

Das direkte und inverse akustische Streuproblem im \mathbb{R}^d

Dissertation

zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von

Erik Wallacher

Saarbrücken
2007

Tag des Kolloquiums: 18.Mai 2007
Dekan: Univ.-Prof. Dr. T. Herfet
Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. E. Albrecht
Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr. A.K. Louis
Univ.-Prof. Dr. S. Rjasanov
Akademischer Mitarbeiter: Dr. A. Lakhal

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	6
1 Mathematische Hilfsmittel	9
1.1 Konventionen	9
1.1.1 Polarkoordinaten	9
1.1.2 Multiplikationsoperatoren	9
1.1.3 Charakteristische Funktion	9
1.2 Sobolev-Räume und Fourier-Transformation	10
1.3 Spezielle Funktionen	10
1.3.1 Kugelflächenfunktionen	10
1.3.2 Bessel-Funktionen	12
1.3.3 Lommel-Funktionen	17
1.4 Spezielle Wellen	19
1.5 Spezielle Orthogonalbasen	21
1.6 Jacobi-Anger-Entwicklung	23
2 Mathematische Modellierung	25
2.1 Eigenschaften des Lippmann-Schwinger-Operators	28
2.2 Eigenschaften des Lippmann-Schwinger-Operators für den Außenraum	34
3 Das direkte Streuproblem	38
3.1 Quell- und <i>Feldoperator</i>	38
3.2 Eigenschaften des Quell- und Feldoperators	40
3.3 Lösungen für radialsymmetrische Objekte	41
3.4 Lösungen für beliebige Objekte	48
4 Das inverse Streuproblem	59
4.1 Singulärwertzerlung	60
4.2 Regularisierung des linearen Problems	63
4.3 Streuamplitude	64
4.4 Dirichlet-zu-Neumann Abbildung	67
4.5 Fernfelddaten	69
4.6 Zusammenhang der Quellen und Felder	70
4.7 Anteile der Quellen im Nullraum	72
4.7.1 Weitere Ansätze	76
4.7.2 Ansatz I	76

4.7.3	Ansatz II	78
Anhang		85
Index		85

Einleitung

In vielen Anwendungsgebieten möchte man ein Objekt auf dessen Beschaffenheit im Inneren untersuchen. Hierbei ist man bestrebt, Methoden einzusetzen, die das Objekt möglichst nicht beschädigen. In der Materialwissenschaft spricht man von „zerstörungsfreiem Prüfen“, im medizinischem Bereich von „nicht invasiven Untersuchungen“. Um solche Messungen durchführen zu können, ist man auf einen Informationsträger angewiesen, der indirekt Aufschluß über die gesuchten Größen gibt.

Als Informationsträger eignen sich jegliche Art von Wellen (z.B. Ultraschall, Röntgenstrahlung und elektromagnetische Strahlung), sofern sie das zu untersuchende Objekt durchdringen können.

Die mathematische Modellierung der Streuung von zeitharmonischen akustischen Wellen an Hindernissen erfolgt über die Helmholtz-Gleichung. Das Anwendungsgebiet dieser Gleichung ist nicht auf akustische Wellen beschränkt. Sie spielt auch eine wichtige Rolle bei elektromagnetischer Strahlung (siehe z.B. in [Lak06]). Unter anderem wird die Helmholtz-Gleichung auch zur Modellierung in der Seismologie, Impedanz Tomographie (vgl. [Man01] und Phasencontrasttomographie (vgl. [Jon03]) benutzt. In Verbindung mit der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung erhält man die dazugehörige Integralgleichung. In dieser Arbeit werden diese beiden Gleichungen untersucht und wichtige Eigenschaften werden aufgezeigt.

Das erste Kapitel beschäftigt sich im Wesentlichen mit speziellen Funktionen und deren Eigenschaften. Insbesondere werden Kugelflächenfunktionen und Bessel-Funktionen behandelt. Die in diesem Kapitel angegebenen Sachverhalte sind speziell für die vorliegende Arbeit zusammengestellt. Dabei handelt es sich nicht nur um bereits bekannte Ergebnisse aus der Literatur. Weiterhin werden Basen bestehend aus sphärischen Wellen des $L_2(B_R)$ angegeben.

Die Messanordnung des für diese Arbeit relevanten Streuvorgang wird in Kapitel II schematisch dargestellt. Das zu Grunde liegende mathematischen Modell wird vorgestellt. Die physikalische Herleitung kann in [Wüb95] und [CK92] nachgelesen werden. Grundlagen für dieses Modell bilden zwei Operatoren, der Helmholtz-Operator und der Lippmann-Schwinger-Operator. Elementare Eigenschaften der Operatoren werden herausgestellt.

Das dritte Kapitel beginnt mit der Einführung von Quell- und Feldoperator. Der Quelloperator bildet eine Funktion auf deren Quelle ab, wohingegen der Feldoperator einer Funktion deren Gesamtfeld zuordnet. Mit diesen Operatoren lässt sich eine allgemeine Beziehung zwischen Feldern, Quellen und der zu Grunde liegenden Objektfunktion darstellen. Eigenschaften der Operatoren werden herausgestellt. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird das direkte Streu-

problem behandelt. Analytische Lösungen für radialsymmetrische Objekte werden angegeben. Für beliebige Kontraste wird eine Verallgemeinerung der Riccati-Differentialgleichung (vgl. [CR97]) hergeleitet. Weitere Differentialgleichungen, die der Lösung des direkten Streuproblems dienen, werden angegeben.

Das inverse Streuproblem wird in Kapitel IV unter die Lupe genommen. Mit Hilfe der Basen aus Kapitel I lässt sich zeigen, dass das Problem in zwei Teile separiert werden kann. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Bestimmung der Quell-Anteile die senkrecht zum Nullraum des Lippmann-Schwinger-Operators stehen. Es handelt sich hierbei um ein lineares schlecht gestelltes Problem. Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung kann eine stabile Berechnung dieser Anteile erfolgen. Ausgangspunkt für diese Berechnung ist die Kenntnis des gestreuten Feldes auf dem Rand des Rekonstruktionsgebietes. Verschiedene Arbeitsgruppen auf der ganzen Welt arbeiten mit verschiedenen Datenlagen. Anstatt des gestreuten Feldes werden für die Berechnung unter anderem Fernfelddaten, Dirichlet-zu-Neumannabbildung und die Streuamplitude verwendet. Mit Hilfe des Quell- bzw. Feldoperators können diese Begriffe verallgemeinert und ein Zusammenhang zwischen den verschiedenen Datenlagen hergestellt werden. Es zeigt sich, dass sie äquivalent sind. Im weiteren Verlauf des Kapitels wird ein Zusammenhang zwischen Quelle und Feld aufgezeigt. Anschließend wird ein Verfahren vorgestellt, dass die Nullraumanteile der Quellen bestimmen kann. Dieses Verfahren wird auf Testbeispiele angewandt. Abschließend folgen weitere Ansätze zur Bestimmung der Nullraumanteile.

Allen voran gilt mein Dank Herrn Professor Louis. Über die stets hilfreichen Ratschläge hinaus, trug er Sorge für eine ausgezeichnete Ausstattung an Literatur sowie Soft- und Hardware. Bedanken will ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für das angenehme und produktive Arbeitsklima. Besonderen Dank bin ich Thomas Weber verpflichtet, der bei computer-spezifischer Problemen stets zur Seite stand. Darüber hinaus übernahm er das Korrekturlesen. Danken möchte ich auch Dr. Aref Lakhali für die fruchtbaren Diskussionen über dieses Arbeitsgebiet und Andreas Groh für Ratschläge bei allgemeinen mathematischen Problemen. Einen wichtigen Rückhalt gab mir die Familie. Ich danke meinen Eltern und Schwiegereltern, die mein Studium in jeder Hinsicht unterstützten. Meinen abschließenden Dank gilt meiner lieben Frau Anja für die unglaubliche Geduld und Ausdauer. Sie war der ruhende Pol in eher hektischen Zeiten.

Symbolverzeichnis

Spezielle Funktionen und Bezeichnungen

S^{d-1}	d-dimensionale Einheitskugel	Kapitel 1.1.2
fA	Multiplikationsoperator	Kapitel 1.1.2
A_f	Multiplikationsoperator	Kapitel 1.1.2
χ_Λ	charakteristische Funktion bezüglich einer Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$	Kapitel 1.1.3
\hat{f}	Fourier-Transformation von f	Kapitel 1.2
$H^s(\Omega)$	Sobolev-Raum	Kapitel 1.2
$\ \cdot\ _{H^s(\Omega)}$	Sobolev-Norm	Kapitel 1.2
C_n^v	Gegenbauer-Polynome	Kapitel 1.3.1
$N(n, d)$	Die Anzahl der Elemente der Menge $N(n, d)$ ist gleich der Anzahl linear unabhängiger homogener harmonischer Polynome vom Grad n im \mathbb{R}^d	Kapitel 1.3.1
Y_n^m	Kugelflächenfunktionen	Kapitel 1.3.1
Δ	Laplace-Operator im \mathbb{R}^d	Kapitel 1.3.2
Δ_s	Beltrami-Operator im \mathbb{R}^d	Kapitel 1.3.2
$\Gamma(x)$	Gamma-Funktion	Kapitel 1.3.1
J_ν	Bessel-Funktion 1. Art	Kapitel 1.3.2
N_ν	Bessel-Funktion 2. Art	Kapitel 1.3.2
$H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$	Bessel-Funktion 3. Art	Kapitel 1.3.2
C_ν	Linearkombination aus J_ν und N_ν	Kapitel 1.3.2
$S_{\mu,\nu}^{(1)}, S_{\mu,\nu}^{(2)}$	Lommel-Funktionen	Kapitel 1.3.3
${}_1F_2$	Hypergeometrische Reihe	Kapitel 1.3.3
$(a)_p$	Pochhammer-Symbol	Kapitel 1.3.3
$\sigma = \sigma(d)$	Dimensionsabhängige Hilfsfunktion	Kapitel 1.4
$j_n^{m,(1)}, h_n^{m,(1)}, h_n^{m,(2)}$	sphärische Wellen	Kapitel 1.4
$v_{n,p}^m$	Momentenwellen	Kapitel 1.4
$s_{n,p}^{m,(1)}, s_{n,p}^{m,(2)}$	Lommel-Wellen	Kapitel 1.4
$B_r(a)$	offene Kugel mit Radius r um a	Kapitel 1.5
B_r	offene Kugel mit Radius r um Null	Kapitel 1.5
W_n^m	Linearer Teilraum des $L_2(B_R)$	Kapitel 1.5

Spezielle Funktionen und Bezeichnungen

u_i	Einfallendes Feld	Kapitel 2
u_s	Gestreutes Feld	Kapitel 2
u	Gesamt Feld	Kapitel 2
R	Radius des Untersuchungsgebiet	Kapitel 2
k	Wellenzahl	Kapitel 2
f	Objektfunktion, Streuer, Kontrast	Kapitel 2
$A^{(k,R)} = A$	Lippmann-Schwinger-Operator	Kapitel 2
$A_\Gamma^{(k,R)} = A_\Gamma$	Lippmann-Schwinger-Operator für den Außenraum	Kapitel 2
G_k	Greensche Funktion	Kapitel 2
$F^{(k,R,f)} = F$	Feldoperator	Kapitel 3.1
$S^{(k,R,f)} = S$	Quelloperator	Kapitel 3.1
D	Drehoperator	Kapitel 3.3
Q	Orthogonale Matrix	Kapitel 3.3
$S^{t,k}$	Streumatrix	Kapitel 3.4
H^t, J^t bzw. Y, G	unendlichdimensionalen Matrizen	Kapitel 3.4
$S^{t,k,-}, S^{t,k,+}$	Streuatrizen des Feldes	Kapitel 3.4
P	Projektion auf den Nullraum von A_Γ	Kapitel 4.2
$\Lambda^{(k),(R),(f)}(x, y)$	Streuamplitude	Kapitel 4.3
D_N	Dirichlet-zu-Neumann Abbildung	Kapitel 4.4
D_N^t	Verallgemeinerte Dirichlet-zu-Neumann Abbildung	Kapitel 4.4
$u^{\infty, t\theta}(\omega)$	Fernfeld Daten	Kapitel 4.5

Allgemeine mathematische Bezeichnungen

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen ($0 \in \mathbb{N}$)
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Skalarprodukt auf dem Raum X
$\ \cdot\ _X$	Norm auf dem Vektorraum X
$L_2(X)$	$\{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \int_X f(y) ^2 dy < \infty\}$, Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen über X
$L_\infty(X)$	Raum der wesentlich beschränkten Funktionen
$l^2(J)$	$\{(x_j)_{j \in J} \mid x_j \in \mathbb{C} \text{ und } \ (x_j)_{j \in J}\ _{l^2(J)} < \infty\}$, Hilbertraum der quadratsummierbaren Folgen ($J \subseteq \mathbb{Z}$)
$B_r(a)$	$\{x \mid \ x - a\ < r\}$, Offene Kugel mit Radius r um a
$\text{supp}(f)$	$\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$, Träger von f
span	Lineare Hülle
$O(\cdot)$	Landau Symbol
$N(A)$	Nullraum von A
$R(A)$	Bild von A
A^*	Adjungierter Operator von A
$\langle v, w \rangle_\Omega$	$L_2(\Omega)$ -Skalarprodukt
$\text{Mat}(q \times m)$	Raum der $(q \times m)$ -Matrizen

1 Mathematische Hilfsmittel

1.1 Konventionen

1.1.1 Polarkoordinaten

Für $d = 2, 3, \dots$ sei S^{d-1} die d -dimensionale Einheitssphäre. Für $r > 0$, $\omega \in S^{d-1}$ und einen Vektor $x = r\omega \in \mathbb{R}^d$, wird die übliche Polarkoordinatendarstellung für den zwei- und dreidimensionalen Fall verwandt. Das heißt für $\theta \in [0, \pi]^{d-2}$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ hat x die Parametrisierung in Polarkoordinaten

$$x = r\omega = r\omega(\varphi) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad d = 2$$

$$x = r\omega = r\omega(\theta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad d = 3.$$

Für die Fälle $d \geq 4$ werden die Polarkoordinaten rekursiv definiert:

$$r\omega(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}, \varphi) := r \begin{pmatrix} \omega(\theta_2, \dots, \theta_{d-2}, \varphi) \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Multiplikationsoperatoren

Für eine Funktion f und einen linearen Operator A sind die Operatoren ${}_fA$ und A_f definiert durch

$$\begin{aligned} {}_fAv(x) &= f(x) Av(x) \\ A_fv(x) &= A(fv)(x). \end{aligned}$$

1.1.3 Charakteristische Funktion

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \Omega \\ 0 & , x \notin \Omega \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* bezüglich Ω .

1.2 Sobolev-Räume und Fourier-Transformation

Die *Fourier-Transformation* \hat{f} von f ist definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-i\langle \xi, t \rangle} dt.$$

Für $s \geq 0$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ werden die *Sobolev-Räume* mit

$$H^s(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) : \|f\|_{H^s(\Omega)} < \infty\}$$

bezeichnet, wobei die *Sobolev-Norm* definiert ist als

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3 Spezielle Funktionen

Für die analytische Behandlung von Streuproblemen ist es unabdingbar, gewisse Grundkenntnisse über spezielle Funktionen zu besitzen. Insbesondere sind Kugelflächen- und Bessel-Funktionen von besonderer Bedeutung. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen werden in diesem Abschnitt zusammengestellt. Beweisführungen sind z.B. nachlesbar in [Wat58] und [Gra22]. Eine umfangreiche Formelsammlung ist in [AS65] zu finden, und ein Zusammenhang dieser speziellen Funktionen zur Helmholtz-Gleichung und damit zum Streuproblem wird in [Hoc86] hergestellt.

1.3.1 Kugelflächenfunktionen

Kugelflächenfunktionen ergeben sich durch Einschränkung harmonischer homogener Polynome auf die d -dimensionale Einheitssphäre.

Definition 1.1 Sei $Q(x_1, \dots, x_d)$ ein harmonisches homogenes Polynom vom Grad n in d Variablen, dann heißt die Funktion

$$Y_n : S^{d-1} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$Y_n(x) := Q(x)$$

Kugelflächenfunktion vom Grad n .

Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt wegen der Homogenität:

$$Q(x) = Q(|x| \frac{x}{|x|}) = |x|^n Y_n(\frac{x}{|x|}).$$

Für die folgende Definition seien C_n^ν die Gegenbauer-Polynome mit der Normierung

$$C_n^\nu(1) = \binom{n + 2\nu - 1}{n}.$$

Die Mengen $N(n, d)$ seien für $d \in \{1, 2, \dots\}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$N(n, d) := \begin{cases} \{0\}, & d = 1 \\ \{-n, n\}, & d = 2 \\ \{-n, \dots, n\}, & d = 3 \\ \{(m_1, \dots, m_{d-2}) \in \mathbb{N}^{d-3} \times \mathbb{Z} : n \geq m_1 \geq \dots \geq m_{d-3} \geq |m_{d-2}|\}, & d \geq 4. \end{cases} \quad (1.1)$$

Die Anzahl der Elemente von $N(n, d)$ ist gerade gleich der Anzahl linear unabhängiger homogener harmonischer Polynome vom Grad n im \mathbb{R}^d .

Kugelflächenfunktionen können so gewählt werden, dass sie ein vollständiges Orthogonalsystem für den Raum $L^2(S^{d-1})$ bilden. Für die Fälle $d = 2, 3, \dots$ wird für diese Arbeit folgende Wahl getroffen:

Definition 1.2 Sei $d \in \{2, 3, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in N(m, d)$. Sei $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{d-2}) \in [0, \pi]^{d-2}$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Mit

$$Y_n^m(\omega) := \begin{cases} Y_n^m(\varphi) := e^{im\varphi}, & d = 2 \\ Y_n^m(\theta, \varphi) := c_n^{m,d} P_n^{m,d}(\cos \theta) e^{im\varphi}, & d = 3 \end{cases} \quad (1.2)$$

werden die Kugelflächenfunktionen vom Grad n für den zwei- bzw. dreidimensionalen Fall bezeichnet.

Für die Fälle $d \geq 4$ werden die Funktionen rekursiv definiert:

$$Y_n^{(m_1, \dots, m_{d-2})}(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}, \varphi) := c_n^{m_1, d} P_n^{m_1, d}(\cos \theta_1) Y_{m_1}^{(m_2, \dots, m_{d-2})}(\theta_2, \dots, \theta_{d-2}, \varphi) \quad (1.3)$$

wobei

$$\begin{aligned} P_n^{m,d}(t) &= (-1)^{|m|} (1-t^2)^{\frac{|m|}{2}} C_{n-|m|}^{\sigma+|m|}(t), \\ c_n^{m,d} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{|m|+\sigma-\frac{1}{2}} \Gamma(|m|+\sigma) \sqrt{\frac{(n+\sigma)(n-|m|)!}{(n+|m|+2\sigma-1)!}}, \\ \sigma &:= \sigma(d) = \frac{d-2}{2} \end{aligned}$$

und C_n^ν die Gegenbauer-Polynome darstellen mit obiger Normierung. Das Symbol Γ bezeichnet die Gamma-Funktion.

Mit dieser Festlegung haben die Kugelflächenfunktionen die Eigenschaften:

$$\overline{Y_n^m(\omega)} = Y_n^{-m}, \quad (1.4)$$

$$\int_{S^{d-1}} Y_n^m(\omega) \overline{Y_q^p(\omega)} ds(\omega) = 2\pi \delta_{nq} \delta_{mp} \quad (1.5)$$

$$\{Y_n^m\}_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d)} \text{ bildet ein vollständiges Orthogonalsystem des } L_2(S^{d-1}). \quad (1.6)$$

Beweise hierzu finden sich in [CK98], [Bec06] bzw. [MO48].

Bemerkung 1.3 Eine explizite rekursive Darstellung der Kugelflächenfunktionen für den Fall $d \geq 3$ findet sich in [Bec06] bzw. [MO48]. Dabei ist für $m = (m_1, \dots, m_{d-2}) \in N(n, d)$ das inverse Element definiert als $-m := m = (m_1, \dots, m_{d-3}, -m_{d-2}) \in N(n, d)$. Die zusätzliche Indizierung ist für diese Arbeit nur störend. Wichtig ist jedoch, dass eine Parametrisierung der Kugelflächenfunktionen der Form

$$Y_n^m(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}, \varphi) = P(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}) e^{im_{d-2}\varphi} \quad \theta_i \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi] \quad (1.7)$$

auch für $d \geq 4$ existiert. Dabei ist die Funktion P im wesentlichen ein Produkt aus Gegenbauer-Polynomen.

1.3.2 Bessel-Funktionen

Der Laplace-Operator hat für eine Funktion $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ bezüglich der Polarkoordinaten die Darstellung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_s V. \quad (1.8)$$

Der Operator Δ_s wirkt nur auf die Winkelvariablen und wird als *Beltrami-Operator* bezeichnet. Für die Fälle $d \in \{2, 3\}$ gilt

$$\Delta_s V = \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}, & d = 2 \\ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right), & d = 3. \end{cases} \quad (1.9)$$

Sei Q ein homogenes harmonisches Polynom vom Grad n und Y_n die dazugehörige Kugelflächenfunktion.

Dann ist $Q(r\omega) = r^n Y_n(\omega)$ und es folgt :

$$0 = \Delta Q(r\omega) = r^{n-2} [\Delta_s Y_n(\omega) + n(n+d-2)Y_n(\omega)].$$

Folglich sind Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen des Beltrami-Operators

$$\Delta_s Y_n = -n(n+d-2)Y_n. \quad (1.10)$$

Von Interesse sind die Lösungen der *homogenen Helmholtz-Gleichung*

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad (1.11)$$

die im Zusammenhang mit dem Streuproblem auftreten.

Nach Separation von $u(r\omega) = f_n(r)Y_n(\omega)$ in einen radialen und einen sphärischen Anteil ändert sich (1.11) zu

$$\left(f_n'' + \frac{d-1}{r} f_n' + k^2 f_n \right) Y_n + \frac{1}{r^2} f_n \Delta_s Y_n = 0, \quad (1.12)$$

und mit (1.10) ergibt sich

$$f_n'' + \frac{d-1}{r} f_n' + \left[k^2 - \frac{n(n+d-2)}{r^2} \right] f_n = 0.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung werden auch *sphärische Bessel-Funktionen* genannt. Durch Substitution mit $z = kr$ und $g_n(z) = f_n(\frac{z}{k})$ folgt

$$g_n'' + \frac{d-1}{z} g_n' + \left[1 - \frac{n(n+d-2)}{z^2} \right] g_n = 0,$$

und durch nochmaliges Substituieren mit $\nu = n + \frac{d}{2} - 1$ und $g_n(z) = z^{1-\frac{d}{2}} h_\nu(z)$ reduziert sich die Differentialgleichung zu

$$h_\nu'' + \frac{h_\nu'}{z} + \left[1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right] h_\nu = 0. \quad (1.13)$$

Die Gleichung 1.13 heißt *Besselsche Differentialgleichung*. Die Lösungen dieser Gleichung heißen allgemein *Bessel-Funktionen* oder *Zylinderfunktionen*. Einige von ihnen haben einen speziellen Namen. Definition und einige elementare Eigenschaften dieser speziellen Bessel-Funktionen werden nachfolgend zusammengestellt (siehe auch [AS65], [Luk69], [Wat58]).

Bessel-Funktionen 1. Art

Mit J_ν werden die *Bessel-Funktionen 1. Art* bezeichnet. Sie haben unter anderem die Eigenschaften

$$J_\nu(r) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q! \Gamma(\nu + q + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2q} r^{\nu+2q}, \quad \nu \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \quad (1.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(r)}{r^\nu} = 1, \quad \nu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\} \quad (1.15)$$

Besselfunktionen 2. Art

Mit N_ν werden die *Besselfunktionen 2. Art* bezeichnet. Sie werden auch *Neumann- bzw. Weber-Funktionen* genannt. Sie haben unter anderem die Eigenschaften

$$\lim_{r \rightarrow 0} -\frac{\pi r^\nu N_\nu(r)}{2^\nu \Gamma(\nu)} = 1, \quad \Re \nu > 0 \quad (1.16)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi N_0(r)}{2 \log r} = 1.$$

Besselfunktionen 3. Art

Mit $H_\nu^{(1)}(r) := J_\nu(r) + iN_\nu(r)$ und $H_\nu^{(2)}(r) := J_\nu(r) - iN_\nu(r)$ werden die *Besselfunktionen 3. Art* bezeichnet. Falls der obere Index im Textverlauf wegfällt, so ist mit $H_m(x)$ die Funktion $H_m^{(1)}(x)$ gemeint. Im Unendlichen gilt asymptotisch für die Funktionen $H_\nu^{(1)} = H_\nu$:

$$H_\nu(r) = \sqrt{\frac{2}{r\pi}} e^{i(r - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi)} + O\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

Allgemeingültige Eigenschaften von Bessel-Funktionen

Für $\nu \in \mathbb{C}$ sei C_ν irgendeine Linearkombination aus den Bessel-Funktionen J_ν und N_ν . Es gelten die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} C_{\nu-1}(r) + C_{\nu+1}(r) &= \frac{2\nu}{r} C_\nu(r) \\ C_{\nu-1}(r) - C_{\nu+1}(r) &= 2C'_\nu(r) \end{aligned} \right\} \nu, r \in \mathbb{C} \quad (1.18)$$

$$\left. \begin{aligned} C'_\nu(r) &= C_{\nu-1}(r) - \frac{\nu}{r} C_\nu(r) \\ C'_\nu(r) &= -C_{\nu+1}(r) + \frac{\nu}{r} C_\nu(r) \end{aligned} \right\} \nu, r \in \mathbb{C} \quad (1.19)$$

$$\left. \begin{aligned} r^{2p-\nu} (r^{-1} \frac{d}{dr})^p [r^\nu C_\nu(r)] &= r^p C_{\nu-p}(r) \\ r^{2p+\nu} (r^{-1} \frac{d}{dr})^p [r^{-\nu} C_\nu(r)] &= (-1)^p r^p C_{\nu+p}(r) \end{aligned} \right\} \nu, r \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N} \quad (1.20)$$

$$J_{\nu-1}(r)N_\nu(r) - J_\nu(r)N_{\nu-1}(r) = -\frac{2}{\pi r} \quad \nu, r \in \mathbb{C}. \quad (1.21)$$

Für analytische Untersuchungen und für die Konstruktion einer an das Streuproblem angepassten Orthogonalbasis sind Stammfunktionen für $r C_n(tr) C_n(kr)$ sehr nützlich. Diese Stammfunktionen können unter Verwendung des Satzes von Lommel berechnet werden. Der folgende Satz stellt eine verallgemeinerte Fassung dieses Satzes dar. Die Beweisidee stammt aus [Hoc86].

Satz 1.4 (von Lommel) Für $\nu \in \mathbb{C}$ seien C_ν und D_ν beliebige Linearkombination aus den Besselfunktionen J_ν und N_ν . Weiterhin seien $\mu, t, k \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\int r^{\mu+1} C_{\nu+\mu}(tr) D_\nu(kr) dr = \begin{cases} \frac{2\mu t}{t^2-k^2} \int r^\mu C_{\nu+\mu-1}(tr) D_\nu(kr) dr \\ -\frac{r^{\mu+1}}{t^2-k^2} (t C_{\nu+\mu-1}(tr) D_\nu(kr) - k C_{\nu+\mu}(tr) D_{\nu-1}(kr)), & t^2 \neq k^2 \\ \frac{r^{\mu+2}}{2(\mu+1)t} (t C_{\nu+\mu}(tr) D_\nu(kr) - k C_{\nu+\mu+1}(tr) D_{\nu-1}(kr)), & t^2 = k^2 \end{cases}$$

$$\int r^{\mu+1} C_{\nu-\mu}(tr) D_\nu(kr) dr = \begin{cases} -\frac{2\mu t}{t^2-k^2} \int r^\mu C_{\nu-\mu+1}(tr) D_\nu(kr) dr \\ +\frac{r^{\mu+1}}{t^2-k^2} (t C_{\nu-\mu+1}(tr) D_\nu(kr) - k C_{\nu-\mu}(tr) D_{\nu+1}(kr)), & t^2 \neq k^2 \\ \frac{r^{\mu+2}}{2(\mu+1)t} (t C_{\nu-\mu}(tr) D_\nu(kr) - k C_{\nu-\mu-1}(tr) D_{\nu+1}(kr)), & t^2 = k^2. \end{cases}$$

Beweis: Es wird wegen der Ähnlichkeit der Beweisführung nur ein Fall betrachtet. Seien $f_{\nu+\mu}(r) := C_{\nu+\mu}(tr)$ und $g_\nu(r) := D_\nu(kr)$. Aus der Besselschen Differentialgleichung (1.13) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} r^{\mu+1} f''_{\nu+\mu}(r) + r^\mu f'_{\nu+\mu}(r) + (t^2 r^{\mu+1} - (\nu + \mu)^2 r^{\mu-1}) f_{\nu+\mu}(r) &= 0 \\ r^{\mu+1} g''_\nu(r) + r^\mu g'_\nu(r) + (k^2 r^{\mu+1} - \nu^2 r^{\mu-1}) g_\nu(r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Außerdem gilt:

$$\left. \begin{aligned} (r^{\mu+1} f'_{v+\mu})'(r) &= (\mu + 1)r^\mu f'_{v+\mu}(r) + r^{\mu+1} f''_{v+\mu}(r) \\ (r^{\mu+1} g'_v)'(r) &= (\mu + 1)r^\mu g'_v(r) + r^{\mu+1} g''_v(r) \end{aligned} \right\}. \quad (1.23)$$

Durch Einsetzen von (1.23) in (1.22) und Integration folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left[(r^{\mu+1} f'_{v+\mu})'(r) + (t^2 r^{\mu+1} - (v + \mu)^2 r^{\mu-1}) f_{v+\mu}(r) - \mu r^\mu f'_{v+\mu}(r) \right] g_v(r) dr \\ &\quad - \int \left[(r^{\mu+1} g'_v)'(r) + (k^2 r^{\mu+1} - v^2 r^{\mu-1}) g_v(r) - \mu r^\mu g'_v(r) \right] f_{v+\mu}(r) dr \\ \Leftrightarrow 0 &= r^{\mu+1} \left\{ f'_{v+\mu}(r) g_v(r) - f_{v+\mu}(r) g'_v(r) \right\} + \int r^{\mu+1} (t^2 - k^2) f_{v+\mu}(r) g_v(r) dr \\ &\quad - \int (2v\mu + \mu^2) r^{\mu-1} f_{v+\mu}(r) g_v(r) - \mu r^\mu \left\{ f'_{v+\mu}(r) g_v(r) - f_{v+\mu}(r) g'_v(r) \right\} dr. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration des Integrals $\int \mu r^\mu f_{v+\mu}(r) g'_v(r) dr$ kann man schließen:

$$\begin{aligned} 0 &= r^{\mu+1} \left\{ f'_{v+\mu}(r) g_v(r) - f_{v+\mu}(r) g'_v(r) + \mu r^2 f_{v+\mu} g_v(r) \right\} + \int r^{\mu+1} (t^2 - k^2) f_{v+\mu}(r) g_v(r) dr \\ &\quad - 2\mu \int r^{\mu-1} \underbrace{(v + \mu) f_{v+\mu}(r)}_{tr f_{v+\mu-1}(r) - r f'_{v+\mu}(r) \text{ wegen (1.19)}} g_v(r) + r^\mu f'_{v+\mu}(r) g_v(r) dr. \end{aligned}$$

Schließlich folgt aus Gleichung (1.19)

$$r^{\mu+1} \left\{ f'_{v+\mu}(r) g_v(r) - f_{v+\mu}(r) g'_v(r) + \mu r^2 f_{v+\mu} g_v(r) \right\} = r^{\mu+1} (t f_{v+\mu-1}(r) g_v(r) - k f_{v+\mu}(r) g_{v-1}(r)).$$

□

Bemerkung 1.5

- Für $\mu \in \mathbb{Z}$ kann man mit Hilfe von Satz 1.4 rekursiv Stammfunktionen zu Abbildungen der Form $r^{|\mu|+1} C_{v+\mu}(tr) D_v(kr)$ finden.
- Nutzt man zusätzlich zu $\mu \in \mathbb{Z}$ noch die Beziehung (1.18) aus, so lassen sich auch Stammfunktionen zu $r^{\mu+1} C_{v+\mu-2q}(tr) D_v(kr)$ für $q = 0, \dots, \mu$ bestimmen.
- Der Grenzwert der Stammfunktionen für $r \rightarrow 0$ kann, falls existent, mit den Gleichungen (1.15) und (1.16) bestimmt werden.

Satz 1.6 Sei C_v eine beliebige Linearkombination aus den Bessel-Funktionen J_v und N_v . Sei $w_v(t, r) := C_v(tr)$ für $v \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} r^p w_{v-p} &= \sum_{m=0}^p \frac{c_{p,m}}{t^{p-m}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} w_v \\ (-1)^p r^p w_{v+p} &= \sum_{m=0}^p \frac{d_{p,m}}{t^{p-m}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} w_v \end{aligned} \quad (1.24)$$

mit

$$c_{p,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j}{j!} \prod_{i=1}^p (j + \nu - 2(i-1))$$

$$d_{p,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j}{j!} \prod_{i=1}^p (j - \nu - 2(i-1)).$$

Beweis: Induktiv wird gezeigt, dass

$$z^{2p-\nu} \left(z^{-1} \frac{d}{dz} \right)^p (z^\nu f(z)) = \prod_{i=1}^p \left(z \frac{d}{dz} + \nu - 2(i-1) \right) f(z). \quad (1.25)$$

Der Induktionsanfang ist für $p = 0$ offensichtlich. Sei also die Behauptung gezeigt für $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z^{2(p+1)-\nu} \left(z^{-1} \frac{d}{dz} \right)^{p+1} [z^\nu f(z)] &= z^{2(p+1)-\nu} \left(z^{-1} \frac{d}{dz} \right) \left[\frac{z^{2p-\nu}}{z^{2p-\nu}} \left(z^{-1} \frac{d}{dz} \right)^p [z^\nu f(z)] \right] \\ &\stackrel{IV}{=} z^{2(p+1)-\nu} \left(z^{-1} \frac{d}{dz} \right) \left[\frac{1}{z^{2p-\nu}} \prod_{i=1}^p \left(z \frac{d}{dz} + \nu - 2(i-1) \right) f(z) \right] \\ &= -(2p-\nu) \prod_{i=1}^p \left(z \frac{d}{dz} + \nu - 2(i-1) \right) f(z) \\ &\quad + z \frac{d}{dz} \left[\prod_{i=1}^p \left(z \frac{d}{dz} + \nu - 2(i-1) \right) f(z) \right] \\ &= \prod_{i=1}^{p+1} \left(z \frac{d}{dz} + \nu - 2(i-1) \right) f(z). \end{aligned}$$

Genauso zeigt man, dass

$$z^{2p+\nu} \left(z^{-1} \frac{d}{dz} \right)^p (z^{-\nu} f(z)) = \prod_{i=1}^p \left(z \frac{d}{dz} - \nu - 2(i-1) \right) f(z).$$

Nach [Luk69] gilt für $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$

$$\prod_{i=1}^p \left(z \frac{d}{dz} + a_i \right) = \sum_{m=0}^p c_{p,m}(a) z^m \frac{d}{dz},$$

mit

$$c_{p,m}(a) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j}{j!} \prod_{i=1}^p (j + a_i). \quad (1.26)$$

Mit den Gleichungen (1.25)-(1.26) und (1.20) folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.7 Sei C_ν eine beliebige Linearkombination aus den Bessel-Funktionen J_ν und N_ν . Setze $w_\nu(t, r) := C_\nu(tr)$ für $\nu \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$. Für $q = 0, \dots, p$ kann mit Hilfe von Gleichung (1.18) und (1.24) eine Beziehung der Form

$$r^p w_{\nu-p+2q} = \sum_{m=0}^p \frac{c_{p,m,q}}{t^{p-m}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} w_\nu \quad (1.27)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $c_{p,m,q}$ gefunden werden.

Beispiel 1.8 Mit (1.24) und (1.27) ergibt sich zum Beispiel für $p \in \{1, 2\}$ und $w_\nu(t, r) = C_\nu(tr)$:

$$\begin{aligned} r w_{\nu-1}(t, r) &= \frac{\nu}{t} w_\nu(t, r) + \frac{\partial}{\partial t} w_\nu(t, r) \\ r w_{\nu+1}(tr) &= \frac{\nu}{t} w_\nu(t, r) - \frac{\partial}{\partial t} w_\nu(t, r) \\ r^2 w_{\nu-2}(t, r) &= \frac{\nu(\nu-2)}{t^2} w_\nu(t, r) + \frac{2\nu-1}{t} \frac{\partial}{\partial t} w_\nu(t, r) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_\nu(t, r) \\ r^2 w_{\nu+2}(t, r) &= \frac{\nu(\nu+2)}{t^2} w_\nu(t, r) - \frac{2\nu+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} w_\nu(t, r) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_\nu(t, r) \\ r^2 w_\nu(t, r) &= \frac{\nu^2}{t^2} w_\nu(t, r) - \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} w_\nu(t, r) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_\nu(t, r). \end{aligned}$$

1.3.3 Lommel-Funktionen

Lommel-Funktionen werden unter anderem benötigt, um Stammfunktionen für $r^\mu C_\nu(r)$ angeben zu können. C_ν ist hierbei wiederum eine Linearkombination der Besselfunktionen J_ν und N_ν . Außerdem werden in dieser Arbeit Funktionen $f(r)$ gesucht, so dass die Differentialgleichung

$$(\Delta + k^2)[f(kr)Y_m^n(\omega)] = cr^{\mu-1}Y_m^n(\omega)$$

erfüllt ist. Auch dieser Sachverhalt führt zu den Lommel-Funktionen, die wie folgt definiert sind.

Definition 1.9 Für $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ bezeichnen

$$\begin{aligned} S_{\mu,\nu}^{(1)}(r) &:= \frac{r^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)} {}_1F_2 \left(\left[1 \right], \left[\frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2} \right], -\frac{r^2}{4} \right) \\ S_{\mu,\nu}^{(2)}(r) &:= S_{\mu,\nu}^{(1)}(r) + 2^{\mu-1} \Gamma \left(\frac{\mu-\nu+1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\mu+\nu+1}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{\mu-\nu}{2} \pi \right) J_\nu(r) - \cos \left(\frac{\mu-\nu}{2} \pi \right) Y_\nu(r) \right) \end{aligned}$$

die Lommel-Funktionen. Die Funktion ${}_pF_q$ bezeichnet die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe.

Für $S_{\mu,\nu} = S_{\mu,\nu}^{(j)}$, $j \in \{1, 2\}$ gilt unter anderem (siehe z.B. in [Luk69]):

$$\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + (r^2 - \nu^2) \right) S_{\mu,\nu}(r) = r^{\mu+1} \quad (1.28)$$

$$\int r^\mu C_\nu(r) dr = (\mu + \nu - 1) r C_\nu(r) S_{\mu-1,\nu-1}(r) - r C_{\nu-1}(r) S_{\mu,\nu}(r). \quad (1.29)$$

Die Funktion C_ν ist hierbei wiederum eine Linearkombination der Bessel-Funktionen J_ν und N_ν .

Obige Definition ist nicht für alle $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ sinnvoll. Für spätere Betrachtungen werden jedoch nur die Fälle aus dem nächsten Satz herangezogen.

Satz 1.10 Seien $n, p \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$. Dann gilt:

$$S_{n+\sigma+2p+1, n+\sigma}^{(1)}(r) = (-1)^{p+1} \Gamma(n + \sigma + p + 1) p! 2^{2p} \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q! \Gamma(n + \sigma + 1 + q)} \left(\frac{1}{2} \right)^{2q} r^{n+\sigma+2q} \quad (1.30)$$

$$S_{n+\sigma+2p+1, n+\sigma}^{(2)}(r) = (-1)^{p+2} \Gamma(n + \sigma + p + 1) p! 2^{2p} \sum_{q=0}^p \frac{(-1)^q}{q! \Gamma(n + \sigma + 1 + q)} \left(\frac{1}{2} \right)^{2q} r^{n+\sigma+2q} \quad (1.31)$$

und

$$S_{n+\sigma+2p+1, n+\sigma}^{(2)}(r) - S_{n+\sigma+2p+1, n+\sigma}^{(1)}(r) = (-1)^p \Gamma(n + \sigma + p + 1) p! 2^{n+\sigma+2p} J_{n+\sigma}(r). \quad (1.32)$$

Beweis: zu (1.30): Für den Beweis wird das *Pockhammer-Symbol* eingeführt.

$$(a)_p := a(a+1) \cdots (a+p-1), \quad (a)_0 := 1.$$

Mit dieser Bezeichnung gilt:

$$\begin{aligned} S_{n+\sigma+2p+1, n+\sigma}^{(1)}(r) &\stackrel{1.9}{=} \frac{r^{n+\sigma+2(p+1)}}{4(p+1)(n+\sigma+p+1)} {}_1F_2 \left([1], [p+2, n+\sigma+p+2], \frac{-r^2}{4} \right) \\ &= \frac{r^{n+\sigma+2(p+1)}}{4(p+1)(n+\sigma+p+1)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(p+2)_q (n+\sigma+p+2)_q} \left(\frac{r}{2} \right)^{2q} \\ &= \frac{r^{n+\sigma+2(p+1)}}{4(p+1)(n+\sigma+p+1)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+2) \Gamma(n+\sigma+p+2) (-1)^q}{\Gamma(p+2+q) \Gamma(n+\sigma+p+2+q)} \left(\frac{r}{2} \right)^{2q} \\ &= \frac{r^{n+\sigma+2(p+1)} \Gamma(n+\sigma+p+2)}{4(p+1)(n+\sigma+p+1)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+1)!}{(p+1+q)! \Gamma(n+\sigma+p+2+q)} \left(\frac{r}{2} \right)^{2q} \\ &= \frac{r^{n+\sigma+2(p+1)} \Gamma(n+\sigma+p+1) p!}{4} \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-p-1}}{q! \Gamma(n+\sigma+1+q)} \left(\frac{r}{2} \right)^{2(q-p-1)} \\ &= (-1)^{p+1} \Gamma(n+\sigma+p+1) p! 2^{2p} \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q! \Gamma(n+\sigma+1+q)} \left(\frac{1}{2} \right)^{2q} r^{n+\sigma+2q}. \end{aligned}$$

zu (1.31) : Die Behauptung folgt sofort aus Definition 1.9.

zu (1.32) : Diese Behauptung folgt aus der Reihendarstellung (1.14).

□

1.4 Spezielle Wellen

In diesem Abschnitt werden Funktionen definiert, die sehr hilfreich für die analytische Untersuchung des Streuproblems sind.

Spärische Wellen

Eine wichtige Rolle in dieser Arbeit spielen die sphärischen Wellen. Sie separieren eine Funktion in einen radialen und einen sphärischen Anteil. Der radiale Anteil wird im Wesentlichen durch eine Bessel-Funktion beschrieben, der sphärische Anteil durch eine Kugelflächenfunktion.

Definition 1.11 Sei $t \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in N(n, d)$ und $x = r\omega \in \mathbb{R}^d$. Seien weiterhin Y_n^m die Kugelflächenfunktionen aus (1.2). Sei σ die von der Dimension d abhängige Funktion mit

$$\sigma := \sigma(d) := \frac{d-2}{2}.$$

Dann werden die Funktionen

$$\begin{aligned} j_n^m(t, r\omega) &:= (tr)^{-\sigma} J_{n+\sigma}(tr) Y_n^m(\omega) \\ h_n^{m,(1)}(t, r\omega) &:= (tr)^{-\sigma} H_{n+\sigma}^{(1)}(tr) Y_n^m(\omega) \\ h_n^{m,(2)}(t, r\omega) &:= (tr)^{-\sigma} H_{n+\sigma}^{(2)}(tr) Y_n^m(\omega) \end{aligned} \quad (1.33)$$

als sphärische Wellen bezeichnet. Auf die Abhängigkeit von $\sigma(d)$ in der Funktionsbezeichnung wird aus Gründen der Übersichtlichkeit bewusst verzichtet. Entfällt der Index (1) bzw. (2), so wird (1) angenommen.

Die Normierung und Parametrisierung der Kugelflächenfunktionen spielt zunächst einmal keine Rolle. Für spätere Anwendungen ist jedoch eine genaue Festlegung notwendig. Für den Fall $d \geq 4$ sollen die Kugelflächenfunktionen gemäß (1.7) parametrisiert sein.

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass sphärische Wellen Eigenfunktionen des Laplace-Operators zum Eigenwert $-t^2$ sind, d.h.

$$\begin{aligned} \Delta j_n^m(t, r\omega) &= -t^2 j_n^m(t, r\omega) \\ \Delta h_n^m(t, r\omega) &= -t^2 h_n^m(t, r\omega). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Man muss lediglich berücksichtigen, dass die Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen des Beltrami-Operators (1.10) sind und die Bessel-Funktionen die Besselsche Differentialgleichung (1.13) lösen.

Momentenwellen

Um die Beziehung zwischen gestreutem Feld und Quelle genauer analysieren zu können, werden folgende Wellen eingeführt:

Definition 1.12 Sei $x = r\omega \in \mathbb{R}^d$. Für $n, p \in \mathbb{N}$ und $m \in N(n, d)$ werden die Funktionen

$$v_{n,p}^m(r\omega) := r^{n+2p} Y_n^m(\omega)$$

als Momentenwellen bezeichnet.

Es läßt sich wiederum leicht nachrechnen (vgl. Gleichung ((1.8)) und 1.10), dass Momentenwellen der Differentialgleichung

$$\Delta v_{n,p}^m(r\omega) = 4p(p+n+\sigma)v_{n,p-1}^m(r\omega)$$

genügen. Die Funktion $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$ sei wieder wie in 1.33 definiert.

Lommel-Wellen

Weitere Untersuchungen zwischen gestreutem Feld und Quelle benötigen die Festlegung eines weiteren Wellentyps.

Definition 1.13 Sei $t \in \mathbb{C}$, $x = r\omega \in \mathbb{R}^d$ und $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$. Für $j \in \{1, 2\}$, $n, p \in \mathbb{N}$ und $m \in N(n, d)$ werden die Funktionen

$$s_{n,p}^{m,(j)}(t, r\omega) := (tr)^{-\sigma} S_{n+\sigma+2p+1, n+\sigma}^{(j)}(tr) Y_n^m(\omega)$$

als Lommel-Wellen bezeichnet. Der Übersichtlichkeit halber wird wieder auf die Abhängigkeit von $\sigma(d)$ in der Funktionsbezeichnung verzichtet.

Satz 1.14 Sei wiederum $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$. Für $t \in \mathbb{C}$, $n, p \in \mathbb{N}$, $m \in N(n, d)$, $j \in \{1, 2\}$ und $x = r\omega \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\begin{aligned} (\Delta + t^2)s_{n,p}^{m,(j)}(t, r\omega) &= t^2 (tr)^{2p+n} Y_n^m(\omega) \\ &= t^{2(p+1)+n} v_{n,p}^m(r\omega). \end{aligned}$$

Beweis: Sei $S_{n+\sigma+2p+1, n+\sigma}^{(j)}(tr) = S(tr)$. Nach (1.8) und (1.10) gilt:

$$\begin{aligned}
(\Delta + t^2)s_{n,p}^{m,(j)}(t, r\omega) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(t^2 - \frac{n(n+d-2)}{r^2} \right) \right) s_{n,p}^{m,(j)}(t, r\omega) \\
&= \left\{ \left[\sigma(\sigma+1)r^{-(\sigma+2)}S(tr) - 2\sigma r^{-(\sigma+1)}tS'(tr)r^{-\sigma}t^2S''(tr) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{d-1}{r} \left[-\sigma r^{-(\sigma+1)}S(tr) + r^{-\sigma}tS'(tr) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(t^2 - \frac{n(n+d-2)}{r^2} \right) r^{-\sigma}S(tr) \right\} t^{-\sigma} Y_n^m(\omega) \\
&= \left\{ (tr)^2 S''(tr) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{((d-1) - 2\sigma)}_1 rtS'(tr) \right. \\
&\quad \left. + \left((tr)^2 \underbrace{-n(n+d-2) + \sigma(\sigma+1) - (d-1)\sigma}_{-(n+\sigma)^2} \right) S(tr) \right\} t^{-\sigma} r^{-(\sigma+2)} Y_n^m(\omega) \\
&\stackrel{(1.28)}{=} t^{-\sigma} r^{-(\sigma+2)} (tr)^{m+\sigma+2(p+1)} Y_n^m(\omega) \\
&= t^2 (tr)^{m+2p} Y_n^m(\omega).
\end{aligned}$$

□

Man erhält also durch Anwendung des Differentialoperators der Helmholtz-Gleichung auf eine Lommel-Welle eine Momentenwelle.

1.5 Spezielle Orthogonalbasen

In diesem Abschnitt wird eine an das Problem angepasste Orthogonalbasis entwickelt. Mit dieser Basis wird es möglich sein, die Singulärwertzerlegung und den Nullraum des Operators anzugeben, der dem Streuproblem zugrunde liegt.

Satz 1.15 Sei $0 \leq \nu \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seien $\lambda_{\nu, l}^{\alpha, \beta}$ ($l \in \mathbb{N}$) die positiven Nullstellen von $\alpha J_\nu(r) + \beta r J'_\nu(r)$. Falls $\beta \neq 0$ und $\frac{\alpha}{\beta} + \nu < 0$, ist noch zusätzlich eine der beiden rein imaginären Nullstellen hinzu zu nehmen (Die Existenz dieser Nullstellen findet sich zum Beispiel in [Wat58] und [Dix03].) Dann bilden die Funktionen $\{\sqrt{r} J_\nu(\lambda_{\nu, l}^{\alpha, \beta} r)\}_{l \in \mathbb{N}}$ eine Orthogonalbasis des $L_2(0, 1)$.

Beweis: Der Fall $\beta = 0$ wird in [Hoc86] behandelt. Für die Fälle $\beta \neq 0$ und $\nu \in \{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ verweisen wir auf die Arbeit von [Lak06]. Ein ausführlicher Nachweis für $\nu \in \mathbb{N}$, der auf der Idee von [Hoc86] basiert, kann in [Wal02] nachgelesen werden. Diese Beweisführung ist auch

auf alle anderen Fälle übertragbar. \square

Der folgende Satz stellt eine Vielzahl von Orthogonalbasen bereit. Die für das Problem relevante Basis wird später im Satz 2.14 festgelegt.

Satz 1.16 Sei $R > 0$ und $B_R \subset \mathbb{R}^d$ die offene Kugel mit Radius R um die Null. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ seien $\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}$ ($l \in \mathbb{N}$) die positiven Nullstellen von

$$\alpha_n J_{n+\sigma}(r) + \beta_n r J'_{n+\sigma}(r),$$

wobei wieder $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$ ist.

Falls $\beta_n \neq 0$ und $\frac{\alpha_n}{\beta_n} + n + \sigma < 0$, ist noch zusätzlich eine der beiden rein imaginären Nullstellen hinzu zu nehmen.

Dann bilden die sphärischen Wellen eingeschränkt auf $B_R \subset \mathbb{R}^d$

$$\left\{ j_n^m \left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), l \in \mathbb{N}}$$

eine Orthogonalbasis des $L_2(B_R)$. Die Norm einer sphärischen Welle $j_n^m(t, \cdot)$ ($t \in \mathbb{C}$) ist gegeben durch:

$$\|j_n^m(t, \cdot)\|_{L_2(B_R)}^2 = \frac{\pi R^2}{t^{2\sigma}} \left((J_{n+\sigma}^2(tR) - J_{n+\sigma+1}(tR)J_{m+\sigma-1}(tR)) \right).$$

Beweis: Zunächst zum Beweis der Orthogonalität.

$$\begin{aligned} & \left\langle j_n^m \left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot \right), j_q^p \left(\frac{\lambda_{q,s}^{\alpha_q, \beta_q}}{R}, \cdot \right) \right\rangle_{B_R} \\ &= \frac{R^{2\sigma}}{(\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n})^\sigma (\lambda_{q,s}^{\alpha_q, \beta_q})^\sigma} \int_0^R r J_{n+\sigma} \left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R} r \right) J_{q+\sigma} \left(\frac{\lambda_{q,s}^{\alpha_q, \beta_q}}{R} r \right) \int_{S^{d-1}} Y_n^m(\omega) \overline{Y_q^p(\omega)} ds(\omega) dr \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \frac{2\pi R^{2(\sigma+1)}}{(\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n})^\sigma (\lambda_{q,s}^{\alpha_q, \beta_q})^\sigma} \delta_{n,q} \delta_{m,p} \int_0^1 r J_{n,\sigma}(\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n} r) J_{q+\sigma}(\lambda_{q,s}^{\alpha_q, \beta_q} r) dr \\ &\stackrel{(1.15), (1.4), 1.15}{=} \frac{2\pi R^{2(\sigma+1)}}{(\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n})^\sigma (\lambda_{q,s}^{\alpha_q, \beta_q})^\sigma} \delta_{n,q} \delta_{m,p} \delta_{l,s} \frac{1}{2} \left(J_{n+\sigma}^2(\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}) - J_{n+\sigma+1}(\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}) J_{m+\sigma-1}(\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}) \right). \end{aligned}$$

Die Vollständigkeit folgt aus der Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen auf $L_2(S^p)$ (siehe (1.6)) und der Vollständigkeit der Funktionen $\{J_n(\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n})\}_{l \in \mathbb{N}}$ auf $L_2(0, 1)$ (siehe Satz 1.15). Zum Nachweis der Norm kann genauso vorgegangen werden wie beim Beweis der Orthogonalität. \square

Für spätere Invarianzuntersuchungen wird der Raum $L_2(B_R)$ in eine direkte Summe von Teilräumen zerlegt.

Definition 1.17 Sei $R > 0$ und $B_R \subset \mathbb{R}^d$ die offene Kugel mit Radius R um die Null. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $m \in N(n, d)$ und seien $j_n^m(t, \cdot)$ die sphärischen Wellen eingeschränkt auf $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Wiederum sei $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$. Die Räume W_n^m werden definiert als

$$W_n^m := \overline{\text{span}(j_n^m(t, \cdot), | t \in \mathbb{C})}. \quad (1.35)$$

Der Abschluß ist bezüglich der durch das Skalarprodukts auf $L_2(B_R)$ induzierten Topologie zu verstehen. Es wird wiederum auf die Abhängigkeit der Dimension d in der Bezeichnung verzichtet.

Diese Räume haben die folgenden Eigenschaften.

Satz 1.18 Sei

$$\left\{ j_n^m \left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d), l \in \mathbb{N}}$$

eine Orthogonalbasis aus Satz 1.16. Dann gilt für die Räume W_n^m aus Definition 1.35

$$(i) \quad W_n^m = \overline{\text{span} \left\{ j_n^m \left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot \right), | l \in \mathbb{N} \right\}}$$

$$(ii) \quad L_2(B_R) = \bigoplus_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ m \in N(n, d)}} W_n^m$$

Beweis: Nach Konstruktion der Orthogonalbasis gilt (i). Die verschiedenen Teilräume W_n^m sind paarweise disjunkt, wegen der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen (1.5). Damit folgt auch Behauptung (ii). \square

1.6 Jacobi-Anger-Entwicklung

Die *Jacobi-Anger-Entwicklung* zerlegt eine ebene Welle in eine Reihe bestehend aus sphärischen Wellen. Es ist bekannt, dass sich jede Welle aus Linearkombinationen ebener Wellen darstellen lässt. Die Jacobi-Anger-Entwicklung zeigt direkt, dass sich jede Welle in eine Reihe bestehend aus sphärischen Wellen entwickeln lässt.

Es folgt eine kurze Herleitung der Jacobi-Anger-Entwicklung. Sei $x = r\omega, y = t\theta \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$e^{i\langle x, y \rangle} = e^{itr\langle \omega, \theta \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n, d)} \langle e^{itr\langle \cdot, \theta \rangle}, Y_n^m \rangle_{S^{d-1}} \frac{Y_n^m(\omega)}{2\pi}, \quad (1.36)$$

da die Kugelflächenfunktionen eine Orthogonalbasis auf der Einheitssphäre bilden.

Das Funk-Hecke Theorem liefert

$$\langle e^{itr\langle \cdot, \theta \rangle}, Y_n^m \rangle = c_1 \int_{-1}^1 e^{itrs} C_n^\sigma(s) (1-s^2)^{\sigma-\frac{1}{2}} ds Y_n^{-m}(\theta), \quad (1.37)$$

mit einer Konstanten c_1 , die noch von der Dimension abhängt. Die Variable $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$ ist wie in vorhergehenden Kapitel ebenfalls dimensionsabhängig. Für die Gegenbauerpolynome C_n^σ erhält man mit der Formel von Rodriguez

$$C_n^\sigma(s) = c_2(1 - s^2)^{-\sigma + \frac{1}{2}} D^n[(1 - s^2)^{n + \sigma - \frac{1}{2}}].$$

Einsetzen in (1.37) ergibt

$$\langle e^{itr\langle \cdot, \theta \rangle}, Y_n^m \rangle_{S^{d-1}} = c_1 c_2 (irt)^n \underbrace{\int_{-1}^1 e^{itrs} (1 - s^2)^{n + \sigma - \frac{1}{2}} ds}_{= c_3 (tr)^{-\sigma} J_{n+\sigma}(tr)}. \quad (1.38)$$

Gleichung (1.38) eingesetzt in (1.36) ergibt schließlich nach Zusammenfassung sämtlicher Konstanten c_i

$$e^{itr\langle \omega, \theta \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \frac{i^n \pi^{\sigma + \frac{1}{2}} \Gamma(2\sigma + 1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(\sigma + 1)} J_n^m(t, r\omega) Y_n^{-m}(\theta). \quad (1.39)$$

2 Mathematische Modellierung

Akustische, elektromagnetische oder elastische Wellen werden gestreut, wenn sie auf Hindernisse stoßen. Wie in Abbildung 2.1 schematisch dargestellt, trifft dabei eine Primärwelle u_i (einfallendes Feld) auf ein Objekt und wird dabei verändert. Es wird ein so genanntes gestreutes Feld u_s erzeugt. Die beiden Felder u_s und u_i überlagern sich zu einem Gesamtfeld $u = u_s + u_i$. Die Ausbreitung dieser Felder wird durch Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen beschrieben.

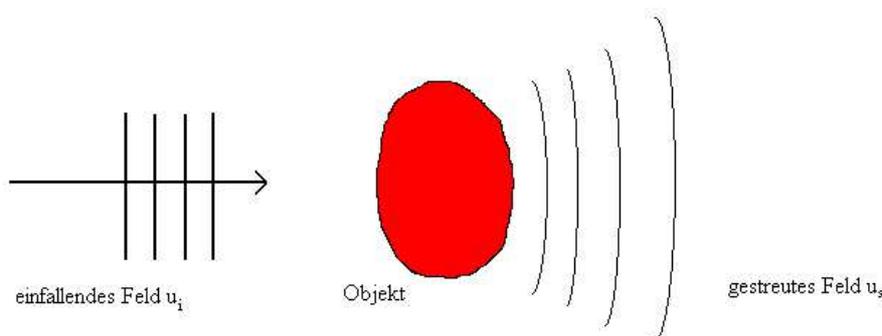


Abbildung 2.1: Schema des Streuvorganges

Inverse Streuprobleme treten etwa in Technik (zerstörungsfreie Materialprüfung), Geophysik (erdmagnetische Tiefensondierung) und Medizin (Lokalisierung von Krebszellen) auf. Im Gegensatz zu direkten Streuproblemen, bei denen die Parameter des streuenden Mediums bekannt sind und die gestreute Welle berechnet werden muss, geht es bei inversen Streuproblemen um die Bestimmung der Materialeigenschaften aus Messungen des gestreuten Feldes.

In dieser Arbeit werden akustische zeitharmonische Wellen betrachtet. Die physikalischen Eigenschaften des Hindernismediums werden durch eine Funktion $f \in L_\infty(B_R)$ beschrieben. Dabei sei $B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$ die offene Kugel um die Null mit Radius $R > 0$ im \mathbb{R}^d . Für den Träger von f gelte $\text{supp}(f) \subset B_R$. Für eine fest vorgegebene Wellenzahl $0 < k \in \mathbb{R}$ werden das einfallende Feld u_i , das gestreute Feld u_s und das Gesamtfeld u durch die Gleichungen

$$(\Delta + k^2)u_i = 0 \quad (2.1)$$

$$u = u_i + u_s, \quad (2.2)$$

$$(\Delta + k^2)u_s = -k^2 f u \quad (2.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - i k u_s \right) = 0, \quad r = |x| \quad (2.4)$$

beschrieben. Der Operator $(\Delta + k^2)$ ist auch als *Helmholtz-Operator* bekannt. Die Gleichungen (2.1) und (2.3) werden daher auch als *homogene bzw. inhomogene Helmholtz-Gleichung* bezeichnet. Gleichung (2.4) wird als *Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* bezeichnet. Physikalisch gesehen bewirkt diese Bedingung, dass es sich bei dem gestreuten Feld um eine auslaufende Welle handelt. Die Herleitung dieser Gleichung kann in [Wüb95] und [CK92] nachgelesen werden.

Mit Hilfe der Greenschen Funktion $G_k(x, y)$ lässt sich das Gleichungssystem (2.1)-(2.4) transformieren zu

$$u_s(x) = k^2 \int_{B_R} G_k(x, y) f(y) u(y) dy. \quad (2.5)$$

Der Operator

$$\begin{aligned} A^{(k,R)} : L_2(B_R) &\longrightarrow L_2(B_R) \\ A^{(k,R)} v(x) &:= k^2 \int_{B_R} G_k(x, y) v(y) dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

wird als *Lippmann-Schwinger-Operator* bezeichnet. Da das Rekonstruktionsgebiet B_R und die Wellenzahl k oft feststehende Größen sind, wird häufig auch die abkürzende Schreibweise $A := A^{(k,R)}$ benutzt.

Eine weitere wichtige Abbildung ist der *Lippmann-Schwinger-Operator für den Außenraum*. Er wird mit Hilfe der Greenschen Funktion definiert. Für $\Gamma \subset B_R^c$ sei

$$\begin{aligned} A_\Gamma^{(k,R)} : L_2(B_R) &\longrightarrow L_2(\Gamma) \\ A_\Gamma^{(k,R)} v(x) &:= k^2 \int_{B_R} G_k(x, y) v(y) dy. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Auch hierfür wird abkürzend $A_\Gamma := A_\Gamma^{(k,R)}$ geschrieben.

Im \mathbb{R}^2 gilt für die Greensche Funktion

$$G_k(x, y) = \frac{i}{4} H_0(k|x-y|)$$

und im dreidimensionalen Fall gilt

$$G_k(x, y) = \frac{1}{4\pi k|x-y|} e^{ik|x-y|}.$$

Einen Beweis hierzu findet man in [MF53].

Bemerkung 2.1 Mit den beiden Operatoren A und A_Γ hat die Lösung des Problems (2.1) - (2.4) die Form

$$u_s(x) = \begin{cases} A(fu)(x) & x \in B_R \\ A_{B_R^c}(fu)(x) & x \in B_R^c. \end{cases}$$

Das Produkt aus Gesamtfeld u und Objektfunktion f wird auch als äquivalente Quelle oder einfach nur Quelle bezeichnet.

Die Greensche Funktion läßt sich in eine Reihe aus Produkten von sphärischen Wellen (siehe 1.33) entwickeln.

Satz 2.2 Sei $x = r_x \omega_x \in \mathbb{R}^d$ und $y = r_y \omega_y \in \mathbb{R}^d$ mit $r_x > r_y$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in N(n, d)$ seien j_n^m und h_n^m die Funktionen aus Definition 1.33. Weiterhin sei $k > 0$. Dann hat die Greensche Funktion die Gestalt:

$$\begin{aligned} G_k(x, y) &= \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \in N(n, d)} h_n^m(k, r_x \omega_x) \overline{j_n^m(k, r_y \omega_y)} \\ &= \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \in N(n, d)} \overline{h_n^{m, (2)}(k, r_x \omega_x)} j_n^m(k, r_y \omega_y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die Reihe ist absolut und gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen für $r_x > r_y$.

Beweis: Die Beweise für die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ finden sich zum Beispiel in [CK98]. Ähnliche Vorgehensweisen für höhere Dimensionen führen auch hier zum Ziel. \square

Damit ergibt sich für $r_y = 0$ die folgende Darstellung.

Satz 2.3 Sei $k > 0$, $0 \neq x \in \mathbb{R}^d$ und $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$. Dann gilt für die Greensche Funktion:

$$G_k(x) = \frac{i}{2^{\sigma+2} \pi^\sigma} (k|x|)^{-\sigma} H_\sigma(k|x|). \quad (2.9)$$

Beweis: Es gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} (kr)^{-\sigma} J_{n+\sigma}(kr) = \delta_{n,0} \frac{1}{2^\sigma \Gamma(\sigma + 1)}$$

wegen (1.15). Weiterhin gibt es nach (1.1) und der darauf folgenden Bemerkung nur ein homogenes harmonisches Polynom vom Grad 0, welches gerade eine Konstante c ist. Nun sind die Kugelflächenfunktionen nach Vereinbarung (1.5) so normiert, dass gilt:

$$2\pi = \|Y_0\|^2 = c^2 \int_{S^{d-1}} 1 dS(\omega) = c^2 \frac{d \pi^{\sigma+1}}{\Gamma(\sigma + 2)}.$$

Für $\omega \in S^{d-1}$ erhält man

$$(Y_0(\omega))^2 = c^2 = \frac{2\Gamma(\sigma + 2)}{d\pi^\sigma}.$$

Damit reduziert sich (2.8) zu

$$G_k(x) = \frac{i2}{4d\pi^\sigma 2^\sigma} \underbrace{\frac{\Gamma(\sigma + 2)}{\Gamma(\sigma + 1)}}_{\sigma+1} (k|x|)^{-\sigma} H_\sigma(k|x|).$$

□

2.1 Eigenschaften des Lippmann-Schwinger-Operators

Satz 2.4 Sei A der Lippmann-Schwinger-Operator aus (2.5) zu vorgegebener Wellenzahl $k > 0$ und Radius $R > 0$. Dann gilt für den adjungierten Operator:

$$A^* = \bar{A}. \quad (2.10)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle Av, w \rangle_{B_R} &= \int_{B_R} \int_{B_R} k^2 G_k(x, y) v(y) dy \overline{w(x)} dx \\ &= \int_{B_R} \int_{B_R} \overline{k^2 G_k(x, y) w(x)} dx v(y) dy \\ &= \langle v, A^* w \rangle_{B_R}. \end{aligned}$$

□

Eine sehr nützliche Darstellung ergibt sich aus der Reihendarstellung des Kernes (vgl. (2.8)) für den Lippmann-Schwinger-Operator.

Satz 2.5 Seien $k, R > 0$ und A der Lippmann-Schwinger-Operator aus (2.5). Dann gilt für eine Funktion $v \in L_2(B_R)$:

$$Av(r\omega) = \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n, d)} \langle v, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_r} h_n^m(k, r\omega) + \langle v, h_n^{m, (2)}(k, \cdot) \rangle_{B_R - B_r} j_n^m(k, r\omega). \quad (2.11)$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt mit der Reihendarstellung der Greenschen Funktion (2.8) und deren gleichmäßigen Konvergenz. □

Zum Vergleich von Schlechtgestelltheiten und Stetigkeitsaussagen benötigt man Informationen über die Glättungseigenschaften eines Operators. Ein Maß dafür liefern Abschätzungen in Sobolev-Räumen.

Lemma 2.6 Sei $\xi = t\theta \in \mathbb{R}^d$ mit $t \geq 0$ und $\theta \in S^{d-1}$. Weiterhin sei $R > 0$, $B_R \subset \mathbb{R}^d$ und χ_{B_R} die charakteristische Funktion. Wiederum sei $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$ und G_k die Greensche Funktion aus (2.9). Dann gilt für die Fouriertransformierte von $\chi_{B_R} G_k$

$$\widehat{\chi_{B_R} G_k}(t\theta) = c_\sigma \begin{cases} \frac{R}{(t^2 - k^2)^{k^\sigma}} \left[kt^{-\sigma} H_{\sigma+1}(kR) J_\sigma(tR) - t^{-\sigma+1} H_\sigma(kR) J_{\sigma+1}(tR) + \frac{2i}{R\pi k^\sigma} \right], & t \neq k \\ \frac{R^2}{2k^{2\sigma}} [H_\sigma(kR) J_\sigma(kR) - H_{\sigma+1}(kR) J_{\sigma-1}(kR)] - \frac{4\sigma i}{R^2 \pi k^2}, & t = k \end{cases}$$

mit

$$c_\sigma = \frac{i\Gamma(2\sigma + 1)}{2^{3\sigma+2} \pi^{\sigma-\frac{1}{2}} \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(\sigma + 1)}.$$

Insbesondere ist $\widehat{\chi_{B_R} G_k}(t\theta)$ unabhängig von θ und stetig in t .

Beweis: Man erhält mit Hilfe der Jacobi-Anger-Entwicklung (1.39):

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} e^{-i\langle r\omega, t\theta \rangle} dS(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \frac{i^n \pi^{\sigma+\frac{1}{2}} \Gamma(2\sigma + 1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(\sigma + 1)} \frac{J_{n+\sigma}(tr)}{(tr)^\sigma} \underbrace{\int_{S^{d-1}} Y_n^m(-\omega) dS(\omega) Y_n^{-m}(\theta)}_{\delta_{n,0} \delta_{m,0} 2\pi} \\ &= \underbrace{\frac{\pi^{\sigma+\frac{3}{2}} \Gamma(2\sigma + 1)}{2^{\sigma-1} \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(\sigma + 1)}}_{:=c_1} \frac{J_\sigma(tr)}{(tr)^\sigma}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Asymptotik (1.14)-(1.16) erhält man im Fall $t^2 \neq k^2$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{t^2 - k^2} \left(t J_{\sigma+1}(tr) H_\sigma(kr) - k J_\sigma(tr) H_{\sigma+1}(kr) \right) = \frac{2i}{\pi(t^2 - k^2)} \left(\frac{t}{k} \right)^\sigma.$$

Falls $t^2 = k^2$ erhält man mit den selben Gleichung

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{2t} \left(t J_\sigma(tr) H_\sigma(kr) - k J_{\sigma-1}(tr) H_{\sigma+1}(kr) \right) = \frac{2i\sigma}{\pi t^2} \left(\frac{t}{k} \right)^\sigma.$$

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_{B_R} G_k}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_0^R r^{d-1} \int_{S^{d-1}} G_k(r\omega) e^{-i\langle r\omega, t\theta \rangle} dS(\omega) dr \\ &\stackrel{(2.9)}{=} \underbrace{(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{i}{2^{\sigma+2} \pi^\sigma}}_{:=c_2} \int_0^R r^d \frac{H_\sigma(kr)}{(kr)^\sigma} \int_{S^{d-1}} e^{-i\langle r\omega, t\theta \rangle} dS(\omega) dr \\ &= c_1 c_2 \frac{1}{(tk)^\sigma} \int_0^R r H_\sigma(kr) J_\sigma(tr) dr. \end{aligned}$$

Im Fall $t^2 \neq k^2$ ergibt sich mit Satz 1.4:

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_{B_R} G_k}(\xi) &= \frac{c_1 c_2 R}{(t^2 - k^2) t^\sigma k^\sigma} [k H_{\sigma+1}(kr) J_\sigma(tr) - t H_\sigma(kr) J_{\sigma+1}(tr)]_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{c_1 c_2 R}{(t^2 - k^2) t^\sigma k^\sigma} [k H_{\sigma+1}(kR) J_\sigma(tR) - t H_\sigma(kR) J_{\sigma+1}(tR)] + \frac{c_1 c_2 2i}{\pi(t^2 - k^2) t^\sigma k^\sigma} \left(\frac{t}{k}\right)^\sigma \\ &= \frac{c_1 c_2 R}{(t^2 - k^2) t^\sigma k^\sigma} [k H_{\sigma+1}(kR) J_\sigma(tR) - t H_\sigma(kR) J_{\sigma+1}(tR)] + \frac{c_1 c_2 2i}{\pi(t^2 - k^2) k^{2\sigma}}.\end{aligned}$$

Für $t^2 = k^2$ erhält man ebenfalls mit Satz 1.4:

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_{B_R} G_k}(\xi) &= c_1 c_2 \frac{r^2}{2 t^{\sigma+1} k^\sigma} [t H_\sigma(kr) J_\sigma(tr) - k H_{\sigma+1}(kr) J_{\sigma-1}(tr)]_{r=0}^{r=R} \\ &= c_1 c_2 \frac{R^2}{2 t^{\sigma+1} k^\sigma} [t H_\sigma(kR) J_\sigma(tR) - k H_{\sigma+1}(kR) J_{\sigma-1}(tR)] - c_1 c_2 \frac{1}{t^\sigma k^\sigma} \frac{2i\sigma}{\pi t^2} \left(\frac{t}{k}\right)^\sigma \\ &\stackrel{t=k}{=} c_1 c_2 \frac{R^2}{2 k^{2\sigma}} [H_\sigma(kR) J_\sigma(kR) - H_{\sigma+1}(kR) J_{\sigma-1}(kR)] - c_1 c_2 \frac{2i\sigma}{\pi k^{2\sigma+2}}\end{aligned}$$

□

Lemma 2.7 Sei $\xi = t\theta \in \mathbb{R}^d$ mit $t \geq 0$ und $\theta \in S^{d-1}$. Weiterhin sei $R > 0$, $B_R \subset \mathbb{R}^d$ und χ_{B_R} die charakteristische Funktion bezüglich B_R . Wiederum sei $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$ und sei G_k die Greensche Funktion aus (2.9). Dann gilt für die Fouriertransformierte von $\chi_{B_R} G_k$:

$$\begin{aligned}|\lim_{t \rightarrow \infty} (1 + t^2)^\nu \widehat{\chi_{B_R} G_k}(t\theta)| < \infty &\iff \nu \leq 2 - \max(0, \frac{3-d}{2}) \\ |\lim_{t \searrow 0} (1 + t^2)^\nu \widehat{\chi_{B_R} G_k}(t\theta)| < \infty, &\quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Beweis: Nach Lemma 2.6 existieren Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$, so dass

$$\widehat{\chi_{B_R} G_k}(t\theta) = \frac{1}{k^2 - t^2} (c_1 t^{-\sigma} J_\sigma(tR) + c_2 t^{-\sigma+1} J_{\sigma+1}(tR) + c_3).$$

Außerdem verhält sich J_μ asymptotisch nach [AS65] für $z \rightarrow \infty$ wie

$$J_\mu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Damit verhält sich $(1 + t^2)^\nu \widehat{\chi_{B_R} G_k}(t\theta)$ für große t wie $\frac{t^{2\nu \max(0, -2\sigma+1)}}{t^4}$. Der Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ bleibt also genau dann beschränkt, falls

$$\nu \leq 2 - \max(0, -\sigma + \frac{1}{2}).$$

Mit $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$ folgt die Behauptung für den Grenzwert.

Für den Grenzwert $t \searrow 0$ muß man zusätzlich wissen, dass sich $J_\mu(t)$ für kleine t verhält wie t^μ (siehe (1.15)). □

Satz 2.8 Sei A der Lippmann-Schwinger-Operator aus (2.5) zu vorgegebener Wellenzahl $k > 0$, Radius $R > 0$ in der Dimension $d \geq 1$. Für $s \geq 0$ und eine Funktion $v \in H^s(B_R)$ gilt:

$$\|Av\|_{H^{s+2-\max(0, \frac{3-d}{2})}(B_R)} \leq c\|v\|_{H^s(B_R)}.$$

Beweis: Sei $x \in B_R$. Für eine Funktion w mit $\text{supp}(w) \in B_R$ gilt:

$$\begin{aligned} Aw(x) &= k^2 \int_{\mathbb{R}^d} G_k(x-y)w(y) dy \\ &= k^2 \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_{2R}}(x-y)G_k(x-y)w(y) dy \\ &= k^2 \chi_{B_{2R}} G_k * w(x). \end{aligned}$$

Sei $\nu = \max(0, \frac{3-d}{2})$, und $v \in H^s(B_R)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|Aw\|_{H^{s+\nu}(B_R)}^2 &\leq k^2 \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s+\nu} |\widehat{\chi_{B_{2R}} G_k * w}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s+\nu} |\widehat{\chi_{B_{2R}} G_k}(\xi)|^2 |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq (2\pi)^{\frac{d}{2}} k^2 \underbrace{\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} ((1 + |\xi|^2)^\nu |\widehat{\chi_{B_{2R}} G_k}(\xi)|^2)}_{< \infty \text{ nach 2.7 und 2.6}} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\ &= c\|w\|_{H^s(B_R)}^2. \end{aligned}$$

□

Der Helmholtz-Operator $(\Delta + k^2)$ ist ein Differentialoperator zweiter Ordnung. Es ist deshalb zu erwarten, dass er Funktionen um zwei Stufen in der Sobolev-Skala „aufraucht“.

Lemma 2.9 Sei $R, k > 0$ und $(\Delta + k^2)$ der Helmholtz-Operator eingeschränkt auf $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt für $w \in H^{s+2}(B_R)$:

$$\|(\Delta + k^2)w\|_{H^s(B_R)} \leq c\|w\|_{H^{s+2}(B_R)}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|(\Delta + k^2)w\|_{H^s(B_R)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^s |(\Delta + k^2)w(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s+2} \frac{(k^2 - |\xi|^2)^2}{(1 + |\xi|^2)^2} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \underbrace{\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \left(\frac{(k^2 - |\xi|^2)^2}{(1 + |\xi|^2)^2} \right)}_{< \infty} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s+2} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\ &= c\|w\|_{H^{s+2}(B_R)}^2. \end{aligned}$$

□

Satz 2.10 Seien $k, R > 0$ und A der Lippmann-Schwinger-Operator aus (2.6). Seien wiederum $\sigma := \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$ und j_n^m, h_n^m und $v_{n,p}^m$ die Funktionen aus den Definitionen 1.33 und 1.12. Dann gilt für $t \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
Aj_n^m(t, r\omega) &= \begin{cases} \frac{1}{t^2 - k^2} \left(k^2 j_n^m(t, r\omega) + d_n(t) j_n^m(k, r\omega) \right), & t^2 \neq k^2 \\ \pm \frac{1}{2k} \left(k^2 \frac{\partial}{\partial t} j_n^m(t, r\omega) \Big|_{t=\pm k} + d'_n(\pm k) j_n^m(k, r\omega) \right), & t = \pm k \end{cases} \\
Ah_n^m(t, r\omega) &= \begin{cases} \frac{1}{t^2 - k^2} \left(k^2 h_n^m(t, r\omega) - k^2 \left(\frac{k}{t} \right)^{n+\sigma} h_n^m(k, r\omega) + c_n(t) j_n^m(k, r\omega) \right), & t^2 \neq k^2 \\ \pm \frac{1}{2k} \left(k^2 \frac{\partial}{\partial t} h_n^m(t, r\omega) \Big|_{t=\pm k} + (n + \sigma) k^3 \left(\frac{k}{t} \right)^{n+\sigma-1} h_n^m(k, r\omega) + c_n(\pm k)' j_n^m(k, r\omega) \right) \end{cases} \\
Av_{n,p}^m(r\omega) &= -\frac{1}{k^{n+2p}} s_{n,p}^{m,(j)}(k, r\omega) + d_{n,p}^{(j)} j_n^m(k, r\omega)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
d_n(t) &= d_{n,\sigma}^{(k,R)}(t) = \frac{ik^2 \pi R}{2} [kJ_{n+\sigma}(tR)H_{n+\sigma-1}(kR) - tJ_{n+\sigma-1}(tR)H_{n+\sigma}(kR)] \\
c_n(t) &= c_{n,\sigma}^{(k,R)}(t) = \frac{ik^2 \pi R}{2} [kH_{n+\sigma}(tR)H_{n+\sigma-1}(kR) - tH_{n+\sigma-1}(tR)H_{n+\sigma}(kR)] \\
d_{n,p}^{(j)} &= d_{n+\sigma,p}^{(k,R),(j)} = \frac{ik^2 \pi R}{2k^{n+\sigma+2p+1}} [2(n + \sigma + p)S_{n+\sigma+2p,n+\sigma-1}^{(j)}(kR)(tR)H_{n+\sigma}(kR) \\
&\quad - S_{n+\sigma+2p+1,n+\sigma}^{(j)}(kR)H_{n+\sigma-1}(kR)].
\end{aligned}$$

Beweis: Sei $v(r\omega) = f(r)Y_n^m(\omega)$ eine in radiale und sphärische Variablen separierte Funktion. Dann gilt:

$$Av(r\omega) = k^2 \int_{B_R} G_k(r\omega, y)v(y) dy.$$

Unter Berücksichtigung der Reihenentwicklung (2.8) und der gleichmäßigen Konvergenz ergibt sich mit Hilfe von Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
Av(r\omega) &= \frac{ik^2}{4} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p \in N(q,d)} h_q^p(r\omega) \int_0^r s^{d-1-\sigma} J_{q+\sigma}(ks) f(s) \underbrace{\int_{S^{d-1}} Y_n^m(\theta) \overline{Y_q^p(\theta)} dS(\theta)}_{2\pi \delta_{n,q} \delta_{m,p}} ds \\
&\quad + \frac{ik^2}{4} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p \in N(q,d)} j_q^{-p}(k, r\omega) \int_r^R s^{d-1-\sigma} H_{q+\sigma}(ks) f(s) \underbrace{\int_{S^{d-1}} Y_n^m(\theta) Y_q^p(\theta) dS(\theta)}_{2\pi \delta_{n,q} \delta_{m,-p}} ds \\
&= \frac{ik^2 \pi}{2} \left(h_n^m(k, r\omega) \int_0^r s^{\frac{d}{2}} J_{n+\sigma}(ks) f(s) ds + j_n^m(k, r\omega) \int_r^R s^{\frac{d}{2}} H_{n+\sigma}(ks) f(s) ds \right)
\end{aligned}$$

Dabei wurde zusätzlich die Eigenschaft (1.4) und die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen (1.5) ausgenutzt. Bis hierher könnte die Berechnung von Av mit $v(r\omega) = f(r)Y_m^n$ für beliebige Funktionen $f(r)$ durchgeführt werden. Für den nächsten Schritt benötigt man jedoch die Stammfunktionen $\int r^{\frac{d}{2}} f(r) J_m(kr) dr$ und $\int r^{\frac{d}{2}} f(r) H_m(kr) dr$. Für die Funktion $r^{-\sigma} C_\nu(t, r\omega)$ können die Stammfunktionen mit Hilfe des Satz von Lommel 1.4 und Gleichung (1.24) bestimmt werden. Für die Funktion $f(r) = r^q$ wird auf Gleichung 1.29 verwiesen. Der Beweis wird für die Funktionen h_n^m vollzogen. Alle anderen Fälle können auf dieselbe Art und Weise bewiesen werden. Man hat also den Fall $f(r) = (tr)^{-\sigma} H_{n+\sigma}(tr)$

$$\begin{aligned}
Ah_n^m(t, r\omega) &= \frac{ik^2\pi}{2} h_n^m(k, r\omega) \int_0^r s J_{n+\sigma}(ks) H_{n+\sigma}(ts) ds \\
&+ \frac{ik^2\pi}{2} j_n^m(k, r\omega) \int_r^R s H_{n+\sigma}(ks) H_{n+\sigma}(ts) ds \\
&\stackrel{t \neq k}{=} \frac{1}{(t^2 - k^2)} \frac{ik^2\pi}{2} \left[kz H_{n+\sigma}(tz) J_{n+\sigma-1}(kz) - tz H_{n+\sigma-1}(tz) J_{n+\sigma}(kz) \right]_{z=0}^{z=r} h_n^m(k, r\omega) \\
&+ \frac{1}{(t^2 - k^2)} \frac{ik^2\pi}{2} \left[kz H_{n+\sigma}(tz) H_{n+\sigma-1}(kz) - tz H_{n+\sigma-1}(tz) H_{n+\sigma}(kz) \right]_{z=r}^{z=R} j_n^m(k, r\omega) \\
&= -\frac{1}{(t^2 - k^2)} \frac{ik^2\pi}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[kz H_{n+\sigma}(tz) J_{n+\sigma-1}(kz) - tz H_{n+\sigma-1}(tz) J_{n+\sigma}(kz) \right] h_n^m(k, r\omega) \\
&+ \frac{1}{(t^2 - k^2)} \frac{ik^2\pi}{2} \underbrace{\left[kr H_{n+\sigma}(kr) J_{n+\sigma-1}(kr) - kr H_{n+\sigma-1}(kr) J_{n+\sigma}(kr) \right]}_{-\frac{2i}{\pi} \text{ wegen (1.21)}} h_n^m(t, r\omega) \\
&+ \frac{1}{(t^2 - k^2)} \frac{ik^2\pi}{2} \underbrace{\left[kR H_{n+\sigma}(tR) H_{n+\sigma-1}(kR) - tR H_{n+\sigma-1}(tR) H_{n+\sigma}(kR) \right]}_{c_n(t)} j_n^m(k, r\omega).
\end{aligned}$$

Betrachtet werden muss nur noch der Limesterm

$$\begin{aligned}
&\lim_{z \rightarrow 0} kz H_{n+\sigma}(tz) J_{n+\sigma-1}(kz) - tz H_{n+\sigma-1}(tz) J_{n+\sigma}(kz) \\
&\stackrel{(1.19)}{=} \lim_{z \rightarrow 0} -kz H_{n+\sigma}(tz) J_{n+\sigma+1}(kz) + tz H_{n+\sigma+1}(tz) J_{n+\sigma}(kz) \\
&\stackrel{(1.15), (1.16)}{=} \lim_{z \rightarrow 0} tz \frac{i2^{n+\sigma+1} \Gamma(n + \sigma + 1)}{\pi (tz)^{n+\sigma+1}} \frac{(kz)^{n+\sigma}}{2^{n+\sigma} \Gamma(n + \sigma + 1)} \\
&= \left(\frac{k}{t} \right)^{n+\sigma} \frac{2i}{\pi}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung für $t = k$ folgt mit Hilfe des Satzes von L'Hopital oder direkt mit Satz 1.4. \square

Lemma 2.11 *Sei A der Lippmann-Schwinger-Operator (siehe (2.6)) und $k, t \in \mathbb{C}$. Dann gilt für die sphärische Welle $j_n^m(t, \cdot)$*

$$(\Delta + k^2) A j_n^m(t, r\omega) = -k^2 j_n^m(t, r\omega). \quad (2.12)$$

Beweis: Behauptung folgt direkt aus (1.34) und Satz 2.10. \square

Im Folgenden wird gezeigt, dass der Helmholtz-Operator der linksinverse Operator zum Lippmann-Schwinger-Operator ist.

Satz 2.12 Seien $k, R > 0$ und A der Lippmann-Schwinger-Operator aus (2.6). Dann ist die Abbildung

$$(\Delta + k^2)A : H^s(B_R) \longrightarrow H^{s-\delta}(B_R)$$

stetig und es gilt auf diesen Räumen:

$$(\Delta + k^2)A = -k^2I.$$

Die Funktion δ ist von der Dimension d abhängig, wobei gilt:

$$\delta = \delta(d) = \max\left(0, \frac{3-d}{2}\right).$$

Beweis: Die Stetigkeit folgt direkt aus Satz 2.8 und Lemma 2.9.

Sei

$$\left\{ j_n^m \left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n \beta_n}}{R}, \cdot \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), l \in \mathbb{N}}$$

eine Orthogonalbasis des $L_2(B_R)$ aus Satz 1.16. Diese Basisfunktionen sind auch in allen Sobolev-Räumen $H^s(B_R)$ ($s \geq 0$) enthalten, da sie analytisch sind. Da die Sobolev-Räume $H^s(B_R)$ Teilmengen des Raumes $L_2(B_R)$ für $s \geq 0$ sind, bildet dieses Funktionensystem auch eine Basis auf diesen Sobolevräumen. Für eine Basisfunktion v gilt nach (2.12) die Beziehung $(\Delta + k^2)Av = -k^2v$. Aus der Stetigkeit folgt die Behauptung. \square

2.2 Eigenschaften des Lippmann-Schwinger-Operators für den Außenraum

Alle in diesem Kapitel zusammengestellten Aussagen beziehen sich auf den Operator A_Γ aus (2.7).

Satz 2.13 Sei $\Gamma \subset B_R^c$ und A_Γ der Lippmann-Schwinger-Operator für den Außenraum zu vorgegebener Wellenzahl $k > 0$ und Radius $R > 0$. Seien j_n^m und h_n^m die sphärischen Wellen (1.33) und $\Gamma \subset B_R^c \subset \mathbb{R}^d$, dann gilt für $v \in L_2(B_R)$:

$$A_\Gamma v(x) = \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle v, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} h_n^m(k, x), \quad x \in \Gamma.$$

Sei $w \in L_2(\Gamma)$, dann gilt für den adjungierten Operator:

$$A_\Gamma^* w(x) = \frac{-ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle w, h_n^m(k, \cdot) \rangle_\Gamma j_n^m(k, x), \quad x \in B_R.$$

Beweis: Aus der Definition des Operators (2.7) und der Darstellung für die Greenschen Funktion (2.8) folgert man:

$$\begin{aligned} A_\Gamma v(r\omega) &= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} h_n^m(k, r\omega) \int_0^R s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \overline{j_n^m(k, s\theta)} dS(\theta) ds \\ &= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle v, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} h_n^m(k, r\omega). \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Behauptung benötigt man zunächst den Integrationskern des adjungierten Operators:

$$\begin{aligned} \langle A_\Gamma v, w \rangle_\Gamma &= \int_\Gamma \int_{B_R} k^2 G_k(x, y) v(y) dy \overline{w(x)} dx \\ &= \int_{B_R} \int_\Gamma \overline{k^2 G_k(x, y) w(x)} dx v(y) dy \\ &= \langle v, A_\Gamma^* w \rangle_{B_R}. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} A_\Gamma^* w(x) &= \int_\Gamma \overline{k^2 G_k(x, y) w(y)} dy \\ &\stackrel{(2.8)}{=} \frac{-ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle w, h_n^m(k, \cdot) \rangle_\Gamma j_n^m(k, x). \end{aligned}$$

□

Wir schon in Kapitel 1.5 gezeigt, kann eine abzählbare Vereinigung von sphärischen Wellen gewählt werden, so dass diese eine Basis des $L_2(B_R)$ bilden. Für die Bestimmung des Nullraums des Lippmann-Schwinger-Operators A_Γ (2.7) auf dem Außenraum steht noch die Wahl der Parameter α_n bzw. β_n (siehe Satz 1.16) zur Disposition. Bei geeigneter Wahl kann man den Nullraum und dessen Komplement mit Hilfe ausgewählter sphärischer Wellen angeben.

Satz 2.14 Seien $R, k > 0$ und $\Gamma \subset B_R^c \subset \mathbb{R}^d$ eine nicht diskrete Teilmenge des Außenraums. Wieder sei $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$. Für $n \in N$ und $m \in N(n, d)$ seien

$$\begin{aligned} \alpha_n &:= kR J'_{n+\sigma}(kR) \\ \beta_n &:= -J_{n+\sigma}(kR). \end{aligned}$$

Weiterhin seien $\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}$ ($l \in \mathbb{N}$) die positiven Nullstellen von

$$\alpha_n J_{n+\sigma}(r) + \beta_n r J'_{n+\sigma}(r). \quad (2.13)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\lambda_{n,0}^{\alpha_n, \beta_n} = kR$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da diese offensichtlich eine Nullstelle von (2.13) sind.

Im Fall $\beta_n \neq 0$ und $\frac{\alpha_n}{\beta_n} + (n + \sigma(d)) < 0$ ist noch zusätzlich eine der beiden rein imaginären Nullstellen hinzu zu nehmen.

Dann bilden die Funktionen

$$\left\{ j_n^m \left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}(n,d), l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

eine Orthogonalbasis des Nullraums $N(A_\Gamma)$ und die Funktionen

$$\left\{ j_n^m \left(\frac{\lambda_{n,0}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}(n,d)} = \left\{ j_n^m(k, \cdot) \right\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}(n,d)}$$

eine Orthogonalbasis von $N(A_\Gamma)^\perp = \overline{R(A_\Gamma^*)}$, dem Komplement des Nullraumes von A_Γ .

Beweis: Für den Beweis wird die Darstellung der Greenschen Funktion (2.8) mit Hilfe der sphärischen Wellen benutzt.

$$\begin{aligned} A_\Gamma j_q^p \left(\frac{\lambda_{q,l}^{\alpha_q, \beta_q}}{R}, \cdot \right) &\stackrel{2.13}{=} \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}(n,d)} \underbrace{\langle j_q^p \left(\frac{\lambda_{q,l}^{\alpha_q, \beta_q}}{R}, \cdot \right), j_n^m(k, \cdot) \rangle}_{\delta_{q,n} \delta_{m,p} \delta_{l,0} \|j_q^p(k, \cdot)\|^2} h_n^m(k, \cdot) \\ &= \delta_{l,0} \frac{ik^2}{4} \|j_q^p(k, \cdot)\|^2 h_q^p(k, \cdot). \end{aligned}$$

Damit liegen die Funktionen $j_q^p \left(\frac{\lambda_{q,l}^{\alpha_q, \beta_q}}{R}, \cdot \right)$ für $l > 0$ schon im Nullraum. Auf der anderen Seite können die Funktionen $j_q^p \left(\frac{\lambda_{q,0}^{\alpha_q, \beta_q}}{R}, \cdot \right) = j_q^p(k, \cdot)$ nicht im Nullraum liegen, denn dann wäre der Term $h_n^m(k, \cdot)$ fast überall gleich Null. \square

Weitere wichtige Eigenschaften sind

Satz 2.15 Sei $R, k > 0$ und $A_{\overline{B_R}^c}$ der Lippmann-Schwinger-Operator für den Außenraum (2.7). Der Überstrich bezeichnet den Abschluss. Sei weiterhin $v \in L_2(B_R)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) A_{\overline{B_R}^c} v &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) A_{\overline{B_R}^c} v &= 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Beweis: Für $0 < \tilde{R} < R$ stimmen die Operatoren $A^{(k), \tilde{R}}$ (Lippmann-Schwinger-Operator für den Innenraum) und $A_{\overline{B_R}^c}$ (Lippmann-Schwinger-Operator für den Außenraum) für alle Funktionen v mit $\text{supp}(v) \subset B_R$ auf dem Kreisring $K_{r, \tilde{R}} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid R \leq |x| \leq \tilde{R}\}$ überein. Also

gilt:

$$A_{B_R^c} v(r\omega) = A^{(k), \tilde{R}} v(r\omega) = \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle v, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} h_n^m(r\omega).$$

Wegen der Stetigkeitsaussagen aus Satz 2.8 und Lemma 2.9 kann der Helmholtz-Operator $(\Delta + k^2)$ in die Summe gezogen werden. Da nach (1.34) $(\Delta + k^2)h_n^m(k, r\omega) = 0$ gilt, ist damit die erste Behauptung bewiesen. Der Operator der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung $r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right)$ kann ebenso mit der Summation vertauscht werden. Man muss nur die entsprechende Stetigkeit für den Sommerfeld-Operator wie in Lemma 2.9 nachrechnen. Nun kann man diesen Operator gliedweise auf die Funktionen $h_n^m(k, r\omega)$ anwenden, die aber die Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Da $\tilde{R} > R$ beliebig gewählt werden kann, gilt dies auch für den Grenzwert. \square

3 Das direkte Streuproblem

Bei dem direkten Problem sind das einfallende Feld u_i und die Objektfunktion $f \in L_\infty(B_R)$ als bekannt vorausgesetzt. Bei Anwendungen kennt man die Frequenz und damit die Wellenzahl k des einfallenden Feldes. Es gilt daher $u_i \in \overline{\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N} \ m \in N(n, d)\}}$. Damit ist die Funktion u_i automatisch Lösung der homogenen Helmholtz-Gleichung (2.3). Gesucht wird die Lösung des Systems (2.2)-(2.4). Für weitere Untersuchungen muß auf die Einschränkung, dass das einfallende Feld die homogene Helmholtzgleichung löst, verzichtet werden. Für diesen Zweck werden zwei neue Operatoren eingeführt.

3.1 Quell- und Feldoperator

Satz und Definition 3.1 *Seien $R, k > 0$. Sei $f \in L_\infty(B_R)$ und A der Lippmann-Schwinger-Operator aus (2.6). Dann wird der Operator*

$$\begin{aligned} F^{(k,R,f)} &: L_2(B_R) \longrightarrow L_2(B_R) \\ F^{(k,R,f)} &:= (I - A_f)^{-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

als Feldoperator bezeichnet. Der Operator

$$\begin{aligned} S^{(k,R,f)} &: L_2(B_R) \longrightarrow L_2(B_R) \\ S^{(k,R,f)} \mathbf{v} &:= {}_f F \mathbf{v} \end{aligned} \tag{3.2}$$

wird als Quelloperator bezeichnet. Abkürzend werden auch die Bezeichnungen F und S benutzt, wenn die Größen k , R und f feststehen. Die beiden Operatoren sind wohldefiniert.

Beweis: In [Kly05] und in [CK92] wird gezeigt, dass der Fredholmoperator zweiter Art $(I - A_f)$ für alle $\tilde{f} \in L_2(B_R)$ einen trivialen Nullraum besitzt. Da $L_\infty(B_R) \subset L_2(B_R)$, gilt dies auch für die Funktion f aus der Voraussetzung. Die Funktion f kann auch als Operator aufgefasst werden. Nach [Hal82] ist der Bildbereich dieses Multiplikationsoperator bei der Wertemenge $L_2(B_R)$ wieder Teilmenge des Raumes $L_2(B_R)$, d.h. der Operator

$$\begin{aligned} f &: L_2(B_R) \rightarrow L_2(B_R) \\ f(g)(x) &:= f(x)g(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

ist wohldefiniert. Durch diese beiden Sachverhalte ist gesichert, dass der Operator

$$(I - A_f) : L_2(B_R) \rightarrow L_2(B_R)$$

wohldefiniert ist und eine Inverse besitzt. \square

Es soll im Folgenden auf die Einschränkung $(\Delta + k^2)u_i = 0$ verzichtet werden. Der folgende Satz gibt die Lösung für die Gleichungen (2.2)-(2.4) zu einer beliebigen einfallenden Welle $u_i \in L_2(B_R)$ und einer beliebigen Objektfunktion $f \in L_\infty(B_R)$ mittels der neu definierten Operatoren an.

Satz 3.2 Seien $R, k > 0$ und $f \in L_\infty(B_R)$. Seien weiterhin A und A_Γ die Lippmann-Schwinger-Operatoren aus (2.6) und (2.7). Die Funktionen F und S bezeichnen den Feld- bzw. den Quell-operator aus Definition 3.1. Für eine Funktion $u_i \in L_2(B_R)$ sei

$$u_s(x) := \begin{cases} AS u_i(x) & x \in B_R \\ A_{B_R^c} S u_i(x) & x \in B_R^c \end{cases}$$

$$u(x) := \begin{cases} F u_i(x) & x \in B_R \\ u_s(x) + u_i(x) & x \in B_R^c. \end{cases}$$

Dann erfüllen die Funktion u , u_i und u_s auf \mathbb{R}^d die Gleichungen

$$u = u_i + u_s \tag{3.4}$$

$$(\Delta + k^2)u_s = -k^2 f u \tag{3.5}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - i k u_s \right) = 0, \quad r = |x|, \tag{3.6}$$

wobei hier f im Außenraum B_R^c gleich Null gesetzt wird (Das einfallende Feld kann im Außenraum beliebige Werte annehmen, da es für den Streuvorgang keine Relevanz besitzt).

Beweis: Zu Gleichung (3.4): Im Außenraum gilt schon nach Definition $u = u_s + u_i$. Für den Zusammenhang im Innenraum bedient man sich der Umformung

$$I = (I - A_f)F \iff F = I + A_f F \iff F = I + AS. \tag{3.7}$$

Damit gilt auch $u = F u_i = u_i + AS u_i = u_i + u_s$ im Innenraum.

Zu Gleichung (3.5): Für den Innenraum gilt:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)u_s &= (\Delta + k^2)AS u_i = (\Delta + k^2)A_f F u_i \stackrel{\text{Satz 2.12}}{=} -k^2_f F u_i \stackrel{(3.7)}{=} -k^2 f [I + AS] u_i \\ &= -k^2 f (u_i + u_s) \end{aligned}$$

Für den Außenraum ist (3.5) wegen (2.14) erfüllt.

Zu Gleichung (3.6): Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung ist auch wegen (2.14) erfüllt. \square

Man muss folglich wegen (3.7) nur einen der beiden Operator F bzw. S kennen, um die Funktion f zu berechnen. Es gilt für eine beliebige Funktion $w \in L_2(B_R)$

$$f = \frac{S w}{F w} = \frac{S w}{w + A S w}. \quad (3.8)$$

Es gilt wegen $A S - F A_f = I - F - F A_f = I - F(I - A_f) = 0$ auch der Zusammenhang

$$A S = F A_f \quad (3.9)$$

zwischen Feld- und Quelloperator. Bei gegebenem Feld $u_i \in L_2(B_R)$ und bekannter Objektfunktion $f \in L_\infty(B_R)$ gilt nach Satz 3.2 für das gestreute Feld im Innenraum B_R :

$$u_s = A S u_i.$$

Deshalb wird in den nachfolgenden Kapiteln mit $A S u_i$ das gestreute Feld u_s bezeichnet. Aus gleichem Grund wird mit $F u_i$ das Gesamtfeld und mit $S u_i$ die Quelle bezeichnet.

3.2 Eigenschaften des Quell- und Feldoperators

Im Umgang mit Skalarprodukten ist oftmals das duale Problem ebenso interessant, wie das Ursprüngliche. Wir betrachten deshalb die Adjungierten des Feld- und des Quellooperators.

Satz 3.3 *Zu $f \in L_\infty(B_R)$ und $k, R > 0$ seien F bzw. S der zugehörige Feld- bzw. Quelloperator. Dann gilt für die adjungierten Operatoren:*

$$(i) \quad F^* = \overline{(I - f A)}^{-1} \quad (3.10)$$

$$(ii) \quad S^* = \overline{S}. \quad (3.11)$$

Beweis:

zu (i) :

$$\begin{aligned} \langle F v, w \rangle_{B_R} &= \langle (I - A_f)^{-1} v, w \rangle_{B_R} \\ &= \langle v, \{(I - A_f)^{-1}\}^* w \rangle_{B_R} \\ &= \langle v, \{(I - A_f)^*\}^{-1} w \rangle_{B_R} \\ &= \langle v, \{(I - (A_f)^*)\}^{-1} w \rangle_{B_R} \\ &\stackrel{(2.10)}{=} \langle v, \{\overline{(I - f A)}\}^{-1} w \rangle_{B_R}. \end{aligned}$$

zu (ii) :

$$\begin{aligned}
\langle Sv, w \rangle_{B_R} &= \langle {}_fFv, w \rangle_{B_R} \\
&= \langle Fv, \bar{f}w \rangle_{\text{supp}(f)} \\
&\stackrel{(ii)}{=} \langle v, \{(\overline{I - {}_fA})\}^{-1} \{(\bar{f})^{-1}\}^{-1} w \rangle_{\text{supp}(f)} \\
&= \langle v, \{(\bar{f})^{-1}(\overline{I - {}_fA})\}^{-1} w \rangle_{\text{supp}(f)} \\
&= \langle v, \{(\overline{I - A_f})(\bar{f})^{-1}\}^{-1} w \rangle_{\text{supp}(f)} \\
&= \langle v, (\bar{f}) \{(\overline{I - A_f})\}^{-1} w \rangle_{\text{supp}(f)} \\
&= \langle v, \bar{S}w \rangle_{B_R} .
\end{aligned}$$

□

3.3 Lösungen für radialsymmetrische Objekte

Zunächst werden einige Invarianzaussagen zu den verschiedenen Operatoren A, S, F gezeigt. Für den weiteren Verlauf werden Drehoperatoren im \mathbb{R}^d benötigt. Jeder Drehoperator D kann mittels einer orthogonalen Matrix Q mit $\det(Q) = 1$ beschrieben werden. Eine Drehung einer Funktion v ist dann definiert durch:

$$Dv(r\omega) := v(Qx) = v(Q(r\omega)) = v(rQ\omega). \quad (3.12)$$

Lemma 3.4 Sei D ein Drehoperator mit zugehöriger orthogonaler Matrix $Q \in \text{Mat}(d \times d)$ mit $\det(Q) = 1$. Dann gilt für den adjungierten Operator

$$\begin{aligned}
D^*v(r\omega) &= v(rQ^t\omega) \\
&= D^{-1}v(r\omega)
\end{aligned}$$

Beweis: Da der Operator nur auf den sphärischen Anteil einer Funktion wirkt, wird die Betrachtung nur bezüglich des L_2 -Skalarprodukts auf der Einheitskugel vollzogen. Seien dafür $v, w \in L_2(S^{d-1})$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle Dv, w \rangle_{S^{d-1}} &= \int_{S^{d-1}} \underbrace{v(Q\omega)}_{:=\theta} \overline{\underbrace{w(\omega)}_{Q^t\theta}} dS(\omega) \\
&= \langle v, D^*w \rangle_{S^{d-1}} .
\end{aligned}$$

□

Als nächstes wird die Auswirkung des Drehoperators auf den Lippmann-Schwinger-Operator für den Innenraum betrachtet.

Lemma 3.5 Für $k, R > 0$ sei A der Lippmann-Schwinger-Operator aus (2.6). Weiterhin seien $F^{(k),(R),(f)}$ und $S^{(k),(R),(f)}$ der Feld- bzw. Quelloperator aus (3.1) und (3.2). Sei D ein Drehoperator gemäß (3.12), dann gilt

$$\begin{aligned} DA &= AD \\ DA_f &= A_{Df}D \\ DF^{(k),(R),(D^{-1}f)} &= F^{(k),(R),(f)}D \\ DS^{(k),(R),(D^{-1}f)} &= S^{(k),(R),(f)}D. \end{aligned}$$

Beweis: Sei D ein Drehoperator mit zugehöriger orthogonaler Matrix $Q \in \text{Mat}(d \times d)$ mit $\det(Q) = 1$. Seien weiterhin Y_n^m die Kugelflächenfunktionen aus Kapitel 1.3.1. Die Drehung transformiert ein harmonisches homogenes Polynom vom Grad n wieder in ein homogenes harmonisches Polynom vom gleichen Grad. Also kann man eine gedrehte Kugelflächenfunktion wieder durch Linearkombination von Kugelflächenfunktionen gleichen Grades darstellen:

$$DY_n^m(\omega) = Y_n^m(Q\omega) = \sum_{p \in N(n,d)} c_{n,Q}^{m,p} Y_n^p(\omega)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_{n,Q}^{m,p} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^{d-1}} Y_n^m(Q\omega) \overline{Y_n^p(\omega)} dS(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^{d-1}} Y_n^m(\omega) \overline{Y_n^p(Q^t\omega)} dS(\omega) = \overline{c_{n,Q^t}^{p,m}}.$$

Sei nun $v \in L_2(B_R)$. Dann gilt mit Hilfe der Reihendarstellung der Greenschen Funktion (2.8):

$$\begin{aligned}
DAv(r\omega) &= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} Dh_n^m(k, r\omega) \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \overline{j_n^m(k, s\theta)} dS(\theta) ds \\
&+ \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} Dj_n^m(k, r\omega) \int_r^R s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \overline{h_n^m(k, s\theta)} dS(\theta) ds \\
&= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \sum_{p \in N(n,d)} c_{n,Q}^{m,p} h_n^p(k, r\omega) \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \overline{j_n^m(k, s\theta)} dS(\theta) ds \\
&+ \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \sum_{p \in N(n,d)} c_{n,Q}^{m,p} j_n^p(k, r\omega) \int_r^R s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \overline{h_n^m(k, s\theta)} ds(\theta) ds \\
&= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(n,d)} h_n^p(k, r\omega) \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \sum_{m \in N(n,d)} \overline{c_{n,Q}^{p,m} j_n^m(k, s\theta)} dS(\theta) ds \\
&+ \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(n,d)} j_n^p(k, r\omega) \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \sum_{m \in N(n,d)} \overline{c_{n,Q}^{p,m} h_n^m(k, s\theta)} dS(\theta) ds \\
&= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(n,d)} h_n^p(k, r\omega) \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \overline{j_n^p(k, sQ'\theta)} dS(\theta) ds \\
&+ \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(n,d)} j_n^p(k, r\omega) \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} v(s\theta) \overline{h_n^p(k, sQ'\theta)} dS(\theta) ds \\
&= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(n,d)} h_n^p(k, r\omega) \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} Qv(s\theta) \overline{j_n^p(k, s\theta)} dS(\theta) ds \\
&+ \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(n,d)} j_n^p(k, r\omega) \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} Qv(s\theta) \overline{h_n^p(k, s\theta)} dS(\theta) ds \\
&= ADv(r\omega).
\end{aligned}$$

Für $f \in L_\infty(B_R)$ gilt damit:

$$DA_f v(r\omega) = DA(fv)(r\omega) = AD(fv)(r\omega) = A_{Df} Dv(r\omega).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
&D^{-1}(I - A_f)v(r\omega) = (I - A_{D^{-1}f})D^{-1}v(r\omega) \\
\iff &(I - A_f)^{-1}Dv(r\omega) = D(I - A_{D^{-1}f})^{-1}v(r\omega). \\
\iff &F^{(k),(R),(f)} Dv(r\omega) = DF^{(k),(R),(D^{-1}f)}v(r\omega).
\end{aligned}$$

Abschließend noch die Betrachtung für den Quelloperator:

$$\begin{aligned}
SDv(r\omega) &= {}_f F^{(k),(R),(f)} Dv(r\omega) = {}_f DF^{(k),(R),(D^{-1}f)}v(r\omega) \\
&= D\left(D^{-1}f(r\omega)F^{(k),(R),(D^{-1}f)}v(r\omega)\right) = DS^{(k),(R),(D^{-1}f)}v(r\omega).
\end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir für radialsymmetrische Objekte ($f(r\omega) = f(r)$) folgende Invarianzeigenschaft für den Feld- bzw. Queloperator.

Satz 3.6 Seien $k, R > 0$ und $f \in L_\infty(B_R)$ mit $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Desweiteren seien F, S der zugehörige Feld- bzw. Queloperator und j_n^m die sphärischen Wellen aus (1.33). Dann sind die Räume W_n^m aus (1.35) invariante Teilräume des $L_2(\Omega)$ für die Operatoren F und S . Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} S j_n^m(t, r\omega) &\in W_n^m, & \forall t \in \mathbb{C} \\ F j_n^m(t, r\omega) &\in W_n^m, & \forall t \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Beweis: Da die Räume W_n^m durch die sphärischen Wellen $j_n^m(t, \cdot)$ ($t \in \mathbb{C}$) aufgespannt werden, genügt es zu zeigen, dass

$$\langle S j_n^m(s, \cdot), j_q^p(t, \cdot) \rangle = \langle S j_n^m(s, \cdot), j_q^p(t, \cdot) \rangle \delta_{n,q} \delta_{m,p}$$

gilt. Seien also $n, q \in \mathbb{N}$, $m \in N(n, d)$ und $p \in N(q, d)$. Weiterhin seien $t, s \in \mathbb{C}$ beliebig. Sei D eine Drehung. Dann gilt nach Lemma 3.4 und 3.5

$$\langle S D j_n^m(s, \cdot), D j_q^p(t, \cdot) \rangle = \langle S j_n^m(s, \cdot), j_q^p(t, \cdot) \rangle, \quad (3.13)$$

da f dreihinvariant ist. Nach der Festlegung der Kugelflächenfunktionen und der Darstellung $Y_n^m(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}, \varphi) = P((\theta_1, \dots, \theta_{d-2})) e^{im_{d-2}\varphi}$ gibt es eine Gruppe von Drehungen für die die Kugelflächenfunktionen gerade Eigenfunktionen dieser Drehung sind. Und zwar beschreibt für $\alpha \in [0, 2\pi]$

$$D^\alpha Y_n^m(\omega(\theta, \varphi)) := Y_n^m(\omega(\theta, \varphi - \alpha)) = e^{-im_{d-2}\alpha} Y_n^m(\omega(\theta, \varphi))$$

eine Drehung, die nur die ersten beiden Koordinaten eines Elements aus dem \mathbb{R}^d beeinflusst. Setzt man diese Drehung in (3.13) ein, so erhält man

$$\langle S j_n^m(s, \cdot), j_q^p(t, \cdot) \rangle (1 - e^{i(p_{d-2} - m_{d-2})\alpha}) = 0, \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi].$$

Daraus folgt sofort

$$\langle S j_n^m(s, \cdot), j_q^p(t, \cdot) \rangle (1 - e^{i(p_{d-2} - m_{d-2})\alpha}) = 0, \text{ falls } p_{d-2} \neq m_{d-2}.$$

Für $d = 2$ ist damit die Behauptung gezeigt. Für den allgemeinen Fall siehe Bemerkung 3.16. \square

Es gibt leider nur wenige analytische Lösungen für das direkte Streuproblem. Im Folgenden wird das direkte Streuproblem für radialsymmetrische Streuer analytisch gelöst. Die Grundidee stammt aus [Wüb95].

Das Intervall $[0, R]$ wird diskretisiert durch $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_N = R$. Für $f_j \in \mathbb{C}$ ($j = 1 \dots N$) mit $f_N = 0$ sei die Funktion $f \in L_\infty(B_R)$ definiert wie folgt:

$$f(r\omega) = \begin{cases} f_j & , r_{j-1} \leq r < r_j \\ 0 & , r_{N-1} \leq r < R. \end{cases}$$

Offensichtlich ist die Funktion radialsymmetrisch und beschränkt mit Träger in B_R . Gesucht wird eine Lösung u_s des Problem (3.4)-(3.6), bei gegebenen $u_i \in L_2(B_R)$. Da eine abzählbar unendliche Anzahl von sphärischen Wellen den Raum $L_2(B_R)$ aufspannt, genügt es, wegen der Linearität des Problems, eine Lösung für jede sphärische Welle $j_n^m(t, \cdot)$ zu finden ($t \in \mathbb{C}$). Es muss gelten:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)u_s(r\omega) &= -k^2 f(r\omega)(u_s(r\omega) + u_j(r\omega)) \\ \Leftrightarrow (\Delta + k^2(1 + f_j))u_s(r\omega) &= \begin{cases} -k^2 f_j j_n^m(t, r\omega) & r_{j-1} \leq r < r_j \quad , j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & r_{N-1} \leq r \leq R \end{cases} \end{aligned}$$

Damit lässt sich die gesuchte Funktion u_s abschnittsweise auf dem Kreisring

$$K_j = \{r\omega \in \mathbb{C} : r_{j-1} \leq r < r_j \quad , j = 1, \dots, N\}$$

durch eine Linearkombination aus drei Funktionen bilden. Und zwar zwei linear unabhängige Lösungen aus dem Nullraum des Helmholtz-Operators $(\Delta + k^2(1 + f_j))$ und einer speziellen Lösungen, falls $t^2 \neq k^2(1 + f_j)$. Die spezielle Lösung ist bis auf eine Konstante die Funktion $j_n^m(t, \cdot) = u_i$ selbst, da diese eine Eigenfunktion des Helmholtz-Operators ist (siehe (1.34)). Setzt man die Lösung in die Helmholtzgleichung ein, so erhält man für die Konstante der speziellen Lösung gerade den Wert $\frac{k^2 f_j}{t^2 - k^2(1 + f_j)}$. Es existieren also Konstanten v_j, w_j , so dass die Lösung auf den Kreisringen die Form

$$u_s(r\omega) = \begin{cases} v_j h_n^{m,(1)}(k \sqrt{1 + f_j}, \cdot) + w_j h_n^{m,(2)}(k \sqrt{1 + f_j}, \cdot) + e_j j_n^m(t, \cdot), & r_{j-1} \leq r < r_j \\ v_N h_n^{m,(1)}(k \sqrt{1 + f_j}, \cdot) + w_N h_n^{m,(2)}(k \sqrt{1 + f_j}, \cdot), & r_{N-1} \leq r \leq R \end{cases}$$

mit

$$e_j = \begin{cases} \frac{k^2 f_j}{t^2 - k^2(1 + f_j)}, & t^2 \neq k^2(1 + f_j) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Fordert man nun Stetigkeit und Differenzierbarkeit an den Kreisringrändern, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\left(H_n^{(1)}(a_j)v_{j+1} + H_n^{(2)}(a_j)w_{j+1}\right)}{a_j^\sigma} - \frac{\left(H_n^{(1)}(b_j)v_j + H_n^{(2)}(b_j)w_j\right)}{b_j^\sigma} = \frac{\left(\frac{k^2 f_j}{i^2 - k^2(1+f_j)} - \frac{k^2 f_{j+1}}{i^2 - k^2(1+f_{j+1})}\right) J_n(c_j)}{c_j^\sigma} \quad (3.14)$$

$$\frac{\left(H_n^{(1)'}(a_j)v_{j+1} + H_n^{(2)'}(a_j)w_{j+1}\right)}{a_j^{\sigma-1}} - \frac{\left(H_n^{(1)'}(b_j)v_j + H_n^{(2)'}(b_j)w_j\right)}{b_j^{\sigma-1}} = \frac{\left(\frac{k^2 f_j}{i^2 - k^2(1+f_j)} - \frac{k^2 f_{j+1}}{i^2 - k^2(1+f_{j+1})}\right) J_n'(c_j)}{c_j^{\sigma-1}} \quad (3.15)$$

mit

$$\begin{aligned} a_j &= k \sqrt{1 + f_{j+1}} r_j \\ b_j &= k \sqrt{1 + f_j} r_j \\ c_j &= t r_j \\ \sigma &= \sigma(d) = \frac{d-2}{2} \end{aligned}$$

für die gesuchten konstanten v_j bzw. w_j .

Mit den Umformungen

$$a_j H_n^{(2)'}(a_j)(3.14) - H_n^{(2)}(a_j)(3.15)$$

bzw.

$$-a_j H_n^{(1)'}(a_j)(3.14) + H_n^{(1)}(a_j)(3.15)$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\underbrace{\frac{H_n^{(1)}(a_j)H_n^{(2)'}(a_j) - H_n^{(1)'}(a_j)H_n^{(2)}(a_j)}{a_j^{\sigma-1}}}_{=\frac{4}{i\alpha_j^\sigma} \text{ wegen (1.21)}} \begin{pmatrix} v_{j+1} \\ w_{j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{b_j^\sigma} \begin{pmatrix} h_{n,j}^{2,1} h_{n,j}^{2,2} \\ -h_{n,j}^{1,1} - h_{n,j}^{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j \\ w_j \end{pmatrix} + \frac{d_j}{c_j^\sigma} \begin{pmatrix} j_{n,j}^2 \\ -j_{n,j}^1 \end{pmatrix}$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} h_{n,j}^{1,1} &= a_j H_n^{(1)'}(a_j) H_n^{(1)}(b_j) - b_j H_n^{(1)'}(b_j) H_n^{(1)}(a_j) \\ h_{n,j}^{2,1} &= a_j H_n^{(2)'}(a_j) H_n^{(1)}(b_j) - b_j H_n^{(1)'}(b_j) H_n^{(2)}(a_j) \\ h_{n,j}^{1,2} &= a_j H_n^{(1)'}(a_j) H_n^{(2)}(b_j) - b_j H_n^{(2)'}(b_j) H_n^{(1)}(a_j) \\ h_{n,j}^{2,2} &= a_j H_n^{(2)'}(a_j) H_n^{(2)}(b_j) - b_j H_n^{(2)'}(b_j) H_n^{(2)}(a_j) \\ j_{n,j}^1 &= a_j H_n^{(1)'}(a_j) J_n(c_j) - c_j J_n'(c_j) H_n^{(1)}(a_j) \\ j_{n,j}^2 &= a_j H_n^{(2)'}(a_j) J_n(c_j) - c_j J_n'(c_j) H_n^{(2)}(a_j) \\ d_j &= e_j - e_{j+1}. \end{aligned}$$

Nochmaliges Umformen führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_{j+1} \\ w_{j+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{i\pi a_j^\sigma}{4b_j^\sigma} \begin{pmatrix} h_{n,j}^{2,1} & h_{n,j}^{2,2} \\ -h_{n,j}^{1,1} & -h_{n,j}^{1,2} \end{pmatrix}}_{:=H_{n,j}} \begin{pmatrix} v_j \\ w_j \end{pmatrix} + \frac{i\pi a_j^\sigma d_j}{4c_j^\sigma} \begin{pmatrix} j_{n,j}^2 \\ -j_{n,j}^1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $H_{n,j}$ sind invertierbar, denn es gilt für die Determinante der Matrizen:

$$\begin{aligned} \frac{4b_j^\sigma}{i\pi a_j^\sigma} \det(H_{n,j}) &= h_{n,j}^{1,1} h_{n,j}^{2,2} - h_{n,j}^{2,1} h_{n,j}^{1,2} \\ &= a_j b_j \left(H_n^{(2)'}(b_j) H_n^{(1)}(a_j) H_n^{(2)'}(a_j) H_n^{(1)}(b_j) + H_n^{(1)'}(a_j) H_n^{(2)}(b_j) H_n^{(1)'}(b_j) H_n^{(2)}(a_j) \right. \\ &\quad \left. - H_n^{(1)'}(a_j) H_n^{(1)}(b_j) H_n^{(2)'}(b_j) H_n^{(2)}(a_j) - H_n^{(1)'}(b_j) H_n^{(1)}(a_j) H_n^{(2)'}(a_j) H_n^{(2)}(b_j) \right) \\ &= a_j b_j \left(H_n^{(2)'}(b_j) H_n^{(1)}(b_j) \left\{ H_n^{(2)'}(a_j) H_n^{(1)}(a_j) - H_n^{(1)'}(a_j) H_n^{(2)}(a_j) \right\} \right. \\ &\quad \left. + H_n^{(1)'}(b_j) H_n^{(2)}(b_j) \left\{ H_n^{(1)'}(a_j) H_n^{(2)}(a_j) - H_n^{(2)'}(a_j) H_n^{(1)}(a_j) \right\} \right) \\ &= a_j b_j \underbrace{\left\{ H_n^{(2)'}(b_j) H_n^{(1)}(b_j) - H_n^{(1)'}(b_j) H_n^{(2)}(b_j) \right\}}_{\frac{-4i}{\pi b_j}} \\ &\quad \times \underbrace{\left\{ H_n^{(2)'}(a_j) H_n^{(1)}(a_j) - H_n^{(1)'}(a_j) H_n^{(2)}(a_j) \right\}}_{\frac{-4i}{\pi a_j}} \\ &= -\frac{16}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Bei den Umformungen wurde lediglich Gleichung (1.21) benutzt. Genau wie bei der Berechnung der Determinanten lässt sich zeigen, dass für die Inverse von $H_{n,j}$ gilt:

$$H_{n,j}^{-1} = \frac{4b_j^\sigma}{i\pi a_j^\sigma} \begin{pmatrix} h_{n,j}^{1,2} & h_{n,j}^{2,2} \\ -h_{n,j}^{1,1} & -h_{n,j}^{2,1} \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Koeffizienten v_j und w_j fast schon eindeutig bestimmt. Damit das gesuchte gestreute Feld im innersten Kreisring differenzierbar bleibt, muss $v_1 = w_1$ gelten. Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung hingegen sorgt dafür, dass auf dem äußersten Kreisring $w_n = 0$ gelten muss, da nur die sphärischen Wellen $h_n^{m,(1)}(t, \cdot)$ diese Bedingung erfüllen. Damit gilt für die Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{j+1} \\ w_{j+1} \end{pmatrix} = H_{n,j} \begin{pmatrix} v_j \\ w_j \end{pmatrix} + \frac{i\pi a_j^\sigma d_j}{4c_j^\sigma} \begin{pmatrix} j_{n,j}^2 \\ -j_{n,j}^1 \end{pmatrix}.$$

Die Konstante v_1 ergibt sich aus der Bedingung $w_N = 0$ und lässt sich explizit berechnen.

$$v_1 = \frac{h_2}{g_2},$$

wobei

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = H_{n,N-1} \cdot \dots \cdot H_{n,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -\frac{i\pi}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{a_j^\sigma d_j}{c_j^\sigma} H_{n,N-1} \cdot \dots \cdot H_{n,j+1} \begin{pmatrix} j_{n,j}^2 \\ -j_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Dabei wird das Produkt $H_{n,N-1}H_{n,N} := I$ in obiger Gleichung als Identität angesehen. Die Lösung ist wegen der Invertierbarkeit der Matrizen $H_{n,j}$ eindeutig. Die analytische Lösung für die Quellen $S j_n^m(t, \cdot)$ erhält man durch Anwendung des Helmholtz-Operators auf das gestreute Feld u_s . Es gilt mit Hilfe von (1.34) für die Quelle:

$$S j_n^m(t, r\omega) = \begin{cases} f_j v_j h_n^{m,(1)}(k \sqrt{1+f_j}, \cdot) + f_j w_j h_n^{m,(2)}(k \sqrt{1+f_j}, \cdot) - \frac{k^2-t^2}{k^2} e_j j_n^m(t, \cdot), & r_{j-1} \leq r < r_j \\ 0, & r_{N-1} \leq r \leq R \end{cases}$$

mit

$$e_j = \begin{cases} \frac{k^2 f_j}{t^2 - k^2(1+f_j)}, & t^2 \neq k^2(1+f_j) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung 3.1 zeigt das gestreute Feld $AS w$ und die Quelle $S w$ für den zweidimensionalen Fall. Die Funktion $w(re^{i\omega}) = e^{itr \cos(\omega-\alpha)}$ beschreibt eine ebene Welle. Für den numerischen Test wurde $k = 7$, $t = 10$, $R = 1$ und $\alpha = 0.5$ gewählt. Die zu Grunde liegende Objektfunktion ist wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} -0.3, & 0 < |x| \leq 0.25 \\ -0.2, & 0.25 < |x| \leq 0.5 \\ -0.1, & 0.5 < |x| \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 < |x| \leq 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Mittels der Jacobi-Anger-Entwicklung kann die Funktion v als Linearkombination von sphärischen Wellen $j_n^m(t, \cdot)$ beschrieben werden. Die gestreuten Felder $AS j_n^m(t, \cdot)$ und die Quellen $S j_n^m(t, \cdot)$ wurden wie oben beschrieben berechnet.

3.4 Lösungen für beliebige Objekte

Für beliebige Hindernisse f ist es nicht mehr möglich, eine geschlossene Darstellung für das gestreute Feld, bei gegebenem einfallendem Feld u_i , anzugeben. Eine einfache Möglichkeit zur Bestimmung des gesuchten gestreuten Feldes besteht in der Diskretisierung des Feldoperators F aus Gleichung (3.1). Dies erfordert jedoch je nach „Stärke“ des Streuers f eine sehr feine Diskretisierung. Der Aufwand wird dadurch immens hoch, so dass diese Methode auf

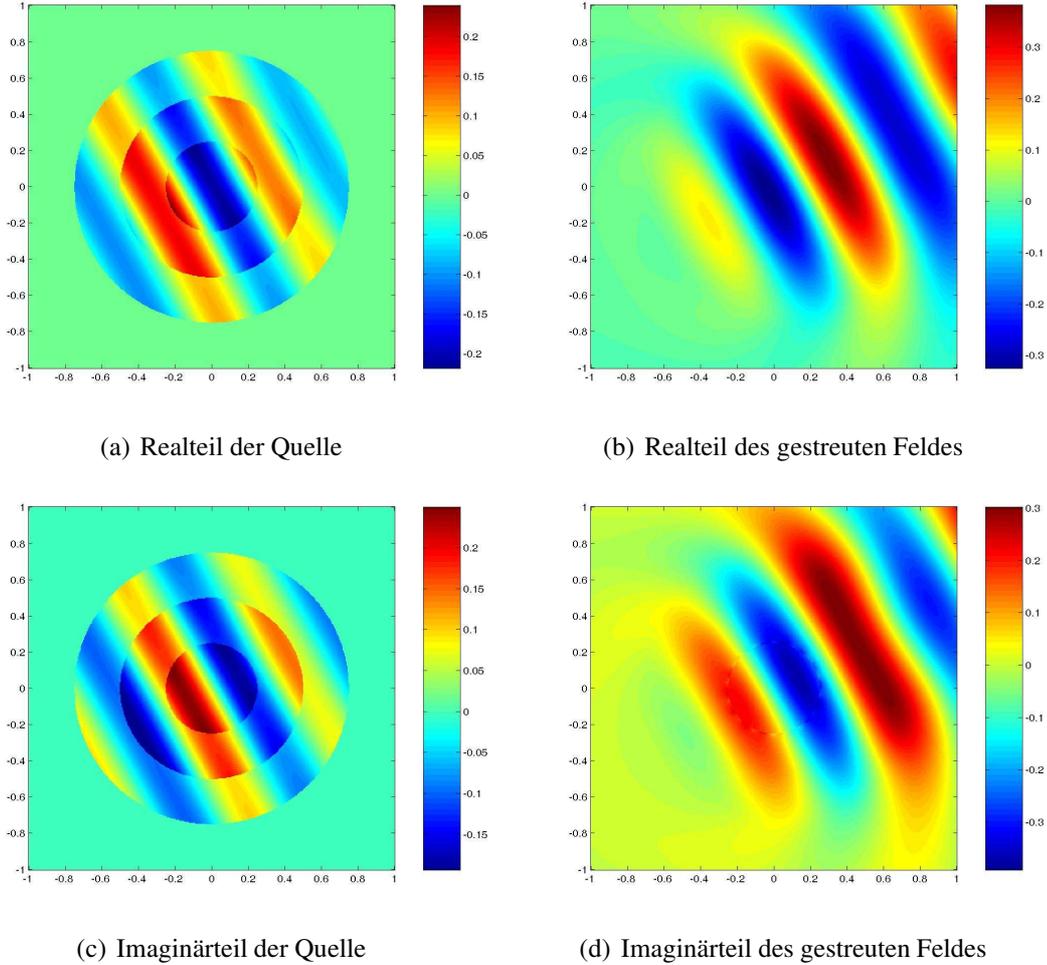


Abbildung 3.1: Quelle und gestreutes Feld

herkömmlichen Computern kaum noch durchzuführen ist. Im weiteren Verlauf wird darauf hingearbeitet, dass man die Skalarprodukte

$$\langle S j_q^p(t, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} \stackrel{(3.11)}{=} \langle S j_n^{-m}(k, \cdot), j_q^{-p}(\bar{t}, \cdot) \rangle_{B_R}$$

numerisch approximiert. Die Wellenzahl k ist hierbei wieder fest vorgeben. Der Parameter t ist eine beliebige komplexe Zahl. Wegen der Vollständigkeit der Orthogonalsysteme aus Satz 1.16 lassen sich dann für beliebige einfallende Wellen $u_i \in \overline{\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}}$ die dazugehörigen Quellen $S u_i$ bestimmen, indem die gesuchte Funktion bezüglich einer der Basen aus 1.16 entwickelt wird. Darüberhinaus können die gestreuten Felder dann mittels Satz 2.10 bestimmt werden. Die gesuchten Skalarprodukte sind dabei Lösungen von Riccati-Differentialgleichungen. Die Idee wurde aus [CR97] entnommen. Dort wurde allerdings nur der Spezialfall $d = 2$ und $t = k$ betrachtet.

Es folgt eine Beweisskizze, die an [CR97] angelehnt ist. Werden Aussagen benutzt, die nur für den zweidimensionalen Fall bewiesen worden sind, so wird darauf hingewiesen.

Definition 3.7 Sei $t \in \mathbb{C}$ beliebig und $k, R > 0$. Sei weiterhin $0 \leq r \leq R$, $f \in L_\infty(B_R)$. Die Matrix

$$S^{t,k} = \left(S_{(n,m),(q,p)}^{t,k} \right)_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), q \in \mathbb{N}, p \in N(q,d)}$$

wird als Streumatrix des Streuers f bezüglich Wellenzahl k und Parameter t bezeichnet. Die Matrixeinträge $S_{(n,m),(q,p)}^{t,k}$ sind gerade die Skalarprodukte

$$\langle S^{(k,R,f)} j_q^p(t, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R}$$

bezüglich der Objektfunktion f .

Mit H^t, J^t bzw. Y werden die unendlichdimensionalen Matrizen

$$J^t = J^t(r) = \frac{1}{(tr)^\sigma} \text{diag}\{ \underbrace{J_{0+\sigma}(tr), J_{1+\sigma}(tr), \dots, J_{1+\sigma}(tr)}_{\#N(1,d)\text{-mal}}, \underbrace{J_{2+\sigma}(tr), \dots, J_{2+\sigma}(tr), \dots}_{\#N(2,d)\text{-mal}} \}$$

$$H^t = H^t(r) = \frac{1}{(tr)^\sigma} \text{diag}\{ \underbrace{H_{0+\sigma}(tr), H_{1+\sigma}(tr), \dots, H_{1+\sigma}(tr)}_{\#N(1,d)\text{-mal}}, \underbrace{H_{2+\sigma}(tr), \dots, H_{2+\sigma}(tr), \dots}_{\#N(2,d)\text{-mal}} \}$$

$$Y = Y(\omega) = \text{diag}\{ (Y_n^m)_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d)} \}$$

bezeichnet, wobei $\sigma = \frac{d-2}{2}$ wieder von der Dimension des Problems abhängt.

Bemerkung 3.8 Mit Hilfe der Streumatrix kann man einfallenden Feldern das dazugehörige gestreute Feld auf dem Außenraum zuordnen. Gilt für ein einfallendes Feld u_i die Darstellung

$$u_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \alpha_{n,m} j_n^m(t, \cdot) \in \overline{\text{span}\{ j_n^m(t, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d) \}}$$

$$= YJ^t \alpha$$

dann erhält man, wegen Satz 2.13 und Satz 3.2, mit der Streumatrix die Koeffizienten des gestreuten Feldes u_s im Außenraum. Es gilt mit $\beta = S^{t,k} \alpha$ und $r \geq R$:

$$u_s(r\omega) = \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \beta_{n,m} h_n^m(k, r\omega) = \frac{ik^2}{4} YH^k S^{t,k} \alpha$$

Es wird auf einen Lemma zurückgegriffen, dessen Aussage nur für den Fall $d = 2$ bewiesen wurde. Es handelt sich dabei um eine Reformulierung von (55) aus [BCT65].

Lemma 3.9 Sei $u_i \in L_2(\Omega)$ ein einfallendes Feld und ASu_i das dazugehörige gestreute Feld zu einer Objektfunktion $f \in L_\infty(\Omega)$. (S ist hierbei der Quelloperator bezüglich der Objektfunktion f). Seien Ω_1 und Ω_2 zwei disjunkte Mengen mit $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Für $j \in \{1, 2\}$ seien die Funktionen f_j das Produkt aus Objektfunktion f und der charakteristischen Funktion von Ω_j , das heißt

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in \Omega_j \\ 0 & , x \notin \Omega_j. \end{cases}$$

Seien $S_j := S^{(k, f_j)}$ die Quellooperatoren bezüglich der Funktionen f_j . Vorausgesetzt, es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass $\|A_{f_1}\|_\infty < ch$, wobei h das Volumen von Ω_1 darstellt, dann gilt für genügend kleine $h > 0$ für das gestreute Feld

$$ASu_i = (AS_1 + AS_2 + AS_2AS_1 + AS_1AS_2 + AS_2AS_1AS_2)u_i + O(h^2).$$

Mit diesem Lemma erhält man mit $\Omega_2 = B_r$ und $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : r \leq |x| < r + h\}$ für ein $h > 0$.

Lemma 3.10 Sei $0 < r < r + h < R$ und $r + h < \tilde{r}$. Für $u_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n, d)} \alpha_{n, m} j_n^m(t, \cdot) \in \overline{\text{span}\{j_n^m(t, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}}$ gilt für das gestreute Feld außerhalb des Kreisrings:

$$ASu_i(\tilde{r}\omega) = \sum_{j=1, \dots, 5} v_j(\tilde{r}\omega) + O(h^2)$$

mit

$$\begin{aligned} v_1(\tilde{r}\omega) &= \frac{ik^2}{4} Y(\omega) H^k(\tilde{r}) T^{(1)} \alpha \\ v_2(\tilde{r}\omega) &= \frac{ik^2}{4} Y(\omega) H^k(\tilde{r}) S^{t, k} \alpha \\ v_3(\tilde{r}\omega) &= \left(\frac{ik^2}{4}\right)^2 Y(\omega) H^k(\tilde{r}) S^{k, k} T^{(2)} \alpha \\ v_4(\tilde{r}\omega) &= \left(\frac{ik^2}{4}\right)^2 Y(\omega) H^k(\tilde{r}) T^{(3)} S^{t, k} \alpha \\ v_5(\tilde{r}\omega) &= \left(\frac{ik^2}{4}\right)^3 Y(\omega) H^k(\tilde{r}) S^{k, k} T^{(4)} S^{t, k} \alpha \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\alpha_{n, m}\right)_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)} \\ T^{(j)} &= \left(t_{(n, m), (q, p)}^{(j)}\right)_{n, q \in \mathbb{N}, m \in N(n, d), p \in N(q, d)} \\ t_{(n, m), (q, p)}^{(1)} &= \langle S_1 j_n^m(t, \cdot), j_q^p(k, \cdot) \rangle_{B_R} \\ t_{(n, m), (q, p)}^{(2)} &= \langle S_1 j_n^m(t, \cdot), h_q^{p, (2)}(k, \cdot) \rangle_{B_R} \\ t_{(n, m), (q, p)}^{(3)} &= \langle S_1 h_n^m(k, \cdot), j_q^p(k, \cdot) \rangle_{B_R} \\ t_{(n, m), (q, p)}^{(4)} &= \langle S_1 h_n^m(k, \cdot), h_q^{p, (2)}(k, \cdot) \rangle_{B_R} \end{aligned}$$

und S_1 bzw S_2 sind die Quellooperatoren bezüglich der Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} f(x), & x \in \{y \in \mathbb{R}^d : r \leq |y| < r + h\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} f(x), & x \in \Omega_r \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Matrizen $S^{t, k}$ bzw. $S^{k, k}$ bezeichnen die Streumatrizen bezüglich der Funktion f_2 .

Beweis: Sind S_j bzw. F_j die Quelloperatoren zu den Funktionen f_j aus der Behauptung, dann gilt für den Träger einer Funktion $\text{supp}(S_j v)$ für eine beliebige Funktion $v \in L_2(B_R)$

$$\begin{aligned}\text{supp}(S_1 v) &\subset \{x \in \mathbb{R}^d : r \leq |x| < r + h\} \\ \text{supp}(S_2 v) &\subset B_r,\end{aligned}$$

wegen $S_j v(x) = f_j(x) F_j v(x)$. Nach Gleichung (2.11) folgt damit

$$\begin{aligned}AS_1 v(\tilde{r}\omega) &= \begin{cases} \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle S_1 v, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} h_n^m(k, \tilde{r}\omega), & \tilde{r} \geq r + h \\ \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle S_1 v, h_n^{m,(2)}(k, \cdot) \rangle_{B_R} j_n^m(k, \tilde{r}\omega), & \tilde{r} \leq r \end{cases} \\ AS_2 v(\tilde{r}\omega) &= \begin{cases} \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle S_2 v, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} h_n^m(k, \tilde{r}\omega), & \tilde{r} \geq r \end{cases}\end{aligned}$$

Mit genügend kleinem $h > 0$ folgt mit Lemma 3.9 die Behauptung. \square

Als nächstes benötigt man die Born-Approximation, um für schwache Streuer f eine Annäherung an das gestreute Feld zu finden.

Lemma 3.11 Sei $R, r, h > 0$ mit $r+h \leq R$. Sei $f \in L_\infty(B_R)$. Weiterhin sei f_1 die Einschränkung von f auf den Kreisring $K_{r,h} := \{x \in \mathbb{R}^d : r \leq |x| < r + h\}$, d.h.

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K_{r,h} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei S_1 der zur Funktion f_1 gehörige Quelloperator. Dann gilt für ein beliebiges einfallendes Feld $u_i(r\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} u_{n,m}(r) Y_n^m(\omega) \in L_2(B_R)$ und genügend kleines h :

$$AS_1 u_i(\tilde{r}\omega) = O(h^2) + \frac{ihk^2 r^{d-1}}{4} \begin{cases} Y(\omega) J^k(\tilde{r}) H^k(r) G(r) U(r) \alpha, & \tilde{r} \leq r \\ Y(\omega) H^k(\tilde{r}) J^k(r) G(r) U(r) \alpha, & \tilde{r} \geq r + h \end{cases} \quad (3.17)$$

wobei

$$\begin{aligned}G(r) &= \left(g_{(n,m),(q,p)}(r) \right)_{n,q \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), p \in N(q,d)} \\ g_{(n,m),(q,p)}(r) &= \int_{S^{d-1}} Y_n^{-m}(\theta) f(r\theta) Y_q^p(\theta) dS(\theta) \\ U(r) &= \text{diag} \left\{ \left(u_{n,m}(r) \right)_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d)} \right\}.\end{aligned} \quad (3.18)$$

Beweis: Es folgt lediglich eine Beweisskizze. Zunächst muss man einmal zeigen, dass sich für genügend kleine h der Feld-Operator $F_1 = (I - A_{f_1})^{-1}$ in die Neumannreihe entwickeln lässt, d.h.

$$F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{f_1}^n.$$

Damit konvergiert die Folge $u_s^{(n)} = \sum_{p=1}^n A_{f_1}^p u_i$, wegen (3.9) gegen das gestreute Feld $AS_1 u_i$. Als zweites kann man zeigen, dass es für das n -te Folgenglied eine Abschätzung der Form

$$|AS u_i(x) - u_s^{(n)}| \leq ch^{n+1}$$

gibt, mit einer Konstante c die von der Supremumsnorm des Streuers f abhängt. Im nächsten Schritt benutzt man Polarkoordinaten und die Reihenentwicklung der Greenschen Funktion aus (2.8). Wendet man den Mittelwertsatz der Integralrechnung in Verbindung mit obigen Abschätzungen an, so erhält man die Behauptung. \square

Mit Hilfe dieses Lemma kann man die Operatoren $T^{(j)}$ aus Lemma 3.10 bis auf einen Term $O(h^2)$ approximieren.

Lemma 3.12 *Seien $T^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 4$) wie in Lemma 3.10, dann gilt für genügend kleine h :*

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= hr^{d-1} J^k(r)G(r)J^t(r) + O(h^2) \\ T^{(2)} &= hr^{d-1} H^k(r)G(r)J^t(r) + O(h^2) \\ T^{(3)} &= hr^{d-1} H^k(r)G(r)H^k(r) + O(h^2) \\ T^{(4)} &= hr^{d-1} J^k(r)G(r)H^k(r) + O(h^2) \end{aligned}$$

wobei die Matrix $G(r)$ definiert ist wie in Gleichung (3.18).

Beweis: Der Beweis wird nur für die Matrix $T^{(1)}$ geführt, da für die anderen Matrizen die Beweise ähnlich verlaufen. Mit den Bezeichnungen aus Satz 3.10 gilt

$$v_1(\tilde{r}\omega) = \frac{ik^2}{4} Y(\omega) H^k(\tilde{r}) T^{(1)} \alpha$$

Und aus Gleichung (3.17) folgt mit $u_{n,m}(r) = (tr)^{-\sigma} J_{n+\sigma}(tr)$

$$v_1(\tilde{r}\omega) = \frac{ihk^2 r^{d-1}}{4} Y(\omega) H^k(\tilde{r}) J^k(r) G(r) J^t(r) \alpha + O(h^2)$$

und damit

$$T^{(1)} = hr^{d-1} J^k(r)G(r)J^t(r) + O(h^2).$$

\square

Satz 3.13 *Sei $0 < r < R$ und $k, R > 0$. Sind $t \in \mathbb{C}$ und $S^{t,k}(r)$ die Streumatrizen bezüglich den Funktionen*

$$f_r(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B_r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\frac{d}{dr}S^{t,k}(r) = r^{d-1} \left(J^k(r) + \frac{ik^2}{4}S^{k,k}(r)H^k(r) \right) G(r) \left(\frac{ik^2}{4}H^k(r)S^{t,k}(r) + J^t(r) \right). \quad (3.19)$$

Beweis: Sei S_r der Quelloperator bezüglich den Funktion f_r . Setzt man Lemma 3.12 in Lema 3.10 ein, so erhält man für $\tilde{r} > r + h$

$$\begin{aligned} AS_{r+h}u_i(\tilde{r}\omega) &= \frac{ik^2}{4}Y(\omega)H^k(\tilde{r})hr^{d-1} \left(J^k(r)G(r)J^t(r) + \frac{1}{hr^{d-1}}S^{t,k}(r) + \frac{ik^2}{4}S^{k,k}(r)H^k(r)G(r)J^t(r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ik^2}{4}J^k(r)G(r)H^k(r)S^{t,k}(r) + \left(\frac{ik^2}{4} \right)^2 S^{k,k}(r)J^k(r)G(r)H^k(r)S^{t,k}(r) \right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt für die Streumatrix nach Definition bzw. nach Bemerkung 3.8:

$$AS_{r+h}u_i(\tilde{r}\omega) = \frac{ik^2}{4}Y(\omega)H^k(\tilde{r})S_{r+h}^{t,k}\alpha$$

und damit

$$S_{r+h}^{t,k} - S_r^{t,k} = hr^{d-1} \left(\left(J^k(r) + \frac{ik^2}{4}S^{k,k}(r)H^k(r) \right) G(r) \left(\frac{ik^2}{4}H^k(r)S^{t,k}(r) + J^t(r) \right) \right) + \mathcal{O}(h^2)$$

□

Bemerkung 3.14 Seien $f \in L_\infty(B_R)$, $f_r = \chi_{B_r}f$ die Funktionen aus Satz 3.13 und $S^{t,k}(r)$ die dazugehörigen Streumatrizen.

- Es gilt wegen $f_0 = 0$, dass $S^{t,k}(0) = 0$. In Verbindung mit (3.19) hat man ein Anfangswertproblem zu lösen, um die Streumatrizen $S^{t,k}(R)$ zu bestimmen. Die Abhängigkeit der Differentialgleichung von der Objektfunktion f steckt dabei nur in dem Term $G(r)$.
- Ist die Objektfunktion zusätzlich radialsymmetrisch, dann sind die Matrizen $G(r)$ wegen der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen reine Diagonalmatrizen. Da alle anderen Matrizen in der Differentialgleichung (3.19) auch Diagonalmatrizen sind, kann das Problem entkoppelt werden. Insbesondere sind nur die Diagonalelemente der Streumatrix ungleich Null. Es folgt $\langle S j_n^m(k, \cdot), j_q^p(t, \cdot) \rangle_{B_R} = 0$ für $(q, p) \neq (n, m)$.
- Für das gestreute Feld im Außenraum benötigt man nach Satz 2.13 und Satz 3.2 nur die Skalarprodukte $\langle S j_n^m(t, \cdot), j_q^p(k, \cdot) \rangle_{B_R}$. Mit der Lösung des obigen Anfangswertproblems können so Daten für das inverse Streuproblem erzeugt werden (Da für die Anwendungen das einfallende Feld stets aus dem Raum $\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}$ vorausgesetzt werden muss, genügt es sogar, die Skalarprodukte $\langle S j_n^m(k, \cdot), j_q^p(k, \cdot) \rangle_{B_R}$ zu berechnen).

- Für einfallende Felder aus dem Raum $\overline{\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}}$ können mit obiger Methode auch die dazugehörigen Felder und Quellen im Innenraum berechnet werden (Wie im vorangehenden Punkt schon bemerkt, sind für die Anwendung zunächst mal obige einfallende Felder ausreichend). Es gilt wegen (3.11)

$$\langle S j_n^m(t \cdot), j_q^p(s, \cdot) \rangle_{B_R} = \langle S j_q^{-p}(\bar{s}), j_n^{-m}(\bar{t}, \cdot) \rangle_{B_R}.$$

Die Quellen $S j_n^m(k, \cdot)$ lassen sich dann mittels in einer Basis aus Satz 1.16 entwickeln. Die Koeffizienten bezüglich dieser Basis bestehen gerade aus Skalarprodukten der Form $\langle S j_n^m(t \cdot), j_q^p(k, \cdot) \rangle_{B_R}$ (Diese entsprechen den Einträgen der Streumatrix). Die gestreuten Felder können anschließend mittels Satz 2.10 bestimmt werden. Eine andere Möglichkeit für das Innenraumproblem bietet der nachfolgende Satz.

- Für die numerische Umsetzung müssen die unendlichdimensionalen Matrizen abgeschnitten werden. In [Che97] wird gezeigt, dass die Matrixeinträge $S_{(n,m),(q,p)}^{t,k}$ der Streumatrizen im wesentlichen Null sind für $n, q \geq 2|c_f|$. Die Konstante c_f zählt dabei im wesentlichen die Anzahl der Wellen über den längsten Strahl γ durch das Objekt. Präziser gilt

$$c_f = \frac{k}{2\pi} \int_{\gamma} \sqrt{1 + f(x)} dx.$$

Für Testzwecke wird eine radialsymmetrische Funktion f genommen.

$$f(x) = \begin{cases} -0.3, & 0 < |x| \leq 0.25 \\ -0.2, & 0.25 < |x| \leq 0.5 \\ -0.1, & 0.5 < |x| \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 < |x| \leq 1 \end{cases}.$$

Die nachfolgende Tabelle 3.1 zeigt die Diagonalelemente der Streumatrix an der Stelle $R = 1$. In der Spalte $S_{\text{exakt}}^{t,k}$ stehen die analytisch berechneten Werte (siehe Kapitel 3.3). Die Werte in den Spalten $S^{t,k}$ wurden numerisch bestimmt mit Hilfe eines 6-stufigen Mehrschrittverfahrens der Ordnung 6. Dabei wurde die Wellenzahl $k = 7$ und der Parameter $t = 10$ angenommen. Die Schrittweite betrug 0.01. Es sei bemerkt, dass für die Datenerzeugung nur die Streumatrizen $S^{k,k}$ benötigt werden. Gute Ergebnisse hierfür gab es auch schon mit Schrittweite 0.1.

Eine Alternative zur Berechnung des Innenraumproblems bietet der folgende Satz.

Satz 3.15 Sei $R \geq r \geq 0$, $k > 0$ und $f \in L_{\infty}(\Omega)$. Sei S der zu f gehörende Quelloperator. Setze

$$S^{t,k,-}(r) = \left(S_{(n,m),(q,p)}^{t,k,-}(r) \right)_{n,q \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), p \in N(q,d)}$$

$$S^{t,k,+}(r) = \left(S_{(n,m),(q,p)}^{t,k,+}(r) \right)_{n,q \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), p \in N(q,d)}$$

$S_{\text{exakt}}^{k,k}$	$S^{k,k}$	$S_{\text{exakt}}^{t,k}$	$S^{t,k}$
-0.0379 + 0.0258i	-0.0379 + 0.0258i	-0.0101 + 0.0069i	-0.0103 + 0.0068i
-0.0343 + 0.0188i	-0.0343 + 0.0188i	-0.0115 + 0.0063i	-0.0117 + 0.0063i
-0.0343 + 0.0188i	-0.0343 + 0.0188i	-0.0115 + 0.0063i	-0.0117 + 0.0063i
-0.0297 + 0.0128i	-0.0297 + 0.0128i	-0.0104 + 0.0045i	-0.0105 + 0.0045i
-0.0297 + 0.0128i	-0.0297 + 0.0128i	-0.0104 + 0.0045i	-0.0105 + 0.0045i
-0.0219 + 0.0063i	-0.0218 + 0.0063i	-0.0102 + 0.0030i	-0.0103 + 0.0030i
-0.0219 + 0.0063i	-0.0218 + 0.0063i	-0.0102 + 0.0030i	-0.0103 + 0.0030i
-0.0111 + 0.0015i	-0.0111 + 0.0015i	-0.0100 + 0.0014i	-0.0101 + 0.0014i
-0.0111 + 0.0015i	-0.0111 + 0.0015i	-0.0100 + 0.0014i	-0.0101 + 0.0014i
-0.0037 + 0.0002i	-0.0037 + 0.0002i	-0.0063 + 0.0003i	-0.0063 + 0.0003i
-0.0037 + 0.0002i	-0.0037 + 0.0002i	-0.0063 + 0.0003i	-0.0063 + 0.0003i
-0.0008 + 0.0000i	-0.0008 + 0.0000i	-0.0024 + 0.0000i	-0.0024 + 0.0000i
-0.0008 + 0.0000i	-0.0008 + 0.0000i	-0.0024 + 0.0000i	-0.0024 + 0.0000i
-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i	-0.0006 + 0.0000i	-0.0006 + 0.0000i
-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i	-0.0006 + 0.0000i	-0.0006 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000	-0.0000 + 0.0000i
-0.0000	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000	-0.0000 + 0.0000i

Tabelle 3.1: Streumatrixeinträge

mit

$$S_{(n,m),(q,p)}^{t,k,-}(r) = \langle S j_q^p(t, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_r}$$

$$S_{(n,m),(q,p)}^{t,k,+}(r) = \langle S j_q^p(t, \cdot), h_n^{m,(2)}(k, \cdot) \rangle_{B_R - B_r}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} S^{t,k,-}(r) &= r^{d-1} J^k(r) G(r) \left(J^t(r) + \frac{ik^2}{4} (H^k(r) S^{t,k,-} + J^k(r) S^{t,k,+}) \right) \\ \frac{d}{dr} S^{t,k,+}(r) &= -r^{d-1} H^k(r) G(r) \left(J^t(r) + \frac{ik^2}{4} (H^k(r) S^{t,k,-} + J^k(r) S^{t,k,+}) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} S_{(n,m),(q,p)}^{t,k,-}(r) &= \langle S j_q^p(t, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_r} \\ &= \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} S j_q^p(t, s\omega) j_n^{-m}(k, s\omega) dS(\omega) ds \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \int_0^r s^{d-1} \int_{S^{d-1}} f(s\omega) (I + AS) j_q^p(t, s\omega) j_n^{-m}(k, s\omega) dS(\omega) ds. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} S_{(n,m),(q,p)}^{t,k,-}(r) &= r^{d-1} \int_{S^{d-1}} f(r\omega) (I + AS) j_q^p(t, r\omega) j_n^{-m}(k, r\omega) dS(\omega) \\
&\stackrel{(2.11)}{=} r^{d-1} \frac{J_{n+\sigma}(kr) J_{q+\sigma}(tr)}{(kr)^\sigma (tr)^\sigma} \int_{S^{d-1}} f(r\omega) Y_n^{-m}(\omega) Y_q^p(\omega) dS(\omega) \\
&+ \frac{r^{d-1} ik^2}{4} \sum_{u \in \mathbb{N}} \sum_{v \in N(u,d)} \frac{H_{u+\sigma}(kr) J_{n+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma (kr)^\sigma} \\
&\quad \times \int_{S^{d-1}} f(r\omega) Y_u^v(\omega) Y_n^{-m}(\omega) dS(\omega) < S j_q^p(t, \cdot), j_u^v(k, \cdot) >_{B_r} \\
&+ \frac{r^{d-1} ik^2}{4} \sum_{u \in \mathbb{N}} \sum_{v \in N(u,d)} \frac{J_{u+\sigma}(kr) J_{n+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma (kr)^\sigma} \\
&\quad \times \int_{S^{d-1}} f(r\omega) Y_u^v(\omega) Y_n^{-m}(\omega) dS(\omega) < S j_q^p(t, \cdot), h_u^{v,(2)}(k, \cdot) >_{B_R - B_r}.
\end{aligned}$$

Wandelt man diese Gleichung in Matrixschreibweise um, so erhält man den ersten Teil der Behauptung. Der Beweis des zweiten Teils verläuft ähnlich. Es wird deshalb auf diesen Nachweis verzichtet. \square

Bemerkung 3.16 Für die Bemerkung gelten die Bezeichnungen aus diesem Kapitel.

- Für das gestreute Feld zur einfallenden Welle $j_q^p(t, \cdot)$ gilt nach (2.11):

$$\begin{aligned}
AS j_q^p(t, \cdot)(r\omega) &= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} S_{(n,m),(q,p)}^{t,k,-}(r) h_n^m(k, r\omega) \\
&+ \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} S_{(n,m),(q,p)}^{t,k,+}(r) j_n^m(k, r\omega).
\end{aligned}$$

- Man sieht durch Vergleich der Matrixeinträge, dass für die Streumatrix gilt:

$$S^{t,k}(R) = S^{t,k,-}(R).$$

Für die Berechnung von $S^{t,k,-}(R)$ muss man also die Streumatrix an der Stelle R bestimmen (Siehe dazu Bemerkung 3.8). Außerdem gilt offensichtlich $S^{t,k,+}(R) = 0$. Mit der Differentialgleichung (3.20) hat man wieder ein Anfangswertproblem zu lösen, um das gestreute Feld im Inneren bestimmen zu können. Die dazugehörige Quelle erhält man durch Anwendung des Helmholtzoperators $(\Delta + k^2)$ auf das gestreute Feld.

- Ist die Objektfunktion radialsymmetrisch, so sind alle Matrizen in der Differentialgleichung Diagonalmatrizen. Da nach Bemerkung 3.8 die Startwerte auch Diagonalmatrizen sind, gilt für die Einträge in $S^{t,k,+}(r)$ und $S^{t,k,-}(r)$:

$$< S j_n^m(t, \cdot), j_q^p(k, \cdot) >_{B_r} = 0 = < S j_n^m(t, \cdot), h_q^p(k, \cdot) >_{B_R - B_r}, \quad \text{falls } n \neq q \text{ oder } m \neq p.$$

Damit gilt für das gestreute Feld

$$AS j_n^m(t, \cdot)(r\omega) = \frac{ik^2}{4} \left(S_{(n,m),(n,m)}^{t,k,-} h_n^m(k, r\omega) + S_{(n,m),(n,m)}^{t,k,+} j_n^m(k, r\omega) \right) \in W_n^m.$$

Damit liegt aber auch die Quelle $S j_n^m(t, \cdot) = -k^{-2}(\Delta + k^2)AS j_n^m(t, \cdot)$ im Raum W_n^m . Man hat dadurch den Beweis von Satz 3.6 für beliebige Dimensionen zu Ende geführt.

4 Das inverse Streuproblem

Ziel ist es, die Ursache für die Streuung, das heißt die Objektfunktion f , aus Messungen des gestreuten Feldes außerhalb des Rekonstruktionsgebiet B_R , zu bestimmen. Für eine feste Wellenzahl k kann man das Objekt mit verschiedenen einfallenden Wellen durchleuchten. Natürlich kann dabei auch die Wellenzahl k und damit die Frequenz der einfallenden Welle bei jedem Experiment variiert werden. Der Zusammenhang der dadurch entstehenden Felder und Quellen wird wieder durch die Objektfunktion f hergestellt (siehe Gleichung (3.8)):

$$\frac{S^{(k,R,f)} u_i}{A^{(k,R)} S^{(k,R,f)} u_i + u_i} = f.$$

Der Kontrast f ist dabei unabhängig von der Wellenzahl und der einfallenden Welle. Ein einzelnes Experiment besteht aus vorgegebener einfallender Welle

$$u_i \in \overline{\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}} \quad (4.1)$$

bei gegebener Wellenzahl k und einer Menge $\Gamma \subset B_R^c$, auf der das gestreute Feld gemessen werden kann. Der zu Grunde liegende Operator ist der Lippmann-Schwinger-Operator A_Γ für den Außenraum (siehe (2.7)). Dieser bildet die Quelle $S u_i$ auf das gestreute Feld im Außenraum ab. Zunächst stellt sich die Frage, welche Anteile der Quelle $S u_i$ können linear rekonstruiert werden. Es sind gerade die Anteile, die senkrecht zum Nullraum von A_Γ stehen. Mit der Basis aus Satz 2.14 läßt sich die Quelle in ihren Nullraumanteil und dessen Komplement aufspalten.

$$\begin{aligned} S u_i &= \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n, d)} \langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} \frac{j_n^m(k, \cdot)}{\|j_n^m(k, \cdot)\|^2}}_{\in N(A_\Gamma)^\perp = \overline{R(A^*)}} \\ &+ \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n, d)} \sum_{l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \langle S u_i, j_n^m\left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot\right) \rangle_{B_R} \frac{j_n^m\left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot\right)}{\|j_n^m\left(\frac{\lambda_{n,l}^{\alpha_n, \beta_n}}{R}, \cdot\right)\|^2}}_{\in N(A_\Gamma)}. \end{aligned}$$

Prinzipiell können also die Skalarprodukte

$$\langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} \quad (4.2)$$

der Quelle eindeutig bestimmt werden (falls $\Gamma \subset B_R^c$ eine nichtdiskrete Teilmenge des R^d ist). Dies ist ein schlechtgestelltes Problem, da der Operator A_Γ kompakt ist. Es bedarf also

eines Regularisierungsverfahrens. Wurden jedoch diese Skalarprodukte bestimmt, so ist das gestreute Feld

$$A_{B_R^c} S u_i(x) = \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} h_n^m(k, x), \quad x \in B_R^c$$

im gesamten Außenraum nach Satz 2.13 schon bekannt.

4.1 Singulärwertzerlung

Ein nützliches Werkzeug zur Untersuchung eines kompakten Operators ist dessen Singulärwertzerlegung. Sie gibt einen Einblick über den Grad der Schlechtgestellttheit und kann dazu genutzt werden, Regularisierungsverfahren zu entwickeln (siehe [Lou89]).

Nachfolgend wird wieder davon ausgegangen, dass der Träger der Objektfunktion f in der offenen Kugel mit Radius R liegt. Der zu untersuchende Operator ist der Lippmann-Schwinger-Operator A_Γ für den Außenraum. Es ist schwierig, für beliebige Geometrien Γ eine geschlossene Formel für die Singulärwertzerlegung dieses Operators zu finden. Stimmt jedoch Γ mit dem Rand des Rekonstruktionsgebietes B_R überein, so läßt sich mit Hilfe des Satzes 2.13 recht einfach die Zerlegung herleiten. Im zweidimensionalen Fall wurde diese Zerlegung erstmals in [AL99] bewiesen. Der Nachweis für den 3D-Fall kann in [Lak06] nachgelesen werden.

Satz 4.1 *Sei wieder $\sigma = \sigma(d) = \frac{d-2}{2}$. Sei $R, k > 0$, $\Gamma = \partial B_R$ und A_Γ der Lippmann-Schwinger-Operator für den Außenraum aus Gleichung (2.7). Dann ist die Singulärwertzerlegung $\{v_n^m, u_n^m, \sigma_n^m\}_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d)}$ des Operators gegeben durch*

$$\begin{aligned} \sigma_n^m &= \frac{k^{2-\sigma} |H_{n+\sigma}(kR)|}{2} \left(\frac{\pi R}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R} \\ v_n^m(r\omega) &= \frac{iH_{n+\sigma}(kR)}{|H_{n+\sigma}(kR)|} \frac{j_n^m(k, r\omega)}{\|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}} \\ u_n^m(R\omega) &= \frac{Y_n^m(\omega)}{\sqrt{2\pi R^{d-1}}}, \end{aligned}$$

wobei

$$\|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}^2 = \frac{\pi R^2}{k^{2\sigma}} \left((J_{n+\sigma}(kR))^2 - J_{n+\sigma-1}(kR) J_{n+\sigma+1}(kR) \right).$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in N(n, d)$ sei $w_n^m(x) = Y_n^m(\frac{x}{|x|})$. Nach Satz 2.13 gilt:

$$\begin{aligned} A_\Gamma^* w_n^m(r\omega) &= \frac{-ik^2}{4} \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(q, d)} R^{d-1} \underbrace{\langle Y_n^m, Y_q^p \rangle_{S^{d-1}}}_{2\pi\delta_{n,q}\delta_{m,p}} \frac{\overline{H_{q+\sigma}(kR)}}{(kR)^\sigma} j_q^p(k, r\omega) \\ &= \frac{-ik^{2-\sigma}\pi R^{d-1-\sigma} \overline{H_{n+\sigma}(kR)}}{2} j_n^m(k, r\omega). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Damit folgt wiederum mit Satz 2.13:

$$\begin{aligned} A_\Gamma A_\Gamma^* w(R\omega) &= \frac{-ik^{2-\sigma}\pi R^{d-1-\sigma} \overline{H_{n+\sigma}(kR)}}{2} \frac{ik^2}{4} \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(q, d)} \underbrace{\langle j_n^m(k, \cdot), j_q^p(k, \cdot) \rangle_{B_R}}_{\|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}^2 \delta_{n,q}\delta_{m,p}} h_q^p(k, R\omega) \\ &= \frac{k^{4-2\sigma}\pi R^{d-1-2\sigma} |H_{n+\sigma}(kR)|^2}{8} \|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}^2 Y_n^m(\omega) \\ &= \frac{k^{4-2\sigma}\pi R |H_{n+\sigma}(kR)|^2}{8} \|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}^2 w_n^m(R\omega). \end{aligned}$$

Es wurde gezeigt, dass die Funktionen w_n^m Eigenfunktionen des Operators $A_\Gamma A_\Gamma^*$ mit Eigenwerten $\frac{k^{4-2\sigma}\pi R |H_{n+\sigma}(kR)|^2}{8} \|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}^2$ sind. Die Funktionen haben die Norm $\|w_n^m\|_{\partial B_R}^2 = 2\pi R^{d-1}$. Außerdem bilden sie eine Basis des Raumes $L_2(\Gamma)$. Die singulären Funktionen u_n^m sind gerade die normierten Eigenfunktionen von $A_\Gamma A_\Gamma^*$ und es folgt:

$$u_n^m(R\omega) = \frac{w_n^m(R\omega)}{\|w_n^m\|_{\partial B_R}} = \frac{Y_n^m(\omega)}{\sqrt{2\pi R^{d-1}}}.$$

Die Singulärwerte σ_n sind gerade die positiven Quadratwurzeln aus den den Eigenwerten von $A_\Gamma A_\Gamma^*$, dass

$$\sigma_n^m = \frac{k^{2-\sigma} |H_{n+\sigma}(kR)|}{2} \left(\frac{\pi R}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}$$

Die singulären Funktionen v_n^m ergeben sich aus der Gleichung $A^* u_n^m = \sigma_n v_n^m$.

$$\begin{aligned} v_n^m &= \frac{A^* u_n^m}{\sigma_n^m} \\ &= \frac{2}{k^{2-\sigma} |H_{n+\sigma}(kR)|} \left(\frac{2}{\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}} \frac{A^* w_n^m}{\|w_n^m\|_\Gamma} \\ &\stackrel{(4.3)}{=} \frac{2}{k^{2-\sigma} |H_{n+\sigma}(kR)|} \left(\frac{2}{\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}} \frac{-ik^{2-\sigma}\pi R^{d-1-\sigma} \overline{H_{n+\sigma}(kR)}}{2\sqrt{2\pi R^{d-1}}} j_n^m(k, r\omega) \\ &= \frac{iH_{n+\sigma}(kR)}{|H_{n+\sigma}(kR)|} \frac{j_n^m(k, r\omega)}{\|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}}. \end{aligned}$$

Für die Norm von $j_n^m(k, \cdot)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R}^2 &= \langle j_n^m(k, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} \\ &= 2\pi \int_0^R r^{d-1} \left(\frac{J_{n+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma} \right)^2 dr \\ &\stackrel{1.4}{=} \frac{\pi R^2}{k^{2\sigma}} \left((J_{n+\sigma}(kR))^2 - J_{n+\sigma-1}(kR)J_{n+\sigma+1}(kR) \right) \end{aligned}$$

□

Für die Einordnung eines Problems $Bf = g$ mit kompaktem Operator B ist das asymptotische Verhalten der Singulärwerte von entscheidender Bedeutung. Dieses Verhalten ist ein Maß für die Schlechtgestellttheit des Problems. Für den Lippmann-Schwinger-Operator für den Außenraum A_Γ ergibt sich folgende Asymptotik.

Satz 4.2 Sei $k, R > 0$, $\Gamma = \partial B_R^c$ und A_Γ der Operator aus Gleichung (2.7). Seien weiterhin σ_n die Singulärwerte aus Satz 4.1. Dann gilt:

$$\sigma_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Beweis: Betrachtet wird das asymptotische Verhalten der Singulärwerte $\sigma_n^m = \sigma_n$ für n gegen unendlich.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{k^{2-\sigma} |H_{n+\sigma}(kR)|}{2} \left(\frac{\pi R}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|j_n^m(k, \cdot)\|_{B_R} \\ &= k^{2(1-\sigma)} \frac{\pi R}{\sqrt{8}} |H_{n+\sigma}(kR)| \left(J_{n+\sigma}^2(kR) - J_{n+\sigma-1}(kR)J_{n+\sigma+1}(kR) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= k^{4-d} \frac{\pi R}{\sqrt{8}} |H_{n+\frac{d}{2}-1}(kR)| \left(J_{n+\frac{d}{2}-1}^2(kR) - J_{n+\frac{d}{2}-2}(kR)J_{n+\frac{d}{2}}(kR) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k^{d-4} \sigma_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{\sqrt{8}} |H_{n+\frac{d}{2}-1}(kR)| \left(J_{n+\frac{d}{2}-1}^2(kR) - J_{n+\frac{d}{2}-2}(kR)J_{n+\frac{d}{2}}(kR) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{\sqrt{8}} \begin{cases} |H_{n+\frac{1}{2}}(kR)| \left(J_{n+\frac{1}{2}}^2(kR) - J_{n+\frac{1}{2}-1}(kR)J_{n+\frac{1}{2}+1}(kR) \right)^{\frac{1}{2}}, & d \text{ ungerade} \\ J_n^2(kR) - J_{n-1}(kR)J_{n+1}(kR) \Big)^{\frac{1}{2}}, & d \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ist die Dimension gerade, so ist das Verhalten wie im zweidimensionalen Fall (bis auf den Faktor k^{d-4}). Bei ungerader Dimension ist das Verhalten wie im dreidimensionalen Fall. Für $d \in \{2, 3\}$ wurde der Nachweis in [AL99] bzw. [Lak06] geführt. □

Bemerkung 4.3 Für beliebige Geometrien $\Gamma \subset B_R^c$ gilt immer noch, dass das Bild von $A_\Gamma^* A_\Gamma$ im Raum $R(A^*) = \text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}$ liegt (siehe Satz 2.13). Damit liegen aber auch die Eigenfunktionen und damit die singulären Funktionen v_n^m des Operators $A_\Gamma^* A_\Gamma$ im Raum $R(A^*)$. Damit existieren Koeffizienten $v_{n,q}^{m,p}$, so dass die singulären Funktionen v_n^m sich in einer Reihe aus sphärischen Wellen darstellen lassen:

$$v_n^m(r\omega) = \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(q,d)} v_{n,q}^{m,p} \frac{j_q^p(k, r\omega)}{\|j_q^p(k, \cdot)\|_{B_R}}.$$

Da die Funktionen v_n^m gerade die normierten Eigenfunktionen von $A_\Gamma^* A_\Gamma$ zum Eigenwert $(\sigma_n^m)^2$ sind, erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (\sigma_n^m)^2 \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ p \in N(q,d)}} v_{n,q}^{m,p} \frac{j_q^p(k, r\omega)}{\|j_q^p(k, \cdot)\|_{B_R}} &= \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ p \in N(q,d)}} v_{n,q}^{m,p} A_\Gamma^* A_\Gamma \frac{j_q^p(k, r\omega)}{\|j_q^p(k, \cdot)\|_{B_R}} \\ &\stackrel{(2.13)}{=} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N} \\ p \in N(q,d), s \in N(t,d)}} v_{n,q}^{m,p} \frac{k^4 \|j_q^p(k, \cdot)\|}{16} \langle h_q^p(k, \cdot), h_t^s(k, \cdot) \rangle_\Gamma j_t^s(k, r\omega). \end{aligned}$$

Entwickelt man beide Seiten bezüglich den Funktionen $\frac{j_t^s(k, r\omega)}{\|j_t^s(k, \cdot)\|_{B_R}}$, so erhält man für die Koeffizienten das Eigenwertproblem

$$(\sigma_n^m)^2 v_{n,q}^{m,p} = \sum_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ s \in N(t,d)}} v_{n,t}^{m,s} \frac{k^4 \|j_t^s(k, \cdot)\|_{B_R}}{16} \langle h_t^s(k, \cdot), h_q^p(k, \cdot) \rangle_\Gamma.$$

Für die singulären Funktionen u_n^m ergibt sich mit Satz 2.13

$$u_n^m(x) = \frac{A_\Gamma v_n^m(x)}{\sigma_n^m} = \frac{ik^2}{4\sigma_n^m} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ p \in N(q,d)}} v_{n,q}^{m,p} \|j_q^p(k, \cdot)\|_{B_R} h_q^p(k, x).$$

Mehr zu dieser Methode kann man nachlesen in [WL].

4.2 Regularisierung des linearen Problems

Bei Anwendungen kann man das gestreute Feld auf $\Gamma \subset \overline{B_R^c}$ messen.

Ziel ist es, eine Quelle Sw mit $w \in L_2(B_R)$ zu rekonstruieren. Denn damit erhält sofort den gesuchten Kontrast über die Gleichung

$$f = \frac{Sw}{ASw + w}.$$

Die Anteile, die senkrecht zum Nullraum des Lippmann-Schwinger-Operators für den Außenraum A_Γ stehen, können mit dessen Singulärwertzerlegung $\{v_n, u_n, \sigma_n\}$ explizit dargestellt werden:

$$(I - P)Sw = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n} \langle A_\Gamma Sw, u_n \rangle_\Gamma v_n. \quad (4.4)$$

wobei der Operator P die Projektion auf den Nullraum von A_Γ bezeichnet.

Die Singulärwerte σ_n konvergieren für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, da der Operator A_Γ kompakt ist. Dies hat zur Folge, dass die Fehler in den Datenanteilen $\langle A_\Gamma S w, u_n \rangle_\Gamma$ bei der Inversion (4.4) für große n verstärkt werden. Es bedarf also eines Regularisierungsverfahrens für die Bestimmung von $(I - P)S w$.

Abbildung 4.1 zeigt in der linken Spalte den Realteil des gestreuten Feldes $A(I - P)S w$ und der Quelle $(I - P)S w$ für den zweidimensionalen Fall. Die Testfunktionen f und w sowie die Parameter t, k, α wurden wie im numerischen Test in Kapitel 3.3 gewählt. Also $w(re^{i\omega}) = e^{itr \cos(\omega - \alpha)}$ und $k = 7, t = 10, R = 1$ und $\alpha = 0.5$. Die zu Grunde liegende Objektfunktion ist wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} -0.3, & 0 < |x| \leq 0.25 \\ -0.2, & 0.25 < |x| \leq 0.5 \\ -0.1, & 0.5 < |x| \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 < |x| \leq 1. \end{cases}$$

In der rechten Spalte werden die Rekonstruktionen mittels abgeschnittener Singulärwertzerlegung illustriert. Die Daten $g = A_\Gamma S w$ wurden hierbei mit einem relativen Fehler von 5% verrauscht, das heißt

$$\frac{\|g_{\text{error}} - g\|}{\|g\|} = 0.05.$$

Die Reihe der Inversionsformel (4.4) wurde für $n \geq 11$ abgeschnitten. Als Beobachtungsraum Γ wurde der Kreisrand von B_R genommen und mit 64 Punkten äquidistant diskretisiert. Der relative Fehler der Rekonstruktion von $A(I - P)S w$ beträgt in diesem Beispiel 4.7745 %. Der relative Fehler der Rekonstruktion von $(I - P)S w$ beträgt 5.6961 %. Die Fehler der Rekonstruktionen bewegen sich also in der Größenordnung der Datenfehler.

4.3 Streuamplitude

Definition 4.4 Sei $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $R, k > 0$. Sei $f \in L_\infty(B_R)$ mit $\text{supp}(f) \in B_R$ und $S^{(k),(R),(f)}$ der Quelloperator zur Wellenzahl k , Radius R und Objektfunktion f . Die Funktion

$$u_i^x(y) := e^{i\langle x, y \rangle}$$

definiert eine ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung $\frac{x}{|x|}$ und Wellenzahl $|x|$. Die Funktion

$$\Lambda^{(k),(R),(f)}(x, y) := \langle S u_i^x, u_i^y \rangle_{B_R}$$

wird als Streuamplitude des gestreuten Feldes $AS u_i^x$ in Richtung y bezeichnet.

Dies ist eigentlich eine Erweiterung des Begriffes der Streuamplitude, wie sie von manchen Autoren verwandt wird (siehe zum Beispiel [Ram00a] oder [Nov88]). Betrachtet wird dabei

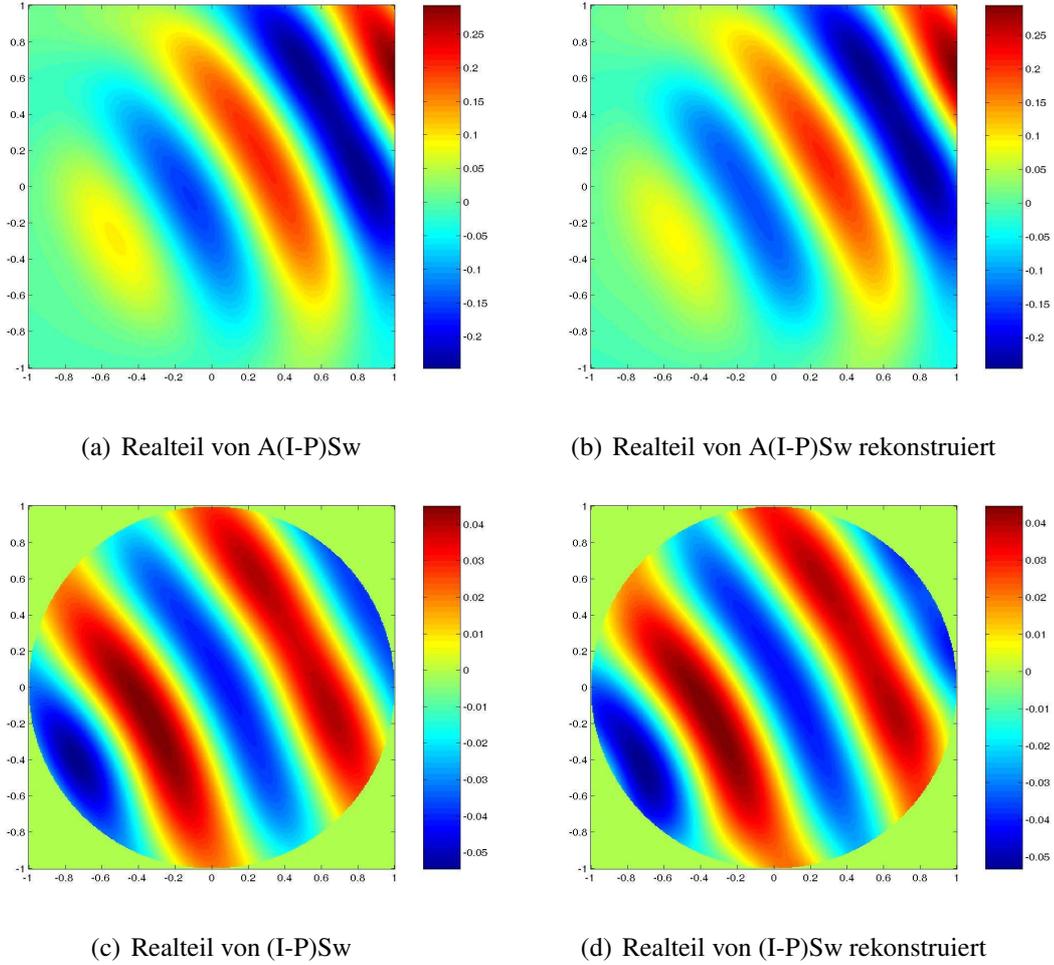


Abbildung 4.1: Projektion der Quelle auf $N^\perp(A_\Gamma)$

ein von einer ebenen Welle mit Richtung $\alpha \in S^{d-1}$ erzeugtes gestreutes Feld bei fester Wellenzahl k . Die Streuamplitude gibt nun das Verhalten dieses gestreuten Feldes in Richtung $\omega \in S^{d-1}$ an, falls man sich weit vom Ursprung entfernt. Falls $|x| = k = |y|$ und $\frac{x}{|x|} = \alpha$ und $\frac{y}{|y|} = \omega$, stimmt die obige Definition mit der herkömmlichen überein.

Satz 4.5 (Eigenschaften der Streuamplitude) Sei Wellenzahl $k > 0$ und Radius $R > 0$. Sei Λ_1 bzw. Λ_2 die Streuamplituden zu gegebenen Objektfunktionen f_1 bzw. f_2 deren Träger in $B_R \subset \mathbb{R}^d$ liegt. Seien S_j, F_j die zu f_j gehörigen Quell- bzw. Quelloperatoren. Mit u_i^x ($x \in \mathbb{R}^d$) wird die ebene Welle $e^{i\langle x, \cdot \rangle}$ bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Lambda_j(x, y) &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{S_j u_i^x}(y) \\ \Lambda_j(x, y) &= \Lambda_j(-y, -x) \\ \Lambda_2(x, y) - \Lambda_1(x, y) &= \int_{B_R} (f_2 - f_1) F_1 u_i^x(z) F_2 u_i^{-y}(z) dz.\end{aligned}$$

Beweis: Es gilt:

$$\Lambda(x, y) = \langle S u_i^x, u_i^y \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} S u_i^x(z) \overline{u_i^y(z)} dz = \int_{\mathbb{R}^d} S u_i^x(z) e^{-i\langle y, z \rangle} dz = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{S u_i^x}(y).$$

Für die zweite Behauptung wird der gleiche Ansatz getätigt

$$\Lambda(x, y) = \langle S u_i^x, u_i^y \rangle \stackrel{(3.11)}{=} \langle u_i^x, \overline{S u_i^y} \rangle = \langle S \overline{u_i^y}, \overline{u_i^x} \rangle = \langle S u_i^{-y}, u_i^{-x} \rangle.$$

Zu zeigen bleibt lediglich die dritte Behauptung:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} (f_2 - f_1) F_1 u_i^x(z) F_2 \overline{u_i^{-y}(z)} dz &= \langle F_1 u_i^x, \overline{S_2 u_i^{-y}} \rangle - \langle S_1 u_i^x, \overline{F_2 u_i^{-y}} \rangle \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \langle (AS_1 + I) u_i^x, \overline{S_2 u_i^{-y}} \rangle - \langle S_1 u_i^x, \overline{(AS_2 + I) u_i^{-y}} \rangle \\ &\stackrel{(2.10)}{=} \langle u_i^x, \overline{S_2 u_i^{-y}} \rangle - \langle S_1 u_i^x, \overline{u_i^{-y}} \rangle \\ &\stackrel{(3.11)}{=} \langle S_2 u_i^x, u_i^y \rangle - \langle S_1 u_i^x, u_i^y \rangle \end{aligned}$$

□

Weitere elementare Eigenschaften der Streuamplitude können zum Beispiel in [Ram00b] und [Nov05] nachgelesen werden.

Betrachtet werden nun noch die Fourier-Koeffizienten bezüglich der Kugelflächenfunktionen.

Für $x = r\omega$ und $y = t\theta$ gilt für die ebene Welle $u_i^x(y)$

$$u_i^x(y) = e^{i\langle x, y \rangle} = e^{itr\langle \omega, \theta \rangle} \stackrel{(1.39)}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n, d)} \frac{i^n \pi^{\sigma + \frac{1}{2}} \Gamma(2\sigma + 1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(\sigma + 1)} j_n^m(t, r\omega) Y_n^{-m}(\theta).$$

Damit kann die Streuamplitude in eine Fourier-Reihe bezüglich der Kugelflächenfunktionen entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten sind dabei bis auf Konstanten wieder durch die Skalarprodukte $\langle S j_n^m(t, \cdot), j_q^p(s, \cdot) \rangle$ gegeben. Genauer gilt für $x = t\theta$ und $y = s\psi$:

$$\Lambda(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n, d)} \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p \in N(q, d)} i^{n-q} \left(\frac{\pi^{\sigma + \frac{1}{2}} \Gamma(2\sigma + 1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(\sigma + 1)} \right)^2 \langle S j_n^m(t, \cdot), j_q^p(s, \cdot) \rangle Y_n^{-m}(\theta) Y_q^p(\psi). \quad (4.5)$$

Bemerkung 4.6 Nach Satz 4.5 gibt die Streuamplitude $\Lambda(x, y)$ gerade die Fourier-Transformierte der Quelle $S u_i^x$ an der Stelle y an. Da die Fourier-Transformation eine Isometrie auf dem Raum $L_2(\mathbb{R}^d)$ ist, genügt es zu wissen, wie die Streuamplitude für festes x aussieht, um die Quelle $S u_i^x$ zu rekonstruieren (und damit das inverse Streuproblem zu lösen). Wegen der Symmetrie (siehe Satz 4.5) gilt auch umgekehrt: Es genügt zu wissen, wie die Streuamplitude für festes y aussieht, um die Quelle $S u_i^{-y}$ zu rekonstruieren.

Durch Variation der Richtung des einfallenden Feldes und optimaler Datenlage können bei fester Wellenzahl k die Skalarprodukte $\langle S j_n^m(k, \cdot), j_q^p(k, \cdot) \rangle$ linear bestimmt werden (siehe Bemerkung 1.39). Dies ist nach Gleichung (4.5) äquivalent zur Kenntnis der Streuamplitude

$$\Lambda(k\omega, k\theta)$$

für alle $\omega, \theta \in S^{d-1}$.

4.4 Dirichlet-zu-Neumann Abbildung

Die Streumatrix steht auch im engen Zusammenhang mit der Dirichlet-zu-Neumann Abbildung. Diese bildet das Gesamtfeld $Fu_i(R\omega)$ auf dessen Normalableitung $\frac{\partial}{\partial r}Fu_i(r\omega)|_{r=R}$ ab. Aus dieser Abbildung kann man durch Lösen eines linearen Gleichungssystems die Skalarprodukte $\langle S j_n^m(k, \cdot), S j_q^p(k, \cdot) \rangle$ herleiten. Umgekehrt kann man aus den Skalarprodukten die Dirichlet-zu-Neumann Abbildung bestimmen.

Definition 4.7 Sei $k, R > 0$ und $f \in L_\infty(B_R)$. Sei F, S der Feld- bzw. Quelloperator bezüglich f . Die Funktion

$$D_N : L_2(S^{d-1}) \rightarrow L_2(S^{d-1})$$

$$u(R\cdot) \mapsto \frac{\partial}{\partial r}u(r\cdot)|_{r=R} \quad (4.6)$$

die dem Gesamtfeld $u = Fu_i$ eingeschränkt auf den Rand von B_R die Normalableitung $\frac{\partial}{\partial r}u(r\cdot)|_{r=R}$ zuordnet für alle einfallenden Felder

$$u_i \in \overline{\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}}$$

heißt Dirichlet-zu-Neumann Abbildung.

Seien wie in Kapitel 3.4 H^t, J^t bzw. Y die unendlichdimensionalen Matrizen

$$J^t = J^t(r) = \frac{1}{(tr)^\sigma} \text{diag}\{ \underbrace{(J_{0+\sigma}(tr), J_{1+\sigma}(tr), \dots, J_{1+\sigma}(tr))}_{\#N(1,d)\text{-mal}}, \underbrace{(J_{2+\sigma}(tr), \dots, J_{2+\sigma}(tr))}_{\#N(2,d)\text{-mal}}, \dots \}$$

$$H^t = H^t(r) = \frac{1}{(tr)^\sigma} \text{diag}\{ \underbrace{(H_{0+\sigma}(tr), H_{1+\sigma}(tr), \dots, H_{1+\sigma}(tr))}_{\#N(1,d)\text{-mal}}, \underbrace{(H_{2+\sigma}(tr), \dots, H_{2+\sigma}(tr))}_{\#N(2,d)\text{-mal}}, \dots \}$$

$$Y = Y(\omega) = \text{diag}\{(Y_n^m)_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)}\}$$

und $S^{t,k}(r)$ die Streumatrizen zu f .

Bemerkung 4.8 Da die Kugelflächenfunktionen nach Definition aus Kapitel eine Orthogonalbasis des $L_2(S^{d-1})$ bilden, existiert eine Matrix

$$D = (d_{(n,m),(q,p)})_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d), q \in \mathbb{N}, p \in N(q, d)},$$

so dass für eine Funktion $u(R\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \alpha_{n,m} Y_n^m(\omega) = Y(\omega)\alpha \in L_2 S^{d-1}$ gilt:

$$D_N u(R\omega) = \sum_{n,m} \sum_{q,p} d_{(n,m),(q,p)} \alpha_{q,p} Y_n^m(\omega) = Y(\omega) D \alpha.$$

Auf der anderen Seite erzeugt eine Funktion

$$u_i = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ p \in N(q,d)}} \beta_{q,p} j_q^p(k, \cdot) \in \overline{\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d)\}}$$

das Feld

$$\begin{aligned} F u_i(r\omega) &= (AS + I) u_i(r\omega) \\ &= \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ p \in N(q,d)}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ m \in N(n,d)}} \beta_{q,p} \left(\frac{ik^2}{4} \langle S j_q^p(k, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} \frac{H_{n+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma} + \delta_{q,n} \delta_{p,m} \frac{J_{n+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma} \right) Y_n^m(\omega) \\ &= Y(\omega) \left(\frac{ik^2}{4} H^k(r) S^{k,k}(R) + J^k(r) \right) \beta \end{aligned}$$

für r nah genug an R und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u(r\omega) &= Y(\omega) \left(\frac{ik^2}{4} \frac{\partial}{\partial r} H^k(r) S^{k,k}(R) + \frac{\partial}{\partial r} J^k(r) \right) \beta \\ &= Y(\omega) D \left(\frac{ik^2}{4} H^k(r) S^{k,k}(R) + J^k(r) \right) \beta, \end{aligned}$$

da β beliebig gilt für $r = R$

$$\frac{ik^2}{4} \frac{\partial}{\partial r} H^k(r) \Big|_{r=R} S^{k,k}(R) + \frac{\partial}{\partial r} J^k(r) \Big|_{r=R} = D \left(\frac{ik^2}{4} H^k(R) S^{k,k}(R) + J^k(R) \right).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich bei gegebener Streumatrix $S^{k,k}(R)$ zumindestens eine Approximation der Matrix D bestimmen. Umgekehrt kann man so auch aus der Dirichlet-zu-Neumann Abbildung die Streumatrix näherungsweise berechnen.

Man kann ähnlich wie bei der Streuamplitude den Begriff der Dirichlet-zu-Neumann Abbildung verallgemeinern.

Definition 4.9 Sei $k, R > 0$, $t \in \mathbb{C}$ und $f \in L_\infty(B_R)$. Sei F, S der Feld- bzw. Quelloperator bezüglich f . Die Funktion

$$\begin{aligned} D_N^t : L_2(S^{d-1}) &\rightarrow L_2(S^{d-1}) \\ u(R \cdot) &\mapsto \frac{\partial}{\partial r} u(r \cdot) \Big|_{r=R} \end{aligned} \tag{4.7}$$

die dem Gesamtfeld $u = Fu$, eingeschränkt auf den Rand von B_R die Normalableitung $\frac{\partial}{\partial r} u(r \cdot) \Big|_{r=R}$ zuordnet für alle einfallenden Felder

$$u_i \in \overline{\text{span}\{j_n^m(t, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d)\}}$$

heißt verallgemeinerte Dirichlet-zu-Neumann Abbildung.

Wie oben kann man zeigen, dass der Zusammenhang zu den Streumatrizen $S^{t,k}(R)$ gegeben ist durch

$$\frac{ik^2}{4} \frac{\partial}{\partial r} H^k(r) \Big|_{r=R} S^{t,k}(R) + \frac{\partial}{\partial r} J^t(r) \Big|_{r=R} = D^t \left(\frac{ik^2}{4} H^k(R) S^{t,k}(R) + J^t(R) \right),$$

wobei D^t die entsprechende Abbildung auf den Fourier-Koeffizienten der Felder ist.

4.5 Fernfelddaten

Das gestreute Feld bezüglich eines Kontrastes f und einer einfallenden Welle u_i hat das asymptotische Verhalten

$$AS u_i(r\omega) = \frac{e^{ikr}}{r^{\sigma+\frac{1}{2}}} \left\{ u^\infty(\omega) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\}, \quad r \rightarrow \infty,$$

wobei u^∞ auch als *Fernfeld* bezeichnet wird. Nimmt man die Reihenentwicklung des Lippmann-Schwinger-Operators aus Gleichung (2.11), so gilt für das gestreute Feld:

$$\begin{aligned} AS u_i(r\omega) &= \frac{ik^2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle \frac{H_{n+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma} Y_n^m(\omega) \\ &\stackrel{(1.17)}{=} \frac{e^{ikr}}{r^{\sigma+\frac{1}{2}}} \underbrace{\frac{ik^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^{\sigma+\frac{1}{2}}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in N(n,d)} \langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle}_{u^\infty(\omega)} e^{-i\frac{\pi}{4}(2(n+\sigma)+1)} Y_n^m(\omega) + O\left(\frac{1}{r^{\sigma+\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Hat man speziell als einfallende Wellen die ebenen Wellen $u_i^{t\theta}(\cdot)$, so erhält man mit Hilfe der Jacobi-Anger-Entwicklung (1.39):

$$\begin{aligned} u^{\infty,t\theta}(\omega) &= \frac{ik^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^{\sigma+\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ m \in N(n,d)}} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ p \in N(q,d)}} \frac{i^q \pi^{\sigma+\frac{1}{2}} \Gamma(2\sigma+1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma+\frac{1}{2}) \Gamma(\sigma+1)} \\ &\quad \times \langle S j_q^p(t, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle e^{-i\frac{\pi}{4}(2(n+\sigma)+1)} Y_n^m(\omega) Y_n^{-m}(\theta). \end{aligned}$$

Sind die Fernfelddaten für alle ebenen Wellen $u_i^{t\theta}(\cdot)$ (mit $\theta \in S^{d-1}$) gegeben, so erhält man nach der Entwicklung des Fernfeldes bezüglich der Kugelflächenfunktionen die Skalarprodukte $\langle S j_q^p(t, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle$ (bis auf Konstanten). Damit ist Kenntnis des Fernfeld $u^{\infty,t\theta}(\omega)$, $\theta \in S^{d-1}$ äquivalent zur Kenntnis der Skalarprodukte $\langle S j_q^p(t, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle$.

Bemerkung 4.10 Für die Dimensionen $d \geq 2$ ist das inverse Streuproblem eindeutig lösbar, wenn das gestreute Feld $AS u_i^{k\theta}(r\omega)$ für alle ebenen Wellen $u_i^{k\theta}(r\omega) = e^{ikr\langle \omega, \theta \rangle}$ auf einer nicht-diskreten Menge $\Gamma \subset B_R^c$ gemessen werden kann. Die Matrix $S = S^{k,R,f}$ ist hierbei der Quelloperator aus (3.2) bezüglich einer festen Wellenzahl $k > 0$, Radius $R > 0$ und Objektfunktion $f \in L_\infty(B_R)$.

- Wegen der Jacobi-Anger-Entwicklung (1.39) gilt dann auch: Das inverse Streuproblem ist eindeutig lösbar, wenn alle Skalarprodukte $\langle S j_q^p(k, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle$ bekannt sind.
- Betrachtet man die Einträge der Streumatrix $S^{k,k}(R)$ (siehe Definition 3.7) so folgt: Das inverse Streuproblem ist eindeutig lösbar, wenn die Streumatrix $S^{k,k}(R)$ bekannt ist.
- Betrachtet man die Einträge der Matrix $S^{k,k,-}(R)$ (siehe Satz 3.15), so folgt: Das inverse Streuproblem ist eindeutig lösbar, wenn die Matrix $S^{k,k,-}(R)$ bekannt ist.
- Nach Bemerkung 4.6 gilt auch: Das inverse Streuproblem ist eindeutig lösbar, wenn die Streuamplitude $\Lambda(k\omega, k\theta)$ für alle $\omega, \theta \in S^{d-1}$ vorliegt.
- Ebenfalls gilt nach Bemerkung 4.6: Das inverse Streuproblem ist eindeutig lösbar, wenn die Fourier-Transformierte der Quellen $\widehat{Su_i^{k\omega}}(k\theta)$ für alle $\omega, \theta \in S^{d-1}$ bekannt ist.
- Aus Kapitel 4.4 geht hervor: Das inverse Streuproblem ist eindeutig lösbar, wenn die Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung bekannt ist.
- Aus Kapitel 4.5 kann man folgern: Das inverse Streuproblem ist eindeutig lösbar, wenn die Fernfelder $u^{\infty,k\theta}(\omega)$ für alle $\omega, \theta \in S^{d-1}$ vorliegen.

4.6 Zusammenhang der Quellen und Felder

Das gestreute Feld kann prinzipiell auf den ganzen Außenraum B_R^c fortgesetzt werden, wenn es auf einer nichtdiskreten Teilmenge $\Gamma \subset B_R^c$ vorliegt. Insbesondere kennt man die Ableitungen auf dem Rand der Kugel mit Radius R . Der Divergenz-Satz stellt eine Verbindung von Volumenintegralen zu Oberflächenintegralen her. In Verbindung mit dem Streuproblem kann der Satz dazu genutzt werden, um aus Informationen über Ableitungen des gestreuten Feldes auf dem Rand, Kenntnisse über das Feld im Inneren zu gewinnen.

Satz 4.11 Für ein Vektorfeld $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ gilt:

$$\int_{B_R} \operatorname{div} v(x) dx = \int_{\partial B_R} \langle v(x), x \rangle dS(x).$$

Sind speziell $u, v \in H^2(B_R)$ und setzt $v = u\nabla v - v\nabla u$ in den Divergenz-Satz ein, so erhält man die zweite Greensche Formel:

$$\int_{B_R} u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x) dx = R^{d-1} \int_{S^{d-1}} u(R\omega) \frac{\partial}{\partial r} v(r\omega) \Big|_{r=R} - v(R\omega) \frac{\partial}{\partial r} u(r\omega) \Big|_{r=R} dS(\omega). \quad (4.8)$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich recht einfach der Zusammenhang zwischen gestreutem Feld und Quelle herstellen.

Satz 4.12 Sei $k, R > 0$ und $f \in L_\infty(B_R)$. Sei S der zugehörige Quelloperator. Sei $u_i \in L_2 B_R$ und $w \in H^2(B_R)$. Dann gilt

$$R^{d-1} \int_{S^{d-1}} AS u_i(R\omega) \frac{\partial \overline{w(r\omega)}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \overline{w(R\omega)} \frac{\partial AS u_i(r\omega)}{\partial r} \Big|_{r=R} dS(\omega) = -k^2 \langle S u_i, w \rangle_{B_R} - \langle AS u_i, (\Delta + k^2)w \rangle_{B_R} .$$

Gilt speziell $w(r\omega) = v(r)Y_n^m(\omega)$ dann folgt:

$$\begin{aligned} & R^{d-1} \int_{S^{d-1}} AS u_i(R\omega) \frac{\partial \overline{w(r\omega)}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \overline{w(R\omega)} \frac{\partial AS u_i(r\omega)}{\partial r} \Big|_{r=R} dS(\omega) \\ &= \frac{ik^2 \pi R^{d-1}}{2} \left\{ \frac{H_n(kR)v'(R)}{(kR)^\sigma} - \frac{kH'_n(kR)v(R)}{(kR)^\sigma} + \frac{\sigma H'_n(kR)v(R)}{(kR)^{\sigma+1}} \right\} \langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} . \end{aligned}$$

Beweis: Es gilt:

$$-k^2 \langle S u_i, w \rangle_{B_R} \stackrel{2.12}{=} \langle (\Delta + k^2)AS u_i, w \rangle_{B_R} .$$

Die Greensche Formel (4.8), angewandt auf die rechte Seite, liefert den ersten Teil der Behauptung. Den zweiten Teil der Behauptung erhält man direkt durch Einsetzen der Reihendarstellung des Lippmann-Schwinger-Operators für den Außenraum 2.13 in Verbindung mit der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen (1.5). \square

Wählt man für die Funktion w aus obigem Satz die Wellen aus Kapitel 1.4, so stellt sich der Zusammenhang zwischen Quelle $S u_i$ und gestreutem Feld $AS u_i$ wie folgt dar:

Satz 4.13 Sei $k, R > 0$ und $f \in L_\infty(B_R)$. Sei S der zugehörige Quelloperator. Sei $u_i \in L_2 B_R$. Seien $v_{n,p}^m$ die Momentenwellen, $s_{n,p}^{m,(j)}(t, \cdot)$ die Lommelwellen und $j_n^m(t, \cdot)$ die sphärischen Wellen aus Kapitel 1.4. Dann gilt:

$$\begin{aligned} -k^2 \langle S u_i, j_n^m(t, \cdot) \rangle_{B_R} &= (k^2 - t^2) \langle AS u_i, j_n^m(t, \cdot) \rangle_{B_R} - d_n(t) \langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} \\ -k^2 \langle S u_i, s_{n,p}^{m,(j)}(k, \cdot) \rangle_{B_R} &= k^{2(p+1)+n} \langle AS u_i, v_{n,p}^m \rangle_{B_R} - c_n(t) \langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} \\ -k^2 \langle S u_i, v_{n,p}^m \rangle_{B_R} &= \langle AS u_i, k^2 v_{n,p}^m + (4p(p+n+\sigma))v_{n,p-1}^m \rangle_{B_R} \\ &\quad - d_{n,p}^{(j)}(t) \langle S u_i, j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} d_n(t) &= d_{n,\sigma}^{(k,R)}(t) = \frac{ik^2 \pi R}{2} [kJ_{n+\sigma}(tR)H_{n+\sigma-1}(kR) - tJ_{n+\sigma-1}(tR)H_{n+\sigma}(kR)] \\ c_n(t) &= c_{n,\sigma}^{(k,R)}(t) = \frac{ik^2 \pi R}{2} [kH_{n+\sigma}(tR)H_{n+\sigma-1}(kR) - tH_{n+\sigma-1}(tR)H_{n+\sigma}(kR)] \\ d_{n,p}^{(j)} &= d_{n+\sigma,p}^{(k,R),(j)} = \frac{ik^2 \pi R}{2k^{n+\sigma+2p+1}} [2(n+\sigma+p)S_{n+\sigma+2p,n+\sigma-1}^{(j)}(kR)(tR)H_{n+\sigma}(kR) \\ &\quad - S_{n+\sigma+2p+1,n+\sigma}^{(j)}(kR)H_{n+\sigma-1}(kR)] . \end{aligned}$$

Beweis: Die Aussage folgt durch Einsetzen der jeweiligen Funktionen in Satz 4.12. \square

Bemerkung 4.14 Für eine einfallende Welle $w \in L_2(B_R)$ können immer die Skalarprodukte $\langle S w, j_n^m(k, \cdot) \rangle$ aus den Daten $A_\Gamma S w$ berechnet werden.

- 1.) Zur Berechnung von $\langle S w, j_n^m(t, \cdot) \rangle$ benötigt man nach obigem Satz 4.13 die Skalarprodukte des gestreuten Feldes $\langle A S w, j_n^m(t, \cdot) \rangle$ (und umgekehrt).
- 2.) Würde man die Skalarprodukte $\langle S w, v_{n,p}^m(k, \cdot) \rangle$ kennen, so könnte man mit Hilfe der Reihenentwicklung der Besselfunktion (1.14) die Skalarprodukte $\langle S w, j_n^m(t, \cdot) \rangle$ berechnen. Damit könnte man aber die Quelle $S w$ rekonstruieren. Wie jedoch Satz 4.13 zeigt, benötigt man für die Berechnung von $\langle S w, v_{n,p}^m(k, \cdot) \rangle$ außer den Daten auch die inneren Produkte $\langle A S w, v_{n,p}^m(k, \cdot) \rangle$.
- 3.) Die Skalarprodukte $\langle S w, s_{n,p}^{m,(j)}(k, \cdot) \rangle$ sind nach Gleichung (1.30) und (1.30) Linearkombination der Produkte $\langle S w, v_{n,p}^m(k, \cdot) \rangle$. Man kann auch hier zeigen, dass die Kenntnis aller Skalarprodukte $\langle S w, s_{n,p}^{m,(j)}(k, \cdot) \rangle$ zur Berechnung von $\langle S w, j_n^m(t, \cdot) \rangle$ genügt. Wie jedoch Satz 4.13 zeigt, benötigt man für die Berechnung von $\langle S w, s_{n,p}^{m,(j)}(k, \cdot) \rangle$ außer den Daten auch die inneren Produkte $\langle A S w, v_{n,p}^m(k, \cdot) \rangle$.

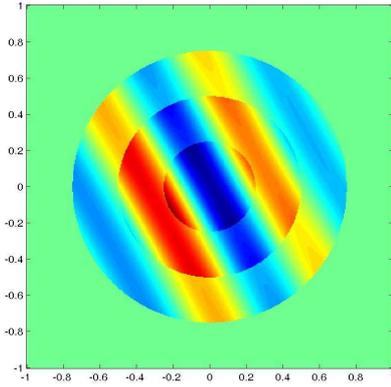
4.7 Anteile der Quellen im Nullraum

Zur Veranschaulichung wird wieder das Testbeispiel aus Kapitel 3.3 herangezogen. In der ersten Zeile Abbildung 4.7 wird die Quelle $S w$ dargestellt. In der zweiten Zeile wird der Anteil im Nullraum dargestellt. Zur Wiederholung werden die Parameter noch einmal angegeben: $w(re^{i\omega}) = e^{itrcos(\omega-\alpha)}$ und $k = 7$, $t = 10$, $R = 1$ und $\alpha = 0.5$ und

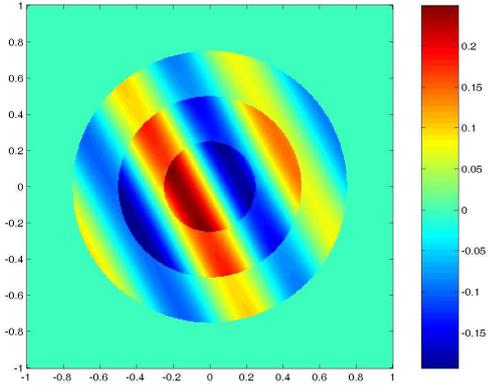
$$f(x) = \begin{cases} -0.3, & 0 < |x| \leq 0.25 \\ -0.2, & 0.25 < |x| \leq 0.5 \\ -0.1, & 0.5 < |x| \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 < |x| \leq 1 \end{cases}$$

Die Abbildung zeigt, dass der wesentliche Anteil der Quelle $S w$ im Nullraum liegt. Das liegt nicht daran, dass die Wellenzahl t der einfallenden Welle ungleich der Wellenzahl k des zu Grunde liegenden Operators ist. Aus den Daten können jedoch nur die Anteile zum orthogonalen Komplement des Nullraums rekonstruiert werden. Man benötigt folglich verschiedene einfallende Felder zur Rekonstruktion der einzelnen Quellen. Für die Wellenzahl k_1 und k_2 und einfallende Felder w_1 und w_2 besteht für die Quellen $S^{(k_1,R,f)} w_1$ und $S^{(k_2,R,f)} w_2$ der Zusammenhang

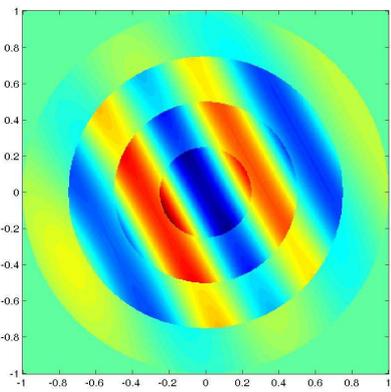
$$\frac{S^{(k_1,R,f)} w_1}{A S^{(k_1,R,f)} w_1 + w_1} = f = \frac{S^{(k_2,R,f)} w_2}{A S^{(k_2,R,f)} w_2 + w_2} \quad (4.9)$$



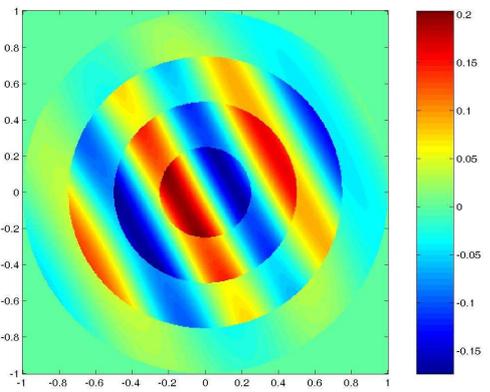
(a) Realteil der Quelle S_w



(b) Imaginärteil der Quelle S_w



(c) Realteil der Quelle im Nullraum



(d) Imaginärteil der Quelle im Nullraum

Für die Nullraumanteile der Quellen zu berechnen muss man folglich die Funktionale

$$\|S^{(k_2, R, f)} w_2 \cdot (AS^{(k_1, R, f)} w_1 + w_1) - S^{(k_1, R, f)} w_1 \cdot (AS^{(k_2, R, f)} w_2 + w_2)\|$$

minimieren.

Für die Rekonstruktionen des Kontrastes f wurde folgender Algorithmus verwandt. Gegeben ist eine endliche Anzahl von einfallenden Wellen w_j , ($j = 1 \dots M$). Zerlege die Quellen und gestreuten Felder in die entsprechenden Nullraumanteile und deren Komplemente. Sei also $S_{R,j} = (I - P)S w_j$, $S_{N,j} = PS w_j$, $A_{R,j} = A(I - P)S w_j$ und $A_{N,j} = APS w_j$.

1. Berechne $S_{R,j}$ und $A_{R,j}$ aus den Daten, wie in Kapitel 4.2 gezeigt. (z.B. mit der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung).
2. Wähle Ansatzfunktionen $(\Phi_m)_{m=1}^P \in L_2(B_R)$, die im Nullraum des Operators A_Γ liegen. Gesucht wird eine Lösung $S_{N,j}$ in diesem Unterraum:

$$S_{N,j}(x) = \sum_{m=1}^P \phi_{m,j} \Phi_m(x).$$

Im ersten Iterationsschritt werden alle $\phi_{m,j}$ auf Null gesetzt.

3. Beginn des Iterationsverfahrens:

a) Berechne die q -te Iterierte von f gemäß Gleichung (4.9):

$$f^{(q)} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{S_{R,j} + S_{N,j}}{A_{R,j} + A_{N,j} + w_j}.$$

b) Es gilt :

$$S_{R,j} + S_{N,j} = f(A_{R,j} + A_{N,j}).$$

Daraus erhält man für die Koeffizienten $\phi_{m,j}$ die lineare Gleichungssysteme:

$$\sum_{m=1}^P (\Phi_m(x) - f^{(q)} A \Phi_m(x)) \phi_{m,j} = -S_{R,j} + f^{(q)} A_{R,j}.$$

Diese Gleichungen müssen für alle $x \in B_R$ erfüllt sein. Für die numerische Umsetzung wird dazu eine endliche Anzahl $x_n \in B_R$, ($n = 1 \dots Q$) von Punkten genommen.

c) Löse die Gleichungssysteme aus Teil b) und gehe zum nächsten Iterationsschritt über.

Es folgen numerische Beispiele.

Im ersten Beispiel (siehe Bild 4.2) ist die gesuchte Objektfunktion wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} -0.3, & 0 < |x| \leq 0.25 \\ -0.2, & 0.25 < |x| \leq 0.5 \\ -0.1, & 0.5 < |x| \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 < |x| \leq 1 \end{cases}$$

Die Wellenzahl beträgt $k = 21$ und der Radius $R = 1$. Als einfallende Wellen dienen ebenen Wellen:

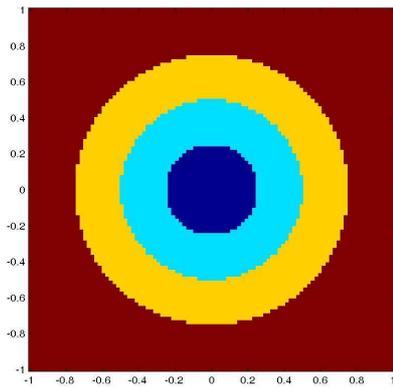
$$w_j(r e^{i\varphi}) = e^{ikr \cos(\varphi - \alpha_j)},$$

wobei

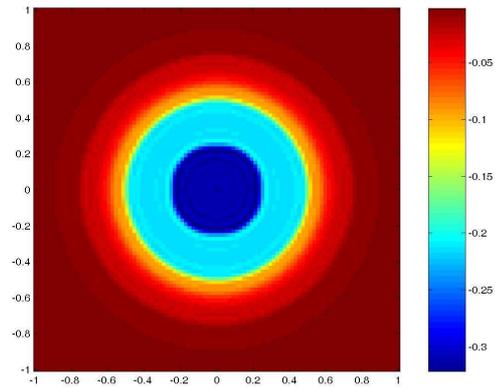
$$\alpha_j = \frac{2\pi}{128-1} j \quad (j = 0 \dots 127).$$

Das Rekonstruktionsgebiet B_R wird in 7668 Punkte äquidistant diskretisiert. Als Ansatzfunktionen wurden die sphärischen Wellen $j_n^m(t, \cdot)$ genommen, die im Nullraum von A_Γ liegen. In diesem Fall sind es 711 Ansatzfunktionen. Das Beobachtungsgebiet $\Gamma = \partial B_R$ wurde mit 128 Punkten äquidistant diskretisiert.

Im zweiten Beispiel (vgl. Bild 4.3) besteht die gesuchte Objektfunktion aus drei Komponenten:



(e) Objekt

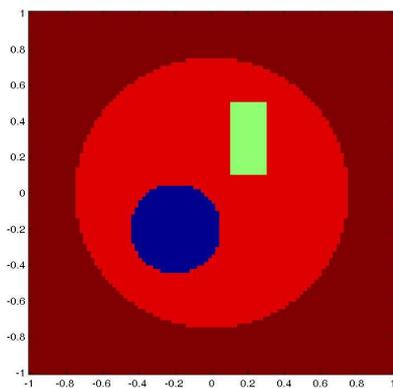


(f) Rekonstruktion

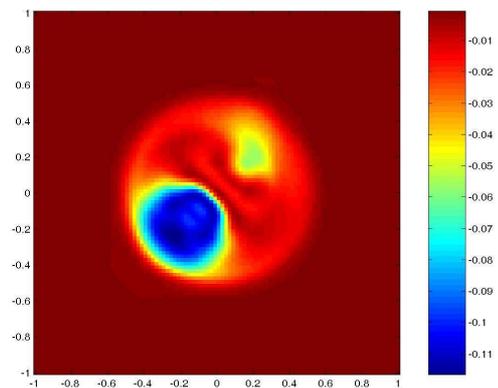
Abbildung 4.2: Rekonstruktion eines radialsymmetrischen Objektes

- a) Ein kreisförmiger Hintergrundkontrast mit Mittelpunkt 0 und Radius 0.75. Der Funktionswert beträgt -0.01 .
- b) Ein kreisförmiger Streuer mit Mittelpunkt $(-0.2 \ 0.2)$ und Radius 0.25. Der Funktionswert beträgt -0.1 .
- c) Ein rechteckförmiges Objekt mit linker unterer Ecke $(0.1 \ 0.1)$. Die Höhe des Rechtecks beträgt 0.4 und die Breite 0.2. Der Funktionswert beträgt -0.05 .

Die Anzahl der Ansatzfunktionen beträgt 501. Die restlichen Parameter sind mit denen aus dem ersten Beispiel identisch.



(a) Objekt



(b) Rekonstruktion

Abbildung 4.3: Rekonstruktion eines Kontrastes

4.7.1 Weitere Ansätze

Für die Rekonstruktion der Quelle $S j_q^p(k, \cdot)$ benötigt man die Skalarprodukte $\langle S j_q^p(k, \cdot), j_n^m(s, \cdot) \rangle_{B_R}$. Aus den Daten können jedoch nur die inneren Produkte $\langle S j_q^p(k, \cdot), j_n^m(k, \cdot) \rangle_{B_R}$ berechnet werden. Gesucht wird also eine Funktion H , so dass gilt:

$$\frac{\partial}{\partial s} S(s) = H(S)(s).$$

wobei

$$S(s) = \left(S_{(n,m),(q,p)}(s) \right)_{n \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), q \in \mathbb{N}, p \in N(q,d)}$$

$$S_{(n,m),(q,p)}(s) = \langle S j_q^p(k, \cdot), j_n^m(s, \cdot) \rangle_{B_R}.$$

Es folgen Ansätze zur Bestimmung einer solchen Funktion H . Für den weiteren Verlauf sei

$$J^s = J^s(r) = \frac{1}{(sr)^\sigma} \text{diag}\{ \underbrace{(J_{0+\sigma}(sr), J_{1+\sigma}(sr), \dots, J_{1+\sigma}(sr))}_{\#N(1,d)\text{-mal}}, \underbrace{(J_{2+\sigma}(sr), \dots, J_{2+\sigma}(sr))}_{\#N(2,d)\text{-mal}}, \dots \}$$

$$H^s = H^s(r) = \frac{1}{(sr)^\sigma} \text{diag}\{ \underbrace{(H_{0+\sigma}(sr), H_{1+\sigma}(sr), \dots, H_{1+\sigma}(sr))}_{\#N(1,d)\text{-mal}}, \underbrace{(H_{2+\sigma}(sr), \dots, H_{2+\sigma}(sr))}_{\#N(2,d)\text{-mal}}, \dots \}$$

$$G(r) = \left(g_{(n,m),(q,p)}(r) \right)_{n,q \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), p \in N(q,d)}$$

$$g_{(n,m),(q,p)}(r) = \int_{S^{d-1}} Y_n^{-m}(\theta) f(r\theta) Y_q^p(\theta) dS(\theta).$$

4.7.2 Ansatz I

Satz 4.15 Sei $R, k > 0$ und $f \in L_\infty(\Omega)$. Sei S der zu f gehörende Quelloperator. Für $0 < r \leq R$ sei

$$S^{k,s,-}(r) = \left(S_{(n,m),(q,p)}^{k,s,-}(r) \right)_{n,q \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), p \in N(q,d)}$$

$$S^{k,s,+}(r) = \left(S_{(n,m),(q,p)}^{k,s,+}(r) \right)_{n,q \in \mathbb{N}, m \in N(n,d), p \in N(q,d)}$$

mit

$$S_{(n,m),(q,p)}^{k,s,-}(r) = \langle S j_q^p(k, \cdot), j_n^m(s, \cdot) \rangle_{B_r}$$

$$S_{(n,m),(q,p)}^{k,s,+}(r) = \langle S j_q^p(k, \cdot), h_n^{m,(2)}(s, \cdot) \rangle_{B_R - B_r}.$$

Dann gilt:

$$\frac{d}{dr} S^{k,s,-}(r) = r^{d-1} J^s(r) G(r) \left(J^k(r) + \frac{ik^2}{4} (H^k(r) S^{k,k,-} + J^k(r) S^{k,k,+}) \right)$$

$$\frac{d}{dr} S^{k,s,+}(r) = -r^{d-1} H^s(r) G(r) \left(J^k(r) + \frac{ik^2}{4} (H^k(r) S^{k,k,-} + J^k(r) S^{k,k,+}) \right). \quad (4.10)$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} S_{(n,m),(q,p)}^{k,s,-}(r) &= \langle S j_q^p(k, \cdot), j_n^m(\bar{s}, \cdot) \rangle_{B_r} \\ &= \int_0^r t^{d-1} \int_{S^{d-1}} S j_q^p(k, t\omega) j_n^{-m}(s, t\omega) dS(\omega) dt \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \int_0^r t^{d-1} \int_{S^{d-1}} f(t\omega)(I + AS) j_q^p(k, t\omega) j_n^{-m}(s, t\omega) dS(\omega) dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} S_{(n,m),(q,p)}^{k,s,-}(r) &= r^{d-1} \int_{S^{d-1}} f(r\omega)(I + AS) j_q^p(k, r\omega) j_n^{-m}(s, r\omega) dS(\omega) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} r^{d-1} \frac{J_{n+\sigma}(sr)}{(sr)^\sigma} \frac{J_{q+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma} \int_{S^{d-1}} f(r\omega) Y_n^{-m}(\omega) Y_q^p(\omega) dS(\omega) \\ &\quad + \frac{r^{d-1} ik^2}{4} \sum_{u \in \mathbb{N}} \sum_{v \in N(u,d)} \frac{H_{u+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma} \frac{J_{n+\sigma}(sr)}{(sr)^\sigma} \\ &\quad \quad \times \int_{S^{d-1}} f(r\omega) Y_u^v(\omega) Y_n^{-m}(\omega) dS(\omega) \langle S j_q^p(k, \cdot), j_u^v(k, \cdot) \rangle_{B_r} \\ &\quad + \frac{r^{d-1} ik^2}{4} \sum_{u \in \mathbb{N}} \sum_{v \in N(u,d)} \frac{J_{u+\sigma}(kr)}{(kr)^\sigma} \frac{J_{n+\sigma}(sr)}{(sr)^\sigma} \\ &\quad \quad \times \int_{S^{d-1}} f(r\omega) Y_u^v(\omega) Y_n^{-m}(\omega) dS(\omega) \langle S j_q^p(k, \cdot), h_u^{v,(2)}(k, \cdot) \rangle_{B_R - B_r}. \end{aligned}$$

Wandelt man diese Gleichung in Matrixschreibweise um, so erhält man den ersten Teil der Behauptung. Der Beweis des zweiten Teils verläuft analog. Es wird deshalb auf diesen Nachweis verzichtet. \square

Satz 4.16 Sei $R, k > 0$ und $f \in L_\infty(\Omega)$. Sei S der zu f gehörende Quelloperator. Seien weiterhin $S^{k,s,-}(r)$ und $S^{k,s,+}(r)$ die Matrizen wie in dem vorhergehenden Satz. Mit Q^s wird die unendlichdimensionale Matrix

$$Q = \text{diag}\{(0(0+d-2), \underbrace{1(1+d-2), \dots, 1(1+d-2)}_{\#N(1,d)\text{-mal}}, \underbrace{2(2+d-2), \dots, 2(2+d-2)}_{\#N(2,d)\text{-mal}}, \dots)\}$$

bezeichnet. Dann gilt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{d-1}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{s^2} Q \right) \frac{\partial}{\partial r} S^{k,s,\mp}(r) = -r^2 \frac{\partial}{\partial r} S^{k,s,\mp}(r)$$

und

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{d-1}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{s^2} Q + r^2 \right) S^{k,s,\mp}(r) = \begin{cases} 2 \int_0^r \tau S^{k,s,-}(\tau) d\tau, & \text{im Fall -} \\ 2 \int_r^R \tau S^{k,s,+}(\tau) d\tau, & \text{im Fall +.} \end{cases}$$

Beweis: Offensichtlich gilt:

$$S^{k,s,-}(0) = 0, \quad S^{k,s,+}(R) = 0$$

Weiterhin folgt aus der Besselschen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{d-1}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{s^2} Q \right) J^s(r) = -r^2 J^s(r).$$

Integration der Gleichungen aus Satz 4.15 beendet den Beweis. \square

Bemerkung 4.17 Für die gesuchte Funktion $S(s)$ aus der Vorbemerkung dieses Unterkapitels gilt: $S(s) = S^{k,s,-}(R)$. Abgesehen davon, dass die Differentialgleichung aus Satz 4.16 von zweiter Ordnung ist, kennt man den Term $2 \int_0^R \tau S^{k,s,-}(\tau) d\tau$ nicht.

4.7.3 Ansatz II

Der Einfachheit halber wird dieser Ansatz nur für die Dimension $d = 2$ betrachtet. Die Reihenentwicklung der Greenschen Funktion aus (2.8) und die Reihenentwicklung der Jacobi-Anger-Entwicklung aus (1.39) lässt sich umschreiben zu:

$$G_k(r\omega, t\theta) = \frac{i}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n(k, r\omega) \overline{j_n(k, t\theta)}, \quad (r > t)$$

$$e^{itr \langle \omega, \theta \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n j_n(t, r\omega) Y_{-n}(\theta),$$

wobei

$$j_n(t, r\omega) = J_n(tr) Y_n(\omega)$$

$$h_n(t, r\omega) = H_n(tr) Y_n(\omega)$$

$$Y_n(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}.$$

Mit Hilfe von Satz 1.6 erhält man sofort:

Satz 4.18 Sei $t \in \mathbb{C}$ und $\omega = e^{i\varphi} \in S^1$. Dann gilt für die sphärischen Funktionen $j_n(t, \cdot)$:

$$r^p Y_p(\omega) j_{n-p}(t, r\omega) = \sum_{m=0}^p \frac{c_{p,m}}{t^{p-m}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} j_n(t, r\omega)$$

$$r^p Y_{-p} j_{n+p}(t, r\omega) = (-1)^p \sum_{m=0}^p \frac{d_{p,m}}{t^{p-m}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} j_n(t, r\omega)$$

mit

$$c_{p,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j}{j!} \prod_{i=1}^p (j + n - 2(i-1))$$

$$d_{p,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j}{j!} \prod_{i=1}^p (j - n - 2(i-1)).$$

Beweis: Einfache Anwendung von Satz 1.6 führt zur Satzaussage. \square

Mit Hilfe dieses Satzes 4.18 erhält man:

Satz 4.19 Sei S der Quelloperator zu einer Funktion $f \in L_\infty(B_R)$ und Wellenzahl $k > 0$. Sei $t \in \mathbb{C}$ und $S_{n,q}(t) = \langle S j_q(k, \cdot), j_n(\bar{t}, \cdot) \rangle_{B_R}$. Dann gilt:

$$S'_{n,q}(t) = E_{n,q}(t) + A_{n,q}(t)$$

mit

$$\begin{aligned} E_{n,q}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \langle (S_v - vS) j_{q+2p}(k, \cdot), j_{n+1+2p}(\bar{t}, \cdot) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \langle (S_w - wS) j_{q+2+2p}(k, \cdot), j_{n+1+2p}(\bar{t}, \cdot) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \langle (S_v - vS) j_{q-2p-2}(k, \cdot), j_{n-1-2p}(\bar{t}, \cdot) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \langle (S_w - wS) j_{q-2p}(k, \cdot), j_{n-1-2p}(\bar{t}, \cdot) \rangle \\ A_{n,q}(t) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n+2p}{t} S_{n+2p,q+2p}(t) - \frac{n-2p}{t} S_{n-2p,q-2p}(t) \\ &\quad - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{q+2p+1}{k} S_{n+2p+1,q+2p+1}(t) - \frac{q-2p-1}{k} S_{n-2p-1,q-2p-1}(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} v(re^{i\varphi}) &= re^{i\varphi} \\ w(re^{i\varphi}) &= re^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Beweis: Nach Satz 4.18 gilt:

$$\begin{aligned} &\langle (S_v - vS) j_{q-1}(k, \cdot), j_n(\bar{t}, \cdot) \rangle + \langle (S_w - wS) j_{q+1}(k, \cdot), j_n(\bar{t}, \cdot) \rangle \\ &= \frac{2q}{k} S_{n,q}(t) - \frac{n-1}{t} S_{n-1,q-1}(t) + S'_{n-1,q-1}(t) - \frac{n+1}{t} S_{n+1,q+1}(t) - S'_{n+1,q+1}(t). \end{aligned}$$

Induktiv folgt damit die Behauptung. \square

Die Terme $A_{n,q}(t)$ können aus den Skalarprodukten $S_{n,q}(t)$ berechnet werden. Die Terme $E_{n,q}(t)$ beinhalten die Nichtlinearität des Problems. Würden die Multiplikationsoperatoren v, w mit S

tauschen, so wäre $E_{n,q}(t) = 0$. Dies gilt leider nicht. Jedoch sind die Funktionen $E_{n,q}$ im Verhältnis zu den Funktionen $A_{n,q}$ relativ klein. In der nachfolgenden Tabelle 4.1 werden zum einem die analytisch berechneten Funktionen $S'_{n,q}(t)$ dargestellt. Alternativ werden dazu die Funktionen berechnet, die man mit Satz 4.19 erhält, wenn man die Terme $E_{n,q}(t)$ ignoriert. Die Wellenzahl in diesem Beispiel beträgt $k = 7$. Die Objektfunktion ist wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} -0.1, & 0 < |x| \leq 0.3 \\ 0, & 0.3 < |x| \leq 1 \end{cases}$$

n	$t = k$		$t = k + 2$	
	$S'_{n,n}(t)$	$S'_{n,n}{}^{\text{approx}}(t)$	$S'_{n,n}(t)$	$S'_{n,n}{}^{\text{approx}}(t)$
-5	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-4	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
-3	-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i
-2	-0.0003 + 0.0000i	-0.0003 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0000i
-1	-0.0002 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0001i	0.0003 - 0.0000i	0.0003 + 0.0000i
0	0.0015 - 0.0002i	0.0012 - 0.0002i	0.0015 - 0.0002i	0.0013 - 0.0002i
1	-0.0002 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0001i	0.0003 - 0.0000i	0.0003 + 0.0000i
2	-0.0003 + 0.0000i	-0.0003 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0000i	-0.0002 + 0.0000i
3	-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i	-0.0001 + 0.0000i
4	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
5	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i

Tabelle 4.1: Ableitungen der Streumatrixeinträge

Bemerkung 4.20 Man kann die unbekannt Funktionen $\langle (S_v - {}_vS) j_q(k, \cdot), j_n(\bar{t}, \cdot) \rangle$ bzw. $\langle (S_w - {}_wS) j_q(k, \cdot), j_n(\bar{t}, \cdot) \rangle$ noch weiter aufspalten. Ohne Beweis gilt:

$$\begin{aligned} \langle (S_v - {}_vS) j_q(k, \cdot), j_n(\bar{t}, \cdot) \rangle &= 2 \langle \Delta^+ AS j_q(k, \cdot), \overline{AS j_n(\bar{t}, \cdot)} \rangle \\ &\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(t, q, n, R, m) S_{m,q}(k) S_{m+1,n}(t) \\ \langle (S_w - {}_wS) j_q(k, \cdot), j_n(\bar{t}, \cdot) \rangle &= 2 \langle \Delta^- AS j_q(k, \cdot), \overline{AS j_n(\bar{t}, \cdot)} \rangle \\ &\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} d(t, q, n, R, m) S_{m,q}(k) S_{m-1,n}(t), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta^+ v(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \Delta^- v(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Man erhält dadurch auch nichtlineare Terme bestehend aus Produkten von $S_{m,n}(t)$ und $S_{m,q}(k)$. Es bleiben jedoch die Unbekannten $\langle \Delta^+ AS j_q(k, \cdot), \overline{AS j_n(\bar{t}, \cdot)} \rangle$ bzw. $\langle \Delta^- AS j_q(k, \cdot), \overline{AS j_n(\bar{t}, \cdot)} \rangle$.

Zusammenfassung

Bisherige Arbeiten sind auf den zwei- bzw. dreidimensionalen Fall beschränkt. Die Eigenschaften der zu Grunde liegenden Operatoren lassen sich jedoch auf beliebige Dimensionen übertragen. Grundbaustein hierfür ist die Reihenentwicklung der Greenschen Funktion (vgl. (2.8)).

In der Praxis erzeugt ein Sender ein einfallendes Feld. Die Frequenz ω der einfallenden Welle gibt die Wellenzahl $k = c_0\omega$ vor (c_0 ist die Geschwindigkeit der Welle im Hintergrundmedium). Die Welle liegt deshalb im Raum

$$W_k := \overline{\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}} \subset L_2(B_R).$$

Insbesondere ist der in dieser Arbeit eingeführte Quell- bzw. Feldoperator abhängig von dieser Frequenz. Der Definitionsbereich des Feld- und Quelloperators ist jedoch nicht auf die Teilmenge $W_k \subset L_2(B_R)$ beschränkt. Diese Operatoren erlauben eine allgemeine Betrachtungsweise der Quellen und Felder.

Das direkte Streuproblem wurde verallgemeinert. Das Problem bestand bisher darin, eine Lösung u_s der Gleichung

$$u_s = A(f(u_s + u_i))$$

zu bestimmen. Dabei wurde vorausgesetzt, dass $u_i \in W_k$. Auf die Einschränkung $u_i \in W_k$ können wir bei der Verallgemeinerung verzichten. Anstelle des Raumes W_k wird der gesamte Raum $L_2(B_R)$ zugelassen. Für radialsymmetrische Objekte f wurden explizite Darstellungen der Lösung angegeben. Für beliebige Objekte wurden Differentialgleichung aufgestellt, mit denen es möglich ist, eine Lösung des verallgemeinerten Problems zu bestimmen. Die Lösung lässt sich formal mit Hilfe des Quelloperators darstellen:

$$u_s(x) = \begin{cases} AS u_i(x), & |x| \leq R \\ A_{B_R}^c S u_i(x), & |x| \geq R. \end{cases}$$

Das Lösen des inversen Streuproblems gestaltet sich wegen seiner Nichtlinearität als besonders schwierig. Als Ausgangspunkt für die Rekonstruktion des Kontrastes f können verschiedene Daten dienen. Aus Messversuchen kann das gestreute Feld $A_\Gamma S u_i$ auf einem Detektor Γ außerhalb des Rekonstruktionsgebietes B_R bestimmt werden (für alle $u_i \in W_k$). Einige Arbeiten gehen jedoch von anderen Informationen aus. Dazu zählen unter anderem: Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung, Fernfelddaten, Streuamplitude und die Streumatrix.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass diese verschiedenen Informationen äquivalent zueinander sind.

Das inverse Streuproblem birgt folgende Problematik: Die lineare Gleichung $A_\Gamma x = b$ ist nicht eindeutig lösbar. Der Operator A_Γ hat einen nichttrivialen Nullraum $N(A_\Gamma) = W_k^\perp$. Daher können lediglich die Anteile der Quelle $S u_i$ ($u_i \in W_k$) senkrecht zum Nullraum eindeutig bestimmt werden. Wegen der Kompaktheit des Operators A_Γ benötigt man für eine stabile Lösung ein Regularisierungsverfahren. In dieser Arbeit wurde ein Regularisierungsverfahren basierend auf der Singulärwertzerlegung hergeleitet und dessen Tauglichkeit an Beispielen gezeigt.

Das weitaus schwierigere Problem ist die Bestimmung der Anteile der Quelle $S u_i$ im Nullraum von A_Γ . Für verschiedene Quellen $S u_{i,1}$ und $S u_{i,2}$ besteht der Zusammenhang:

$$\frac{S u_{i,1}}{A S u_{i,1} + u_{i,1}} = \frac{S u_{i,2}}{A S u_{i,2} + u_{i,2}}.$$

Es wurde ein Verfahren hergeleitet, dass auf Grund dieser Gleichung die Nullraumanteile der Quellen bestimmt.

Abschließend wurde ein neuer Ansatz vorgestellt. Die Idee basiert auf der Fourier-Transformierten einer Quelle $S u_i$. Für die Funktion $v^{t\theta}(x) = e^{it\langle \theta, x \rangle}$ ($t \in \mathbb{R}$, $\theta \in S^{d-1}$) gilt:

$$\widehat{S v^{k\beta}}(t\theta) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \langle S v^{k\beta}, v^{t\theta} \rangle.$$

Durch Messungen des gestreuten Feldes außerhalb des Rekonstruktionsgebietes B_R können die Skalarprodukte $\langle S v^{k\alpha}, v^{k\xi} \rangle$ für alle $\alpha, \xi \in S^{d-1}$ bestimmt werden. Es wurde eine Verbindung zwischen der Normalableitung der Fouriertransformierten $\frac{\partial}{\partial t} \widehat{S v^{k\beta}}(t\theta)$ und den Skalarprodukten $\langle S v^{k\alpha}, v^{t\xi} \rangle$ ($\alpha, \xi \in S^{d-1}$) hergestellt. Die resultierenden Differentialgleichungen enthalten jedoch noch unbekannte Terme. Es bleibt offen, ob diese Unbekannten eliminiert werden können.

Abstract

Up to now, only the two and three dimensional case were examined. The properties of the underlying operators can be transferred to an arbitrary dimension, though. The basic module for transmission is the series expansion of Green's function (vgl. (2.8)).

In practice a transmitter generates an incident field. The wavenumber $k = c_0\omega$ is determined by the frequency ω of the incident field (where c_0 is the velocity of the wave in the background medium). Hence the wave is an element of the space

$$W_k := \overline{\text{span}\{j_n^m(k, \cdot) : n \in \mathbb{N}, m \in N(n, d)\}} \subset L_2(B_R).$$

This means in particular that the source- and field-operator, which are introduced in this work, depend on this frequency. The domain of the source- and fieldoperator includes the whole space $L_2(B_R)$ instead. These operators provide a general insight into the source-field-systems.

The direct scattering problem has been generalised. Up to now it was only of interest to determine a solution u_s of the equation

$$u_s = A(f(u_s + u_i)).$$

for all $u_i \in W_k$. The constraint $u_i \in W_k$ is not necessary for the generalised direct problem. The space W_k is replaced by the whole space $L_2(B_R)$. This thesis gives solutions for all radial-symmetric objects f . For arbitrary objects differential equations have been derived, which can be used to solve the direct problem. With the aid of the source-operator the solution can be written as follows:

$$u_s(x) = \begin{cases} AS u_i(x), & |x| \leq R \\ A_{B_R}^c S u_i(x), & |x| \geq R. \end{cases}$$

Because of the nonlinearity of the inverse scattering problem it is more difficult to solve than the direct problem. There are many different information, which can be used in the reconstruction of the contrast f . The scattered field $A_\Gamma S u_i$ can be measured with the aid of a detector. The detector is located outside of the reconstruction region B_R . Other paper use instead other informations instead, for example Dirichlet to Neumann map, far field patterns, scattering amplitude or scattering matrix. In this thesis it is shown that the different information are equivalent.

There is no unique solution for the equation $A_\Gamma x = b$. The operator A_Γ has a nontrivial null-space $N(A_\Gamma) = W_k^\perp$. Therefore it is only possible to compute the parts of the source $S u_i$, which are part of the space W_k . Furthermore the operator A_Γ is compact. Thus it is only possible

to determine a regularized solution of these parts of a source. A regularization scheme based on the singular value decomposition of A_Γ has been derived. Numerical experiments show its efficiency.

It is more sophisticated to determine the parts of a source in the nullspace $N(A_\Gamma) = W_k^\perp$ of the operator A_Γ . The connection between different sources $S u_{i,1}$ and $S u_{i,2}$ is given by the equation:

$$\frac{S u_{i,1}}{A S u_{i,1} + u_{i,1}} = \frac{S u_{i,2}}{A S u_{i,2} + u_{i,2}}.$$

An algorithm based on this equation has been derived, which computes the nullspace parts of the sources.

Finally a new approach has been introduced. The idea is founded on the Fourier transform of the source $S u_i$. For the function $v^{t\theta}(x) = e^{it\langle\theta,x\rangle}$ ($t \in \mathbb{R}$, $\theta \in S^{d-1}$) it holds:

$$\widehat{S v^{k\beta}}(t\theta) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \langle S v^{k\beta}, v^{t\theta} \rangle.$$

Measurements of the scattered field outside of B_R can be used to calculate the inner products $\langle S v^{k\alpha}, v^{k\xi} \rangle$ for all $\alpha, \xi \in S^{d-1}$. A connection between the outward normal of the Fourier transform $\frac{\partial}{\partial t} \widehat{S v^{k\beta}}(t\theta)$ and the inner products $\langle S v^{k\alpha}, v^{t\xi} \rangle$ ($\alpha, \xi \in S^{d-1}$) has been established. The resulting differential equations contain unknown terms yet. It is an open question, if these terms can be eliminated.

Index

- äquivalente Quelle, 27
- Beltrami-Operator, 12
- Bessel-Funktionen, 10, 12
 - 1. Art, 13
 - 2. Art, 13
 - 3. Art, 13
 - sphärische Bessel-Funktionen, 13
- Besselsche Differentialgleichung, 13
- Born-Approximation, 52
- charakteristische Funktion, 9
- Dirichlet-zu-Neumann Abbildung, 67
 - verallgemeinerte, 68
- Divergenz-Satz, 70
- Drehoperator, 41
- Einheitssphäre, 9, 10
- Feld
 - einfallendes Feld, 25
 - Gesamtfeld, 25
 - gestreutes Feld, 25
- Feld
- gestreutes Feld, 86
- Feldoperator, 38
- Fernfeld, 69
- Fernfelddaten, 69
- Fourier-Koeffizienten, 42, 66
- Fourier-Transformation, 10
- Funktionen
 - Bessel-Funktion 1. Art, 13
 - Bessel-Funktion 2. Art, 13
 - Bessel-Funktion 3. Art, 13
 - Bessel-Funktionen, 10, 12
 - charakteristische Funktion, 9
 - Gamma-Funktion, 11
 - Greensche Funktion, 26, 27
 - Kugelflächenfunktionen, 10
 - Lommel-Funktionen, 17
 - spezielle Funktionen, 10
 - sphärische Bessel-Funktionen, 13
 - Zylinderfunktionen, 13
- Gamma-Funktion, 11
- Greensche Funktion, 26, 27
- Kugelflächenfunktionen, 10
- Lommel-Funktionen, 17
- spezielle Funktionen, 10
- sphärische Bessel-Funktionen, 13
- Zylinderfunktionen, 13
- Gamma-Funktion, 11
- Gegenbauer-Polynome, 10
- Gesamtfeld, 25
- Gleichung
 - Besselsche Differentialgleichung, 13
 - Helmholtz-Gleichung, 10, 26
 - homogen, 12, 26
 - inhomogen, 26
 - Riccati-Differentialgleichungen, 49
- Greensche Formel, 70
- Greensche Funktion, 26, 27
- Helmholtz-Gleichung, 10, 26
 - homogen, 12, 26
 - inhomogen, 26
- Helmholtz-Operator, 26, 31
- hypergeometrische Reihe, 17
- Jacobi-Anger-Entwicklung, 23, 48, 69
- Konventionen, 9
- Kugelflächenfunktionen, 10, 19
- Laplace-Operator, 12, 19
- Lippmann-Schwinger-Operator, 26, 28
- Lippmann-Schwinger-Operator (Außenraum), 26
- Lommel-Funktionen, 17
- Lommel-Wellen, 20

mathematische Hilfsmittel, 9
 mathematische Modellierung, 25
 Modellierung, 25
 Momentenwellen, 20
 Multiplikationsoperatoren, 9

 Nullraum, 35, 72

 Objektfunktion, 27
 Operator
 Lippmann-Schwinger-Operator, 28
 Operatoren
 Beltrami-Operator, 12
 Drehoperator, 41
 Feldoperator, 38
 Helmholtz-Operator, 26, 31
 Laplace-Operator, 12, 19
 Lippmann-Schwinger-Operator, 26
 Lippmann-Schwinger-Operator (Außen-
 raum), 26
 Quelloperator, 38
 Orthogonalbasen, 21
 Orthogonalbasis, 34

 Pockhammer-Symbol, 18
 Polarkoordinaten, 9, 32
 Polynome
 Gegenbauer, 10
 harmonisch, 10, 11
 homogen, 10, 11
 Projektion, 64

 Quelle, 27
 Quelloperator, 38

 radialsymmetrische Objekte, 41
 radialsymmetrische Streuer, 44
 Rekonstruktionsgebiet, 26
 Riccati-Differentialgleichungen, 49

 Satz
 Divergenz-Satz, 70
 Satz von L'Hopital, 33
 Satz von Lommel, 14
 Singulärwertzerlegung, 73
 Singulärwertzerlegung, 60

 Sobolev-Räume, 10, 28, 34
 Sobolev-Skala, 31
 Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung,
 26, 47
 spezielle Funktionen, 10
 spezielle Orthogonalbasen, 21
 spezielle Wellen, 19
 sphärische Bessel-Funktionen, 13
 sphärische Wellen, 19, 27
 Streuamplitude, 64
 Streumatrix, 50, 67
 Streuproblem
 direktes, 25, 38
 inverses, 25, 59

 Wellen
 akustische, 25
 einfallende Welle, 25
 elastische, 25
 elektromagnetische, 25
 gestreute Welle, 25
 Lommel-Wellen, 20
 Momentenwellen, 20
 spezielle Wellen, 19
 sphärische Wellen, 19, 27
 zeitharmonische Welle, 25
 Wellenzahl, 25

 Zylinderfunktionen, 13

Literaturverzeichnis

- [AL99] ABDULLAH, Hellai ; LOUIS, Alfred K.: The approximate inverse for solving an inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium. In: *Inverse Problems* 15 (1999), Nr. 5, S. 1213–1229
- [AS65] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Table*. Dover Publications, 1965. – ISBN 0486612724
- [BCT65] BURKE, J E. ; CENSOR, D ; TWERSKY, V: Exact inverse-separation series for multiple scatterers in two demensions. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 37 (1965), S. 5–13
- [Bec06] BECKER, Clemens S.: *Unvollständige Daten bei der 3D Radon Transformation: Theorie und Algorithmen*, Universität des Saarlandes, Diplomarbeit, 2006
- [Che97] CHEN, Yu: Inverse scattering via Heisenberg’s uncertainty principle. In: *Inverse Problems* 13 (1997), Nr. 2, S. 253–282
- [CK92] COLTON, David ; KRESS, Rainer: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, Heidelberg, 1992. – ISBN 3540555188
- [CK98] COLTON, David ; KRESS, Rainer: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, Berlin, 1998. – ISBN 354062838X
- [CR97] CHEN, Yu ; ROKHLIN, V: On the Riccati equations for the scattering matrices in two dimensions. In: *Inverse Problems* 13 (1997), Nr. 1, S. 1–13
- [Dix03] DIXON, A C.: *On a property of Bessel’s functions*. Messenger, 1903
- [Gra22] GRAY, Andrew: *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*., Macmillan and co., limited, 1922. – ISBN B0006AIW7C
- [Hal82] HALMOS, Paul R.: *A Hilbert Space Problem Book*. Springer-Verlag GmbH, 1982. – ISBN 3540906851
- [Hoc86] HOCHSTADT, Harry: *The Functions of Mathematical Physics (Dover Books on Physics and Chemistry)*. Dover Publications, 1986. – ISBN 0486652149
- [Jon03] JONAS, Peter: *Rekonstruktion von Phasenobjekten mit Hilfe holographischer Röntgentomographie*, Universität des Saarlandes, Diss., 2003

- [Kly05] KLYUBINA, Olga V.: *Asymptotic methods in ultrasound tomography*, Universität Münster, Diss., 2005
- [Lak06] LAKHAL, Aref: *Resolution of Inverse Scattering Problems for the full three-dimensional Maxwell-Equations in Inhomogeneous Media using the Approximate Inverse*, Universität des Saarlandes, Diss., 2006
- [Lou89] LOUIS, Alfred K.: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner Verlag, 1989
- [Luk69] LUKE, Yudell L.: *The special functions and their approximations, Volume I*. Academic Press, New York and London, 1969
- [Man01] MANDACHE, Niculae: Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation. In: *Inverse Problems* 17 (2001), Nr. 5, S. 1435–1444
- [MF53] MORSE, Philip M. ; FESHBACH, Herman: *Methods of Theoretical Physics, Part I and II*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1953. – ISBN 007043316X
- [MO48] MAGNUS, Wilhelm ; OBERHETTINGER, Fritz: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*. Springer, 1948. – ISBN B0000BL8X6
- [Nov88] NOVIKOV, R G.: Multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$. In: *Funkt. Anal. Pril* 22 (1988), Nr. 4, S. 11–22, Engl. translation *Funct. Anal. Appl.* 22, 263–272 (1988)
- [Nov05] NOVIKOV, R G.: Formulae and equations for finding scattering data from the Dirichlet-to-Neumann map with nonzero background potential. In: *Inverse Problems* 21 (2005), Nr. 1, S. 257–270
- [Ram00a] RAMM, A. G. *Stability of the solution to inverse obstacle scattering problem*. Januar 06 2000
- [Ram00b] RAMM, Alexander G. *Stability of solutions to inverse scattering problems with fixed-energy data*. August 03 2000
- [Wal02] WALLACHER, Erik: *Äquivalente Quellen als Zugang zur Lösung eines inversen Streuproblems*, Universität des Saarlandes, Diplomarbeit, 2002
- [Wat58] WATSON, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Cambridge Mathematical Library)*. Cambridge University Press, 1958. – ISBN 0521483913
- [Wüb95] WÜBBELING, Frank: *Das direkte und das inverse Streuproblem bei fester Frequenz.*, Universität Münster 4/95-N, Diss., 1995
- [WL] WALLACHER, Erik ; LOUIS, Alfred K.: Complete Sets of Radiating and Nonradiating Parts of a Source and Their Fields with Applications in Inverse Scattering Limited-Angle Problems. In: *International Journal of Biomedical Imaging* 2006 (2006)

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem Verfahren zur Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt.

Saarbrücken, 22. Februar 2007