehmen und F_ν in der Form

$$\frac{\left(1 + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right)^{\nu/2} - 1 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^\nu}{\frac{y_1}{y_2} + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\nu-1}},$$

betrachten. Verwendet man Lemma 2.2.1 c) mit $y = y_1/y_2$, so folgt

$$F_\nu(y_1, y_2) \leq C_\nu,$$

und damit die Behauptung. ■

2.2.2 Povzner-Ungleichungen

Die nach A. JA. POVZNER [46] benannten Ungleichungen haben sich als höchst leistungsfähiges Instrument zur Herleitung von *a priori*-Abschätzungen für die Lösungen der räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung erwiesen.

Für den Fall der für die praktischen Anwendungen relevanten VHS-Modelle ist die folgende Form dieser Ungleichungen zweckmäßig:

Lemma 2.2.4. Sei $\nu \geq 2$ und v' gemäß (1.13) definiert. Dann gilt

$$\int_{S^2} \langle v' \rangle^\nu de \leq \frac{8\pi}{\nu+2} \frac{(1 + |v|^2 + |w|^2)^{\nu/2+1} - 1}{|v|^2 + |w|^2}. \quad (2.18)$$

Beweis. Zur Abkürzung setzt man für beliebige, aber fest gewählte $v, w \in \mathbb{R}^3$

$$r_1 = \frac{1}{2} |v + w|, \quad r_2 = \frac{1}{2} |v - w|, \quad \tilde{e} = \frac{v + w}{|v + w|},$$

d.h.

$$v' = r_1 \tilde{e} + r_2 e.$$

Damit erhält man

$$|v'|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2(\tilde{e} \cdot e).$$

Führt man die Integration über die Einheitskugeloberfläche in Kugelkoordinaten aus und wählt dabei ein Koordinatensystem, in dem der Kosinus des Polarwinkels mit $\tilde{e} \cdot e$ übereinstimmt, so ergibt die Substitution $\mu = \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \langle v' \rangle^\nu de &= 2\pi \int_0^\pi (1 + (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \theta))^{\nu/2} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (1 + (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \mu))^{\nu/2} d\mu \\ &= \frac{2\pi}{\nu+2} \left(\frac{(1 + (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \mu))^{\nu/2+1}}{r_1r_2} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2\pi}{\nu+2} \frac{(1 + (r_1 + r_2)^2)^{\nu/2+1} - (1 + (r_1 - r_2)^2)^{\nu/2+1}}{r_1r_2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Setzt man

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{2}(|v|^2 + |w|^2) \quad , \quad y = \frac{2r_1r_2}{R^2},$$

so folgt $y \in [0, 1]$ und (2.19) lässt sich schreiben als

$$F_{R,\nu}(y) = \frac{4\pi}{\nu+2} \frac{(1 + R^2(1+y))^{\nu/2+1} - (1 + R^2(1-y))^{\nu/2+1}}{R^2y},$$

und die Aussage aus Lemma 2.2.4a) liefert die Behauptung. ■

Bemerkung 2.2.5. Da die Vertauschung $e \leftrightarrow -e$ gleichbedeutend ist mit $v' \leftrightarrow w'$, folgt aus dem vorangegangenen Lemma auch sofort die Abschätzung

$$\int_{S^2} \langle w' \rangle^\nu de \leq \frac{8\pi}{\nu+2} \frac{(1 + |v|^2 + |w|^2)^{\nu/2+1} - 1}{|v|^2 + |w|^2}. \quad (2.20)$$

Das Hauptresultat dieses Unterabschnitts ist

Lemma 2.2.6. (*Povzner-Ungleichung*)

Sei $\nu \geq 2$ und v', w' gemäß (1.13) definiert. Dann gilt die Ungleichung

$$\int_{S^2} (\langle v' \rangle^\nu + \langle w' \rangle^\nu - \langle v \rangle^\nu - \langle w \rangle^\nu) de \leq 4\pi \left(C_{1,\nu} (\langle v \rangle \langle w \rangle^{\nu-1} + \langle v \rangle^{\nu-1} \langle w \rangle) - C_{2,\nu} (\langle v \rangle^\nu + \langle w \rangle^\nu) \right).$$

Die Konstanten lauten

$$C_{1,\nu} = \frac{4}{\nu+2} (2^{\nu/2} - 1) \quad \text{und} \quad C_{2,\nu} = \frac{\nu-2}{\nu+2}. \quad (2.21)$$

Beweis. Nach Lemma 2.2.4 und der anschließenden Bemerkung gilt

$$\int_{S^2} (\langle v' \rangle^\nu + \langle w' \rangle^\nu - \langle v \rangle^\nu - \langle w \rangle^\nu) de \leq 4\pi \left(\frac{4}{\nu+2} \frac{(1 + |v|^2 + |w|^2)^{\nu/2+1} - 1}{|v|^2 + |w|^2} - \langle v \rangle^\nu - \langle w \rangle^\nu \right).$$

Verwendet man Lemma 2.2.1 b) mit $y^2 = |v|^2 + |w|^2$ und beachtet

$$2 + |v|^2 + |w|^2 = \langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2,$$

so folgt

$$\int_{S^2} (\langle v' \rangle^\nu + \langle w' \rangle^\nu - \langle v \rangle^\nu - \langle w \rangle^\nu) de \leq 4\pi \left(\frac{4}{\nu+2} (\langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2)^{\nu/2} - \langle v \rangle^\nu - \langle w \rangle^\nu \right).$$

Die rechte Seite lässt sich wegen

$$1 = \frac{4}{\nu+2} + \frac{\nu-2}{\nu+2}$$

umschreiben zu

$$\frac{4}{\nu+2} \left((\langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2)^{\nu/2} - \langle v \rangle^\nu - \langle w \rangle^\nu \right) - \frac{\nu-2}{\nu+2} (\langle v \rangle^\nu + \langle w \rangle^\nu),$$

und die Anwendung von Korollar 2.2.3 mit $y_1 = \langle v \rangle$ und $y_2 = \langle w \rangle$ liefert die Behauptung. ■

Bemerkung 2.2.7. Die meisten Povzner-Ungleichungen, die im Zusammenhang mit der Boltzmann-Gleichung zum Einsatz kamen, behandelten Potenzen der euklidischen Norm von v . Die vorangegangenen Betrachtungen lassen sich sofort auf diesen Fall übertragen. Zunächst berechnet man unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$\int_{S^2} |v'|^\nu de = \frac{2\pi}{\nu+2} \frac{(r_1 + r_2)^{\nu+2} - |r_1 - r_2|^{\nu+2}}{r_1 r_2},$$

wobei r_1, r_2 wie im Beweis von Lemma 2.2.4 definiert sind. Mit denselben Bezeichnungen wie dort erhält man

$$\int_{S^2} |v'|^\nu de = \frac{4\pi}{\nu+2} R^\nu \frac{(1+x)^{\nu/2+1} - (1-x)^{\nu/2+1}}{x},$$

Dieselbe Beweismethode wie in Lemma 2.2.1 a) liefert

$$\frac{(1+x)^{\nu/2+1} - (1-x)^{\nu/2+1}}{x} \leq 2^{\nu/2+1},$$

und mit dem Einsetzen der Definition von R erhält man

$$\int_{S^2} |v'|^\nu de \leq \frac{8\pi}{\nu+2} (|v|^2 + |w|^2)^{\nu/2}.$$

Man erkennt, dass Teil b) aus Lemma 2.2.1 nicht benötigt wird und fährt fort wie im Falle der Gewichtsfunktion. Schließlich zeigt sich, dass man in der Aussage von Lemma 2.2.6 die Gewichtsfunktionen durch euklidische Normen ersetzen kann, d.h. mit denselben Konstanten wie dort erhält man:

$$\begin{aligned} & \int_{S^2} (|v'|^\nu + |w'|^\nu - |v|^\nu - |w|^\nu) de \\ & \leq 4\pi \left(C_{1,\nu} (|v| |w|^{\nu-1} + |v|^{\nu-1} |w|) - C_{2,\nu} (|v|^\nu + |w|^\nu) \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.2.3 Weitere Abschätzungen für die Gewichtsfunktion

Speziell bei der Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators werden die folgenden Abschätzungen für $\langle \cdot \rangle^\nu$ gute Dienste leisten.

Lemma 2.2.8. *Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$.*

a) *Für alle $\nu \in \mathbb{R}$ gilt die Peetre-Ungleichung:*

$$\langle v \pm w \rangle^\nu \leq 2^{|\nu|/2} \langle v \rangle^\nu \langle w \rangle^{|\nu|}. \quad (2.23)$$

b) *„weight splitting“: Sei $\nu \geq 0$. Für v', w' aus (1.9) bzw. (1.13) gilt*

$$\left. \begin{matrix} \langle v' \rangle^\nu \\ \langle w' \rangle^\nu \end{matrix} \right\} \leq \langle v \rangle^\nu \langle w \rangle^\nu \quad \text{und} \quad \left. \begin{matrix} \langle v \rangle^\nu \\ \langle w \rangle^\nu \end{matrix} \right\} \leq \langle v' \rangle^\nu \langle w' \rangle^\nu,$$

Beweis. a) Für $\nu \geq 0$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} \langle v + w \rangle^2 &= 1 + |v + w|^2 \\ &\leq 1 + 2|v|^2 + 2|w|^2 \\ &\leq 2(1 + |v|^2)(1 + |w|^2) \\ &= 2 \langle v \rangle^2 \langle w \rangle^2. \end{aligned}$$

Potenziert man diese Ungleichung mit $\nu/2$ und beachtet, dass sich an der Gültigkeit der Abschätzungen nichts ändert, wenn das Argument in der Gewichtsfunktion $v - w$ lautet, so erhält man die Behauptung für nichtnegative Exponenten.

Für $\nu < 0$ wendet man den bereits bewiesenen Fall an und erhält:

$$\langle v \rangle^{-\nu} = \langle v - w + w \rangle^{-\nu} \leq 2^{-\nu/2} \langle v - w \rangle^{-\nu} \langle w \rangle^{-\nu}.$$

Daraus folgt

$$\langle v - w \rangle^\nu \leq 2^{-\nu/2} \langle v \rangle^\nu \langle w \rangle^{-\nu},$$

und mit $-\nu = |\nu|$ die behauptete Abschätzung für $\langle v - w \rangle^\nu$. Die Ungleichung für $\langle v + w \rangle^\nu$ beweist man analog unter Beachtung von $\langle -w \rangle = \langle w \rangle$.

b) Aus der Erhaltung der Energie bei einer Kollision folgt

$$\begin{aligned}
 \langle v' \rangle^2 &= 1 + |v'|^2 \\
 &\leq 1 + |v'|^2 + |w'|^2 \\
 &= 1 + |v|^2 + |w|^2 \\
 &\leq (1 + |v|^2)(1 + |w|^2) \\
 &= \langle v \rangle^2 \langle w \rangle^2.
 \end{aligned}$$

Durch Potenzieren mit $\nu/2 \geq 0$ folgt die Behauptung für v' . Dass zum Beweis im Wesentlichen nur die Energieerhaltung benutzt wurde, hat zur Folge, dass die Abschätzungen gültig bleiben, wenn man v' durch w' ersetzt bzw. wenn die gestrichenen Variablen mit den ungestrichenen vertauscht werden. Außerdem ist der Beweis unabhängig von der gewählten Geschwindigkeitstransformation. ■

Das nächste Lemma gibt eine punktweise untere Schranke für den kinetischen Anteil des Kollisionskerns an:

Lemma 2.2.9. *Sei $0 \leq \lambda \leq 1$. Dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$:*

$$|v - w|^\lambda \geq \left| \langle v \rangle^\lambda - \langle w \rangle^\lambda \right|.$$

Beweis. Wegen $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

$$\forall y \in [0, 1] : (1 - y)^\lambda \geq 1 - y \geq 1 - y^\lambda,$$

woraus man sofort

$$\forall y_1, y_2 \geq 0 : |y_1 - y_2|^\lambda \geq |y_1^\lambda - y_2^\lambda|,$$

folgt, indem man auf beiden Seiten den Faktor

$$\max(y_1, y_2)^\lambda = \max(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$$

vorzieht. Aus der letzten Ungleichung wiederum schließt man auf

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^3 : \left| \sqrt{1 + |v|^2} - \sqrt{1 + |w|^2} \right|^\lambda \geq \left| \langle v \rangle^\lambda - \langle w \rangle^\lambda \right|.$$

Die Behauptung erhält man schließlich aus der Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
 |v - w|^\lambda &\geq ||v| - |w||^\lambda \\
 &= \left| \frac{|v|^2 - |w|^2}{|v| + |w|} \right|^\lambda \\
 &= \left| \sqrt{1 + |v|^2} - \sqrt{1 + |w|^2} \right|^\lambda \left| \frac{\sqrt{1 + |v|^2} + \sqrt{1 + |w|^2}}{|v| + |w|} \right|^\lambda \\
 &\geq \left| \sqrt{1 + |v|^2} - \sqrt{1 + |w|^2} \right|^\lambda.
 \end{aligned}$$

■

2.2.4 Abschätzungen für die Exponentialfunktion

Für die Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators für Funktionen aus $\mathbb{L}_1^\Theta$ (siehe (2.9)) werden die in diesem Unterabschnitt zusammengestellten Hilfsresultate von Nutzen sein.

Lemma 2.2.10. *Sei $\Theta > 0$.*

a) *Sei $\gamma \geq 0$. Dann gilt für alle $y \in [0, 1]$*

$$\frac{\exp(\gamma(1+y^2)) - \exp(\gamma(1-y^2))}{\gamma y} \leq \frac{\exp(2\gamma) - 1}{\gamma}.$$

b) *Sei $\nu \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}$:*

$$(1+y^2)^{\nu/2} \leq C_{\langle \nu \rangle, \epsilon} \exp(\epsilon y^2),$$

mit der Konstanten

$$C_{\langle \nu \rangle, \epsilon} = \begin{cases} 1 & , \nu \leq 2\epsilon \\ \left(\frac{\nu}{2\epsilon}\right)^{\nu/2} \exp(-(\nu/2 - \epsilon)) & , \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.24)$$

c) *Sei $1/2 \leq \gamma \leq 1$. Dann gilt für alle $y \geq 0$*

$$\frac{\exp(\Theta y) - 1}{\Theta y^\gamma} \leq C_{\Theta, \gamma} \exp(\Theta y),$$

mit der Konstanten

$$C_{\Theta, \gamma} = \begin{cases} 1 & , \gamma = 1 \\ \frac{1}{\gamma} \exp(\gamma - 1) \left(\frac{1-\gamma}{\Theta}\right)^{1-\gamma} & , 1/2 \leq \gamma < 1 \end{cases}. \quad (2.25)$$

Beweis. a) Die Anwendung der Regel von de l'Hospital ergibt, dass bei fixiertem $y \in [0, 1]$ für $\gamma \rightarrow 0$ der Term auf der linken Seite der behaupteten Abschätzung den Wert $2y$ und der Term auf der rechten Seite den Wert 2 annimmt. Die Ungleichung ist also für $\gamma = 0$ richtig.

Für $\gamma > 0$ überzeugt man sich durch zweimaliges Ableiten der Funktion

$$g_\gamma(y) = \exp(\gamma(1+y^2)) - \exp(\gamma(1-y^2))$$

davon, dass g_γ strikt konvex ist und ihr Graph daher unterhalb jeder ihrer Sekanten verläuft. Die Sekante zwischen 0 und 1 aber ist gerade

$$(\exp(2\gamma) - 1)y,$$

woraus die Abschätzung

$$\frac{\exp(\gamma(1+y^2)) - \exp(\gamma(1-y^2))}{y} \leq \exp(2\gamma) - 1$$

folgt. Die Behauptung folgt durch Multiplikation mit $1/\gamma$ auf beiden Seiten.

b) Die Funktion

$$g_{\nu,\epsilon}(y) = (1 + y^2)^{\nu/2} \exp(-\epsilon y^2)$$

ist differenzierbar mit der Ableitung

$$g'_{\nu,\epsilon}(y) = y (1 + y^2)^{\nu/2-1} \exp(-\epsilon y^2) (\nu - 2\epsilon(1 + y^2)) .$$

Hieran erkennt man, dass für $\nu \leq 2\epsilon$ die Funktion $g_{\nu,\epsilon}$ in $y = 0$ ein Maximum besitzt und für $|y| \rightarrow \infty$ streng monoton fällt. In diesem Fall gilt also $g_{\nu,\epsilon} \leq 1$. Für $\nu > 2\epsilon$ ist $y = 0$ ein lokales Minimum und das Maximum befindet sich an den Stellen

$$x = \pm \sqrt{\frac{\nu}{2\epsilon} - 1} .$$

Der Funktionswert an diesen Extremalstellen ist

$$\left(\frac{\nu}{2\epsilon}\right)^{\nu/2} \exp(-(\nu/2 - \epsilon)) ,$$

so dass die Ungleichung mit der behaupteten Konstanten $C_{\langle\nu\rangle,\epsilon}$ gilt.

c) Zum Beweis betrachtet man die äquivalente Formulierung

$$1 - \exp(-\Theta y) \leq \Theta C_{\Theta,\gamma} y^\gamma , \quad (2.26)$$

definiert die Funktionen

$$g_\Theta(y) = 1 - \exp(-\Theta y) \quad \text{und} \quad h_{\Theta,\gamma}(y) = \Theta C_{\Theta,\gamma} y^\gamma \quad (\gamma \in [1/2, 1]) ,$$

mit der noch zu bestimmenden positiven Konstanten $C_{\Theta,\gamma}$ und berechnet die Ableitungen:

$$g'_\Theta(y) = \Theta \exp(-\Theta y) \quad , \quad h'_{\Theta,\gamma}(y) = \Theta \gamma C_{\Theta,\gamma} y^{\gamma-1} .$$

Da in (2.26) für $y = 0$ Gleichheit gilt, folgt die Behauptung, wenn die Gültigkeit von

$$g'_\Theta(y) \leq h'_{\Theta,\gamma}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \exp(-\Theta y) \leq \gamma C_{\Theta,\gamma} y^{\gamma-1}$$

nachgewiesen ist. Im Falle $\gamma = 1$ gilt dies offensichtlich mit $C_{\Theta,1} = 1$.

Für den Fall $1/2 \leq \gamma < 1$ betrachtet man die Funktion

$$\frac{1}{\gamma} \exp(-\Theta y) y^{1-\gamma} ,$$

und bestimmt $C_{\Theta,\gamma}$ als ihr globales Maximum. Differentiation nach y liefert

$$\frac{1}{\gamma} y^{-\gamma} \exp(-\Theta y) (-\Theta y + (1 - \gamma)) .$$

Wegen $\Theta > 0$ und $1/2 \leq \gamma < 1$ existiert ein globales Maximum an der Stelle

$$y = \frac{1 - \gamma}{\Theta} ,$$

und der zugehörige Funktionswert ist

$$\frac{1}{\gamma} \exp(\gamma - 1) \left(\frac{1 - \gamma}{\Theta} \right)^{1 - \gamma}.$$

■

Aus Teil b) von Lemma 2.2.10 erhält man unmittelbar, dass die Einbettung

$$\mathbb{L}_1^\epsilon \subsetneq \mathbb{L}_1^{(\nu)}$$

für alle $\nu \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ wegen der Normabschätzung

$$\|f\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} \leq C_{(\nu), \epsilon} \|f\|_{\mathbb{L}_1^\epsilon} \quad (2.27)$$

stetig ist. Die Aussage in Teil c) wird bei der Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Gewinnterms Q_+ für $\mathbb{L}_1^\Theta$ -Funktionen von entscheidender Bedeutung sein. Die Bedeutung von Teil a) besteht darin, das folgende Analogon zu Lemma 2.2.4 zu beweisen:

Lemma 2.2.11. *Sei $\Theta > 0$ und v' gemäß (1.13) definiert. Dann gilt:*

$$\int_{S^2} \exp(\Theta |v'|^2) de \leq 4\pi \frac{\exp(\Theta(|v|^2 + |w|^2)) - 1}{\Theta(|v|^2 + |w|^2)}.$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 2.2.4 setzt man

$$r_1 = \frac{1}{2} |v + w|, \quad r_2 = \frac{1}{2} |v - w|, \quad \tilde{e} = \frac{v + w}{|v + w|},$$

d.h.

$$v' = r_1 \tilde{e} + r_2 e,$$

und führt die Integration über die Einheitssphäre in Kugelkoordinaten aus. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \exp(\Theta |v'|^2) de &= 2\pi \int_{-1}^1 \exp(\Theta(r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \mu)) d\mu \\ &= 2\pi \frac{\exp(\Theta(r_1 + r_2)^2) - \exp(\Theta(r_1 - r_2)^2)}{2\Theta r_1 r_2}. \end{aligned}$$

Setzt man auch hier wieder

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{2}(|v|^2 + |w|^2), \quad y = \frac{2r_1 r_2}{R^2} \in [0, 1],$$

und verwendet 2.2.10 a) mit $\gamma = \Theta R^2$, so folgt

$$\frac{\exp(\Theta R^2(1 + y^2)) - \exp(\Theta R^2(1 - y^2))}{\Theta R^2 y} \leq \frac{\exp(2\Theta R^2) - 1}{\Theta R^2}.$$

Wegen $R^2 = (|v|^2 + |w|^2)/2$ gilt die behauptete Abschätzung.

■

2.3 Anmerkungen zum H -Funktional

Beim Studium der Literatur zur Theorie der Boltzmann-Gleichung fällt auf, dass die Forderungen bezüglich des H -Funktionals für die Anfangsverteilung durchaus unterschiedlich sind. Einige Autoren verlangen die Integrierbarkeit von $f_0 \log f_0$, andere setzen lediglich die Integrierbarkeit des positiven Anteils $f_0 \log^+ f_0$ voraus und schließlich findet man in Arbeiten über das räumlich homogene Anfangswertproblem für Verteilungsfunktionen im Raum $\mathbb{L}_1^{(2)} \cap \mathbb{L}_p$ den lapidaren Hinweis, dass für solche Funktionen automatisch $f \log f \in \mathbb{L}_1$ gilt.

Gerade die letztgenannte Tatsache ist relativ leicht zu beweisen, wie weiter unten gezeigt wird. Offen bleibt dann allerdings, ob die an f gestellten Forderungen beweistechnischer Natur oder wirklich notwendig sind. Anhand von Beispielen wird nachgewiesen, dass letzteres der Fall ist. Damit klar ist, dass es bei der Gültigkeit der Resultate nicht auf die Dimension des Geschwindigkeitsraums ankommt, werden Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ betrachtet. Für diesen Abschnitt bezeichnet e die Eulersche Zahl.

Um besser zu verstehen, welche Bedingungen notwendig und welche hinreichend sind, hilft es, den Logarithmus in Positiv- und Negativteil zu zerlegen,

$$\log y = \log^+ y + \log^- y, \quad \log^+ y := \max\{0, \log y\}, \quad \log^- y := \min\{0, \log y\},$$

und beide Teile getrennt zu untersuchen. Beschränkt man sich auf die hinsichtlich der Dichte minimale Forderung $f \in \mathbb{L}_1$, so existiert das H -Funktional im allgemeinen nicht.

Um dies einzusehen, betrachte man als Beispiel die Funktion

$$f_1(v) = \begin{cases} 1 & , |v| < e \\ \frac{1}{\chi_d |v|^d (\log |v|)^s} & , |v| \geq e \end{cases}$$

wobei $s \in (1, 2)$ und χ_d das Maß der $(d-1)$ -dimensionalen Einheitskugeloberfläche bezeichnet. f_1 ist integrierbar auf $\mathbb{R}^d$, denn nach Übergang zu Kugelkoordinaten berechnet man mit der Substitution $y = \log r$ ($r = |v|$)

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^d)} &= \frac{e^d \chi_d}{d} + \int_e^\infty \frac{dr}{r (\log r)^s} \\ &= \frac{e^d \chi_d}{d} + \int_1^\infty \frac{dy}{y^s} \end{aligned}$$

und wegen $s > 1$ ist das Integral endlich. Andererseits berechnet man wieder mit

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
H[f_1] &= -\frac{1}{\chi_d} \int_{\{|v|>e\}} \frac{d \log |v| + \log (\chi_d (\log |v|)^s)}{|v|^d (\log |v|)^s} dv \\
&= - \left(d \int_e^\infty \frac{\log r}{r (\log r)^s} dr + \int_e^\infty \frac{\log \chi_d}{r (\log r)^s} dr + s \int_e^\infty \frac{\log \log r}{r (\log r)^s} dr \right) \\
&= - \left(d \int_e^\infty \frac{1}{r (\log r)^{s-1}} dr + \int_e^\infty \frac{\log \chi_d}{r (\log r)^s} dr + s \int_e^\infty \frac{\log \log r}{r (\log r)^s} dr \right),
\end{aligned}$$

und der Ausdruck in Klammern ist unbeschränkt, da alle Integranden nichtnegativ sind und das erste Integral wegen $s < 2$ divergiert, wie man wieder mit der obigen Substitution bestätigt.

Für $\mathbb{L}_1$ -Funktionen kann die Entropie also allein wegen des Negativteils unbeschränkt sein.

Fordert man zusätzlich endliche Energie, so wird der negative Teil integrierbar, denn für $x \in (0, 1)$ gilt die elementare Abschätzung

$$\log \sqrt{x} \geq \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x \log x \geq 2(x - \sqrt{x}) \Rightarrow x |\log x| \leq 2\sqrt{x},$$

so dass für fast überall positives f gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(v) |\log^- f(v)| dv &= \int_{\{\exp(-|v|^2) \leq f(v) < 1\}} f(v) |\log^- f(v)| dv \\
&\quad + \int_{\{f(v) < \exp(-|v|^2)\}} f(v) |\log^- f(v)| dv \\
&\leq \left\| f |\mathbb{L}_1^{(2)}(\mathbb{R}^d)| \right\| + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-|v|^2/2) dv.
\end{aligned}$$

Offensichtlich kann man den Beweis auf analoge Weise mit der allgemeineren Forderung $f \in \mathbb{L}_1^{(\nu)}$ für beliebiges $\nu > 0$ führen. Im Hinblick auf die besondere physikalische Bedeutung wurde ohne Einschränkung $\nu = 2$ gewählt.

Für $f \in \mathbb{L}_1^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ ist also zumindest der Negativteil des H -Funktionals endlich. Für den Positivteil reicht das wiederum nicht aus. Dazu betrachte man die Funktion

$$f_2(v) = \begin{cases} \frac{1}{e^d |v|^d} \left(\log \frac{1}{|v|} \right)^s, & |v| < 1/e \\ \exp(-|v|^2 + 1/e^2), & |v| \geq 1/e, \end{cases}$$

für $s \in (-2, -1)$ und beachte, dass die beiden Abschnittsdefinitionen jeweils dem Positiv- bzw. Negativteil von $f_2 \log f_2$ entsprechen. Die Funktion f_2 ist über das

Gebiet $|v| > 1/e$ bezüglich einer jeden Gewichtsfunktion integrierbar. Die Integrierbarkeit für $s < -1$ und die Kugel $\mathbb{B} = \{v : |v| \leq 1/e\}$ erhält man durch Übergang zu Kugelkoordinaten $r = |v|$ und die Substitution $z = \log(1/r)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^d} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|v|^d} \left(\log \frac{1}{|v|} \right)^s dv &= \frac{\chi_d}{e^d} \int_0^{1/e} \frac{1}{r} \left(\log \frac{1}{r} \right)^s dr \\ &= \frac{\chi_d}{e^d} \int_1^\infty z^s dz . \end{aligned}$$

Auf der Kugel $\mathbb{B}$ ist die Gewichtsfunktion $\langle v \rangle^\nu$ beschränkt und aus der Integrierbarkeit von f_2 folgt die Integrierbarkeit von $f_2(\cdot) \langle \cdot \rangle^\nu$, d.h. es gilt $f_2 \in \mathbb{L}_1^{(\nu)}(\mathbb{R}^d)$ für alle $\nu \geq 0$. Nach dem zuvor Bewiesenen ist also die Integrierbarkeit von $f_2 \log^- f_2$ gesichert. Für $f_2 \log^+ f_2$ hat man hingegen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} f_2(v) \log f_2(v) dv &= \frac{d}{e^d} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|v|^d} \left(\log \frac{1}{|v|} \right)^{s+1} dv \\ &+ \frac{s}{e^d} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|v|^d} \left(\log \frac{1}{|v|} \right)^s \log \log \left(\frac{1}{|v|} \right) dv + \frac{1}{e^d} \log \left(\frac{1}{e^d} \right) \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|v|^d} \left(\log \frac{1}{|v|} \right)^s dv . \end{aligned}$$

Der letzte Integrand entspricht bis auf einen Faktor der Funktion f_2 und ist daher endlich. Die beiden verbliebenen Integranden sind nichtnegativ und das erste Integral berechnet man durch die Substitution $z = \log(1/r)$ zu

$$\frac{d}{e^d} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|v|^d} \left(\log \frac{1}{|v|} \right)^{s+1} dv = \frac{d \chi_d}{e^d} \int_0^{1/e} \frac{1}{r} \left(\log \frac{1}{r} \right)^{s+1} dr = \frac{d \chi_d}{e^d} \int_1^\infty z^{s+1} dz ,$$

was offensichtlich unbeschränkt ist, da $s > -2$.

Im Rahmen der $\mathbb{L}_1$ -Funktionen wird man also fordern müssen, dass die Anfangsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_0(v) (1 + |v|^2 + \log^+ f(v)) dv < \infty ,$$

bzw.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_0(v) (1 + |v|^2 + \log(1 + f(v))) dv < \infty$$

erfüllt.

Ist jedoch die Funktion zusätzlich p -fach integrierbar mit $1 < p < \infty$, so erhält man aus der elementaren Abschätzung

$$\log(1 + x) \leq x$$

und der Hölder-Ungleichung mit $p' = p/(p-1)$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} f(v) \log^+ f(v) dv &= p' \int_{\mathbb{R}^d} f(v) \log^+(f(v)^{1/p'}) dv \\
 &\leq p' \int_{\mathbb{R}^d} f(v) \log(1 + f(v)^{1/p'}) dv \\
 &\leq p' \int_{\mathbb{R}^d} f(v)^{1+1/p'} dv \\
 &\leq p' \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(v)^p dv \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(v) dv \right)^{(p-1)/p}.
 \end{aligned}$$

Für solche f ist das H -Funktional wohldefiniert. Offensichtlich bleibt die Aussage richtig, wenn man $f \in \mathbb{L}_1^{(2)} \cap \mathbb{L}_\infty$ voraussetzt. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \log x = 0,$$

kann auf die strikte Positivität von f verzichtet werden und aus den bisherigen Betrachtungen folgt:

Proposition 2.3.1. *Sei f fast überall nichtnegativ und $1 < p \leq \infty$, $\nu > 0$. Dann gilt:*

$$f \in \mathbb{L}_1^{(\nu)}(\mathbb{R}^d) \cap \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^d) \implies |H[f]| < \infty.$$

Dass die Umkehrung nicht gilt, zeigt schon das triviale Beispiel $f(v) \equiv 1$.

Kapitel 3

Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators

Bei den theoretischen Untersuchungen zur Boltzmann-Gleichung standen zunächst die Lösungen des Anfangswertproblems für die räumlich homogene Gleichung und deren Eigenschaften im Vordergrund. Eine der ersten Abschätzungen für den Kollisionsoperator wurde von POVZNER [46] bewiesen. Für Kollisionskerne mit der Eigenschaft

$$B(v - w, e) \leq C_B(1 + |v|^\lambda + |w|^\lambda) \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 2 ,$$

zeigte er, dass eine Konstante $C_\nu > 0$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(f, g)(v) \langle v \rangle^\nu dv \leq C_B C_\nu (\|f\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu + \lambda - \gamma \rangle}} \|g\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \lambda + \gamma \rangle}} + \|f\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \lambda + \gamma \rangle}} \|g\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu + \lambda - \gamma \rangle}}) ,$$

wobei $\nu \geq 2$, $f, g \in \mathbb{L}_1^{\langle \nu + \lambda \rangle}$ und $0 \leq \gamma \leq 2$.

Mit der Arbeit von GUSTAFSSON [30] begann die systematische Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators für die so genannten *abgeschnittenen Kollisionskerne* (engl. *cutoff kernels*). Darunter versteht man Kerne von der Form (1.33), bei denen b_λ ersetzt wird durch

$$b_{\lambda, \epsilon}(\mu) = b_\lambda(\mu) \mathbf{1}_{[-1, 1 - \epsilon]}(\mu) . \quad (3.1)$$

Bei abgeschnittenen Kollisionskernen wird explizit angegeben, welche Streuwinkel vernachlässigt werden. Da b_λ von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ für $\mu \rightarrow -1$ ist, gilt

$$b_{\lambda, \epsilon} \in \mathbb{L}_\infty([-1, 1]) ,$$

was die Analyse der Eigenschaften des Kollisionsoperators erheblich vereinfacht. Der Nachteil hierbei ist, dass die Konstanten in den Abschätzungen von ϵ abhängen. Wie bereits in Abschnitt 1.2.2 ausgeführt wurde, ist die Aufspaltung des Kollisionsterms in Gewinn- und Verlustanteil nur erlaubt, wenn mindestens die Grad-Bedingung

$$C_b = 2\pi \int_{-1}^1 b_\lambda(\mu) d\mu < \infty \quad (3.2)$$

erfüllt ist. Diese ist offensichtlich weniger restriktiv als (3.1).

Eines der Hauptergebnisse Gustafssons über den Kollisionsoperator lautet, dass der Gewinnterm im folgenden Sinne normstetig ist:

$$Q_+ : \left(\mathbb{L}_1^{\langle \nu+\lambda \rangle} \cap \mathbb{L}_p^{\langle \nu+\lambda \rangle} \right) \times \left(\mathbb{L}_1^{\langle \nu+\lambda \rangle} \cap \mathbb{L}_p^{\langle \nu+\lambda \rangle} \right) \longrightarrow \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle},$$

wobei $\nu \geq 0$ und $1 \leq p < \infty$.

Mit der Zeit entwickelten sich die Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators zu einem eigenständigen Forschungsgegenstand. STRUCKMEIER [49] zeigte für Maxwell-Moleküle, dass der Kollisionsoperator als Abbildung

$$Q : (\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_\infty) \times (\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_\infty) \longrightarrow \mathbb{L}_\infty$$

stetig ist. Charakteristisch für die beiden genannten Resultate ist die Aussage, dass sich der Kollisionsoperator innerhalb der $\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_1$ -Umgebung wie ein Faltungsoperator verhält. In Abschnitt 3.2 werden Normabschätzungen bewiesen, die Gustafssons und Struckmeiers Resultate beinhalten.

Aus der Tatsache, dass die Lösung der räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung für $t \rightarrow \infty$ gegen die Maxwell-Verteilung relaxiert, leitet sich die Frage ab, ob der Kollisionsoperator eine glättende Wirkung besitzt. Im Falle der abgeschnittenen Kollisionskerne kann man dies für den Verlustterm sofort verneinen, da aus der Darstellung (1.38) folgt, dass $Q_-(f, f)$ niemals glatter als f sein kann.

Dass dies für den Gewinnterm anders ist, wurde von LIONS [32] gezeigt: Für unendlich glatte Kollisionskerne mit kompaktem Träger existiert eine Konstante $C > 0$, mit der die Abschätzung

$$\|Q_+(f, g)\|_{\mathbb{W}_2^1} \leq C \|f\|_{\mathbb{L}_2} \|g\|_{\mathbb{L}_1}$$

gilt. WENNBERG [54] konnte die Glattheitsbedingungen an den Winkelanteil beseitigen. Für $1/2 < \lambda \leq 1$ und $p > 6/(2\lambda - 1)$ bewies er die Normstetigkeit

$$Q_+ : \left(\mathbb{L}_1^{\langle \nu+1 \rangle} \cap \mathbb{L}_p^{\langle \nu+1 \rangle} \right) \times \left(\mathbb{L}_1^{\langle \nu+1 \rangle} \cap \mathbb{L}_p^{\langle \nu+1 \rangle} \right) \longrightarrow \mathbb{W}_2^{1, \langle \nu \rangle}.$$

In den Arbeiten von BOUCHUT/DESVILLETES [16] und LU [33] wurde der Gewinnterm ausschließlich für Funktionen in (gewichteten) $\mathbb{L}_2$ -Räumen betrachtet. Zum Nachweis der Glättungseigenschaft wurden allerdings die Glattheitsforderungen an den Kollisionskern verschärft:

$$|B(|v - w|, \mu)| + |\partial_\mu B(|v - w|, \mu)| \leq C_B(1 + |v - w|).$$

In der Arbeit [23] wurde erstmals der Kollisionsoperator im Zusammenhang mit Besselpotentialräumen untersucht. Die Glättungseigenschaften des Gewinnterms konnten mit vergleichsweise schwachen Regularitätsforderungen an den Winkelanteil des Kollisionskerns untersucht und nachgewiesen werden.

In der aktuellen Arbeit [42] schließlich findet sich eine Regularitätstheorie für den Kollisionsoperator, die zusätzlich zur Grad-Bedingung (3.2) noch folgendes voraussetzt:

$$\exists \delta > 0 : \forall 0 < \epsilon < 1 : \left| \int_{-1}^1 b_\lambda(\mu) d\mu - \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} b_\lambda(\mu) d\mu \right| < C_{b, \lambda} \epsilon^\delta.$$

Dieses Kapitel, das eine systematische Untersuchung der Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators zum Gegenstand hat, gliedert sich wie folgt:

Nach der Vorstellung und Diskussion der über den Kollisionskern getroffenen Annahmen und der Einführung der verwendeten Bezeichnungen wird die Kollisionsfrequenz betrachtet. Diese Betrachtungen stellen u.a. die Basis der Normabschätzungen für den Verlustterm in gewichteten $\mathbb{L}_p$ -Räumen dar.

In Abschnitt 3.2 werden Abbildungseigenschaften des Kollisionsterms in der von Gustafsson betrachteten Situation untersucht. Die Gültigkeit der bewiesenen Abschätzungen sind daher zwar bereits bekannt, jedoch sind die hier gegebenen Beweise weitaus weniger technisch und hinsichtlich der in den Abschätzungen vorkommenden Konstanten transparenter.

Abbildungseigenschaften, die ausschließlich p -fach integrierbare Funktionen beinhalten, sind Gegenstand von Abschnitt 3.3. Bisher wurden Normabschätzungen dieser Art nur für die Fälle $p = 1, 2$ bewiesen. Die hier gezeigten Ergebnisse gelten für alle $1 \leq p \leq \infty$.

In Abschnitt 3.4 werden die Ergebnisse der $\mathbb{L}_p$ -Theorie unter Verwendung von Interpolationstechniken auf die entsprechenden Besselpotentialräume übertragen und mit den Resultaten aus [23] kombiniert.

Nur selten lassen sich Funktionenräume $\mathbb{V}$ identifizieren, für die

$$Q, \text{ bzw. } Q_+, \text{ bzw. } Q_- : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

eine stetige Abbildung ist. Eine Klasse von metrischen Räumen mit dieser Eigenschaft wird in Abschnitt 3.5 vorgestellt. Das Kapitel schließt mit der Untersuchung des Kollisionsoperators für Funktionen in exponentiell gewichteten Räumen. Im Zusammenhang mit diesen Funktionenräumen wurden bisher ausschließlich Eigenschaften von Lösungen der räumlich homogenen Gleichung für die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ untersucht. Vom Studium des Operators selbst für den allgemeineren Fall des VHS-Modells mit $0 \leq \lambda \leq 1$ lassen sich weitere Erkenntnisse über die zugehörigen Lösungen erwarten.

Voraussetzungen an den Kollisionskern und Bezeichnungen

Die Untersuchung der Abbildungseigenschaften beschränkt sich auf harte Interaktionspotentiale, d.h. es werden Kollisionskerne der Form

$$B(v - w, e) = b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda, \quad \mu = \frac{(v - w) \cdot e}{|v - w|}, \quad (3.3)$$

betrachtet, für die gilt:

$$0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.4)$$

Wie in Abschnitt 1.2.2 festgestellt wurde, ist die Gültigkeit der Grad-Bedingung (3.2) für die Betrachtung des Verlustterms $Q_-(f, g)$ ausreichend. Im Zusammenhang mit

diesem Operator wird hier auch nicht mehr verlangt.

Anders verhält es sich für den Gewinnterm $Q_+(f, g)$: Für diesen Operator wird die folgende Forderung an den Winkelanteil des Kollisionskerns gestellt:

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei die Bedingung

$$C_{\lambda,p,(1)} = 2^{(\lambda+5-3/p)/2} \pi \int_{-1}^1 \frac{b_\lambda(\mu)}{(1+\mu)^{3(1-1/p)/2}} d\mu < \infty \quad (3.5)$$

erfüllt.

Auf den ersten Blick erscheint diese Bedingung problematisch: Zusätzlich zur Singularität an der Stelle $\mu = 1$ wird für $p > 3$ eine weitere Polstelle in $\mu = -1$ eingeführt. Dieser Umstand wirkt sich allerdings nur auf die bilineare Form von Q nach (1.22) aus. Für die theoretische Untersuchung sowie die numerische Approximation von Lösungen der Boltzmann-Gleichung sind jedoch nur die quadratische Variante $Q(f, f)$ und die symmetrische Form $\mathcal{Q}(f, g)$ von Bedeutung. Diese aber können in äquivalenter Weise mit dem Winkelanteil

$$\tilde{b}_\lambda(\mu) = (b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)) \mathbf{1}_{[0,1]}(\mu) \quad (3.6)$$

an Stelle von b_λ ausgedrückt werden (siehe (1.44) und (1.46)). Entsprechend lautet der so symmetrisierte Gewinnterm:

$$\mathcal{Q}_+(f, g)(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \tilde{b}_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda (f(v')g(w') + f(w')g(v')) de dw. \quad (3.7)$$

Der durch (3.6) definierte Winkelanteil eliminiert alle negativen μ und verhindert, dass durch die Bedingung (3.5) eine zusätzliche Singularität entsteht. Die Voraussetzung (3.5), mit b_λ ersetzt durch $\tilde{b}_\lambda$, ist weniger restriktiv als (3.1).

Daraus ergibt sich die folgende Vorgehensweise:

- Zunächst beweist man eine Normabschätzung für den bilinearen Gewinnterm $Q_+(f, g)$ unter der Annahme (3.5).
- Daraus folgert man die entsprechende Normabschätzung für den symmetrischen Operator nach (3.7). Diese gilt dann unter der schwächeren Voraussetzung

$$\tilde{C}_{\lambda,p,(1)} = 2^{(\lambda+5-3/p)/2} \pi \int_0^1 \frac{\tilde{b}_\lambda(\mu)}{(1+\mu)^{3(1-1/p)/2}} d\mu < \infty, \quad (3.8)$$

mit dem Winkelanteil $\tilde{b}_\lambda$ gemäß (3.6). Die entsprechende Aussage für den quadratischen Operator folgt sofort aus $Q_+(f, f) = \mathcal{Q}_+(f, f)$.

Man beachte hierzu, dass die Bedingungen (3.5) und (3.8) im Hinblick auf die Singularität in $\mu = 1$ nicht stärker sind als die Grad-Bedingung (3.2). Speziell gilt für $p = 1$

$$C_{\lambda,1,(1)} = 2^{\lambda/2} C_b. \quad (3.9)$$

- Durch Kombination mit entsprechenden Abschätzungen für den bilinearen bzw. symmetrischen Verlustterm erhält man die Stetigkeitsaussagen für den gesamten Kollisionsoperator. Definiert man den symmetrischen Verlustterm unter Verwendung von (3.6),

$$\mathcal{Q}_-(f, g)(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \tilde{b}_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda (f(v)g(w) + f(w)g(v)) \, de \, dw, \quad (3.10)$$

so genügt es, dass die Grad-Bedingung (3.2) erfüllt ist, denn es gilt:

$$2\pi \int_0^1 \tilde{b}_\lambda(\mu) \, d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 b_\lambda(\mu) \, d\mu = C_b < \infty.$$

Für den quadratischen sowie den symmetrischen Kollisionsoperator ist die Bedingung (3.8) für die in der Praxis wichtigen VHS-Modelle (1.40) offensichtlich erfüllt.

Für den rein algebraisch symmetrisierten Gewinnterm, gegeben durch

$$\mathcal{Q}_+(f, g)(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda (f(v')g(w') + f(w')g(v')) \, de \, dw, \quad (3.11)$$

kann eine weitere Normabschätzung gewonnen werden, wenn man die im allgemeinen restriktivere Forderung

$$C_{\lambda, p, (2)} = 2^{(\lambda+3-3/p)/2} \max(2, 2^{3(1-1/p)/2}) \pi \int_{-1}^1 \frac{b_\lambda(\mu)}{(1 - \mu^2)^{3(1-1/p)/2}} \, d\mu < \infty \quad (3.12)$$

an den Kollisionskern stellt. Diese Bedingung ist z.B. im Zusammenhang mit den VHS-Modellen ebenfalls nur für $1 \leq p < 3$ erfüllt. Der insbesondere für numerische Zwecke interessante Fall $p = 2$ ist allerdings enthalten. Man beachte speziell, dass für $p = 1$ gilt:

$$C_{\lambda, 1, (1)} = C_{\lambda, 1, (2)}.$$

Als Abkürzung soll für dieses Kapitel die Schreibweise

$$f_{\langle \nu \rangle}(v) = \langle v \rangle^\nu f(v) \quad \text{d.h.} \quad f \in \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} \Leftrightarrow f_{\langle \nu \rangle} \in \mathbb{L}_p \quad (3.13)$$

vereinbart werden.

3.1 Eigenschaften der Kollisionsfrequenz

Zur Betrachtung der $\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_p$ -Eigenschaften des Verlustterms ist es hilfreich, zunächst die Kollisionsfrequenz, d.h. den Faltungsoperator

$$L[g](v) = C_b \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda g(w) \, dw, \quad (3.14)$$

zu untersuchen. Darüber hinaus lohnt sich das Studium der Kollisionsfrequenz u.a. auch, wenn man die Darstellung der Lösung des Anfangswertproblems zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung mit Hilfe des Duhamel-Prinzips (1.73) mathematisch exakt begründen möchte. Über die wesentliche Beschränktheit dieses linearen Operators lässt sich die folgende Aussage treffen:

Lemma 3.1.1. *Es gelte die Grad-Bedingung (3.2), und für $1 \leq p \leq \infty$ sei der konjugierte Exponent gemäß (2.2) definiert. Wenn $\gamma \in \mathbb{R}$ die Bedingung*

$$1 < p \leq \infty : \gamma > \lambda + 3/p' \quad \text{bzw.} \quad p = 1 : \gamma \geq \lambda$$

erfüllt, so gilt: Die Kollisionsfrequenz ist ein stetiger linearer Operator

$$L : \mathbb{L}_p^{\langle \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_\infty^{\langle -\lambda \rangle},$$

mit der Normabschätzung

$$\|L[g]\|_{\mathbb{L}_\infty^{\langle -\lambda \rangle}} \leq 2^{\lambda/2} C_b C_{p,\lambda,\gamma} \|g\|_{\mathbb{L}_p^{\langle \gamma \rangle}}.$$

Die Konstante $C_{p,\lambda,\gamma}$ ist dabei definiert als

$$C_{p,\lambda,\gamma} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle w \rangle^{p'(\lambda-\gamma)} dw \right)^{1/p'} & , 1 < p \leq \infty \\ 1 & , p = 1 \end{cases}. \quad (3.15)$$

Beweis. Der Fall $p = 1$ ist einfach: Unter Verwendung von

$$|v - w|^\lambda \leq \langle v - w \rangle^\lambda$$

und der Peetre-Ungleichung (Lemma 2.2.8 a)) erhält man

$$|L[g](v)| \leq C_b \int_{\mathbb{R}^3} \langle v - w \rangle^\lambda |g(w)| dw \leq 2^{\lambda/2} C_b \langle v \rangle^\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \langle w \rangle^\lambda |g(w)| dw$$

und man erkennt, dass für die Stetigkeitsaussage in diesem Fall die Voraussetzung $\gamma \geq \lambda$ genügt.

Für $1 < p < \infty$ erhält man durch Anwendung der Peetre- und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \langle v \rangle^{-\lambda} L[g](v) \right| &\leq C_b \langle v \rangle^{-\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda |g(w)| dw \\ &\leq 2^{\lambda/2} C_b \int_{\mathbb{R}^3} \langle w \rangle^{\lambda-\gamma} |g_{\langle \gamma \rangle}(w)| dw \\ &\leq 2^{\lambda/2} C_b \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle w \rangle^{p'(\lambda-\gamma)} dw \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |g_{\langle \gamma \rangle}(w)|^p dw \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Das zweite Integral ist nach Voraussetzung an g endlich. Das erste Integral ist nach Lemma 2.1.2 b) genau dann endlich, wenn gilt:

$$p'(\lambda - \gamma) < -3.$$

Der Fall $p = \infty$ wird vollkommen analog bewiesen und aus der Definition von $C_{p,\lambda,\gamma}$ folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 3.1.2. Explizite obere Schranken für die Konstante $C_{p,\lambda,\gamma}$ wurden in Bemerkung 2.1.3 durch (2.7) und (2.8) angegeben.

Um die Frage zu klären, inwieweit die Aussage des Lemmas optimal ist, sucht man nach Abschätzungen für die Kollisionsfrequenz von unten. Für Maxwell-Moleküle (d.h. $\lambda = 0$) gilt speziell

$$L[f](v) = C_b \|f\|_{\mathbb{L}_1} = C_b \rho_f,$$

womit alles beantwortet ist. Für den Fall $0 < \lambda \leq 1$ ist man auf Ungleichungen angewiesen. In der Literatur finden sich diesbezüglich die folgenden Abschätzungen:

- ARKERYD [6]: Es gilt

$$L[f](v) \geq C(1 + |v|^\lambda) \quad , \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad (3.16)$$

wobei die Konstante von $\|f\|_{\mathbb{L}_1}$, $\|f\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}}$ und dem Positivteil des H -Funktional von f abhängt. In derselben Arbeit wurde auch die Gültigkeit der unteren Schranke

$$L[f](v) \geq C(|v|^\lambda \|f\|_{\mathbb{L}_1} - \|f\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}}), \quad (3.17)$$

nachgewiesen. Im Gegensatz zu (3.16) ist die Gültigkeit dieser Ungleichung unabhängig davon, ob das H -Funktional endlich ist oder nicht. Man beachte, dass die untere Schranke in einer Umgebung von $v = 0$ negativ ist. Die Abschätzung macht damit lediglich im Zusammenhang mit dem asymptotischen Verhalten der Kollisionsfrequenz für $|v| \rightarrow \infty$ wirklich Sinn.

- BOBYLEV [11]: Sei f eine Lösung des Anfangswertproblems zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung (1.69) für das Hartkugelmolekülmodell. Dann gilt:

$$L[f](t, v) \geq \frac{1}{\sqrt{7}} L[f_0](v). \quad (3.18)$$

Durch Anwendung von Lemma 2.2.9 lässt sich eine alternative untere Schranke für die Kollisionsfrequenz herleiten. Die Aussage des folgenden Satzes lässt sich unter die bisher bekannten Abschätzungen folgendermaßen einordnen:

- Im Vergleich zu (3.16) ist die Konstante explizit gegeben. Allerdings kann die untere Schranke für gewisse v gleich 0 sein. Die Abschätzung ist im Gegensatz zu (3.16) unabhängig von der Wohldefiniertheit des H -Funktional.
- Im Gegensatz zu (3.17) ist die untere Schranke nichtnegativ.

- Im Gegensatz zu (3.18) ist die Abschätzung unabhängig von einem konkreten Anfangswertproblem und gilt für alle $0 < \lambda \leq 1$.

Satz 3.1.3. *Es gelte die Grad-Bedingung (3.2) und $f \in \mathbb{L}_1^{(\lambda)}$ sei nichtnegativ. Dann genügt die Kollisionsfrequenz (3.14) der Ungleichung*

$$L[f](v) \geq C_b \|f\|_{\mathbb{L}_1} \left| \langle v \rangle^\lambda - \frac{\|f\|_{\mathbb{L}_1^{(\lambda)}}}{\|f\|_{\mathbb{L}_1}} \right|. \quad (3.19)$$

Beweis. Man beachte, dass nach der Bemerkung zu Beginn des Beweises von Satz 3.1.1 die Bedingung $f \in \mathbb{L}_1^{(\lambda)}$ hinreichend für die Wohldefiniertheit der Kollisionsfrequenz ist.

Mit Lemma 2.2.9 erhält man

$$\begin{aligned} L[f](v) &= C_b \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda f(w) dw \\ &\geq C_b \int_{\mathbb{R}^3} |\langle v \rangle^\lambda - \langle w \rangle^\lambda| f(w) dw \\ &\geq C_b \left| \int_{\mathbb{R}^3} (\langle v \rangle^\lambda - \langle w \rangle^\lambda) f(w) dw \right| \\ &= C_b \left| \langle v \rangle^\lambda \|f\|_{\mathbb{L}_1} - \|f\|_{\mathbb{L}_1^{(\lambda)}} \right|, \end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Die Kollisionsfrequenz besitzt also damit das asymptotische Verhalten

$$L[f](v) = \mathcal{O}(\langle v \rangle^\lambda) \quad , \quad |v| \rightarrow \infty .$$

3.2 $\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_1$ -Abschätzungen

In diesem Abschnitt werden Normabschätzungen von der Art bewiesen, wie sie vor allem von GUSTAFSSON [30] untersucht wurden. Die hier gezeigten Beweise sind allerdings wesentlich transparenter als in [30], wo mit der Interpolation zwischen gewichteten $\mathbb{L}_p$ -Räumen gearbeitet wurde. Die $\mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_\infty$ -Abschätzungen aus [49] für den Fall $\lambda = 0$ sind als Spezialfall enthalten.

3.2.1 Der Verlustterm

Satz 3.2.1. *Es gelte die Grad-Bedingung (3.2). Dann gilt für alle $\nu \geq 0$ und alle $1 \leq p \leq \infty$: Der Verlustterm des Kollisionsoperators ist eine stetige Abbildung*

$$Q_- : \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \times \mathbb{L}_1^{(\lambda)} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{(\nu)} ,$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q_-(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)}\| \leq 2^{\lambda/2} C_b \|g | \mathbb{L}_1^{(\lambda)}\| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)}\|. \quad (3.20)$$

Speziell ist der Verlustterm eine stetige Abbildung

$$Q_- : \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \times \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{(\nu)},$$

mit der Normabschätzung:

$$\|Q_-(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)}\| \leq 2^{\lambda/2} C_b \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)}\| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)}\|.$$

Beweis. Wieder wird die triviale Ungleichung

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^3 : |v - w|^\lambda \leq \langle v - w \rangle^\lambda$$

mit der Peetre-Ungleichung (2.23) kombiniert. Für $1 \leq p < \infty$ erhält man:

$$\begin{aligned} \|Q_-(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)}\|^p &\leq C_b^p \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\nu} |f(v)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle v - w \rangle^\lambda |g(w)| dw \right)^p dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} C_b^p \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p(\nu+\lambda)} |f(v)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle w \rangle^\lambda |g(w)| dw \right)^p dv \\ &= 2^{(p\lambda)/2} C_b^p \|g | \mathbb{L}_1^{(\lambda)}\|^p \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)}\|^p. \end{aligned}$$

Für den Fall $p = \infty$ geht man vollkommen analog vor. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Einbettung (2.5). ■

Nach Definition des symmetrischen Verlustterms gemäß (3.10) erhält man aus Satz 3.2.1 unmittelbar:

Korollar 3.2.2. *Es gelte die Grad-Bedingung (3.2). Dann gilt für alle $\nu \geq 0$ und alle $1 \leq p \leq \infty$: Der symmetrische Verlustterm ist eine stetige Abbildung*

$$\mathcal{Q}_- : \left(\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \cap \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \right) \times \left(\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \cap \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \right) \longrightarrow \mathbb{L}_p^{(\nu)},$$

mit der Normabschätzung:

$$\|\mathcal{Q}_-(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)}\| \leq 2^{\lambda/2-1} C_b \left(\|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)}\| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)}\| + \|f | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)}\| \|g | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)}\| \right).$$

3.2.2 Der Gewinnterm

Zur Vorbereitung der Untersuchungen des Gewinnterms sei daran erinnert, dass wegen (1.12) die Gleichheit

$$|v - w| = |v' - w'|$$

gilt. Mit der Peetre-Ungleichung aus Lemma 2.2.8 a) folgt hieraus für alle $\lambda \in [0, 1]$ die Abschätzung

$$|v - w|^\lambda \leq \langle v' - w' \rangle^\lambda \leq 2^{\lambda/2} \langle v' \rangle^\lambda \langle w' \rangle^\lambda ,$$

und mit der zweiten Ungleichung aus Lemma 2.2.8 b) erhält man für alle $\nu \geq 0$:

$$\frac{\langle v \rangle^\nu |v - w|^\lambda}{\langle v' \rangle^{\nu+\lambda} \langle w' \rangle^{\nu+\lambda}} \leq 2^{\lambda/2} . \quad (3.21)$$

Für die bilineare Form des Kollisionsoperators gilt der folgende

Satz 3.2.3. *Unter der Voraussetzung (3.5) ist der Gewinnterm des Kollisionsoperators für alle $\nu \geq 0$ und alle $1 \leq p \leq \infty$ eine stetige Abbildung*

$$Q_+ : \mathbb{L}_p^{\langle \nu+\lambda \rangle} \times \mathbb{L}_1^{\langle \nu+\lambda \rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} ,$$

wobei die Normabschätzung

$$\|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} \| \leq C_{\lambda, p, (1)} \|g | \mathbb{L}_1^{\langle \nu+\lambda \rangle} \| \|f | \mathbb{L}_p^{\langle \nu+\lambda \rangle} \|\,$$

gilt.

Beweis. Für den Beweis werden die Fälle $p = 1$, $p = \infty$ und $1 < p < \infty$ unterschieden.

- i) Der Beweis der Aussage für $p = 1$ ist elementar zu führen. Benutzt man die schwache Formulierung von Q_+ aus (1.49), die erste Ungleichung aus Lemma 2.2.8 b) und anschließend die Peetre-Ungleichung, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle} \| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda |f(v)| |g(w)| \langle v' \rangle^\nu \, de \, dw \, dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda |f(v)| |g(w)| \langle v \rangle^\nu \langle w \rangle^\nu \, de \, dw \, dv \\ &\leq 2^{\lambda/2} C_b \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f_{\langle \nu+\lambda \rangle}(v)| |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w)| \, dw \, dv \\ &= C_{\lambda, 1, (1)} \|f | \mathbb{L}_1^{\langle \nu+\lambda \rangle} \| \|g | \mathbb{L}_1^{\langle \nu+\lambda \rangle} \| . \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt der Zusammenhang (3.9) verwendet.

- ii) Für den Fall $p = \infty$ verwendet man (3.21) und erhält

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_\infty^{\langle \nu \rangle} \| &\leq \operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \frac{\langle v \rangle^\nu |v - w|^\lambda}{\langle v' \rangle^{\nu+\lambda} \langle w' \rangle^{\nu+\lambda}} |f_{\langle \nu+\lambda \rangle}(v')| |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')| \, de \, dw \right) \\ &\leq 2^{\lambda/2} \operatorname{ess\,sup}_{v' \in \mathbb{R}^3} |f_{\langle \nu+\lambda \rangle}(v')| \operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')| \, de \, dw \\ &= 2^{\lambda/2} \|f | \mathbb{L}_\infty^{\langle \nu+\lambda \rangle} \| \operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')| \, de \, dw . \end{aligned}$$

Für das Integral auf der rechten Seite wird Lemma 1.6.1 mit $h_\lambda(\mu) = b_\lambda(\mu)$, $\gamma = 0$ und $F(\cdot) = |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(\cdot)|$ verwendet. Dies liefert

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_\infty^{(\nu)} \| &\leq 2^{(\lambda+5)/2} \pi \|f | \mathbb{L}_\infty^{(\nu+\lambda)} \| \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \int_{-1}^1 \frac{b_\lambda(\mu)}{(1+\mu)^{3/2}} d\mu \\ &= C_{\lambda, \infty, (1)} \|f | \mathbb{L}_\infty^{(\nu+\lambda)} \| \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \|, \end{aligned}$$

wie behauptet.

iii) Im Falle $1 < p < \infty$ setzt man $p' = p/(p-1)$, verwendet wieder (3.21) und anschließend die Hölder-Ungleichung (Satz 2.1.1):

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \|^p &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \frac{\langle v \rangle^\nu |v-w|^\lambda}{\langle v' \rangle^{\nu+\lambda} \langle w' \rangle^{\nu+\lambda}} b_\lambda(\mu) f_{\langle \nu+\lambda \rangle}(v') g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w') de dw \right|^p dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} |(1+\mu)^{3/(2p)} b_\lambda(\mu) g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')|^{1/p'} \right. \\ &\quad \left. \times |(1+\mu)^{-3/(2p')} b_\lambda(\mu) g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')| f_{\langle \nu+\lambda \rangle}(v')|^p |^{1/p} de dw \right)^p dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (1+\mu)^{3/(2p)} b_\lambda(\mu) |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')| de dw \right)^{p/p'} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (1+\mu)^{-3/(2p')} b_\lambda(\mu) |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')| |f_{\langle \nu+\lambda \rangle}(v')|^p de dw dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} \operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (1+\mu)^{3/(2p)} b_\lambda(\mu) |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')| de dw \right)^{p/p'} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (1+\mu)^{-3/(2p')} b_\lambda(\mu) |g_{\langle \nu+\lambda \rangle}(w')| |f_{\langle \nu+\lambda \rangle}(v')|^p de dw dv. \end{aligned}$$

Für den ersten Faktor verwendet man wieder Lemma 1.6.1, diesmal mit

$$h_\lambda(\mu) = (1+\mu)^{3/(2p)} b_\lambda(\mu),$$

und auf den zweiten Faktor wendet man die bereits bewiesene Abschätzung aus Teil i) an. Zusammen mit

$$\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$$

ergibt dies die behauptete Normabschätzung

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \| &\leq 2^{(p\lambda)/2} \operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}^3} \left(2^{5/2} \pi \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \int_{-1}^1 \frac{b_\lambda(\mu)}{(1+\mu)^{3(1-1/p)/2}} d\mu \right)^{p/p'} \\ &\quad \times (2\pi) \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \|^p \int_{-1}^1 \frac{b_\lambda(\mu)}{(1+\mu)^{3(1-1/p)/2}} d\mu \\ &\leq \left(C_{\lambda,p,(1)}^p \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \| \right)^p. \end{aligned}$$

■

Zusammen mit den entsprechenden Ergebnissen für den bilinearen bzw. symmetrischen Verlustterm (Satz 3.2.1 und Korollar 3.2.2) erhält man unmittelbar das folgende Resultat. Es sei daran erinnert, dass die Grad-Bedingung erfüllt ist, wenn (3.5) gilt.

Korollar 3.2.4. *Es sei $\nu \geq 0$ und $1 \leq p \leq \infty$.*

a) *Es gelte (3.5). Der bilineare Kollisionsoperator ist eine stetige Abbildung*

$$Q : \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \times \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{(\nu)},$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \| \leq (C_{\lambda,p,(1)} + 2^{\lambda/2} C_b) \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \|.$$

C_b ist dabei durch die Grad-Bedingung (3.2) gegeben.

b) *Es gelte (3.8). Der nach (3.7) gegebene symmetrische Gewinnterm ist eine stetige Abbildung*

$$\mathcal{Q}_+ : \left(\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \cap \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \right) \times \left(\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \cap \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \right) \longrightarrow \mathbb{L}_p^{(\nu)},$$

mit der Normabschätzung

$$\|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \| \leq \frac{1}{2} \tilde{C}_{\lambda,p,(1)} \left(\|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \| + \|f | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|g | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \| \right).$$

c) *Es gelte (3.8). Dann ist der symmetrische Kollisionsoperator eine stetige Abbildung*

$$\mathcal{Q} : \left(\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \cap \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \right) \times \left(\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \cap \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \right) \longrightarrow \mathbb{L}_p^{(\nu)},$$

mit der Normabschätzung

$$\|\mathcal{Q}(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \| \leq \frac{1}{2} (\tilde{C}_{\lambda,p,(1)} + 2^{\lambda/2} C_b) \left(\|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \| + \|f | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|g | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \| \right).$$

C_b ist dabei durch die Grad-Bedingung (3.2) gegeben.

Für den algebraisch symmetrisierten Gewinnterm (3.11) kann eine weitere Aussage bewiesen werden, die zwar stärkere Voraussetzungen an den Winkelanteil benötigt, aber hinsichtlich der Normen von f und g schärfer und flexibler ist.

Satz 3.2.5. *Es gelte (3.12). Dann ist der (algebraisch) symmetrisierte Gewinnterm für alle $\nu \geq 0$ und alle $1 \leq p \leq \infty$ eine stetige Abbildung*

$$\mathcal{Q}_+ : \left(\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \cap \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \right) \times \left(\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \cap \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \right) \longrightarrow \mathbb{L}_p^{(\nu)},$$

mit den Normabschätzungen

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \| &\leq C_{\lambda, p, (2)} \|f | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|g | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \|, \\ \|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \| &\leq C_{\lambda, p, (2)} \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \|. \end{aligned}$$

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, die zweite Abschätzung zu beweisen. Für $p = 1$ gilt ferner $C_{\lambda, 1, (1)} = C_{\lambda, 1, (2)}$ und jede der behaupteten Abschätzungen entspricht der bereits bewiesenen Aussage für $Q(f, g)$.

Sei also $1 < p \leq \infty$: Wie bei den Umformungen bei der geometrischen Symmetrisierung in Abschnitt 1.3 erhält man durch die Vertauschung $e \leftrightarrow -e$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_+(f, g)(v) &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda f(v') g(w') de dw \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda f(w') g(v') de dw \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)) |v - w|^\lambda f(v') g(w') de dw. \end{aligned}$$

Für $1 < p < \infty$ erhält man aus (3.21) und der Hölder-Ungleichung wie im Beweis von Satz 3.2.3 (Teil iii))

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \|^p \\ &\leq 2^{p(\lambda/2-1)} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)) |f_{(\nu+\lambda)}(v')| |g_{(\nu+\lambda)}(w')| de dw \right)^p dv \\ &\leq 2^{p(\lambda/2-1)} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (1 + \mu)^{3/(2p)} (b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)) |g_{(\nu+\lambda)}(w')| de dw \right)^{p/p'} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (1 + \mu)^{-3/(2p')} (b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)) |g_{(\nu+\lambda)}(w')| |f_{(\nu+\lambda)}(v')|^p de dw dv. \end{aligned}$$

Für den ersten Faktor verwendet man Lemma 1.6.1 mit

$$h_\lambda(\mu) = \frac{b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)}{(1 + \mu)^{3/(2p)}},$$

und den zweiten Faktor schätzt man wieder mit der bereits bewiesenen Ungleichung für den Fall $p = 1$ ab. Man erhält so

$$\|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \| \leq \left(2^{(\lambda+3-3/p)/2} \pi \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \| \int_{-1}^1 \frac{b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)}{(1+\mu)^{3(1-1/p)/2}} d\mu \right)^p .$$

Das Integral auf der rechten Seite ist identisch mit

$$\int_{-1}^1 \frac{b_\lambda(\mu)}{(1+\mu)^{3(1-1/p)/2}} d\mu + \int_{-1}^1 \frac{b_\lambda(\mu)}{(1-\mu)^{3(1-1/p)/2}} d\mu .$$

Aus der Ungleichung

$$\frac{1}{(1+\mu)^{3(1-1/p)/2}} + \frac{1}{(1-\mu)^{3(1-1/p)/2}} \leq \frac{\max(2, 2^{3(1-1/p)/2})}{(1-\mu^2)^{3(1-1/p)/2}} \quad (3.22)$$

folgt die Behauptung:

$$\|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{(\nu)} \| \leq C_{\lambda, p, (2)} \|g | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|f | \mathbb{L}_p^{(\nu+\lambda)} \| .$$

Der Fall $p = \infty$ wird vollkommen analog behandelt: Aus (3.21) folgt

$$\|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{L}_\infty^{(\nu)} \| \leq 2^{\lambda/2-1} \|f | \mathbb{L}_\infty^{(\nu+\lambda)} \| \sup_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (b_\lambda(\mu) + b_\lambda(-\mu)) |g_{(\nu+\lambda)}(w')| de dw ,$$

und man erhält die behauptete Abschätzung durch Anwendung von Lemma 1.6.1 und der Ungleichung (3.22). ■

3.3 $\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_p$ -Abschätzungen

In diesem Abschnitt werden Abschätzungen für den Kollisionsoperator für Funktionen aus den gewichten $\mathbb{L}_p$ -Räumen, d.h. in einer reinen $\mathbb{L}_p$ -Umgebung bewiesen, wobei $1 < p \leq \infty$. Da der Fall $p = 1$ durch die Ergebnisse des letzten Abschnitts schon vollkommen abgedeckt ist, wird er nicht weiter behandelt. Wie bereits erwähnt, finden sich in der Literatur bisher ausschließlich die Fälle $p = 1, 2$.

Im Unterschied zu den $\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_1$ -Abschätzungen des vorangegangenen Abschnitts wird sich hier zeigen, dass man stärkere Integrierbarkeitsvoraussetzungen für die Funktionen f und g benötigt. Zum Ausgleich genügt jedoch die Grad-Bedingung als einzige Forderung an den Winkelanteil sogar für den bilinearen Gewinnterm. Gesonderte Betrachtungen für den symmetrischen Operator sind daher nicht nötig und die aus physikalischer Sicht allgemeinsten Interaktionsmodelle werden durch die folgenden Stetigkeitsaussagen abgedeckt.

3.3.1 Der Verlustterm

Satz 3.3.1. *Es gelte die Grad-Bedingung (3.2). Dann ist für alle $1 < p \leq \infty$ und alle $\gamma > \lambda + 3/p'$ mit $p' = p/(p-1)$ der Verlustterm eine stetige Abbildung*

$$Q_- : \mathbb{L}_p^{\langle \gamma \rangle} \times \mathbb{L}_p^{\langle \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{\langle \gamma - \lambda \rangle},$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q_-(f, g) | \mathbb{L}_p^{\langle \gamma - \lambda \rangle} \| \leq 2^{\lambda/2} C_b C_{p, \lambda, \gamma} \|f | \mathbb{L}_p^{\langle \gamma \rangle} \| \|g | \mathbb{L}_p^{\langle \gamma \rangle} \|.$$

Die Konstante $C_{p, \lambda, \gamma}$ ist dabei durch (3.15) gegeben.

Beweis. Aus Lemma 3.1.1 folgert man unmittelbar für $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned} \|Q_-(f, g) | \mathbb{L}_p^{\langle \gamma - \lambda \rangle} \|^p &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p(\gamma - \lambda)} |f(v)|^p |L[g](v)|^p dv \\ &\leq \|L[g](v) | \mathbb{L}_\infty^{\langle -\lambda \rangle} \|^p \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\gamma} |f(v)|^p dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} C_b^p C_{p, \lambda, \gamma}^p \|g | \mathbb{L}_p^{\langle \gamma \rangle} \|^p \|f | \mathbb{L}_p^{\langle \gamma \rangle} \|^p. \end{aligned}$$

Der Fall $p = \infty$ ist trivial. ■

Man stellt fest: Verglichen mit den Voraussetzungen an die Funktionen f und g für die $\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_1$ -Abschätzungen des letzten Abschnitts sind die Integrierbarkeitsforderungen hier restriktiver. Ursache hierfür ist die punktweise untere Schranke für die Kollisionsfrequenz aus Satz 3.1.3.

3.3.2 Der Gewinnterm

Der Gewinnterm besitzt für Funktionen in gewichteten $\mathbb{L}_p$ -Räumen die folgende Stetigkeitseigenschaft:

Satz 3.3.2. *Es gelte die Grad-Bedingung (3.2). Für alle $\nu \geq 0$ und alle $1 < p \leq \infty$ gilt: Erfüllt γ die Bedingung*

$$\gamma > \lambda + 3/p' \quad , \quad p' = p/(p-1),$$

so ist der Gewinnterm eine stetige Abbildung

$$Q_+ : \mathbb{L}_p^{\langle \nu + \gamma \rangle} \times \mathbb{L}_p^{\langle \nu + \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle},$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} \| \leq 2^{\lambda/2} C_b C_{p, \lambda, \gamma} \|f | \mathbb{L}_p^{\langle \nu + \gamma \rangle} \| \|g | \mathbb{L}_p^{\langle \nu + \gamma \rangle} \|.$$

Die Konstante $C_{p, \lambda, \gamma}$ ist dabei durch (3.15) gegeben.

Beweis. Unter Verwendung der Peetre-Ungleichung aus Lemma 2.2.8 a) erhält man die Abschätzung

$$|v - w|^\lambda = |v' - w'|^\lambda \leq \langle v' - w' \rangle^\lambda \leq 2^{\lambda/2} \langle v' \rangle^\lambda \langle w' \rangle^\lambda.$$

Da nach Voraussetzung $\gamma - \lambda > 0$ gilt, folgt aus Lemma 2.2.8 b)

$$\langle w \rangle^{\gamma-\lambda} \leq \langle v' \rangle^{\gamma-\lambda} \langle w' \rangle^{\gamma-\lambda} \Rightarrow \langle v' \rangle^{\lambda-\gamma} \langle w' \rangle^{\lambda-\gamma} \leq \langle w \rangle^{\lambda-\gamma}.$$

Für $1 < p < \infty$ erhält man hiermit

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) \mathbb{L}_p^{(\nu)}\|^p &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda |f(v')| |g(w')| \, de \, dw \right)^p dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \langle v' \rangle^\lambda \langle w' \rangle^\lambda |f(v')| |g(w')| \, de \, dw \right)^p dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \langle v' \rangle^{\lambda-\gamma} \langle w' \rangle^{\lambda-\gamma} |f_{\langle \gamma \rangle}(v')| |g_{\langle \gamma \rangle}(w')| \, de \, dw \right)^p dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \langle w \rangle^{\lambda-\gamma} |f_{\langle \gamma \rangle}(v')| |g_{\langle \gamma \rangle}(w')| \, de \, dw \right)^p dv. \end{aligned}$$

Die Faktorisierung

$$b_\lambda(\mu) = b_\lambda(\mu)^{1/p} b_\lambda(\mu)^{1/p'}$$

und Anwendung der Hölder-Ungleichung auf das innere Integral liefern:

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) \mathbb{L}_p^{(\nu)}\|^p &\leq 2^{(p\lambda)/2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |f_{\langle \gamma \rangle}(v')|^p |g_{\langle \gamma \rangle}(w')|^p \, de \, dw \right) \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \langle w \rangle^{p'(\lambda-\gamma)} \, de \, dw \right)^{p-1} dv. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Der zweite Faktor ist nach (3.2) und (3.15) gleich $C_b^{p-1} C_{p,\lambda,\gamma}^p$ und es folgt mit (1.49) und Lemma 2.2.8 b):

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) \mathbb{L}_p^{(\nu)}\|^p &\leq 2^{(p\lambda)/2} C_b^{p-1} C_{p,\lambda,\gamma}^p \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{p\nu} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |f_{\langle \gamma \rangle}(v')|^p |g_{\langle \gamma \rangle}(w')|^p \, de \, dw \, dv \\ &= 2^{(p\lambda)/2} C_b^{p-1} C_{p,\lambda,\gamma}^p \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \langle v' \rangle^{p\nu} b_\lambda(\mu) |f_{\langle \gamma \rangle}(v)|^p |g_{\langle \gamma \rangle}(w)|^p \, de \, dw \, dv \\ &\leq 2^{(p\lambda)/2} C_b^p C_{p,\lambda,\gamma}^p \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f_{\langle \nu+\gamma \rangle}(v)|^p |g_{\langle \nu+\gamma \rangle}(w)|^p \, dw \, dv \\ &= 2^{(p\lambda)/2} C_b^p C_{p,\lambda,\gamma}^p \|f \mathbb{L}_p^{(\nu+\gamma)}\|^p \|g \mathbb{L}_p^{(\nu+\gamma)}\|^p. \end{aligned}$$

Für $p = \infty$ erhält man analog

$$\begin{aligned} |\langle v \rangle^\nu Q_+(f, g)(v)| &\leq 2^{\lambda/2} \langle v \rangle^\nu \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \langle v' \rangle^{\lambda-\gamma} \langle w' \rangle^{\lambda-\gamma} |f_{\langle \gamma \rangle}(v')| |g_{\langle \gamma \rangle}(w')| \, de \, dw \\ &\leq 2^{\lambda/2} \|f\|_{\mathbb{L}_\infty^{\langle \nu+\gamma \rangle}} \|g\|_{\mathbb{L}_\infty^{\langle \nu+\gamma \rangle}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \langle w \rangle^{\lambda-\gamma} \, de \, dw \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus der Grad-Bedingung und

$$C_{\infty, \lambda, \gamma} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle w \rangle^{\lambda-\gamma} \, dw.$$

■

Nach Voraussetzung über γ gilt für alle $\nu \geq 0$

$$\nu + \gamma > \nu + \lambda + 3/p' > \nu + \lambda.$$

Nach Lemma 2.1.2 a) und Satz 3.3.1 folgt hieraus

$$f, g \in \mathbb{L}_p^{\langle \nu+\gamma \rangle} \implies Q_-(f, g) \in \mathbb{L}_p^{\langle \nu+\gamma-\lambda \rangle} \subset \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle}.$$

Damit folgt unmittelbar:

Korollar 3.3.3. *Es gelte die Grad-Bedingung (3.2). Für $\nu \geq 0$ und alle $1 < p \leq \infty$ gilt: Erfüllt γ die Bedingung*

$$\gamma > \lambda + 3/p' \quad , \quad p' = p/(p-1),$$

so ist der Kollisionsoperator eine stetige Abbildung

$$Q : \mathbb{L}_p^{\langle \nu+\gamma \rangle} \times \mathbb{L}_p^{\langle \nu+\gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle},$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q(f, g)\|_{\mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle}} \leq 2^{\lambda/2+1} C_b C_{p, \lambda, \gamma} \|f\|_{\mathbb{L}_p^{\langle \nu+\gamma \rangle}} \|g\|_{\mathbb{L}_p^{\langle \nu+\gamma \rangle}}.$$

Die Konstante $C_{p, \lambda, \gamma}$ ist dabei durch (3.15) gegeben.

3.4 Stetigkeit in Besselpotentialräumen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus den $\mathbb{L}_p$ -Räumen auf die in Kapitel 2 vorgestellten Besselpotentialräume ausgedehnt. Es zeigt sich dabei, dass der Kollisionsoperator dieselben Glattheitseigenschaften wie seine Argumente besitzt.

Zur Untersuchung werden zunächst elementare Betrachtungen angestellt und die Isomorphie der Besselpotentialräume zu den gewichteten Sobolevräumen verwendet.

Anschließend wird im Zusammenhang mit den Glättungseigenschaften des Gewinnterms klar, warum die Betrachtung der Besselpotentialräume von Vorteil ist.

3.4.1 Abschätzungen in gewichteten Sobolev- und Besselpotentialräumen

Für die weiteren Betrachtungen wird die folgende Aussage von Nutzen sein. Der Beweis ist [23] entnommen.

Lemma 3.4.1. *Jede partielle Ableitung nach v von Q_+ bzw. Q_- lässt sich ausdrücken als:*

$$\partial^\alpha Q_\pm(f, g)(v) = \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} Q_\pm(\partial^\beta f, \partial^{\alpha-\beta} g)(v). \quad (3.24)$$

Beweis. Wegen der Translationsinvarianz aus Abschnitt 1.3, die offensichtlich für Gewinn- und Verlustterm gleichermaßen gilt,

$$Q(f, g)(v + z) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b_\lambda(\mu) |v - w|^\lambda (f(v' + z)g(w' + z) - f(v + z)g(w + z)) \, de \, dw,$$

kann man die Gleichheit

$$\partial^\alpha Q_\pm(f, g)(v) = \partial_z^\alpha Q_\pm(f, g)(v + z)|_{z=0}$$

dazu benutzen, die Ableitung (nach z) in das Kollisionsintegral hineinzuziehen. Die Behauptung folgt dann mit der Leibnizschen Produktregel (2.11). $\blacksquare$

Das Lemma ermöglicht es, die Stetigkeitsaussagen der Abschnitte 3.2 und 3.3 auf die gewichteten Sobolev- bzw. Besselpotentialräume zu übertragen.

Für $s \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$ sei $g \in \mathbb{W}_1^{s, \langle \nu + \lambda \rangle}$ und $f \in \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu + \lambda \rangle}$. Mit der Norm (2.14) erhält man aus Satz 3.2.3:

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle} \|^p &= \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha Q_+(f, g) | \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} \|^p \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^p \|Q_+(\partial^\beta f, \partial^{\alpha-\beta} g) | \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} \|^p \\ &\leq C_{\lambda, p, (1)}^p \sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^p \|\partial^\beta f | \mathbb{L}_p^{\langle \nu + \lambda \rangle} \|^p \|\partial^{\alpha-\beta} g | \mathbb{L}_1^{\langle \nu + \lambda \rangle} \|^p \\ &\leq C_{\lambda, p, (1)}^p \tilde{C}_s^p \|f | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu + \lambda \rangle} \|^p \|g | \mathbb{W}_1^{s, \langle \nu + \lambda \rangle} \|^p, \end{aligned}$$

wobei für $1 \leq p < \infty$:

$$\tilde{C}_{s, p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^p \right)^{1/p}. \quad (3.25)$$

Der Fall $p = \infty$ wird analog behandelt, die Konstante lautet dann

$$\tilde{C}_{s, \infty} = \max_{|\alpha| \leq s} \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}. \quad (3.26)$$

Für den Verlustterm Q_- muss nach Satz 3.2.1 in den obigen Abschätzungen nur $C_{\lambda,p,(1)}$ durch $2^{\lambda/2} C_b$ ersetzt werden. Zusammen mit Korollar 3.2.4 und Satz 3.2.5 erhält man sofort das folgende Resultat:

Satz 3.4.2. *Es sei $\nu \geq 0$, $s \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Ferner sei die Konstante $\tilde{C}_{s,p}$ durch (3.25) bzw. (3.26) gegeben.*

a) *Es gelte (3.5). Der bilineare Kollisionsoperator ist eine stetige Abbildung*

$$Q : \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \times \mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \longrightarrow \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu\rangle},$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q(f, g) | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu\rangle}\| \leq \tilde{C}_{s,p}(C_{\lambda,p,(1)} + 2^{\lambda/2} C_b) \|g | \mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\| \|f | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\|.$$

b) *Es gelte (3.12). Dann ist der (algebraisch) symmetrisierte Gewinnterm eine stetige Abbildung*

$$\mathcal{Q}_+ : \left(\mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \cap \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \right) \times \left(\mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \cap \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \right) \longrightarrow \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu\rangle},$$

mit den Normabschätzungen

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu\rangle}\| &\leq \tilde{C}_{s,p} C_{\lambda,p,(2)} \|f | \mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\| \|g | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\|, \\ \|\mathcal{Q}_+(f, g) | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu\rangle}\| &\leq \tilde{C}_{s,p} C_{\lambda,p,(2)} \|g | \mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\| \|f | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\|. \end{aligned}$$

c) *Es gelte (3.8). Dann ist der symmetrische Kollisionsoperator eine stetige Abbildung*

$$\mathcal{Q} : \left(\mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \cap \mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \right) \times \left(\mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \cap \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle} \right) \longrightarrow \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu\rangle},$$

mit der Normabschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}(f, g) | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu\rangle}\| &\leq \frac{1}{2} \tilde{C}_{s,p} (\tilde{C}_{\lambda,p,(1)} + 2^{\lambda/2} C_b) \\ &\quad \times \left(\|g | \mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\| \|f | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\| + \|f | \mathbb{W}_1^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\| \|g | \mathbb{W}_p^{s,\langle\nu+\lambda\rangle}\| \right). \end{aligned}$$

Die Konstante C_b ist dabei in (3.2) definiert.

Kombiniert man dieses Resultat mit dem Einbettungssatz von Sobolev (siehe z.B. [50]), so erhält man die folgende bemerkenswerte Aussage über die Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators für Schwartz-Funktionen:

Korollar 3.4.3. (DUDUCHAVA/RJASANOW [23])

Bilinearer und symmetrischer Kollisionsoperator sind stetige Abbildungen

$$Q, \mathcal{Q} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}.$$

Entsprechendes gilt für die zugehörigen Gewinn- und Verlustterme.

Die Vorgehensweise, die zu Satz 3.4.2 geführt hat, lässt sich vollkommen analog auf die Abschätzungen aus Abschnitt 3.3 anwenden und man erhält aus den Sätzen 3.3.1, 3.3.2 und Korollar 3.3.3 unmittelbar:

Lemma 3.4.4. *Es sei $\nu \geq 0$, $s \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Es gelte die Grad-Bedingung (3.2) und ferner*

$$\gamma > \lambda + 3/p' \quad , \quad p' = p/(p-1) \, .$$

Dann gilt:

a) *Der Verlustterm ist eine stetige Abbildung*

$$Q_- : \mathbb{W}_p^{s, \langle \gamma \rangle} \times \mathbb{W}_p^{s, \langle \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{W}_p^{s, \langle \gamma - \lambda \rangle} \, ,$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q_-(f, g) | \mathbb{W}_p^{s, \langle \gamma - \lambda \rangle}\| \leq 2^{\lambda/2} \tilde{C}_{s,p} C_b C_{p,\lambda,\gamma} \|f | \mathbb{W}_p^{s, \langle \gamma \rangle}\| \|g | \mathbb{W}_p^{s, \langle \gamma \rangle}\| \, .$$

b) *Der Gewinnterm und der Kollisionsoperator sind stetige Abbildungen*

$$Q_+ , Q : \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \times \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle} \, ,$$

mit den Normabschätzungen

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle}\| &\leq 2^{\lambda/2} \tilde{C}_{s,p} C_b C_{p,\lambda,\gamma} \|f | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle}\| \|g | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle}\| \\ \|Q(f, g) | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle}\| &\leq 2^{\lambda/2+1} \tilde{C}_{s,p} C_b C_{p,\lambda,\gamma} \|f | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle}\| \|g | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle}\| \, . \end{aligned}$$

Dabei ist $C_{p,\lambda,\gamma}$ durch (3.15) und $\tilde{C}_{s,p}$ durch (3.25) bzw. (3.26) gegeben.

Für $1 < p < \infty$ werden diese Aussagen auf die gewichteten Besselpotentialräume übertragen und auf den Fall $s \in \mathbb{R}_0^+$ ausgedehnt. Nach Satz 2.1.4 und der anschließenden Bemerkung existieren Konstanten $c_{s,(1)}$ und $c_{s,(2)}$ mit

$$\|g | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle}\| \leq c_{s,(1)} \|g | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle}\| \quad , \quad \|g | \mathbb{W}_p^{s, \langle \nu \rangle}\| \leq c_{s,(2)} \|g | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle}\| \, ,$$

wobei $1 < p < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{N}_0$. Mit der Bezeichnung

$$C_{s,p} = c_{s,(1)} c_{s,(2)} \tilde{C}_{s,p} \tag{3.27}$$

übertragen sich die Aussagen und Abschätzungen sofort auf die Besselpotentialräume, indem man $\tilde{C}_{s,p}$ durch $C_{s,p}$ ersetzt. Die Anwendung von Satz 2.1.6 a) für $p_0 = p_1 = p$ liefert die entsprechenden Aussagen für alle $s \geq 0$:

Satz 3.4.5. *Es sei $\nu \geq 0$, $s \geq 0$ und $1 < p < \infty$. Es gelte die Grad-Bedingung (3.2) und ferner*

$$\gamma > \lambda + 3/p' \quad , \quad p' = p/(p-1) \, .$$

Dann gilt:

a) Der Verlustterm ist eine stetige Abbildung

$$Q_- : \mathbb{H}_p^{s, \langle \gamma \rangle} \times \mathbb{H}_p^{s, \langle \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{H}_p^{s, \langle \gamma - \lambda \rangle},$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q_-(f, g) | \mathbb{H}_p^{s, \langle \gamma - \lambda \rangle} \| \leq 2^{\lambda/2} \mathcal{C}_{s,p} C_b C_{p,\lambda,\gamma} \|f | \mathbb{H}_p^{s, \langle \gamma \rangle} \| \|g | \mathbb{H}_p^{s, \langle \gamma \rangle} \|.$$

b) Der Gewinnterm und der Kollisionsoperator sind stetige Abbildungen

$$Q_+, Q : \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \times \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle},$$

mit den Normabschätzungen

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle} \| &\leq 2^{\lambda/2} \mathcal{C}_{s,p} C_b C_{p,\lambda,\gamma} \|f | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \| \|g | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \| \\ \|Q(f, g) | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle} \| &\leq 2^{\lambda/2+1} \mathcal{C}_{s,p} C_b C_{p,\lambda,\gamma} \|f | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \| \|g | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \|. \end{aligned}$$

Dabei ist $C_{p,\lambda,\gamma}$ durch (3.15) und $\mathcal{C}_{s,p}$ durch (3.27) gegeben.

3.4.2 Der adjungierte Gewinnterm und Glättungseigenschaften

Die Untersuchung des Gewinnterms für Funktionen aus Besselpotentialräumen in der Arbeit DUDUCHAVA/RJASANOW [23] ergab, dass dieser Operator seine Argumente glättet und dass hierfür nur vergleichsweise moderate Glattheitsforderungen an den Winkelanteil des Kollisionskerns gestellt werden müssen.

Die Strategie zum Nachweis dieser Eigenschaft von Q_+ kann man folgendermaßen formulieren:

- Bestimme den $\mathbb{L}_2$ -adjungierten Gewinnterm $Q_+^*(f, g)$.
- Interpretiere $Q_+^*(f, g)$ für fixiertes f als linearen Pseudodifferentialoperator $Q_+^*(f)$, angewandt auf g , und untersuche dessen Abbildungseigenschaften.
- Schließe von den Abbildungseigenschaften des adjungierten Gewinnterms $Q_+^*(f, g)$ auf jene von $Q_+(f, g)$.

Zu einer Funktion $a(v, \xi)$, *Symbol* genannt, definiert man den zugehörigen Pseudodifferentialoperator durch

$$\mathcal{A}(v, D)[f](v) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} a(v, \xi) \mathcal{F}(g)(\xi) \exp(-i(\xi \cdot v)) d\xi.$$

Die klassische Theorie der Pseudodifferentialoperatoren lässt sich nicht anwenden, da im Zusammenhang mit der Boltzmann-Gleichung Symbole auftreten, die nicht in den üblichen Klassen der unendlich oft differenzierbaren Funktionen enthalten sind. Zum

Erfolg führt allerdings die Betrachtung von parameterabhängigen Symbolen $a(u, \xi)$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{ess\,sup}_{u \in \mathbb{R}^3} |a(u, \xi)| \leq C_a \langle \xi \rangle^r . \quad (3.28)$$

Als zugehörigen Pseudodifferentialoperator definiert man

$$\mathcal{A}(u, D)[f](v) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow v}^{-1} [a(u, \xi) \mathcal{F}[g](\xi)](u, v) . \quad (3.29)$$

Dieser Operator ist eine stetige Abbildung

$$\mathcal{A}(u, D) : \mathbb{H}_2^r \longrightarrow \mathbb{L}_2 ,$$

mit der Abschätzung

$$\operatorname{ess\,sup}_{u \in \mathbb{R}^3} \|\mathcal{A}(u, D)[f]\|_{\mathbb{L}_2} \leq C_a \|f\|_{\mathbb{H}_2^r} .$$

Man zeigt, dass der bezüglich des $\mathbb{L}_2$ -Skalarprodukts zu Q_+ adjungierte Operator darstellbar ist als

$$Q_+^*(f, g)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(v-u)} \mathcal{A}(u, D)[g](v) du , \quad (3.30)$$

wobei das Symbol $a(u, \xi)$ des Pseudodifferentialoperators $\mathcal{A}(u, D)$ folgendermaßen mit dem Kollisionskern zusammenhängt:

$$a(u, \xi) = \exp\left(\iota \frac{u \cdot \xi}{2}\right) |u|^\lambda \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \exp\left(\iota |u| \frac{e \cdot \xi}{2}\right) de . \quad (3.31)$$

Im Falle des VHS-Modells (1.40) erhält man sogar die folgende explizite Darstellung mit Hilfe der sinc-Funktion ($\operatorname{sinc}(y) = \sin(y)/y$):

$$a(u, \xi) = 4\pi C_\lambda \exp\left(\iota \frac{u \cdot \xi}{2}\right) |u|^\lambda \operatorname{sinc}\left(\frac{|u||\xi|}{2}\right) . \quad (3.32)$$

Unter Verwendung der Abschätzung für den Operator $\mathcal{A}(u, D)$ zeigt man:

Satz 3.4.6. ([23], Theorem 7, 1.)

Gilt für das Symbol (3.31) die Ungleichung

$$|a(u, \xi)| \leq C_a \frac{|u|^\lambda}{|u||\xi| + 1} , \quad (3.33)$$

so folgt: Für

$$-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \quad , \quad \gamma > \frac{3}{2} + \lambda \quad , \quad f \in \mathbb{L}_2^{(\nu)} ,$$

sind die linearen Operatoren

$$\begin{aligned} Q_+^*(f) &: \mathbb{H}_2^{-1} \longrightarrow \mathbb{L}_2^{(-\gamma)} \\ Q_+(f) &: \mathbb{L}_2^{(\gamma)} \longrightarrow \mathbb{H}_2^1 \end{aligned}$$

stetig.

Ferner kann nachgewiesen werden: Erfüllt der Winkelanteil des Kollisionskerns die moderate Glattheitsforderung

$$b_\lambda(\mu) \in \mathbb{H}_1^m([-1, 1]), \quad m > 1, \quad (3.34)$$

so genügt das Symbol (3.31) der Bedingung (3.33). Das zum VHS-Modell gehörende Symbol (3.32) erfüllt (3.33) ebenfalls.

Für den bilinearen Gewinnterm lässt sich anschließend die folgende Glättungseigenschaft zeigen:

Satz 3.4.7. ([23], Theorem 10, 1.)

Die Voraussetzung (3.33) sei erfüllt. Für

$$-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \quad , \quad \gamma > \frac{3}{2} + \lambda \quad , \quad s' \geq 0 \quad , \quad -s' \leq s \leq s' \quad ,$$

gilt: Die Operatoren

$$\begin{aligned} Q_+^* &: \mathbb{H}_2^{s', \langle \gamma \rangle} \times \mathbb{H}_2^{s-1} \longrightarrow \mathbb{H}_2^{s, \langle -\gamma \rangle} \\ Q_+ &: \mathbb{H}_2^{s', \langle \gamma \rangle} \times \mathbb{H}_2^{s, \langle \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{H}_2^{s+1} \end{aligned}$$

sind stetig.

Wendet man dieses Ergebnis für $\nu \geq 0$ auf die Funktion $f_{\langle \nu \rangle}$ an, so erhält man aus der Definition der Norm in $\mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle}$ (siehe (2.17)) sofort:

Korollar 3.4.8. Die Voraussetzung (3.34) sei erfüllt. Für

$$-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \quad , \quad \gamma > \frac{3}{2} + \lambda \quad , \quad s' \geq 0 \quad , \quad -s' \leq s \leq s' \quad ,$$

und alle $\nu \geq 0$ gilt: Der Gewinnterm ist eine stetige Abbildung

$$Q_+ : \mathbb{H}_2^{s', \langle \gamma + \nu \rangle} \times \mathbb{H}_2^{s, \langle \gamma + \nu \rangle} \longrightarrow \mathbb{H}_2^{s+1, \langle \nu \rangle} .$$

Die Besselpotentialräume erweisen sich somit als geeignetes Umfeld für die Untersuchung der Regularitätseigenschaften des Gewinnterms.

Die Glättungseigenschaft kann u.a. dazu verwendet werden, die folgende bezüglich des Exponenten p heterogene $\mathbb{L}_p$ -Abbildungseigenschaft des Gewinnterms zu beweisen:

Satz 3.4.9. Die Voraussetzungen von Korollar 3.4.8 seien erfüllt, es gelte (3.5) und es sei $1 < p < \infty$. Unter den Bedingungen

$$1 < q < p \quad , \quad q < r \leq \frac{q}{1 - (\sigma q)/3} \quad , \quad \sigma = \frac{2(p - q)}{q(p - 2)} \quad , \quad \sigma \in [0, 1] \quad ,$$

gilt: Der Gewinnterm ist eine stetige Abbildung

$$Q_+ : \left(\mathbb{L}_1^{\langle \gamma + \nu \rangle} \cap \mathbb{L}_\infty^{\langle \gamma + \nu \rangle} \right) \times \mathbb{L}_q^{\langle \gamma + \nu \rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_r^{\langle \nu \rangle} \quad ,$$

und es existiert eine Konstante $C_{\lambda, p, q, \nu, r}$, so dass die Normabschätzung

$$\|Q_+(f, g)\|_{\mathbb{L}_r^{\langle \nu \rangle}} \leq C_{\lambda, p, q, \nu, r} \|f\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \gamma + \nu \rangle}}^{1/2} \|f\|_{\mathbb{L}_\infty^{\langle \gamma + \nu \rangle}}^{1/2} \|g\|_{\mathbb{L}_q^{\langle \gamma + \nu \rangle}}$$

gilt.

Beweis. Nach der Hölder-Ungleichung gilt die Abschätzung

$$\|f\|_{\mathbb{L}_2^{\langle\gamma\rangle}} \leq \|f\|_{\mathbb{L}_1^{\langle\gamma\rangle}}^{1/2} \|f\|_{\mathbb{L}_\infty^{\langle\gamma\rangle}}^{1/2},$$

woraus man durch Anwendung von Korollar (3.4.8) für $\nu = s' = 0$ auf die Stetigkeit der Abbildung

$$\langle\cdot\rangle^{-\gamma} Q_+ : \left(\mathbb{L}_1^{\langle\gamma\rangle} \cap \mathbb{L}_\infty^{\langle\gamma\rangle}\right) \times \mathbb{L}_2^{\langle\gamma\rangle} \longrightarrow \mathbb{H}_2^{1,\langle\gamma\rangle} \quad (3.35)$$

schließt.

Es sei $p \neq 2$: Da nach Voraussetzung in jedem Fall $\gamma \geq \lambda$ gilt, folgt aus der Anwendung von Satz 3.2.3 für den Fall $\nu = 0$ speziell, dass die Abbildung

$$\langle\cdot\rangle^{-\gamma} Q_+ : \mathbb{L}_1^{\langle\gamma\rangle} \times \mathbb{L}_p^{\langle\gamma\rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{\langle\gamma\rangle} \quad (3.36)$$

stetig ist. Nach Satz 2.1.6 a) mit $p_0 = p$ und $p_1 = 2$ folgt aus den beiden letzten Abbildungseigenschaften durch Interpolation, dass

$$\langle\cdot\rangle^{-\gamma} Q_+ : \left(\mathbb{L}_1^{\langle\gamma\rangle} \cap \mathbb{L}_\infty^{\langle\gamma\rangle}\right) \times \mathbb{L}_q^{\langle\gamma\rangle} \longrightarrow \mathbb{H}_q^{\sigma,\langle\gamma\rangle} \quad (3.37)$$

stetig ist, wenn gilt:

$$\sigma = \frac{2(p-q)}{q(p-2)}.$$

Nach Satz 2.1.6 b) ist für

$$\sigma - \frac{3}{q} \geq -\frac{3}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad r \leq \frac{q}{1 - (\sigma q)/3}$$

die Einbettung

$$\mathbb{H}_q^{\sigma,\langle\gamma\rangle} \hookrightarrow \mathbb{L}_r^{\langle\gamma\rangle} \quad (3.38)$$

stetig. Kombiniert man dies mit (3.37), so erhält man die Stetigkeit der Abbildung

$$\langle\cdot\rangle^{-\gamma} Q_+ : \left(\mathbb{L}_1^{\langle\gamma\rangle} \cap \mathbb{L}_\infty^{\langle\gamma\rangle}\right) \times \mathbb{L}_q^{\langle\gamma\rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_r^{\langle\gamma\rangle}$$

und damit die behauptete Stetigkeitseigenschaft für $p \neq 2$ und $\nu = 0$.

Für $p = 2$ und $\nu = 0$ erhält man die Behauptung sofort aus (3.35) und Anwendung von (3.38) mit $\sigma = 1$.

Wendet man die bewiesenen Aussagen für $\nu \geq 0$ auf die Funktion $f_{\langle\nu\rangle}$ an, so folgt die Behauptung des Satzes. Dabei enthält die Konstante $C_{\lambda,p,q,\nu,r}$ die Konstanten der jeweiligen Normabschätzungen zu (3.35), (3.36), der Interpolation (3.37) und der Einbettung (3.38). ■

3.5 Stetigkeit in metrischen und exponentiell gewichteten Räumen

Die in den Abschnitten 3.2 und 3.4.1 nachgewiesenen Stetigkeitsaussagen

$$Q : \mathbb{L}_1^{\langle \nu + \lambda \rangle} \times \mathbb{L}_1^{\langle \nu + \lambda \rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle}$$

und

$$Q : \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \times \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \longrightarrow \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle} .$$

besitzen die Struktur

$$Q : \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_1 \longrightarrow \mathbb{V}_2 ,$$

wobei im allgemeinen gilt:

$$\mathbb{V}_2 \not\subseteq \mathbb{V}_1 .$$

Eine Ausnahme liegt für $p = 1$ und $\lambda = 0$ (Maxwell-Moleküle) vor. In diesem Fall ist $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2$ und die Tatsache, dass der Kollisionsoperator lokal Lipschitz-stetig in $\mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle}$ ist, liefert sofort die Existenz einer Lösung $f(t, \cdot) \in \mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle}$ des Anfangswertproblems zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung auf einem Zeitintervall.

Es ist keine triviale Aufgabe, solche Funktionenräume $\mathbb{V}$ zu identifizieren, für die

$$Q : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \tag{3.39}$$

unabhängig von $\lambda \in [0, 1]$ eine stetige Abbildung darstellt. Dass der Schwartz-Raum ein Beispiel hierfür ist, zeigte Korollar 3.4.3.

Abschnitt 3.5.1 ist der Konstruktion metrischer Räume mit der Eigenschaft (3.39) gewidmet. Im Anschluss werden die Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators bezüglich der exponentiell gewichteten $\mathbb{L}_1$ -Norm für VHS-Modelle studiert. Dabei wird sich die bemerkenswerte Tatsache herausstellen, dass der Gewinnterm die Eigenschaft (3.39) besitzt.

3.5.1 Metrische Räume

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei

$$\mathbb{L}_p^{\langle \infty \rangle} = \bigcap_{\nu \geq 0} \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} , \tag{3.40}$$

und für $s \geq 0$, $1 < p < \infty$ definiert man

$$\mathbb{H}_p^{s, \langle \infty \rangle} = \bigcap_{\nu \geq 0} \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle} . \tag{3.41}$$

Diese Vektorräume werden jeweils mit den Fréchetmetriken

$$\varrho_p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_{\mathbb{L}_p^{\langle n \rangle}}}{1 + \|f\|_{\mathbb{L}_p^{\langle n \rangle}}} , \tag{3.42}$$

bzw.

$$\varrho_{p,s}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f|_{\mathbb{H}_p^{s,\langle n \rangle}}\|}{1 + \|f|_{\mathbb{H}_p^{s,\langle n \rangle}}\|} \quad (3.43)$$

versehen.

Seien f, g Funktionen aus $\mathbb{L}_p^{(\infty)}$ bzw. $\mathbb{H}_p^{s,(\infty)}$. Da die gewichteten $\mathbb{L}_p$ - und Besselpotentialräume Banach-Räume sind, folgt unmittelbar, dass $\mathbb{L}_p^{(\infty)}$ mit $\varrho_p(f - g)$ und $\mathbb{H}_p^{s,(\infty)}$ mit $\varrho_{p,s}(f - g)$ vollständig metrisiert ist.

Bezüglich der definierten Metriken bedeutet Stetigkeit, dass für alle Funktionenfolgen $(f_k)_{k=1}^{\infty}, (g_k)_{k=1}^{\infty}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(f - f_k) = 0 \quad , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(g - g_k) = 0$$

gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(Q(f, g) - Q(f_k, g_k)) = 0 ,$$

wobei ϱ für die jeweilige Metrik ϱ_p bzw. $\varrho_{p,s}$ steht.

Der Kollisionsoperator verhält sich auf diesen Räumen wie folgt:

Satz 3.5.1. *Der Raum $\mathbb{L}_p^{(\infty)}$ sei durch ϱ_p und der Raum $\mathbb{H}_p^{s,(\infty)}$ durch $\varrho_{p,s}$ metrisiert.*

a) *Es gelte (3.5). Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist der Kollisionsoperator eine stetige Abbildung*

$$Q : \mathbb{L}_p^{(\infty)} \times \mathbb{L}_1^{(\infty)} \longrightarrow \mathbb{L}_p^{(\infty)} .$$

b) *Es gelte die Grad-Bedingung (3.2). Für $s \geq 0$ und alle $1 < p < \infty$ ist der Kollisionsoperator eine stetige Abbildung.*

$$Q : \mathbb{H}_p^{s,(\infty)} \times \mathbb{H}_p^{s,(\infty)} \longrightarrow \mathbb{H}_p^{s,(\infty)} .$$

Beweis. Die Bilinearität des Kollisionsoperators liefert die Identität

$$\begin{aligned} Q(f, g) - Q(f_k, g_k) &= Q(f, g) - Q(f, g_k) + Q(f, g_k) - Q(f_k, g_k) \\ &= Q(f, g - g_k) + Q(f - f_k, g_k) . \end{aligned}$$

Nach Korollar 3.2.4 b) und Satz 3.4.5 b) gilt unter den jeweiligen Voraussetzungen $Q(f, g) \in \mathbb{L}_p^{(\infty)}$ bzw. $Q(f, g) \in \mathbb{H}_p^{s,(\infty)}$. Seien $(f_k), (g_k)$ Folgen mit

$$\varrho_p(f - f_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad , \quad \varrho_1(g - g_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 ,$$

bzw. für die Behauptung b):

$$\varrho_{p,s}(f - f_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad , \quad \varrho_{p,s}(g - g_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 .$$

Die Abschätzungen der genannten Sätze liefern mit den jeweiligen Konstanten für $p \in [1, \infty]$ und alle $\nu \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \|Q(f, g) - Q(f_k, g_k) | \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} \| \\ & \leq \|Q(f, g - g_k) | \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} \| + \|Q(f - f_k, g_k) | \mathbb{L}_p^{\langle \nu \rangle} \| \\ & \leq C_1 \left(\|f | \mathbb{L}_p^{\langle \nu + \lambda \rangle} \| \|g - g_k | \mathbb{L}_1^{\langle \nu + \lambda \rangle} \| + \|g_k | \mathbb{L}_1^{\langle \nu + \lambda \rangle} \| \|f - f_k | \mathbb{L}_p^{\langle \nu + \lambda \rangle} \| \right), \end{aligned}$$

und für $s \geq 0$, $p \in (1, \infty)$ und alle $\nu \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \|Q(f, g) - Q(f_k, g_k) | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle} \| \\ & \leq \|Q(f, g - g_k) | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle} \| + \|Q(f - f_k, g_k) | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu \rangle} \| \\ & \leq C_2 \left(\|f | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \| \|g - g_k | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \| + \|g_k | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \| \|f - f_k | \mathbb{H}_p^{s, \langle \nu + \gamma \rangle} \| \right). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $(g - g_k)_{k=1}^\infty$ in allen beteiligten Räumen eine Nullfolge und damit bezüglich einer jeden Norm in k gleichmäßig beschränkt. Aus

$$(f - f_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad , \quad (g - g_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

folgt dann, dass die rechten Seiten in den vorangegangenen Abschätzungen Nullfolgen sind. Damit gilt auch bezüglich einer jeden Norm

$$(Q(f, g) - Q(f_k, g_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

und nach der Definition der Metriken folgt die behauptete Stetigkeit. ■

Mit der Voraussetzung (3.8) gilt die Stetigkeitsaussage von Satz 3.5.1 a) für den symmetrischen Kollisionsoperator.

3.5.2 Normabschätzungen für $\mathbb{L}_1^\Theta$ -Funktionen

Zum Schluss des Kapitels sollen die Abbildungseigenschaften des Kollisionsoperators auf den Räumen

$$\mathbb{L}_1^\Theta = \{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \exp(\Theta |\cdot|^2) f \in \mathbb{L}_1\} \quad (3.44)$$

untersucht werden. Diese sind für $\Theta > 0$ mit der Norm

$$\|f | \mathbb{L}_1^\Theta\| = \|\exp(\Theta |\cdot|^2) f | \mathbb{L}_1\| = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(\Theta |v|^2) |f(v)| \, dv \quad (3.45)$$

versehen. Im Zusammenhang mit der Boltzmann-Gleichung wurden die $\mathbb{L}_1^\Theta$ -Eigenschaften der Lösungen des räumlich homogenen Anfangswertproblems von BOBYLEV studiert. Die von ihm in [9] gefundenen analytischen Lösungen für den Fall der Maxwell-Moleküle liegen in diesem Funktionenraum und eine entsprechende Theorie

wurde in [10] vorgestellt. Für das Hartkugelmodell wurde in [11] gezeigt, dass die Lösungen die folgende Eigenschaft besitzen:

$$\forall \Theta > 0 : \exists 0 < \Theta' < \Theta : f_0 \in \mathbb{L}_1^\Theta \Rightarrow f(t, \cdot) \in \mathbb{L}_1^{\Theta'} \quad (t > 0). \quad (3.46)$$

Zum Beweis dieses Resultats wurden Reihenentwicklungen verwendet, die ausschließlich für das Hartkugelmodell ($\lambda = 1$) anwendbar sind. Es musste daher offen bleiben, ob entsprechende Aussagen auch für $0 < \lambda < 1$ gelten. Normabschätzungen für den Kollisionsoperator können bei der Untersuchung helfen, sind aber immer von einem eigenen Interesse.

Für Maxwell-Moleküle, d.h. $\lambda = 0$ und

$$b_0(\mu) \equiv C_0,$$

ist der Kollisionsoperator für beliebige $\Theta > 0$ eine stetige Abbildung

$$Q : \mathbb{L}_1^\Theta \times \mathbb{L}_1^\Theta \longrightarrow \mathbb{L}_1^\Theta.$$

Für den Verlustterm ist dies wegen

$$|Q_-(f, g)(v)| = |f(v) L[g](v)| \leq 4\pi C_0 \|g\|_{\mathbb{L}_1} |f(v)|$$

sofort klar. Für den Gewinnterm erhält man aus der schwachen Formulierung (1.49) und der Tatsache, dass wegen der Energieerhaltung die Ungleichung

$$|v'|^2 \leq |v|^2 + |w|^2$$

gilt, die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g)(v)\|_{\mathbb{L}_1^\Theta} &\leq C_0 \int_{\mathbb{R}^3} \exp(\Theta |v|^2) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} |f(v')| |g(w')| \, de \, dw \, dv \\ &= C_0 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f(v)| |g(w)| \int_{S^2} \exp(\Theta |v'|^2) \, de \, dw \, dv \\ &\leq 4\pi C_0 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f(v)| |g(w)| \exp(\Theta(|v|^2 + |w|^2)) \, dw \, dv \\ &= 4\pi C_0 \|f\|_{\mathbb{L}_1^\Theta} \|g\|_{\mathbb{L}_1^\Theta}. \end{aligned}$$

Interessanterweise gilt auch für $0 < \lambda \leq 1$, dass der Gewinnterm eine Abbildung von $\mathbb{L}_1^\Theta$ in sich selbst ist, wie weiter unten gezeigt werden wird.

Die Betrachtungen beschränken sich auf den numerisch relevanten Fall der VHS-Modelle für harte Interaktionspotentiale, der Kollisionskern lautet also:

$$B(v - w, e) = C_\lambda |v - w|^\lambda, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3.47)$$

Der Verlustterm

Der Verlustterm des Kollisionsoperators verschlechtert die Integrierbarkeitseigenschaften, denn es gilt:

Satz 3.5.2. *Der Kollisionskern sei von der Gestalt (3.47). Dann ist für alle $0 < \epsilon < \Theta$ der Verlustterm des Kollisionsoperators eine stetige Abbildung*

$$Q_- : \mathbb{L}_1^\Theta \times \mathbb{L}_1^{\langle \lambda \rangle} \longrightarrow \mathbb{L}_1^{\Theta-\epsilon},$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q_-(f, g) | \mathbb{L}_1^{\Theta-\epsilon}\| \leq 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{\langle \lambda \rangle, \epsilon} \|g | \mathbb{L}_1^{\langle \lambda \rangle}\| \|f | \mathbb{L}_1^\Theta\|.$$

Die Konstante $C_{\langle \lambda \rangle, \epsilon}$ ist gemäß (2.24) definiert.

Beweis. Analog zu den $\mathbb{L}_p \times \mathbb{L}_1$ -Abschätzungen erhält man unter Verwendung der Peetre-Ungleichung 2.23:

$$\begin{aligned} \|Q_-(f, g) | \mathbb{L}_1^{\Theta-\epsilon}\| &\leq 4\pi C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \exp((\Theta - \epsilon) |v|^2) |f(v)| \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda |g(w)| dw dv \\ &\leq 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \exp((\Theta - \epsilon) |v|^2) \langle v \rangle^\lambda |f(v)| \int_{\mathbb{R}^3} \langle w \rangle^\lambda |g(w)| dw dv \\ &= 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda \|g | \mathbb{L}_1^{\langle \lambda \rangle}\| \int_{\mathbb{R}^3} \exp((\Theta - \epsilon) |v|^2) \langle v \rangle^\lambda |f(v)| dv. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2.10 b und der Definition der Gewichtsfunktion gilt:

$$\exp(-\epsilon |v|^2) \langle v \rangle^\lambda \leq C_{\langle \lambda \rangle, \epsilon},$$

und es folgt, wie behauptet:

$$\begin{aligned} \|Q_-(f, g) | \mathbb{L}_1^{\Theta-\epsilon}\| &\leq 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{\langle \lambda \rangle, \epsilon} \|g | \mathbb{L}_1^{\langle \lambda \rangle}\| \int_{\mathbb{R}^3} \exp(\Theta |v|^2) |f(v)| dv \\ &= 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{\langle \lambda \rangle, \epsilon} \|g | \mathbb{L}_1^{\langle \lambda \rangle}\| \|f | \mathbb{L}_1^\Theta\|. \end{aligned}$$

■

Der Gewinnterm

Würde man im Falle $\lambda > 0$ für den Gewinnterm vorgehen wie bei den eingangs gezeigten Abschätzungen für die Maxwell-Moleküle, so würde man die Stetigkeit

$$Q_+ : \mathbb{L}_1^{\Theta+\epsilon} \times \mathbb{L}_1^{\Theta+\epsilon} \longrightarrow \mathbb{L}_1^\Theta$$

mit

$$\|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_1^\Theta\| \leq 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{\langle \lambda \rangle, \epsilon}^2 \|f | \mathbb{L}_1^{\Theta+\epsilon}\| \|g | \mathbb{L}_1^{\Theta+\epsilon}\|$$

für beliebige $\epsilon > 0$ erhalten. Dieses Ergebnis lässt sich verbessern, wenn man auf die punktweise Abschätzung

$$|v'|^2 \leq |v|^2 + |w|^2$$

verzichtet und stattdessen Lemma 2.2.11 verwendet:

Satz 3.5.3. *Der Kollisionskern sei von der Gestalt (3.47). Dann ist für alle $\Theta > 0$ der Gewinnterm eine stetige Abbildung*

$$Q_+ : \mathbb{L}_1^\Theta \times \mathbb{L}_1^\Theta \longrightarrow \mathbb{L}_1^\Theta,$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_1^\Theta\| \leq 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{\Theta, 1-\lambda/2} \|f | \mathbb{L}_1^\Theta\| \|g | \mathbb{L}_1^\Theta\|.$$

Die Konstante $C_{\Theta, 1-\lambda/2}$ ist dabei gemäß (2.25) definiert.

Beweis. Verwendung der schwachen Formulierung des Gewinnterms und Anwendung von Lemma 2.2.11 liefert

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_1^\Theta\| &\leq C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v-w|^\lambda |f(v)| |g(w)| \int_{S^2} \exp(\Theta |v'|^2) de dw dv \\ &\leq 4\pi C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f(v)| |g(w)| |v-w|^\lambda \frac{\exp(\Theta(|v|^2 + |w|^2)) - 1}{\Theta(|v|^2 + |w|^2)} dw dv. \end{aligned}$$

Aus der elementaren Ungleichung

$$|v-w|^2 \leq 2(|v|^2 + |w|^2) \quad \Rightarrow \quad |v-w|^\lambda \leq 2^{\lambda/2} (|v|^2 + |w|^2)^{\lambda/2}$$

folgt

$$|v-w|^\lambda \frac{\exp(\Theta(|v|^2 + |w|^2)) - 1}{\Theta(|v|^2 + |w|^2)} \leq 2^{\lambda/2} \frac{\exp(\Theta(|v|^2 + |w|^2)) - 1}{\Theta(|v|^2 + |w|^2)^{1-\lambda/2}}.$$

Für die rechte Seite dieser Ungleichung verwendet man Lemma 2.2.10 c), wobei man $y = |v|^2 + |w|^2$ und $\gamma = 1 - (\lambda/2)$ wählt. Es folgt

$$\begin{aligned} \|Q_+(f, g) | \mathbb{L}_1^\Theta\| &\leq 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{\Theta, 1-\lambda/2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f(v)| |g(w)| \exp(\Theta(|v|^2 + |w|^2)) dv dw \\ &= 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{\Theta, 1-\lambda/2} \|f | \mathbb{L}_1^\Theta\| \|g | \mathbb{L}_1^\Theta\| \end{aligned}$$

und damit die behauptete Stetigkeit. ■

Aus (2.27) mit $\epsilon = \Theta$ und der stetigen Einbettung

$$\mathbb{L}_1^\Theta \subsetneq \mathbb{L}_1^{\Theta-\epsilon}$$

erhält man sofort:

Korollar 3.5.4. *Der Kollisionskern sei von der Form (3.47). Dann ist der Kollisionsoperator für alle $0 < \epsilon \leq \Theta$ eine stetige Abbildung*

$$Q : \mathbb{L}_1^\Theta \times \mathbb{L}_1^\Theta \longrightarrow \mathbb{L}_1^{\Theta-\epsilon},$$

mit der Normabschätzung

$$\|Q(f, g) | \mathbb{L}_1^{\Theta-\epsilon}\| \leq 2^{2+\lambda/2} \pi C_\lambda (C_{\Theta, 1-\lambda/2} + C_{\langle \lambda \rangle, \epsilon} C_{\langle \lambda \rangle, \Theta}) \|f | \mathbb{L}_1^\Theta\| \|g | \mathbb{L}_1^\Theta\|.$$

Die Konstante $C_{\Theta, 1-\lambda/2}$ ist gemäß (2.25), die Konstanten $C_{\langle \lambda \rangle, \epsilon}$ und $C_{\langle \lambda \rangle, \Theta}$ gemäß (2.24) definiert.

Kapitel 4

Momente und Stabilität in $\mathbb{L}_1$

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit *a priori*-Abschätzungen für die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\partial_t f(t, v) = Q(f, f)(t, v) \quad , \quad f(0, v) = f_0(v) \quad , \quad (4.1)$$

im Falle der VHS-Modelle für harte Interaktionspotentiale.

Zunächst wird die zeitliche Entwicklung der $\mathbb{L}_1$ -Momente ν -ter Ordnung, definiert als

$$Y_\nu(t) = \|f(t, \cdot) \|\mathbb{L}_1^{(\nu)}\| \quad , \quad \nu \geq 0 \quad , \quad (4.2)$$

untersucht.

Aus Proposition 1.5.1 ist bereits bekannt, dass

$$Y_0(t) = \rho(t) \equiv \rho_0 \quad , \quad Y_2(t) = \rho(t) + 2E(t) \equiv \rho_0 + 2E(0) \quad (4.3)$$

gilt und damit alle Y_ν mit $\nu \leq 2$ in t gleichmäßig beschränkt sind.

Nach Korollar 1.5.2 kann man sich bei der Untersuchung des Anfangswertproblems (4.1) auf solche Anfangsbedingungen beschränken, für die die mittlere Geschwindigkeit gleich Null ist. Die Bedeutung der $\mathbb{L}_1$ -Momente lässt sich für solche Anfangsbedingungen und die zugehörigen Lösungen leicht veranschaulichen, denn an der zeitlichen Entwicklung der Momente mit $\nu > 2$ kann man ablesen, wie $|v|$ verteilt ist: Je höher die Ordnung der Momente, die zum Zeitpunkt t endlich sind, desto mehr „Masse“ konzentriert sich in einer Umgebung um 0. Für die Maxwellverteilung sind die $\mathbb{L}_1$ -Momente beliebiger Ordnung endlich, d.h. im Hinblick auf die Integrierbarkeitseigenschaften der Lösung gibt die zeitliche Entwicklung der $\mathbb{L}_1$ -Momente erste Hinweise auf die Geschwindigkeit, mit der sich die Lösung $f(t, \cdot)$ im $\mathbb{L}_1$ -Sinne der Maxwell-Verteilung annähert.

Die zeitliche Entwicklung der $\mathbb{L}_1$ -Momente wurde bereits von ARKERYD [3] untersucht (siehe Satz 1.5.4 für den Fall der abgeschnittenen harten Interaktionspotentiale). In [5] wurden die Momente der Lösung für den Fall der weichen Interaktionspotentiale mit $-1 \leq \lambda < 0$ betrachtet. Es konnte jeweils gezeigt werden, dass alle Momente, die für die Anfangsbedingung f_0 existieren, auch auf einem beschränkten Zeitintervall $[0, \bar{t}]$ gleichmäßig beschränkt sind.

Eine entscheidende Verbesserung dieser Resultate für harte Interaktionspotentiale gelang ELMROTH [25], der folgendes nachweisen konnte: Gilt $Y_\nu(0) = \|f_0 | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| < \infty$ für ein $\nu > 2$, so existiert für jedes $\nu' < \nu$ eine Konstante C_{ν', f_0} mit

$$\forall t > 0 : Y_{\nu'}(t) \leq C_{\nu', f_0}, \quad (4.4)$$

d.h. die Momente sind in t gleichmäßig beschränkt.

GUSTAFSSON [29],[30] untersuchte die $\mathbb{L}_p$ -Momente für harte Interaktionspotentiale mit dem Winkelanteil $b_{\lambda, \epsilon}$ (siehe (3.1) und griff dabei sowohl auf Elmroths als auch auf Arkeryds Arbeiten zurück. U.a. zeigte er die Relaxation der Lösung zur Maxwell-Verteilung in $\mathbb{L}_p$.

Eine weitere signifikante Verbesserung der vorangegangenen Ergebnisse wurde von DESVILLETES [24] erreicht: Ihm gelang sogar der Nachweis, dass die Bedingung

$$f_0 \in \mathbb{L}_1^{(2+\epsilon)}$$

für beliebiges $\epsilon > 0$ hinreichend für die gleichmäßige Beschränktheit aller Momente für $t \geq \bar{t} > 0$ ist. Davon ausgenommen sind alle Potentiale mit $\lambda \leq 0$. Im Fall $\lambda < 0$ konnte Desvilletes, der das VHS-Modell betrachtete, zeigen: Es existieren Konstanten C_0 und C_1 mit

$$Y_\nu(t) \leq C_0 + C_1 t.$$

Für Maxwell-Moleküle erbrachte WENNBURG [55] den Nachweis, dass genau die Momente in t beschränkt sind, die für $t = 0$ endlich sind.

Sogar Desvilletes' Resultat konnte noch übertroffen werden: WENNBURG [56] bewies für die harten Interaktionspotentiale mit Winkelanteil $b_{\lambda, \epsilon}$, dass bereits die Bedingungen $f_0 \in \mathbb{L}_1^{(2)}$ und $f_0 \log^+ f_0 \in \mathbb{L}_1$ die gleichmäßige Beschränktheit beliebiger Momente für $t \geq \bar{t} > 0$ zur Folge haben. Die Darstellung hier wird dem Beweis Wennbergs folgen.

BOBYLEV [11] schließlich konnte Wennbergs Methode so modifizieren, dass die Aussage auch für allgemeinere Kollisionskerne der Form

$$B(v-w, e) = |v-w| h(|v-w|, \mu) \quad , \quad \mu = \frac{(v-w) \cdot e}{|v-w|},$$

gilt, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$2\pi \int_{-1}^1 h(|v-w|, \mu)(1-\mu^2) d\mu < \infty.$$

Als Anwendung wird im zweiten Abschnitt die Stabilität der Lösung von (4.1) bezüglich der Anfangsbedingung nachgewiesen. Unter anderem zu diesem Zweck wurden die $\mathbb{L}_1$ -Momente auch in der Arbeit [41] untersucht.

Der Plan dieses Kapitels lautet im Detail:

- In Abschnitt 4.1 wird eine Aussage zur schwachen Stabilität bezüglich der Anfangsbedingung dazu benutzt, die sofortige Erzeugung aller $\mathbb{L}_1$ -Momente der Lösung zu beweisen.

- Diese Aussage wird dann im Abschnitt 4.2 verwendet, um die Stabilitätsaussage zu verschärfen.

Die hier gezeigten Resultate wurden jeweils ihrem Wesen nach bereits von WENNBORG [56] und GUSTAFSSON [29] bewiesen. Das Hauptanliegen hier ist es, die explizite Form der Konstanten in den Abschätzungen aus Abschnitt 2.2.2 in die Ergebnisse einfließen zu lassen und somit der Anwendung für numerische Zwecke zugänglich zu machen. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel wieder das VHS-Modell für harte Interaktionspotentiale betrachtet.

4.1 Zeitliche Entwicklung der $\mathbb{L}_1$ -Momente

Zur Vorbereitung der Untersuchung der zeitlichen Entwicklung der Momente benötigt man das folgende Resultat (siehe auch [29]):

Lemma 4.1.1. *Es seien $f_0, g_0 \in \mathbb{L}_1^{(\infty)}$ (siehe Abschnitt 3.5.1) und $f(t, \cdot), g(t, \cdot)$ die Lösungen der jeweiligen Anfangswertprobleme zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung (4.1). Es gilt:*

Für alle $\nu \geq 0$ ist $\|f(t, \cdot) - g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}}$ fast überall nach t differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt} \|f(t, \cdot) - g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu (\operatorname{sgn}(f(t, v) - g(t, v)) (\partial_t f(t, v) - \partial_t g(t, v))) dv.$$

Dabei ist

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & , y \geq 0 \\ -1 & , y < 0 \end{cases}$$

das Signum von y .

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle $t \geq 0$ die Darstellung

$$f(t, v) = f_0(v) + \int_0^t Q(f, f)(\tau) d\tau \quad , \quad g(t, v) = g_0(v) + \int_0^t Q(g, g)(\tau) d\tau ,$$

die im Sinne der Bochner-Integrale zu verstehen ist (siehe [40]).

Es sei $T > 0$ beliebig und $t, t' \in [0, T]$. Die Anwendung von Korollar 3.2.4 a) liefert

wegen $C_{\lambda,1,(1)} = 2^{\lambda/2}C_b$ und $C_b = 4\pi C_\lambda$:

$$\begin{aligned}
& \left\| f(t, \cdot) - g(t, \cdot) \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} - \left\| f(t', \cdot) - g(t', \cdot) \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} \\
& \leq \left\| f(t, \cdot) - f(t', \cdot) \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} + \left\| g(t, \cdot) - g(t', \cdot) \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} \\
& = \left\| \int_{\min(t,t')}^{\max(t,t')} Q(f, f)(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} + \left\| \int_{\min(t,t')}^{\max(t,t')} Q(g, g)(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} \\
& \leq \int_{\min(t,t')}^{\max(t,t')} \left\| Q(f, f)(\tau, \cdot) \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} d\tau + \int_{\min(t,t')}^{\max(t,t')} \left\| Q(g, g)(\tau, \cdot) \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} d\tau \\
& \leq 2^{\lambda/2+3}\pi C_\lambda |t - t'| \left(\left\| f \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)}}^2 + \left\| g \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)}}^2 \right).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung für f_0 und g_0 ist wegen (4.4) der letzte Faktor gleichmäßig beschränkt für alle $t \geq 0$. Daraus folgt, dass $\left\| f(t, \cdot) - g(t, \cdot) \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}}$ bezüglich t absolut stetig auf $\mathbb{R}_+$ und von beschränkter Variation auf jedem Intervall $[0, T]$ ist. Nach Bemerkung 2.1.8 folgt die Differenzierbarkeit für fast alle $t \geq 0$.

Nun zum zweiten Teil der Behauptung: Der Dualraum zu $\mathbb{L}_1^{(\nu)}$ ist $\mathbb{L}_\infty^{(-\nu)}$ und offensichtlich gilt für $F \in \mathbb{L}_1^{(\nu)}$:

$$\langle \cdot \rangle^\nu \operatorname{sgn}(F) \in \mathbb{L}_\infty^{(-\nu)}.$$

Sei $h \in \mathbb{L}_1^{(\nu)}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left\| F + h \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu (F(v) + h(v)) \operatorname{sgn}(F(v) + h(v)) dv \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu (F(v) + h(v)) \operatorname{sgn}(F(v)) dv \\
&= \left\| F \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} + \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu h(v) \operatorname{sgn}(F(v)) dv.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Definition des Subdifferentials und Satz 2.1.7. ■

Im Spezialfall $g_0(v) \equiv 0$ folgt aus dem Lemma für nichtnegative $f(t, \cdot)$

$$\frac{d}{dt} \left\| f(t, \cdot) \right\|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu \partial_t f(t, v) dv. \quad (4.5)$$

Der inhaltliche und beweistechnische Kern des folgenden Satzes geht auf ARKERYD [5] im Zusammenhang mit der Konstruktion der schwachen Lösungen des Anfangswertproblems (4.1) zurück. Dieselben Methoden lassen sich für die schwache Stabilität bezüglich der Anfangsbedingung anwenden:

Satz 4.1.2. (LU/WENNBERG [34])

Es sei $(B_n(v-w, e))_{n=1}^\infty$ eine Folge von abgeschnittenen Kollisionskernen, die punktweise gegen den Kollisionskern $B(v-w, e)$ des Kollisionsoperators Q konvergieren und für die gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : B_n(v-w, e) \leq B(v-w, e).$$

Sei ferner eine Folge $(f_{0,n})_{n=1}^\infty \subset \mathbb{L}_1$ nichtnegativer Funktionen gegeben mit:

i) $f_{0,n}$ ist Anfangsbedingung für das Anfangswertproblem

$$\partial_t f(t, v) = Q_n(f, f)(t, v) \quad , \quad f(0, v) = f_{0,n}(v),$$

wobei Q_n den Kollisionsoperator mit Kollisionskern B_n bezeichnet.

ii) $f_n(t, v)$ bezeichne die jeweilige nichtnegative Lösung mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} f_n(t, v) (1 + |v|^2 + |\log(f_n(t, v))|) dv < \infty$$

Dann existiert eine Teilfolge f_{n_j} , so dass für alle $t \geq 0$

$$f_{n_j}(t, v) \rightharpoonup f(t, v) \quad (\text{schwache } \mathbb{L}_1\text{-Konvergenz}),$$

wobei $f(t, v)$ eine (schwache) Lösung des Anfangswertproblems (4.1) ist.

Da der Satz hier für den Fall der VHS-Modelle für harte Interaktionspotentiale verwendet wird, setzt man

$$B_n(v-w, e) = B(v-w, e) = C_\lambda |v-w|^\lambda.$$

Für diese Interaktionsmodelle weiß man ferner, dass Dichte und Energie der jeweiligen Lösung zeitlich konstant sind.

Der Beweisidee des Hauptresultats dieses Abschnitts liegt die folgende Tatsache zugrunde (siehe [53]): Seien zwei Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1(t) &= F_1(t, y_1) \quad , \quad y_1(0) = y_1^0 \\ \frac{d}{dt} y_2(t) &= F_2(t, y_1) \quad , \quad y_2(0) = y_2^0 \end{aligned}$$

gegeben. Gilt

$$y_1^0 \leq y_2^0 \quad \text{und} \quad \forall t, y : F_1(t, y) \leq F_2(t, y),$$

so folgt für die zugehörigen Lösungen

$$\forall t \geq 0 : y_1(t) \leq y_2(t).$$

Unter Verwendung der Vorbereitungen aus Abschnitt 2.2 kann man damit die folgende Aussage über die zeitliche Entwicklung der $\mathbb{L}_1$ -Momente beweisen. Die Beweisstrategie orientiert sich an der Vorgehensweise in [56] und [34].

Satz 4.1.3. *Es sei $f_0 \in \mathbb{L}_1^{(2)}$ nichtnegativ mit $|H[f_0]| < \infty$ und $f(t, \cdot)$ die zugehörige Lösung des Anfangswertproblems (4.1), wobei der Kollisionskern des Operators Q die folgende Gestalt besitzt:*

$$B(v - w, e) = C_\lambda |v - w|^\lambda, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Dann gilt für alle $t \geq 0$ und alle $\nu > 2$ die Abschätzung

$$\|f(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| \leq \left(\frac{A_{\lambda, \nu, (1)}(f_0)}{A_{\lambda, \nu, (2)}(f_0) \left(1 - \exp \left(- \frac{\lambda A_{\lambda, \nu, (1)}(f_0)}{\nu - 2} t \right) \right)} \right)^{(\nu-2)/\lambda}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} A_{\lambda, \nu, (1)}(f_0) &= 4\pi C_\lambda (2^{\lambda/2} C_{1, \nu} + C_{2, \nu}) \|f_0 | \mathbb{L}_1^{(2)} \| \\ A_{\lambda, \nu, (2)}(f_0) &= 4\pi C_\lambda C_{2, \nu} \|f_0 | \mathbb{L}_1 \| \|f_0 | \mathbb{L}_1^{(2)} \|^{-\lambda/(\nu-2)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

wobei $C_{1, \nu}$ und $C_{2, \nu}$ durch (2.21) gegeben sind.

Beweis. Zu f_0 definiert man eine punktweise monoton wachsende Folge von Anfangsbedingungen durch

$$f_{0,n}(v) = \exp \left(\frac{-|v|^2}{n} \right) f_0(v), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

Wegen $f_0 \in \mathbb{L}_1^{(2)}$ gilt offensichtlich $f_{0,n} \in \mathbb{L}_1^{(\infty)}$ und aus Lemma 4.1.1 folgt die Differenzierbarkeit der $\mathbb{L}_1^{(\nu)}$ -Norm der zugehörigen nichtnegativen Lösungen $f_n(t, \cdot)$ des Anfangswertproblems (4.1).

Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_{0,n} | \mathbb{L}_1 \| \leq \|f_0 | \mathbb{L}_1 \|, \quad \|f_{0,n} | \mathbb{L}_1^{(2)} \| \leq \|f_0 | \mathbb{L}_1^{(2)} \|, \quad (4.8)$$

sowie

$$\|f_{0,n} - f_0 | \mathbb{L}_1^{(2)} \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.9)$$

Da $|H[f_0]|$ endlich ist und die Funktion $y(1 + |\log(y)|)$ für $y \geq 0$ monoton wächst, folgt aus der Monotonie der Folge, den Abschätzungen (4.8) und dem H -Theorem, dass auch die Bedingung ii) in Satz 4.1.2 erfüllt ist.

Mit der Bezeichnung

$$Y_n(t) = \|f_n(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| = \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu f_n(t, v) dv,$$

der Beziehung (4.5) und der schwachen Formulierung des Kollisionsoperators (1.52) erhält man

$$\frac{d}{dt} Y_n(t) = \frac{1}{2} C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda f_n(v) f_n(w) \int_{S^2} (\langle v' \rangle^\nu + \langle w' \rangle^\nu - \langle v \rangle^\nu - \langle w \rangle^\nu) de dw dv. \quad (4.10)$$

Zur Abkürzung wird die t -Abhängigkeit der Funktion f_n in den Integralen weggelassen. Auf das Integral bezüglich der Variablen e wendet man die Povzner-Ungleichung aus Lemma 2.2.6 an und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_n(t) \leq & 2\pi C_\lambda \left(C_{1,\nu} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v-w|^\lambda (\langle v \rangle^{\nu-1} \langle w \rangle^{\nu-1} + \langle v \rangle^{\nu-1} \langle w \rangle^{\nu-1}) f_n(v) f_n(w) dw dv \right. \\ & \left. - C_{2,\nu} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v-w|^\lambda (\langle v \rangle^\nu + \langle w \rangle^\nu) f_n(v) f_n(w) dw dv \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Jedes der Integrale auf der rechten Seite ist invariant unter Vertauschungen $v \leftrightarrow w$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_n(t) \leq & 4\pi C_\lambda \left(C_{1,\nu} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v-w|^\lambda \langle v \rangle^{\nu-1} \langle w \rangle^{\nu-1} f_n(v) f_n(w) dw dv \right. \\ & \left. - C_{2,\nu} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v-w|^\lambda \langle v \rangle^\nu f_n(v) f_n(w) dw dv \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Um das erste Integral nach oben abzuschätzen, verwendet man die Peetre-Ungleichung (2.23):

$$|v-w|^\lambda \langle v \rangle^{\nu-1} \langle w \rangle^{\nu-1} \leq 2^{\lambda/2} \langle v \rangle^{\nu-1+\lambda} \langle w \rangle^{1+\lambda} \leq 2^{\lambda/2} \langle v \rangle^\nu \langle w \rangle^2.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v-w|^\lambda \langle v \rangle^{\nu-1} \langle w \rangle^{\nu-1} f_n(v) f_n(w) dw dv \leq 2^{\lambda/2} \|f_0\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}} \|Y_n(t)\|, \quad (4.13)$$

denn wegen der Erhaltung von Dichte und Energie in Verbindung mit (4.8) gilt

$$\|f_n(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}} \equiv \|f_{0,n}\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}} \leq \|f_0\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}}. \quad (4.14)$$

Auf das zweite Integral in (4.12) wird die Abschätzung aus Lemma 2.2.9 unter Weg-

lassen des Betrages verwendet. Zusammen mit (4.14) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v-w|^\lambda \langle v \rangle^\nu f_n(v) f_n(w) dw dv \\
& \geq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (\langle v \rangle^{\nu+\lambda} - \langle w \rangle^\lambda \langle v \rangle^\nu) f_n(v) f_n(w) dw dv \\
& \geq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{\nu+\lambda} f_n(v) f_n(w) dw dv - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \langle w \rangle^2 \langle v \rangle^\nu f_n(v) f_n(w) dw dv \\
& = \|f_{0,n}\|_{\mathbb{L}_1} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{\nu+\lambda} f_n(v) dv - \|f_{0,n}\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}} \|Y_n(t)\| \\
& \geq \|f_{0,n}\|_{\mathbb{L}_1} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{\nu+\lambda} f_n(v) dv - \|f_0\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}} \|Y_n(t)\|. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Anwendung der Hölder-Ungleichung (Satz 2.1.1) für

$$\begin{aligned}
f_1(v) &= \langle v \rangle^{(\nu-2)(\nu+\lambda)/(\nu-2+\lambda)} (f_n(v))^{\nu-2+\lambda} \\
f_2(v) &= \langle v \rangle^{(2\lambda)/(\nu-2+\lambda)} (f_n(v))^{\lambda/(\nu-2+\lambda)},
\end{aligned}$$

mit den Exponenten

$$p = \frac{\nu-2+\lambda}{\nu-2} \Rightarrow p' = \frac{p}{p-1} = \frac{\nu-2+\lambda}{\lambda}$$

liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu f_n(v) dv \right)^{1+\lambda/(\nu-2)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^2 f_n(v) dv \right)^{\lambda/(\nu-2)} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{\nu+\lambda} f_n(v) dv \\
&\leq \|f_{0,n}\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}}^{\lambda/(\nu-2)} \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{\nu+\lambda} f_n(v) dv.
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (4.15) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v-w|^\lambda \langle v \rangle^\nu f_n(v) f_n(w) dw dv \\
& \leq -\|f_{0,n}\|_{\mathbb{L}_1} \left(\|f_{0,n}\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}}^{-\lambda/(\nu-2)} (Y_n(t))^{1+\lambda/(\nu-2)} + \|f_0\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}} \|Y_n(t)\| \right),
\end{aligned}$$

und dies ergibt zusammen mit (4.13) und (4.12)

$$\frac{d}{dt} Y_n(t) \leq A_1 Y_n(t) - A_{2,n} (Y_n(t))^{1+\lambda/(\nu-2)}, \tag{4.16}$$

wobei

$$A_1 = 4\pi C_\lambda (2^{\lambda/2} C_{1,\nu} + C_{2,\nu}) \|f_0 | \mathbb{L}_1^{(2)}\| \quad (4.17)$$

$$A_{2,n} = 4\pi C_\lambda C_{2,\nu} \|f_{0,n} | \mathbb{L}_1\| \|f_{0,n} | \mathbb{L}_1^{(2)}\|^{-\lambda/(\nu-2)}. \quad (4.18)$$

Aufgrund der Bemerkung im Anschluss an Satz 4.1.2 kann Y_n nach oben abgeschätzt werden durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt} \tilde{Y}(t) = A_1 \tilde{Y}(t) - A_{2,n} (\tilde{Y}(t))^{1+\lambda/(\nu-2)}, \quad \tilde{Y}(0) = Y_n(0).$$

Die Lösung dieser Bernoulli-Differentialgleichung lautet

$$\tilde{Y}(t) = \left(\frac{A_{2,n}}{A_1} \left(1 - \exp \left(- \frac{\lambda A_1}{\nu-2} t \right) \right) + (\tilde{Y}(0))^{-\lambda/(\nu-2)} \exp \left(- \frac{\lambda A_1}{\nu-2} t \right) \right)^{-(\nu-2)/\lambda},$$

und damit gilt

$$Y_n(t) \leq \left(\frac{A_{2,n}}{A_1} \left(1 - \exp \left(- \frac{\lambda A_1}{\nu-2} t \right) \right) + (Y_n(0))^{-\lambda/(\nu-2)} \exp \left(- \frac{\lambda A_1}{\nu-2} t \right) \right)^{-(\nu-2)/\lambda}. \quad (4.19)$$

Offensichtlich folgt daraus die von $Y_n(0)$ unabhängige Abschätzung:

$$Y_n(t) \leq \left(\frac{A_1}{A_{2,n} \left(1 - \exp \left(- \frac{\lambda A_1}{\nu-2} t \right) \right)} \right)^{(\nu-2)/\lambda}.$$

Die Behauptung folgt nun mit Satz 4.1.2 durch den Grenzübergang $j \rightarrow \infty$ für eine geeignete Teilfolge (f_{n_j}) . Dabei beachte man: Aus der schwachen $\mathbb{L}_1$ -Konvergenz $f_{0,n} \rightharpoonup f_0$ folgt

$$Y_{n_j}(t) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} Y_\nu(t) = \|f(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)}\|$$

punktweise für fast alle t und wegen (4.9) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2,n} = A_{\lambda, \nu, (2)}(f_0).$$

■

Der Satz besagt also, dass für beliebiges $\bar{t} > 0$ alle $\mathbb{L}_1$ -Momente existieren und in t gleichmäßig beschränkt sind, unabhängig davon, ob sie zur Zeit $t = 0$ existieren. Die wesentliche Voraussetzung hierfür ist, dass Dichte und Energie für die Anfangsbedingung beschränkt und für die Lösung zeitlich konstant sind.

In der Arbeit [56], in der diese Beweismethode erstmalig verwendet wurde, betrachtete WENNERBERG die Momente in der Form

$$X_\nu(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^\nu f(t, v) dv$$

und benutzte statt der Abschätzung aus Lemma 2.2.9 Arkeryds untere Schranke (3.16). Damit war die Wohldefiniertheit des H -Funktional auch für die Abschätzungen eine beweistechnische Notwendigkeit. Für die Gültigkeit von Satz 4.1.3 war diese Bedingung lediglich nötig, um die schwache Stabilität bezüglich der Anfangsbedingung ausnutzen zu können.

Die $\mathbb{L}_1$ -Momente wurden inzwischen auch für schwache Lösungen mit der hier vorgeführten Methode untersucht (siehe LU/WENNERBERG [34]). Die zeitliche Entwicklung der $\mathbb{L}_p$ -Momente für schwache Lösungen ist Gegenstand aktueller Forschung.

Bemerkung 4.1.4. Im Beweis von Satz 4.1.3 hätte man bei der Abschätzung des Integrals auf der rechten Seite von (4.15) die Hölder-Ungleichung alternativ für die Funktionen

$$f_1(v) = \langle v \rangle^\nu (f_n(v))^{\nu/(\nu+\lambda)} \quad , \quad f_2(v) = (f_n(v))^{\lambda/(\nu+\lambda)}$$

mit den Exponenten

$$p = \frac{\nu + \lambda}{\nu} \quad , \quad p' = \frac{\nu + \lambda}{\lambda}$$

anwenden können. Dies führt auf die Ungleichung

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \langle v \rangle^\nu f_n(v) f_n(w) dw dv \\ & \leq - \|f_{0,n} \|_{\mathbb{L}_1}^{1-\lambda/\nu} (Y_n(t))^{1+\lambda/\nu} + \|f_0 \|_{\mathbb{L}_1^{(2)}} \|Y_n(t)\| \end{aligned}$$

und endet bei ansonsten vollkommen analogem Vorgehen mit der Abschätzung:

$$\|f(t, \cdot) \|_{\mathbb{L}_1^{(\nu)}} \leq \left(\frac{A_{\lambda, \nu, (1)}(f_0)}{\tilde{A}_{\lambda, \nu, (2)}(f_0) \left(1 - \exp \left(- \frac{\lambda A_{\lambda, \nu, (1)}(f_0)}{\nu} t \right) \right)} \right)^{\nu/\lambda} , \quad (4.20)$$

wobei

$$\tilde{A}_{\lambda, \nu, (2)}(f_0) = 4\pi C_\lambda C_{2, \nu} \|f_0 \|_{\mathbb{L}_1}^{1-\lambda/\nu} .$$

Satz 4.1.3 zeigt, dass die in Abschnitt 3.5.1 betrachteten metrischen Räume keineswegs künstliche Konstrukte sind, sondern im Zusammenhang mit den Lösungen des Anfangswertproblems (4.1) für harte Interaktionspotentiale *a posteriori* durchaus eine Rolle spielen.

Bemerkung 4.1.5. Gilt $Y_\nu(0) < \infty$, so liest man aus (4.19) die folgende Ungleichung ab:

$$Y_\nu(t) \leq \left(\frac{A_{\lambda,\nu,(2)}(f_0)}{A_{\lambda,\nu,(1)}(f_0)} \left(1 - \exp \left(- \frac{\lambda A_{\lambda,\nu,(1)}(f_0)}{\nu - 2} t \right) \right) + (Y_\nu(0))^{-\lambda/(\nu-2)} \exp \left(- \frac{\lambda A_{\lambda,\nu,(1)}(f_0)}{\nu - 2} t \right) \right)^{-(\nu-2)/\lambda}.$$

Daraus erhält man die in t gleichmäßige Abschätzung

$$Y_\nu(t) \leq \bar{C}_{\lambda,\nu}(f_0) \quad , \quad \bar{C}_{\lambda,\nu}(f_0) = \max \left(\left(\frac{A_{\lambda,\nu,(2)}(f_0)}{A_{\lambda,\nu,(1)}(f_0)} \right)^{-(\nu-2)/\lambda}, Y_\nu(0) \right). \quad (4.21)$$

$A_{\lambda,\nu,(1)}(f_0)$ und $A_{\lambda,\nu,(2)}(f_0)$ sind in (4.6) definiert.

4.2 $\mathbb{L}_1$ -Stabilität bezüglich der Anfangsbedingung

Ziel dieses Abschnitts ist der Nachweis, dass die Lösung des Anfangswertproblems (4.1) $\mathbb{L}_1$ -stabil bezüglich der Anfangsbedingung f_0 ist. Es werden dabei wieder die VHS-Modelle betrachtet:

$$B(v - w, e) = C_\lambda |v - w|^\lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Auch für die räumlich homogene Boltzmann-Gleichung wird das folgende berühmte Resultat nützlich sein:

Lemma 4.2.1. (Lemma von Gronwall, siehe [53])

Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $C \in \mathbb{R}$. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} Y &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ h &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

seien (fast überall) stetig. Dann gilt: Ist für (fast alle) $t \in [a, b]$ die Ungleichung

$$X(t) \leq C + \int_a^t h(\tau) X(\tau) d\tau$$

erfüllt, so folgt

$$X(t) \leq C \exp \left(\int_a^t h(\tau) d\tau \right).$$

Ferner benötigt man noch die folgende Abschätzung für den symmetrischen Kollisionsoperator, die einen Spezialfall der Ungleichung von POVZNER [46] darstellt. Unter Verwendung der schwachen Formulierung (1.51) und Lemma 2.2.6 erhält man speziell (siehe auch (4.10) und (4.11))

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu \mathcal{Q}(f, g)(v) dv \\
&= \frac{1}{2} C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda f(v) g(w) \int_{S^2} (\langle v' \rangle^\nu + \langle w' \rangle^\nu - \langle v \rangle^\nu - \langle w \rangle^\nu) de dw dv \\
&\leq 2\pi C_\lambda C_{1,\nu} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda (\langle v \rangle^{\nu-1} \langle w \rangle + \langle v \rangle \langle w \rangle^{\nu-1}) f(v) g(w) dw dv \\
&\leq 2^{1+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{1,\nu} \left(\|f\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu-1+\lambda \rangle}} \|g\|_{\mathbb{L}_1^{\langle 1+\lambda \rangle}} + \|f\|_{\mathbb{L}_1^{\langle 1+\lambda \rangle}} \|g\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu-1+\lambda \rangle}} \right), \quad (4.22)
\end{aligned}$$

mit der Konstanten $C_{1,\nu}$ nach (2.21).

Damit sind alle Vorbereitungen für den Beweis des Hauptresultats dieses Abschnitts getroffen:

Satz 4.2.2. *Es sei $\nu \geq 2$. $f(t, \cdot)$ und $g(t, \cdot)$ seien die jeweiligen Lösungen des Anfangswertproblems (4.1) zu den Anfangsbedingungen $f_0, g_0 \in \mathbb{L}_1^{\langle \nu+\lambda \rangle}$. Dann gilt*

$$\|f(t, \cdot) - g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle}} \leq \|f_0 - g_0\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle}} \exp \left(C_{\lambda,\nu}(f_0, g_0) t \right).$$

Die Stabilitätskonstante $C_{\lambda,\nu}(f_0, g_0)$ ist definiert als

$$\begin{aligned}
C_{\lambda,\nu}(f_0, g_0) &= 2^{1+\lambda/2} \pi C_\lambda \left(C_{1,\nu} (\|f_0\|_{\mathbb{L}_1^{\langle 2 \rangle}} + \|g_0\|_{\mathbb{L}_1^{\langle 2 \rangle}}) + \bar{C}_{\lambda,\nu}(f_0) + \bar{C}_{\lambda,\nu}(g_0) \right) \\
&\quad + \bar{C}_{\lambda,\nu+\lambda}(f_0) + \bar{C}_{\lambda,\nu+\lambda}(g_0), \quad (4.23)
\end{aligned}$$

wobei $\bar{C}_{\lambda,\cdot}(\cdot)$ gemäß (4.21) und $C_{1,\nu}$ gemäß (2.21) definiert ist.

Beweis. Nach Lemma 4.1.1 ist $\|f(t, \cdot) - g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle}}$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} \|f(t, \cdot) - g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle}} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu \operatorname{sgn}(f(t, v) - g(t, v)) \partial_t (f(t, v) - g(t, v)) dv.$$

Mit der symmetrischen Form des Kollisionsoperators erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|f(t, \cdot) - g(t, \cdot)\|_{\mathbb{L}_1^{\langle \nu \rangle}} &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu \operatorname{sgn}(f(t, v) - g(t, v)) (\mathcal{Q}(f, f)(t, v) - \mathcal{Q}(g, g)(t, v)) dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu \operatorname{sgn}(f(t, v) - g(t, v)) \mathcal{Q}(f + g, f - g)(t, v) dv.
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung definiert man

$$F^+(t, v) = f(t, v) + g(t, v) \quad , \quad F^-(t, v) = f(t, v) - g(t, v) .$$

Aus der Abschätzung

$$- \operatorname{sgn}(F^-(v)) F^+(v) F^-(w) \leq F^+(v) |F^-(w)|$$

folgt mit (4.22) und der Abschätzung (3.20) aus Satz 3.2.1:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|F^-(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^\nu \mathcal{Q}(F^+, |F^-|)(t, v) dv + 2\pi C_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \langle v \rangle^\nu F^+(v) |F^-(w)| dw dv \\ & \leq 2^{1+\lambda/2} \pi C_\lambda C_{1,\nu} \left(\|F^+ | \mathbb{L}_1^{(\nu-1+\lambda)} \| \|F^- | \mathbb{L}_1^{(1+\lambda)} \| + \|F^+ | \mathbb{L}_1^{(1+\lambda)} \| \|F^- | \mathbb{L}_1^{(\nu-1+\lambda)} \| \right) \\ & \quad + 2^{1+\lambda/2} \pi C_\lambda \|F^+ | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \|F^- | \mathbb{L}_1^{(\lambda)} \| \\ & \leq 2^{1+\lambda/2} \pi C_\lambda \left(C_{1,\nu} (\|F^+ | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| + \|F^+ | \mathbb{L}_1^{(2)} \|) + \|F^+ | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \right) \|F^- | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| , \quad (4.24) \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung wegen $\nu \geq 2 \geq 1 + \lambda$ gilt. Auch hier wurde in den Integralen die t -Abhängigkeit der Funktionen F^+ und F^- weggelassen.

Nach (4.21) aus Bemerkung 4.1.5 und der Definition von F^+ gilt

$$\|F^+(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| \leq \bar{C}_{\lambda,\nu}(f_0) + \bar{C}_{\lambda,\nu}(g_0) , \quad \|F^+(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu+\lambda)} \| \leq \bar{C}_{\lambda,\nu+\lambda}(f_0) + \bar{C}_{\lambda,\nu+\lambda}(g_0) ,$$

und wegen der Erhaltung von Dichte und Energie ist

$$\|F^+(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(2)} \| \leq \|f_0 | \mathbb{L}_1^{(2)} \| + \|g_0 | \mathbb{L}_1^{(2)} \| .$$

Mit

$$\begin{aligned} C_{\lambda,\nu}(f_0, g_0) &= 2^{1+\lambda/2} \pi C_\lambda \left(C_{1,\nu} (\|f_0 | \mathbb{L}_1^{(2)} \| + \|g_0 | \mathbb{L}_1^{(2)} \| + \bar{C}_{\lambda,\nu}(f_0) + \bar{C}_{\lambda,\nu}(g_0)) \right. \\ & \quad \left. + \bar{C}_{\lambda,\nu+\lambda}(f_0) + \bar{C}_{\lambda,\nu+\lambda}(g_0) \right) \end{aligned}$$

wird (4.24) zu

$$\frac{d}{dt} \|F^-(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| \leq C_{\lambda,\nu}(f_0, g_0) \|F^-(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| .$$

Integration von 0 bis t auf beiden Seiten ergibt

$$\|F^-(t, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| = \|F^-(0, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| + C_{\lambda,\nu}(f_0, g_0) \int_0^t \|F^-(\tau, \cdot) | \mathbb{L}_1^{(\nu)} \| d\tau .$$

Anwendung des Gronwall-Lemmas 4.2.1 und Einsetzen der Definition von F^- liefert die Behauptung. ■

Speziell folgt natürlich aus Satz 4.2.2 die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (4.1). Bei genauer Analyse der Beweise zu den Sätzen 4.1.3 und 4.2.2 stellt sich heraus, dass die Erhaltung der Energie dafür sorgt, dass die jeweiligen Konstanten in den Abschätzungen zwar von den Anfangsbedingungen, nicht aber von der Zeit t abhängen.

Dieser Umstand veranlasste WENNBERG [57] dazu, die Eindeutigkeit der Lösung zu untersuchen, wenn keine Energieerhaltung verlangt wird. Das verblüffende Ergebnis lautet, dass man beliebig viele Lösungen des Anfangswertproblems (4.1) konstruieren kann, die z.B. zum Zeitpunkt $t = 0$ eine andere Gesamtenergie besitzen als für $t > 0$. In [34] wurde dies für die schwachen Lösungen in $\mathbb{L}_1$ verallgemeinert: Für jede beliebige endliche Menge von Zeitpunkten $\{t_n : n = 1, \dots, N\}$ und jede Menge $\{E_n : n = 1, \dots, N\}$ von Energiewerten kann man eine Lösung $f(t, \cdot)$ finden, die auf dem Intervall $[t_n, t_{n+1})$ die Energie E_n besitzt. Die Ursache hierfür ist aus mathematischer Sicht die Argumentation mit der schwachen Kompaktheit in $\mathbb{L}_1$, die bei den Existenzbeweisen verwendet wird.

Eindeutig ist also nur die physikalisch sinnvolle Lösung, die die Energieerhaltung berücksichtigt.

Für die schwachen Lösungen steht eine entsprechende Eindeutigkeitsaussage bisher noch aus.

Kapitel 5

a priori-Betrachtung: Galerkin-Petrov-Methoden

In diesem kurzen Kapitel sollen Galerkin-Petrov-Approximationen zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_t f(t, v) = Q(f, f)(t, v) \quad , \quad f(0, v) = f_0(v) \quad , \quad (5.1)$$

besprochen werden. Das Ziel dabei ist die Herausarbeitung der auftauchenden theoretischen Fragen und darüber hinaus die *a priori*-Betrachtung von Aspekten der praktischen Realisierung.

Ein kurzer Überblick über deterministische numerische Methoden zur Lösung von (5.1) soll der Begründung des Interesses an diesen Methoden dienen:

1. **Discrete velocity models (DVM):** Das Anfangswertproblem (5.1) wird auf einem Geschwindigkeitsgitter $\{v_i : i = 1, \dots, N\}$ betrachtet. Mit der Bezeichnung

$$f_i(t) = f(v_i, t)$$

erhält man die zugehörige diskrete räumlich homogene Boltzmann-Gleichung in Form eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\forall i = 1, \dots, N : \partial_t f_i(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \tilde{B}_{i,j}^{k,l} \left(f_k(t) f_l(t) - f_i(t) f_j(t) \right) .$$

Dabei spielt $\tilde{B}_{i,j}^{k,l}$ die Rolle des diskretisierten Kollisionskerns und man überzeugt sich leicht davon, dass aus der Symmetriebedingung

$$\tilde{B}_{i,j}^{k,l} = \tilde{B}_{k,l}^{i,j} = \tilde{B}_{l,k}^{j,i}$$

die Erhaltung der Dichte, Impuls und Energie für die Lösung der diskreten Gleichung folgt. Die diskreten makroskopischen Größen sind dabei auf naheliegende Art und Weise definiert:

$$\tilde{\mathcal{M}}_h^{(l)} = \sum_{i=1}^N f_i(t) \phi_l(v_i) \quad , \quad l = 0, \dots, 4 ,$$

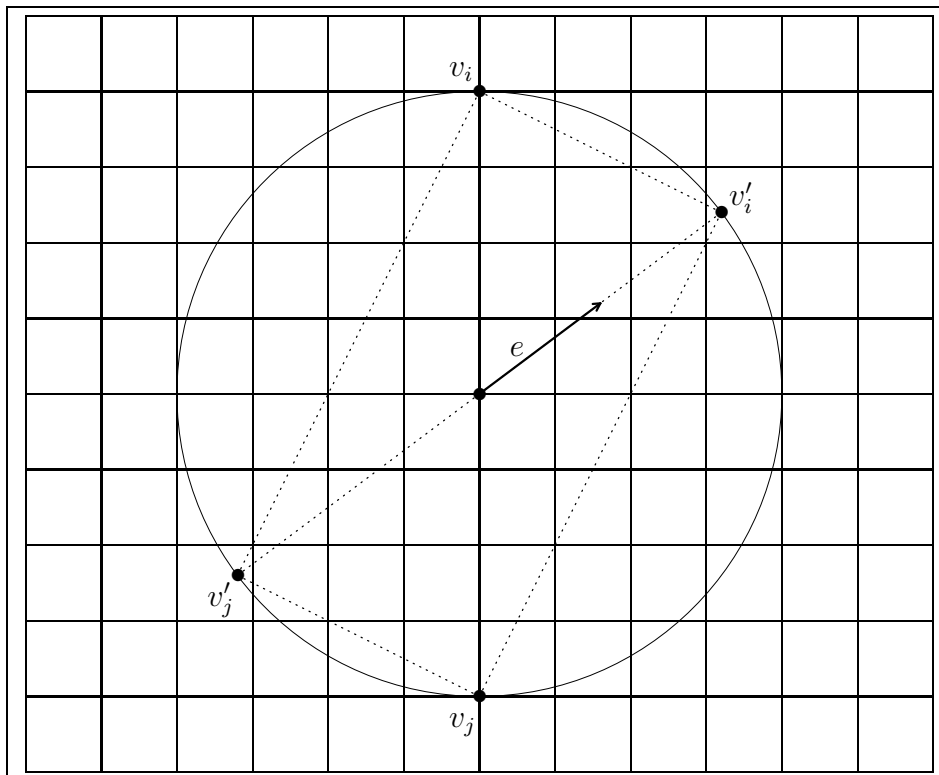


Abbildung 5.1: Zur Problematik der Lage von v'_i und v'_j bei DVM-Verfahren.

wobei ϕ_l die jeweilige Basiskollisionsinvariante bezeichnet:

$$\phi_0(v) \equiv 1 \quad , \quad \phi_\alpha(v) = v_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad , \quad \phi_4(v) = \frac{1}{2} |v|^2 \quad . \quad (5.2)$$

Problematisch bei diesem Zugang ist die Tatsache, dass für ein gegebenes Geschwindigkeitspaar (v_i, v_j) die gemäß (1.13) definierten Geschwindigkeiten (v'_i, v'_j) im allgemeinen nicht wieder auf dem vorgegebenen Gitter liegen (siehe Abb. 5.1). Die Bestimmung der zulässigen Einheitsvektoren $e_l \in S^2$ ist ein zahlentheoretisches Problem und es stellt sich heraus, dass die gesuchten Punkte auf der Einheitssphäre unregelmäßig verteilt sind und die so konstruierte Approximation des Integrals über die Einheitssphäre eine bescheidene Konvergenzordnung besitzt (siehe [12]).

Aus theoretischer Sicht ist das zitierte Resultat gleichwohl als Erfolg zu sehen, da es lange Zeit unklar war, ob die DVM-Methoden überhaupt konsistent zur Boltzmann-Gleichung sein können.

Ein weiteres Problem bei den DVM-Verfahren ist, dass die diskrete Gleichung zusätzliche und damit physikalisch unsinnige Kollisionsinvarianten besitzen kann. Es bedarf zusätzlicher Erwägungen, dieses Problem zu beheben (siehe [13]).

2. FFT-basierte Methoden auf einem Geschwindigkeitsgitter

Pionierarbeit auf diesem Gebiet wurde von BOBYLEV [9] geleistet. Er konnte zeigen, dass für den Fall der Maxwell-Moleküle das Anfangswertproblem (5.1) durch Anwendung der Fourier-Transformation die folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{f}(t, \xi) &= C_0 \left(\int_{S^2} \hat{f} \left(\frac{\xi + |\xi| e}{2} \right) \left(\frac{\xi - |\xi| e}{2} \right) de - \hat{f}(0, \xi) \hat{f}(t, \xi) \right) \\ \hat{f}(0, \xi) &= \hat{f}_0(\xi),\end{aligned}$$

wobei

$$\forall t \geq 0 : \hat{f}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \exp(i(v \cdot \xi)) dv.$$

Man beachte, dass durch die Fourier-Transformation die Dimension des Integrationsbereiches von fünf auf zwei reduziert wurde.

Die numerische Ausnutzung dieser Darstellung erfolgt auf einem Geschwindigkeitsgitter unter Verwendung des FFT-Algorithmus' (siehe [14]).

Die Maxwell-Moleküle sind dadurch ausgezeichnet, dass sich die Fourier-Transformation der räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung auf die Fourier-Transformierte von f zurückführen lässt. Dies ist bei den Interaktionspotentialen mit $0 < \lambda \leq 1$ nicht der Fall.

Ein alternativer Zugang hat zum Ziel, die Probleme der DVM-Verfahren mit der Lage der gestrichenen Geschwindigkeiten zu umgehen und eine effizient auszuwertende Darstellung des Kollisionsoperators zu erreichen. So wurde z.B. in [31] die folgende Form des Gewinnterms hergeleitet:

$$Q_+(f, f)(v) = \mathcal{F}_{y \rightarrow v} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{T}(u, y) \mathcal{F}_{z \rightarrow y}^{-1} \left(f(z - u) f(z + u) \right) (u, y) du,$$

mit dem Kern

$$\tilde{T}(u, y) = 8 \int_{S^2} B(2|u|, \mu) \exp(-i|u|(y \cdot e)) de, \quad \mu = \frac{u \cdot e}{|u|}.$$

Speziell wurde die Integration über die Einheitssphäre in einen von der Zeit t unabhängigen Ausdruck verlagert.

Obwohl sich in der Darstellung von Q_+ die Dimension des Integrationsbereiches auf 9 erhöht hat, besitzt diese Formulierung den Vorteil, dass sie auf Faltungsintegralen beruht und sich die Auswertung des Gewinnterms auf einem regelmäßigen Gitter mit Hilfe des FFT-Algorithmus' sehr effizient realisieren lässt. Der Kern $\tilde{T}$ muss natürlich exakt bekannt sein oder als Approximation mit ausreichend hoher Genauigkeit vorliegen. Für die VHS-Modelle ist ersteres der Fall, es gilt nämlich:

$$B(u, e) = C_\lambda |u|^\lambda \Rightarrow \tilde{T}(u, y) = 2^{5+\lambda} \pi C_\lambda |u|^\lambda \text{sinc}(|u| |y|).$$

Die Erhaltung von Dichte, Impuls und Energie ist bei diesen Methoden keineswegs garantiert und es müssen in jedem Zeitschritt entsprechende Korrekturen vorgenommen werden.

3. Fourier-Galerkin-Spektralmethoden

In der Arbeit von PARESCHI/PERTHAME [43] wurde das folgende Verfahren zur numerischen Behandlung von (5.1) vorgeschlagen:

Die approximative Lösung wird in der Form

$$f_{\mathbf{N}}(t, v) = \sum_{\mathbf{k}=-\mathbf{N}}^{\mathbf{N}} \hat{f}_{\mathbf{k}}(t) \exp(\iota(\mathbf{k} \cdot v)) \quad (5.3)$$

gesucht, wobei

$$\mathbf{N} = (N, N, N) \in \mathbb{N}^3, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3, \quad -N \leq k_1, k_2, k_3 \leq N$$

und

$$\hat{f}_{\mathbf{k}}(t) = \int_{[-\pi, \pi]^3} f(t, v) \exp(-\iota(\mathbf{k} \cdot v)) dv.$$

Dabei wird angenommen, dass der Träger von $f(t, \cdot)$ im Würfel $[-\pi, \pi]^3$ enthalten ist. Durch die Forderung, dass das Residuum $\mathbb{L}_2$ -orthogonal zu allen trigonometrischen Polynomen vom Grad $\leq N$ ist, d.h.

$$\forall \mathbf{k} = -\mathbf{N}, \dots, \mathbf{N} : \int_{[-\pi, \pi]^3} \left(\partial_t f_{\mathbf{N}}(t, v) - Q(f_{\mathbf{N}}, f_{\mathbf{N}})(t, v) \right) \exp(-\iota(\mathbf{k} \cdot v)) dv = 0,$$

erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die gesuchten Koeffizienten $\hat{f}_{\mathbf{k}}$. Auch hier kann man den FFT-Algorithmus zur effizienten Berechnung der Koeffizienten erfolgreich einsetzen. Diese so genannten *Spektralmethoden* sind gekennzeichnet durch die Approximation der Lösung als Linearkombination von orthogonalen Funktionen und wurden zuvor im Zusammenhang mit verschiedenen Gleichungen der Fluidodynamik verwendet (siehe [17]).

Bei der Spektralmethode ist einzig und allein die Dichte eine Erhaltungsgröße für die Lösung der diskretisierten Gleichung. Noch schwerer wiegt die Tatsache, dass wegen der Approximation mit oszillierenden Ansatzfunktionen die Nichtnegativität nicht garantiert werden kann, wie in der Arbeit [44] anhand von numerischen Beispielen nachgewiesen wurde. Die Verwendung von Filtern behebt dieses Problem, beeinträchtigt unter Umständen jedoch die Approximationsqualität (siehe [45]). Auch bei der Spektralzerlegung gelingt die Auslagerung der Integration über die Einheitskugeloberfläche in einen zeitunabhängigen Ausdruck.

Damit ist natürlich nur ein kleiner Teil der numerischen Verfahren zur Lösung von (5.1) erwähnt worden. Einen umfassenderen Überblick über numerische Methoden

und eine umfangreiche Sammlung von Literaturverweisen findet man in [21].

Die Methode unter Punkt 3. ist eine spezielle Galerkin-Approximation der räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung. Eine Variante der Boltzmann-Gleichung, die als mathematisches Modell für den Ladungstransport in Halbleitern dient, wurde mit einer entsprechenden Approximationsmethode auf der Basis der Hermite-Polynome in [48] numerisch behandelt.

In diesem Kapitel sollen Vorbetrachtungen zu Galerkin-Petrov-Approximationen für das Anfangswertproblem zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung angestellt werden. Diese Methoden sollen nach Möglichkeit die Nachteile der vorgestellten Verfahren vermeiden und gleichzeitig möglichst viele Vorteile mit ihnen gemeinsam haben. Im Detail heißt das:

- Wie bei der DVM-Methode soll von vornherein bekannt sein, welche Voraussetzungen hinreichend für die Erhaltung von Dichte, Impuls und Energie sind.
- Wie die Fourier-basierten Methoden sollen die Galerkin-Petrov-Verfahren dafür sorgen, dass die Integration über S^2 in einen zeitunabhängigen Ausdruck verlagert werden kann. Dieser muss dann im Wesentlichen nur noch für das jeweilige Interaktionsmodell neu berechnet werden. Sicherlich ist eine mit den Fourier-Methoden vergleichbare Effizienz wünschenswert.
- Im Gegensatz zu den Fourier- und Spektralmethoden soll nicht vorausgesetzt werden, dass die Lösung $f(t, \cdot)$ einen kompakten Träger hat. Speziell für die Konstruktion der Spektralmethode ist diese Voraussetzung unabdingbar.
- Die Galerkin-Petrov-Verfahren sollen dahingehend konstruiert sein, dass die Nichtnegativität der Näherungslösung gesichert ist.

5.1 Die Galerkin-Petrov-Approximation

Sei $\mathcal{I}$ eine höchstens abzählbar unendliche Indexmenge und $\mathbb{V}$ ein Banach-Raum. Für eine gegebene Familie von *Ansatzfunktionen*

$$\{\varphi_j : j \in \mathcal{I}\} \subset \mathbb{V} \quad , \quad \varphi_j : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

wird eine approximative Lösung des Anfangswertproblems in der Form

$$f(t, v) \approx f_h(t, v) = \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(t) \varphi_j(v) \quad (5.4)$$

gesucht. Die Galerkin-Petrov-Approximation erhält man auf folgende Art und Weise: Das Residuum

$$R(f_h)(t, v) = \partial_t f_h(t, v) - Q(f_h, f_h)(t, v) \quad ,$$

wird im allgemeinen nicht gleich Null sein. Man fordert daher, dass $R(f_h)(t, \cdot)$ für alle $t \geq 0$ orthogonal zu gewissen *Testfunktionen*

$$\{\psi_i : i \in \mathcal{I}\} \quad , \quad \psi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

ist. Der von den Testfunktionen aufgespannte Raum sei im Dualraum $\mathbb{V}^*$ enthalten. Das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet:

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathcal{I} : \quad & \langle \partial_t f_h - Q(f_h, f_h), \psi_i \rangle = 0 \\ \iff & \partial_t \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(t) \langle \varphi_j, \psi_i \rangle = \sum_{j, k \in \mathcal{I}} \langle Q(\varphi_j, \varphi_k), \psi_i \rangle f_j(t) f_k(t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Orthogonalität ist hier bezüglich eines Dualitätsprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu verstehen, von dem lediglich angenommen werden soll, dass es als Integral darstellbar ist:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) \psi(v) dv. \quad (5.6)$$

Mit der Definition der *Massenmatrix*

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i, j \in \mathcal{I}} = (\langle \varphi_j, \psi_i \rangle)_{i, j \in \mathcal{I}}, \quad (5.7)$$

der *Kollisionsmatrizen*

$$\mathbf{Q}^{(i)} = (q_{jk}^{(i)})_{j, k \in \mathcal{I}} = (\langle Q(\varphi_j, \varphi_k), \psi_i \rangle)_{j, k \in \mathcal{I}}, \quad i \in \mathcal{I}, \quad (5.8)$$

und des Verteilungsvektors

$$\mathbf{f}(t) = (f_j(t))_{j \in \mathcal{I}}, \quad f_j(t) \in \mathbb{R}, \quad (5.9)$$

lässt sich das Gleichungssystem (5.5) alternativ schreiben als:

$$\forall i \in \mathcal{I} : \quad \left(\mathbf{A} \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \right)_i = (\mathbf{Q}^{(i)} \mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t)). \quad (5.10)$$

Dabei bezeichnet $(\cdot)_i$ die i -te Komponente eines Vektors und $(\cdot, \cdot)$ ist die diskrete Form des Dualitätsprodukts (5.6): Für $\mathbf{f}_1 = (f_j^{(1)})_{j \in \mathcal{I}}$ und $\mathbf{f}_2 = (f_j^{(2)})_{j \in \mathcal{I}}$ sei

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j^{(1)} f_j^{(2)}.$$

Auch im Zusammenhang mit der Boltzmann-Gleichung ist die Galerkin-Petrov-Approximation eng mit der Definition der schwachen Lösung verbunden. Sie ist offensichtlich ein Spezialfall des von Arkeryd geprägten Begriffs der schwachen Lösung des Anfangswertproblems in (1.75): Wählt man dort von der Zeit t unabhängige Testfunktionen, und ersetzt $f(t, \cdot)$ durch (5.4), so erhält man durch Differentiation nach t das Gleichungssystem (5.5).

Natürlich ist im Fall unendlicher Indexmengen $\mathcal{I}$ zu präzisieren, in welchem Sinn die Summen in (5.4), (5.5) und (5.10) bzw. das Produkt $(\cdot, \cdot)$ erklärt sein sollen. Weitere theoretische Aspekte und Anforderungen sind:

- Invertierbarkeit der Massenmatrix (als Operator auf einem Folgenraum),

- Wohldefiniertheit von Dichte, Impuls und Energie für die approximative Lösung,
- Klärung der Umstände, unter denen die genannten Größen zeitlich konstant sind und
- Eindeutigkeitsaussagen für die Lösung von (5.10). Neben der Invertierbarkeit der Massenmatrix ist auch zu untersuchen, welche $\mathbf{f}$ die Eigenschaft

$$\forall i \in \mathcal{I} : (\mathbf{Q}^{(i)} \mathbf{f}, \mathbf{f}) = 0 \quad (5.11)$$

besitzen. Damit sind die den Ansatzfunktionen zugeordneten diskreten Gleichgewichtszustände identifiziert.

5.2 Die diskretisierte Gleichung

5.2.1 Die Massenmatrix und diskrete Erhaltungsgrößen

Für $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ gibt das folgende Lemma eine Antwort auf die Frage, unter welchen Bedingungen die Massenmatrix regulär ist:

Lemma 5.2.1. *Es seien $\{\varphi_j : j = 1, \dots, N\}$ und $\{\psi_i : i = 1, \dots, N\}$ jeweils Mengen linear unabhängiger Funktionen. Gilt*

$$\text{span}\{\varphi_j : j = 1, \dots, N\}^\perp \cap \text{span}\{\psi_i : i = 1, \dots, N\} = \{0\},$$

so ist die nach (5.7) definierte Massenmatrix $\mathbf{A}$ regulär.

Dabei bezeichnet span den jeweils von den Funktionen aufgespannten Vektorraum und es ist

$$\mathbb{U}^\perp = \{u^* \in \mathbb{U}^* : \forall u \in \mathbb{U} : \langle u, u^* \rangle = 0\}.$$

Beweis. Die Vektoren $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ mit

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = 0$$

müssen wegen der linearen Unabhängigkeit der φ_j notwendigerweise die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\forall j \in \{1, \dots, N\} : \left\langle \varphi_j, \sum_{i=1}^N x_i \psi_i \right\rangle = 0.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^N x_i \psi_i \in \text{span}\{\varphi_j : j = 1, \dots, N\}^\perp$$

und nach Voraussetzung muss gelten

$$\sum_{i=1}^N x_i \psi_i = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen ψ_i folgt $\mathbf{x} = 0$. Das aber bedeutet, dass $\mathbf{A}^T$ regulär ist und damit auch $\mathbf{A}$. ■

Analog zu den Definitionen der makroskopischen Größen in Abschnitt 1.4 erklärt man die diskrete Form für die Dichte, die mittlere Geschwindigkeit und die Energie wie folgt: Zu den Basiskollisionsinvarianten (5.2) bildet man jeweils den Vektor

$$\mathbf{m}^{(l)} = (m_j^{(l)})_{j \in \mathcal{I}} = (\langle \varphi_j, \phi_l \rangle)_{j \in \mathcal{I}} \quad (5.12)$$

und setzt

$$\rho_h(t) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{m}^{(0)}) , \quad (5.13)$$

$$\rho_h(t) \mathbf{v}_{h,\alpha}(t) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{m}^{(\alpha)}) \quad (\alpha = 1, 2, 3) , \quad (5.14)$$

$$E_h(t) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{m}^{(4)}) . \quad (5.15)$$

Als Antwort auf die Frage, welche Faktoren auf die Erhaltung dieser diskreten makroskopischen Größen Einfluss haben, kann man wegen Satz 1.4.2 und Proposition 1.5.1 erwarten, dass die Testfunktionen hierfür maßgeblich sind. Für endliche Indexmengen bestätigt der folgende Satz diese Vermutung:

Satz 5.2.2. *Es sei $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ und die Massenmatrix $\mathbf{A}$ sei regulär: Dann gilt: Für eine Lösung $\mathbf{f}(t)$ von (5.10) sind die in (5.13)-(5.15) definierten Größen zeitlich konstant, wenn gilt:*

$$\phi_l \in \text{span}\{\psi_i : i = 1, \dots, N\} \quad , \quad l = 0, \dots, 4 . \quad (5.16)$$

Beweis. Für $l = 0, \dots, 4$ sei

$$\mathcal{M}^{(l)}(t) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{m}^{(l)}) .$$

Da die Massenmatrix regulär ist, existiert ein eindeutig bestimmter Vektor

$$\mathbf{x}^{(l)} = (x_i^{(l)})_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$$

mit

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x}^{(l)} = \mathbf{m}^{(l)} . \quad (5.17)$$

Damit erhält man aus (5.10), der Definition der Kollisionsmatrizen (5.8) und (5.6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{M}^{(l)}(t) &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{f}(t), \mathbf{m}^{(l)} \right) = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{f}(t), \mathbf{A}^T \mathbf{x}^{(l)} \right) \\ &= \left(\mathbf{A} \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t), \mathbf{x}^{(l)} \right) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{Q}^{(i)} \mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t)) x_i^{(l)} \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle \mathcal{Q} \left(\sum_{j=1}^N f_j(t) \varphi_j, \sum_{k=1}^N f_k(t) \varphi_k \right), x_i^{(l)} \psi_i \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{Q}(f_h, f_h)(t, \cdot), \sum_{i=1}^N x_i^{(l)} \psi_i \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(f_h, f_h)(t, v) \left(\sum_{i=1}^N x_i^{(l)} \psi_i(v) \right) dv . \end{aligned}$$

Da die Komponenten des Vektors $\mathbf{x}^{(l)}$ durch (5.17) eindeutig bestimmt sind, gilt

$$\phi_l(v) = \sum_{i=1}^N x_i^{(l)} \psi_i(v)$$

und die Behauptung folgt aus den Sätzen 1.4.2 und 1.4.3. ■

Bemerkung 5.2.3. Durch Satz 5.2.2 wird klar, warum bei der zu Beginn des Kapitels vorgestellten Spektralmethode nur die Dichte eine Erhaltungsgröße ist. Unter den Testfunktionen befindet sich $\exp(-\iota(0 \cdot v)) \equiv 1$. Die Basiskollisionsinvarianten v und $|v|^2/2$ können jedoch nicht als Linearkombination trigonometrischer Polynome dargestellt werden.

5.2.2 Die Kollisionsmatrizen

Die Einträge der Kollisionsmatrizen (5.8) lauten

$$q_{jk}^{(i)} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(\varphi_j, \varphi_k)(v) \psi_i(v) dv.$$

Verwendet man die schwache Formulierung des symmetrischen Kollisionsoperators (1.51), so erhält man

$$\begin{aligned} q_{jk}^{(i)} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v - w|^\lambda \varphi_j(v) \varphi_k(w) \\ &\quad \times \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \left(\psi_i(v') + \psi_i(w') - \psi_i(v) - \psi_i(w) \right) de dw dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} T_\lambda^{(i)}(v, w) \varphi_j(v) \varphi_k(w) dw dv \end{aligned} \quad (5.18)$$

mit dem Kern

$$T_\lambda^{(i)}(v, w) = \frac{1}{2} |v - w|^\lambda \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \left(\psi_i(v') + \psi_i(w') - \psi_i(v) - \psi_i(w) \right) de. \quad (5.19)$$

Die Galerkin-Petrov-Methoden erlauben also ebenfalls, die Integration über S^2 in einen zeitunabhängigen Ausdruck auszulagern.

Ein weiterer Vorteil, der sich aus der schwachen Formulierung ergibt, ist der folgende: Wie schon in Bemerkung 1.3.2 a) ausgeführt wurde, kann man durch geeignete Wahl der Testfunktionen die Singularität im Winkelanteil b_λ dämpfen, z.B. durch Verwendung hinreichend oft differenzierbarer ψ_i . Die Galerkin-Petrov-Approximation ist damit im Prinzip für das gesamte Spektrum der für die Boltzmann-Gleichung in Frage kommenden Interaktionsmodelle einsetzbar.

5.3 Praktische Aspekte

Die bisher angestellten allgemeinen Betrachtungen lassen die Galerkin-Petrov-Approximation hinsichtlich der praktischen Realisierung wenig attraktiv erscheinen:

- Im Gegensatz zur Spektralmethode oder den FFT-basierten Verfahren auf dem regelmäßigen Gitter muss hier die Massenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ berücksichtigt werden, die im allgemeinen Fall keine Diagonalmatrix ist. Verwendet man zur Zeitdiskretisierung etwa das explizite Euler-Verfahren, so folgt aus

$$\left(\mathbf{A}(\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)) \right)_i = \Delta t \left(\mathbf{Q}^{(i)} \mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t) \right), \quad (5.20)$$

dass in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden muss.

- Im schlimmsten Fall ist der Speicheraufwand für die Kollisionsmatrizen von der Ordnung $\mathcal{O}(N^3)$. Entsprechend aufwendig ist die Auswertung der quadratischen Formen $(\mathbf{Q}^{(i)} \mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t))$.

Aus diesen Gründen werden in diesem Abschnitt Zusatzannahmen besprochen, die den Matrizen mehr Struktur verleihen und damit sowohl den Speicheraufwand als auch die Anzahl der arithmetischen Operationen reduzieren.

Im Anschluss wird eine allgemeine Vorgehensweise zur Approximation der Anfangsbedingung diskutiert und schließlich eine vielversprechende Klasse von Ansatzfunktionen vorgestellt.

5.3.1 Reduktion des Aufwands

Als erstes soll angenommen werden, dass man die Ansatz- und Testfunktionen jeweils durch Anwendung von Translationen auf eine Funktion φ bzw. ψ bildet. Für ein gegebenes Geschwindigkeitsgitter $\{v_i : i \in \mathcal{I}\}$ soll also gelten:

$$\forall j \in \mathcal{I} : \varphi_j(v) = \varphi(v - v_j) \quad , \quad \forall i \in \mathcal{I} : \psi_i(v) = \psi(v - v_i). \quad (5.21)$$

In diesem Fall besitzt die Massenmatrix eine Töplitz-Struktur, denn mit der Koordinatentransformation $\tilde{v} = v - v_j$ berechnet man:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_j(v) \psi_i(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v - v_j) \psi(v - v_i) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\tilde{v}) \psi(\tilde{v} - (v_i - v_j)) d\tilde{v} \\ &= (\varphi * \psi)(v_i - v_j), \end{aligned}$$

wobei $f_1 * f_2$ die Faltung von f_1 mit f_2 bezeichnet.

Bedeutsamer ist die Annahme (5.21) für die Kollisionsmatrizen. Setzt man bei fixiertem Index $i \in \mathcal{I}$ für $v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\tilde{v} = v - v_i \quad , \quad \tilde{w} = w - v_i,$$

so folgt aus der Geschwindigkeitstransformation (1.13) für $(\tilde{v}, \tilde{w}) \mapsto (\tilde{v}', \tilde{w}')$:

$$\tilde{v}' = v' - v_i \quad , \quad \tilde{w}' = w' - v_i \quad .$$

Bezüglich der verschobenen Geschwindigkeitsvariablen besitzt der Kern (5.19) die Form:

$$T_\lambda^{(i)}(\tilde{v}, \tilde{w}) = \frac{1}{2} |\tilde{v} - \tilde{w}|^\lambda \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \left(\psi(\tilde{v}') + \psi(\tilde{w}') - \psi(\tilde{v}) - \psi(\tilde{w}) \right) d\mu \quad .$$

Integriert man in der Darstellung (5.18) bezüglich $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ so ergibt sich für die Einträge der Kollisionsmatrizen:

$$\begin{aligned} q_{kj}^{(i)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} T_\lambda^{(i)}(\tilde{v}, \tilde{w}) \varphi_j(\tilde{v} + v_i) \varphi_k(\tilde{w} + v_i) d\tilde{w} d\tilde{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} T_\lambda^{(i)}(\tilde{v}, \tilde{w}) \varphi(\tilde{v} - (v_j - v_i)) \varphi(\tilde{w} - (v_k - v_i)) d\tilde{w} d\tilde{v} \quad . \end{aligned}$$

Durch (5.21) erreicht man also, dass der Kern unabhängig vom Index i definiert ist als

$$T_\lambda(v, w) = \frac{1}{2} |v - w|^\lambda \int_{S^2} b_\lambda(\mu) \left(\psi(v') + \psi(w') - \psi(v) - \psi(w) \right) d\mu \quad . \quad (5.22)$$

Für die Kollisionsmatrizen folgt, dass es eine Matrix $\bar{\mathbf{Q}} = (\bar{q}_{jk})_{j,k \in \mathcal{I}}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\forall i, j, k \in \mathcal{I} : q_{jk}^{(i)} = \bar{q}_{j-i, k-i} \quad .$$

Ist z.B. die Indexmenge $\mathbb{Z}^d$, so kann man $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{(0)}$ setzen. Die zweite Annahme besteht darin, dass φ und ψ die folgende Form besitzen:

$$\varphi(v) = \varphi^{(1)}(v_1) \varphi^{(2)}(v_2) \varphi^{(3)}(v_3) \quad , \quad \psi(v) = \psi^{(1)}(v_1) \psi^{(2)}(v_2) \psi^{(3)}(v_3) \quad . \quad (5.23)$$

Für ein endliches kartesisches Geschwindigkeitsgitter

$$\mathcal{G} = \{v_{j,1} : j = 1, \dots, N_1\} \times \{v_{j,2} : j = 1, \dots, N_2\} \times \{v_{j,3} : j = 1, \dots, N_3\}$$

folgt mit der Definition

$$\mathbf{A}^{(\alpha)} = (a_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{N_\alpha} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j^{(\alpha)}(v_\alpha) \psi_i^{(\alpha)}(v_\alpha) dv_\alpha \right)_{i,j=1}^{N_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad ,$$

dass die Massenmatrix sich als dreifaches Kroneckerprodukt

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} \otimes \mathbf{A}^{(2)} \otimes \mathbf{A}^{(3)}$$

darstellen lässt. Da die Matrizen $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ wegen (5.21) zusätzlich eine Töplitz-Struktur besitzen, ist sowohl der Speicheraufwand erheblich reduziert als auch die Lösung des Gleichungssystems in (5.20) auf effiziente Weise möglich.

Wegen der im Kern T_λ enthaltenen Integration über die Einheitssphäre lässt sich eine entsprechende Aussage für die Kollisionsmatrizen nicht treffen.

5.3.2 Approximation der Anfangsbedingung

Eine mögliche Vorgehensweise zur Approximation der Anfangsbedingung, die die Verwendung der Stabilitätsaussage aus Abschnitt 4.2 ermöglicht, ist die folgende:

Es sei

$$f_0 \in \mathbb{L}_2^{\langle \gamma \rangle} \quad , \quad \gamma > \frac{7}{2} .$$

Aus Lemma 2.1.2 c) folgt $f_0 \in \mathbb{L}_1^{\langle 2 \rangle}$. Die Approximation der Anfangsbedingung sei

$$f_{0,h}(v) = \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(0) \varphi_j(v) . \quad (5.24)$$

Wegen (2.3) gilt

$$\|f_0 - f_{0,h}\|_{\mathbb{L}_1^{\langle 2 \rangle}} \leq C_{3,2,\gamma,2} \|f_0 - f_{0,h}\|_{\mathbb{L}_2^{\langle \gamma \rangle}} ,$$

wobei die Konstante $C_{3,2,\gamma,2}$ gemäß (2.4) definiert ist.

Die Koeffizienten in (5.24) werden so bestimmt, dass die $\mathbb{L}_2^{\langle \gamma \rangle}$ -Norm des Fehlers minimiert wird, d.h. man sucht $\mathbf{f}(0)$ als Minimum des Funktionals

$$F(\mathbf{f}) = (\mathbf{B}\mathbf{f}, \mathbf{f}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + c .$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} c &= \|f_0\|_{\mathbb{L}_2^{\langle \gamma \rangle}}^2 , \\ \mathbf{b} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{2\gamma} f_0(v) \varphi_j(v) dv \right)_{j \in \mathcal{I}} , \\ \mathbf{B} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \langle v \rangle^{2\gamma} \varphi_j(v) \varphi_k(v) dv \right)_{j,k \in \mathcal{I}} . \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{B}$ ist offensichtlich symmetrisch. Differentiation liefert als notwendige Bedingung für den gesuchten Vektor $\mathbf{f}(0)$ die Gleichung

$$\mathbf{B}\mathbf{f}(0) = \mathbf{b} ,$$

falls $\mathbf{B}$ invertierbar ist bzw.

$$\|\mathbf{B}\mathbf{f}(0) - \mathbf{b}\| \rightarrow \min$$

in allen anderen Fällen. Dabei ist $\|\cdot\| = ((\cdot, \cdot))^{1/2}$.

Für $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ benötigt man bereits für die Regularität der Massenmatrix, dass die Ansatzfunktionen linear unabhängig sind. In diesem Fall ist $\mathbf{B}$ natürlich ebenfalls regulär.

5.3.3 Ein Beispiel für die Ansatzfunktionen

Zum Abschluss soll eine konkrete Klasse von Ansatzfunktionen für die Approximation (5.4) besprochen werden. Zunächst wird man natürlich ganz allgemein die folgenden Forderungen an die φ_j stellen.

- Sie sollen in allen Funktionenräumen enthalten sein, die für die räumlich homogene Boltzmann-Gleichung relevant sind.
- Sie sollen die für praktische Zwecke relevanten Klassen von Anfangsbedingungen hinreichend gut approximieren und in der Lage sein, die Relaxation zur Maxwell-Verteilung mitzuverfolgen.
- PULVIRENTI/WENNBERG [47] konnten beweisen, dass die Lösung $f(t, \cdot)$ des Anfangswertproblems (5.1) für alle $t > 0$ punktweise nach unten durch eine Maxwell-Verteilung beschränkt ist:

$$\forall t > 0 : \exists C_1(t), C_2(t) > 0 : f(t, v) \geq C_1 \exp(-C_2 |v|^2), \quad (5.25)$$

dabei hängen die Konstanten noch von $\|f_0\|_{\mathbb{L}_1}$, $\|f_0\|_{\mathbb{L}_1^{(2)}}$ und $H[f_0]$ ab. Für fixiertes $\bar{t} > 0$ können zeitunabhängige Konstanten derart gewählt werden, dass die Ungleichung für alle $t \geq \bar{t}$ gilt. Das Resultat ist gültig für alle abgeschnittenen Interaktionspotentiale mit $0 \leq \lambda \leq 1$.

Die allen bisherigen numerischen Methoden zugrundeliegende Annahme, dass die Lösung einen kompakten Träger bezüglich der Variablen v besitzt, führt also zu einem unvermeidlichen Fehler in der Approximation der Lösung. Ansatzfunktionen, die der obigen Abschätzung Rechnung tragen, wären damit wünschenswert.

- Die in Abschnitt 1.4 definierten makroskopischen Größen sind nicht nur wohldefiniert, sondern auch relativ einfach aus der Kenntnis der Koeffizienten $f_j(t)$ zu berechnen.
- Es sollen zumindest einfach nachvollziehbare hinreichende Kriterien für die Nichtnegativität von $f_h(t, \cdot)$ verfügbar sein.

Als Ansatzfunktionen, die zusätzlich noch die Bedingungen (5.21) und (5.23) erfüllen, bieten sich die *geglätteten* oder *unscharfen Partikel* (engl. *smoothed particles*) an: Für ein $\Lambda > 0$ und ein gegebenes Geschwindigkeitsgitter $\{v_j : j \in \mathcal{I}\}$ sind diese definiert als

$$\varphi(v) = (2\pi \Lambda)^{-3/2} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2\Lambda}\right), \quad \varphi_j(v) = \varphi(v - v_j). \quad (5.26)$$

Mit diesen Ansatzfunktionen gilt offensichtlich $f_h(t, v) \geq 0$, wenn

$$\forall j \in \mathcal{I} : f_j(t) \geq 0.$$

Die Umkehrung ist offensichtlich nicht der Fall. Die geglätteten Partikel bieten den Vorteil, dass sie auch bei endlicher Indexmenge $\mathcal{I}$ keinen kompakten Träger besitzen und somit das Verhalten der Lösung hinsichtlich der Ungleichung (5.25) gut nachbilden können.

Ein weiterer Aspekt ist natürlich, dass die geglätteten Partikel die Gestalt einer Maxwell-Verteilung besitzen. Die Diagonalelemente einer jeden Kollisionsmatrix sind nach Satz 1.5.3 a) gleich Null und es folgt, dass die Vektoren

$$\mathbf{e}^{(i)} = (e_j^{(i)})_{j \in \mathcal{I}} \quad , \quad e_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad , i \in \mathcal{I}$$

die Eigenschaft (5.11) besitzen.

Man berechnet für die diskrete Dichte, den Impuls und die Energie mit diesen Ansatzfunktionen:

$$\begin{aligned} \rho_h(t) &= \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(t) \, , \\ \rho_h(t) \mathbf{v}_h(t) &= \sum_{j \in \mathcal{I}} v_j f_j(t) \, , \\ E_h(t) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{I}} |v_j|^2 f_j(t) + \frac{3}{2} \Lambda \rho_h(t) \, . \end{aligned}$$

Am Beispiel des kartesischen Geschwindigkeitsgitters

$$\mathcal{G} = h_1 \mathbb{Z} \times h_2 \mathbb{Z} \times h_3 \mathbb{Z} \quad , \quad 0 < h_\alpha \leq h \quad (\alpha = 1, 2, 3) \, ,$$

mit den Knoten

$$v_j = (h_1 j_1, h_2 j_2, h_3 j_3) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) \in \mathbb{Z}^3 \, ,$$

lassen sich Parallelen zur Theorie des ursprünglichen Problems (5.1) erkennen: Die obigen Ausdrücke für die diskreten makroskopischen Größen sind mathematisch sinnvoll, wenn gilt

$$\forall t \geq 0 : \mathbf{f}(t) \in \ell_1^{(2)} \, .$$

Der Folgenraum $\ell_p^{(\nu)}$ ist für $1 \leq p < \infty$ definiert als

$$\ell_p^{(\nu)} = \{ \mathbf{g} : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : \| \mathbf{g} | \ell_p^{(\nu)} \| \leq \infty \}$$

mit der Norm

$$\| \mathbf{g} | \ell_p^{(\nu)} \| = \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3} \langle \mathbf{j} \rangle^{\nu} |g_{\mathbf{j}}|^p \right)^{1/p} \, .$$

Für $p = \infty$ wird wie üblich die Reihe ersetzt durch das Supremum über alle Multiindizes $\mathbf{j}$.

Da die geglätteten Partikel Schwartz-Funktionen sind und nach Korollar 3.4.3 der Kollisionsoperator eine stetige Abbildung

$$\mathcal{Q} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$$

ist, können die Abbildungseigenschaften der Kollisionsmatrizen als Operatoren auf diesen Folgenräumen studiert werden.

Hinsichtlich der zu erwartenden Approximation der Maxwell-Verteilung und der Anfangsbedingung sei auf die Arbeit MAZ'YA [37] verwiesen. Dort wurden ganz allgemein Approximationsmethoden der Form

$$g(v) \approx g_h(v) \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3} g(h\mathbf{j}) \omega(v - h\mathbf{j}) \quad (h > 0)$$

für eine gegebene Funktion $\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \omega(v) dv = 1$$

untersucht und es wurden jeweils Fehlerabschätzungen in $\mathbb{L}_p$ -, Sobolev- und Besselpotentialräumen bewiesen. Für die Approximation mit Hilfe der geglätteten Partikel wurde speziell der Fall $\Lambda = \tilde{\Lambda} h^2$ für ein $\tilde{\Lambda} > 0$ betrachtet. Charakteristisch für das Approximationsverhalten ist, dass sich die Fehlerschranke als Summe

$$\|g - g_h\| \leq C_g(h^n + \varepsilon(h))$$

darstellen lässt. Dabei bezeichnet ε den so genannten *Sättigungsfehler*, für den im allgemeinen gilt:

$$\varepsilon(h) = \mathcal{O}(1) \quad , \quad h \rightarrow 0.$$

Die Quasi-Approximationsordnung n ist durch die folgende Bedingung gegeben:

$$\forall \boldsymbol{\alpha} : 1 \leq |\boldsymbol{\alpha}| < n : \int_{\mathbb{R}^3} v^{\boldsymbol{\alpha}} \omega(v) dv = 0 \quad , \quad \exists \boldsymbol{\alpha}_0 \in \mathbb{N}_0^3 : |\boldsymbol{\alpha}_0| = n, \int_{\mathbb{R}^3} v^{\boldsymbol{\alpha}_0} \omega(v) dv \neq 0.$$

Weitere Details zur konkreten Konstruktion von derartigen Näherungen mit Hilfe der geglätteten Partikel finden sich in MAZ'YA/SCHMIDT [38].

Abschließende Bemerkungen

Durch die im Rahmen dieser Arbeit angestellten Untersuchungen des Boltzmannschen Kollisionsoperators wurde erreicht:

- Für bereits bekannte Resultate konnten die Beweise deutlich transparenter geführt werden. Dies geschah unter solchen Voraussetzungen und Annahmen, die im Zusammenhang mit der theoretischen Untersuchung bzw. numerischen Berechnung von Lösungen des Anfangswertproblems für die räumlich homogene Boltzmann-Gleichung keine zusätzlichen Einschränkungen bedeuten.
- An neuen Resultaten konnte die Stetigkeit des Kollisionsoperators für Verteilungsdichtefunktionen f aus gewichteten $\mathbb{L}_p$ -Räumen für beliebige p nachgewiesen werden, ohne zusätzlich zu verlangen, dass $f \in \mathbb{L}_1$ gilt. Hinzu kam die systematische Ausweitung der Ergebnisse auf die Besselpotentialräume. Neu sind auch die Konstruktion metrischer Räume, die vom Kollisionsoperator in sich selbst stetig abgebildet werden sowie der Nachweis, dass für Funktionen aus exponentiell gewichteten Räumen der Gewinnterm diese Eigenschaft besitzt.
- Sowohl für die Normabschätzungen des Operators als auch für die Untersuchung der Momente und der Stabilität bezüglich der Anfangsbedingung wurde Wert darauf gelegt, die Abhängigkeit der Konstanten von den beteiligten Größen in expliziter Form herauszuarbeiten. Einzige Ausnahme sind die durch Interpolation und Einbettung im Zusammenhang mit der Theorie der Besselpotentialräume auftretenden Konstanten.
- Galerkin-Petrov-Methoden zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems zur räumlich homogenen Boltzmann-Gleichung wurden in ganz allgemeiner Art und Weise *a priori* untersucht. Dabei wurden sofort auch Aspekte der praktischen Umsetzung miteinbezogen.

Die Kenntnisse über den Kollisionsoperator hinsichtlich der Abbildungseigenschaften sind für den Fall der Kollisionskerne mit nichtsingulärem Winkelanteil damit recht vollständig. Abbildungseigenschaften für die schwache Formulierung werden vor allem dann von Nutzen sein, wenn praktische Anwendungen nach der Behandlung von Kernen mit Winkelsingularitäten verlangen und entsprechende explizite mathematische Modelle verfügbar sind. Hier sind noch einige Fragen zu klären.

Für die systematische Untersuchung der Galerkin-Petrov-Methoden waren die Ausführungen in dieser Arbeit ein erster Schritt. Von einem umfassenden Verständnis der

Verfahren in der hier betrachteten räumlich homogenen Situation kann man auch neue Erkenntnisse für die räumlich inhomogene Gleichung erwarten.

Diesbezüglich möchte man sich nur zu gerne der Meinung des Mannes anschließen, der entscheidend daran beteiligt war, die kinetische Gastheorie als mathematisches Teilgebiet aus der Taufe zu heben, und der zum Schluss noch einmal zu Wort kommen soll:

„Es kann diese partielle Differentialgleichung, wie wir später sehen werden, in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen verwandelt werden, wenn man an die Stelle des Doppelintegrals eine Summe sehr vieler Glieder setzt. [...] An dem Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen werden dann alle Rechnungsoperationen viel anschaulicher.“

L. BOLTZMANN [15]

Literaturverzeichnis

- [1] R. Alexandre, C. Villani: *On the Boltzmann equation for long range interaction and the Landau approximation in plasma physics*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (1), 30-70 (2002)
- [2] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani, B. Wennberg: *Entropy Dissipation and Long Range Interactions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **152** (4), 327-355 (2000)
- [3] L. Arkeryd: *On the Boltzmann equation, Part I: Existence*, Arch. Rat. Mech. Anal. **45**, 1-16 (1972)
- [4] L. Arkeryd: *On the Boltzmann equation, Part II: The full initial value problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **45**, 17-34 (1972)
- [5] L. Arkeryd: *Intermolecular forces of infinite range and the Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **77**(1), 11-21 (1981)
- [6] L. Arkeryd: *L^∞ -estimates for the space homogeneous Boltzmann equation*, J. Stat. Phys. **31**, 347-361 (1982)
- [7] H. Babovsky: *Die Boltzmann-Gleichung: (Modellbildung - Numerik - Anwendungen)*, Teubner, Stuttgart (1998)
- [8] G.A. Bird: *Monte Carlo simulation in an engineering context*, Progr. Astro. Aero, **74**, 239-255 (1976)
- [9] A.V. Bobylev: *A class of invariant solutions of the Boltzmann equation*, Sov. Phys. Dokl. **21** (11), 632-34 (1976)
- [10] A.V. Bobylev: *The theory of the nonlinear, spatially uniform Boltzmann equation for Maxwellian molecules*, Sov. Sci. Rev. C Math. Phys. **7**, 111-233, (1988)
- [11] A.V. Bobylev: *Moment inequalities for the Boltzmann equation and applications to spatially homogeneous problems*, J. Stat. Phys. **88** (5-6), 1183-1214 (1997)
- [12] A.V. Bobylev, A. Palczewski, J. Schneider: *A consistency result for a discrete-velocity model of the Boltzmann equation*, SIAM J. Numer. Anal. **34** (5) (1997)
- [13] A.V. Bobylev, C. Cercignani: *Discrete velocity models without nonphysical invariants*, J. Statist. Phys. **97** (3-4), 677-686 (1999)

- [14] A.V. Bobylev, S. Rjasanow: *Numerical solution of the Boltzmann equation using a fully conservative difference scheme based on the fast Fourier transform*, Transport Theory Statist. Phys. **29** (3-5), 289-310 (2000)
- [15] L. Boltzmann: *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften **66**, 275-370 (1872)
- [16] F. Bouchut, L. Desvillettes: *A proof on the smoothing properties of the positive part of Boltzmann's kernel*, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1), 47-61 (1998)
- [17] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, New York (1988)
- [18] T. Carleman: *Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, Acta Math. **60**, 369-424 (1932)
- [19] C. Cercignani: *The Boltzmann equation and its applications*, Springer, New York (1988)
- [20] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti: *The mathematical theory of dilute gases*, Springer, New York (1994)
- [21] C. Cercignani: *Rarefied Gas Dynamics - From basic concepts to actual calculations*, Cambridge University Press, Cambridge (2000)
- [22] R. DiPerna, P.-L. Lions: *On the Cauchy problem for the Boltzmann equation: Global existence and weak stability*, Ann. of Math. **130** (2), 312-366 (1989)
- [23] R. Duduchava, S. Rjasanow: *Mapping properties of the Boltzmann collision operator*, erscheint in Integr. Equ. Oper. Theory, Preprint **32**, Universität des Saarlandes, <http://www.math.uni-sb.de/preprint.html> (2001)
- [24] L. Desvillettes: *Some Applications of the Method of Moments for the Homogeneous Boltzmann and Kac Equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **123**, 387-400 (1993)
- [25] T. Elmroth: *Global boundedness of moments of solutions of the Boltzmann equation for forces with infinite range*, Arch. Rat. Mech. Anal. **82**, 1-12 (1983)
- [26] R.E. Edwards: *Functional Analysis: Theory and Applications*, Dover Publications, New York (1995)
- [27] H. Grad: *On the kinetic theory of rarefied gases*, Comm. Pure Appl. Math. **2**, 331-407 (1949)
- [28] H. Grad: *Principles of the kinetic theory of gases*, Flügges Handbuch der Physik **XII**, Springer, 205-294 (1958)

- [29] T. Gustafsson: *L^p -estimates for the nonlinear spatially homogeneous Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **92**, 23-57 (1986)
- [30] T. Gustafsson: *Global L^p -properties for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **103**, 1-38 (1988)
- [31] I. Ibragimov, S. Rjasanow: *Numerical solution of the Boltzmann equation on the uniform grid*, Computing **69** (2), 163-186 (2002)
- [32] P.L. Lions: *Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications I*, J. Math. Kyoto Univ. **34** (2), 391-427 (1994)
- [33] X. Lu: *A direct method for the regularity of the gain term in the Boltzmann equation*, J. Math. Anal. Appl. **223** (2), 409-435 (1998)
- [34] X. Lu, B. Wennberg: *Solutions with increasing energy for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Nonl. Anal. Real World Appl. **3** (2), 243-258 (2002)
- [35] R.H. Martin: *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, Wiley, New York (1976)
- [36] J. Maxwell: *On the dynamical theory of gases*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **157**, 49-88 (1867)
- [37] V. Maz'ya: *Approximate approximations*, The mathematics of finite elements and applications, Wiley, Chichester, 77-104 (1994)
- [38] V. Maz'ya, G. Schmidt: *On approximate approximations using Gaussian kernels*, IMA J. Numer. Anal. **16** (1), 13-29 (1996)
- [39] E. J. McShane: *Integration*, Princeton University Press, Princeton (1947)
- [40] J. Mikusinski *The Bochner Integral*, Birkhäuser, Basel (1978)
- [41] S. Mischler, B. Wennberg: *On the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire **16** (4), 467-501 (1999)
- [42] C. Mouhot, C. Villani: *Regularity theory for the spatially homogeneous Boltzmann equation with cut-off*, Arch. Rat. Mech. Anal. **173** (2), 169-212 (2004)
- [43] L. Pareschi, B. Perthame: *A Fourier spectral method for homogeneous Boltzmann equations*, Transport Theory Statist. Phys. **25** (3-5), 369-382 (1996)
- [44] L. Pareschi, G. Russo: *Numerical solution of the Boltzmann equation. I. Spectrally accurate approximation of the collision operator* SIAM J. Numer. Anal. **37** (4), 1217-1245 (2000)
- [45] L. Pareschi, G. Russo: *On the stability of spectral methods for the homogeneous Boltzmann equation*, Transport Theory Statist. Phys. **29** (3-5), 431-447 (2000)

- [46] A. Ja. Povzner: *About the Boltzmann equation in kinetic gas theory*, Math. SSSR Sbornik, **58**, 65-86 (1962)
- [47] A. Pulvirenti, B. Wennberg: *A Maxwellian lower bound for solutions to the Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys. **182** (1), 145-160 (1997)
- [48] C. Ringhofer: *Space-time discretization of series expansion methods for the Boltzmann transport equation*, SIAM J. Numer. Anal. **38** (2), 442-465 (2000)
- [49] J. Struckmeier: *Some estimates on the Boltzmann collision operator*, Math. Models Methods Appl. Sci. **7** (7), 1023-1033 (1997)
- [50] H. Triebel: *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel (1983)
- [51] C. Villani: *Contribution à l'étude mathématique des équations de Boltzmann et de Landau en théorie cinétique des gaz et des plasmas*, Dissertation, Université Paris-Dauphine (1998)
- [52] C. Villani: *On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **143**, 273-307 (1998)
- [53] W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Auflage, Springer, Berlin (2000)
- [54] B. Wennberg: *Regularity in the Boltzmann equation and the Radon transform*, Comm. Part. Diff. Eq. **19** (11/12), 2057-2074 (1994)
- [55] B. Wennberg: *On moments and uniqueness for solutions to the space homogeneous Boltzmann equation*, Transp. Th. Stat. Phys **23** (4), 533-539 (1994)
- [56] B. Wennberg: *Entropy dissipation and moment production for the Boltzmann equation*, J. Stat. Phys. **86** (5-6), 1053-1066 (1997)
- [57] B. Wennberg: *An example of nonuniqueness for solutions to the homogeneous Boltzmann equation*, J. Stat. Phys. **95** (1-2), 469-477 (1999)
- [58] D. Werner: *Funktionalanalysis*, 2. Auflage, Springer, Berlin (1997)