Matrixordnung in der Lietheorie

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

von
Benedikt Betz
Saarbrücken
2004

Das Kolloquium fand statt am 16. 7. 2004.
Dekan der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I:
Prof. Dr. Jörg Eschmeier.
Mitglieder des Prüfungsausschusses:
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer *(Vorsitzender)*,
Prof. Dr. Gerd Wittstock *(Berichterstatter)*,
Prof. Dr. Jörg Eschmeier *(Berichterstatter)*,
Dr. Bernhard Burgeth.
Das Protokoll führte Dr. Anselm Lambert.

येन येन च वातेन वारिदो वारि मुञ्चति ।
तेन तेन च वातेन च्छत्रं वहति पण्डितः ॥

In welchem Wind auch immer die Wolke den Regen fallen lässt:
In diesem Wind trägt der Kluge den Schirm.
INDISCHES SPRICHWORT[1]

[1] GEORG BÜHLER: *Leitfaden für den Elementarkursus des Sanskrit: mit Übungsstücken und zwei Glossaren*. Unveränderter reprografischer Nachdruck der zweiten, von Johann Nobel durchgesehenen Auflage, Wien 1927. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1981. Seite 42. Übersetzung: BENEDIKT BETZ.

Inhalt

Rechtsbündig sind die Seitenzahlen angegeben, unmittelbar nach untergeordneten Gliederungsüberschriften die Nummer des ersten Paragraphen der entsprechenden Gliederungseinheit.

Zusammenfassung

Matrixordnungen und algebraische Matrixordnungen werden im Rahmen geordneter $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-Moduln über einer komplexen Vektorkategorie $\mathscr{A}$ erklärt. Es werden Beispiele gegeben und ein Fortsetzungssatz bereitgestellt.

Mengen von Operatoren zwischen Prähilberträumen und $*$-Darstellungen von $*$-Algebren werden diskutiert. Ein Darstellungssatz wird bereitgestellt.

Informationen über Liegruppen und ihre Liealgebren werden zusammengestellt. Matrixwertige positiv definite Funktionen und die Matrixordnung auf der einhüllenden Algebra $\mathfrak{G}$ werden diskutiert.

Die Ableitungen einer unitären Darstellung einer Liegruppe werden diskutiert, ein Approximationslemma wird bewiesen. Die universelle Darstellung einer Liegruppe und Informationen über Kommutanten werden bereitgestellt.

Die Hauptsätze der Arbeit werden bewiesen: Die Charakterisierung der exakten Liealgebrendarstellungen und -homomorphismen mittels vollständiger Positivität.

Es wird ein Kriterium bewiesen für die Positivität von Differentialoperatoren aus $M(\mathfrak{G})$. Einige Beispiele werden diskutiert und weiterführende Fragen aufgeworfen.

Abstract

Matrix orders and algebraic matrix orders are defined in the framework of ordered $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-modules. Some examples are given and an extension theorem is provided.

Sets of operators between pre-Hilbert spaces and $*$-representations of $*$-algebras are discussed. A representation theorem is provided.

Informations about Lie groups and their Lie algebras are given. Matrix valued positively definite functions and the matrix order on the enveloping algebra $\mathfrak{G}$ are discussed.

The derivations of a unitary representation of a Lie group are discussed and an approximation lemma proved. The universal representation of a Lie group and informations about commutants are provided.

The main theorems of the thesis are proved: The characterisation of the exact Lie algebra representations and homomorphisms by complete positivity.

A criterion for the positivity of a differential operator in $M(\mathfrak{G})$ is proved. Some examples are discussed and further questions are raised.

Einleitung

Gelehrte Abhandlungen sollten mit Fußnoten beginnen.
HEINRICH E. KÜHLEBORN[2]

1. Diese Arbeit ist entstanden aus der Beschäftigung mit dem Artikel [Pow74] von Robert T. Powers. Diesen fand ich interessant, weil er eine Stelle zeigt, an der Matrixstrukturen, speziell Matrixordnungen, »im wirklichen Leben« (eines Mathematikers, das heißt, innerhalb der Mathematik) vorkommen, und weil auch Beispiele mit physikalischem Hintergrund diskutiert werden. Ich stellte fest, dass bei dem Theorem 4.5 über die Exaktheit gewisser Darstellungen von Liealgebren eine der Voraussetzungen, nämlich der einfache Zusammenhang der Liegruppe, im Beweis gar nicht benutzt wird. Was das für Konsequenzen hat, ist in dieser Arbeit dargelegt:

Es wird dadurch möglich, die exakten Liealgebrenhomomorphismen zu bestimmen, auch wenn die Gruppe G nicht einfach zusammenhängend ist:

> Gibt es einen Gruppenhomomorphismus φ, so dass das Diagramm kommutiert?

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, dashed, "\varphi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Im fünften Kapitel zeige ich: Das ist genau dann der Fall, wenn π vollständig positiv ist. Dieses Kapitel enthält die verbesserte Version des Satzes von Powers mit einer Variante, einen Beweis desselben, der im Wesentlichen der alte Beweis von Powers ist, und als Anwendung die genannte Charakterisierung der exakten Liealgebrenhomomorphismen.

Die Vorbereitungen für den Satz von Powers, soweit sie die Darstellungstheorie von Liegruppen und -algebren betreffen, werden im vierten Kapitel bereitgestellt. In der Literatur sind die Beweisgänge durch Hin- und Herverweise nicht immer durchsichtig und vor allem nicht ökonomisch. Ich biete hier eine vereinheitlichte

---

[2] HEINRICH E. KÜHLEBORN: *Rotkäppchen und die Wölfe: Von Märchenfälschern und Landschaftszerstörern*. Fischer Taschenbuch Verlag GmbH, Frankfurt am Main 1982. Seite 9.

Anlage der Sätze, bei der etwa der sonst wesentlich benutzte Satz von Stone über unitäre Einparametergruppen und ihre Erzeuger an geeigneter Stelle praktisch als Nebenresultat mit abfällt und vorher nicht mehr gebraucht wird. Das wichtigste Hilfsmittel dabei ist ein Approximationslemma. Für die Hauptlinie der Handlung, die auf die verbesserte Version von Powers' ursprünglichem Satz zielt, brauche ich so nur noch ein wesentliches Zitat ([War72, 4.4.4.10] in Paragraph 118). Die Variante gründet auf der Theorie der analytischen Vektoren von Nelson, für die ich auf die Literatur verweise.

Es wird die von Powers eingeführte universelle Darstellung vorgestellt, und es werden Informationen über Kommutanten zusammengestellt.

Das dritte Kapitel enthält grundlegende Informationen über Liegruppen und ihre Liealgebren sowie über die von Powers eingeführten matrixwertigen, positiv definiten Funktionen. Die Matrixordnung auf der einhüllenden Algebra der Liealgebra einer Liegruppe wird definiert.

Das zweite Kapitel stellt die Powerssche Theorie der Darstellungen von abstrakten $*$-Algebren und einen Darstellungssatz vom Stinespring-Typ zur Verfügung.

Das zentrale Hilfsmittel bei Powers ist die Matrixordnung auf gewissen Räumen. Der Versuch, zu erklären, was eine Matrixordnung ist, hat sich zu einem Entwurf einer Theorie geordneter Moduln über gewissen Kategorien entwickelt, der im ersten, aber zuletzt entstandenen Kapitel dargelegt ist. Wir benötigen zwei verschiedene Versionen von Matrixordnung, und einige Standardbeispiele haben Eigenschaften, die in natürlicher Weise über das Konzept einer Matrixordnung hinausweisen. Diese Phänomene konnte ich so einheitlich erfassen.

Den Wunsch, Matrixstrukturen besser zu verstehen, hatte ich schon zu Diplomarbeitszeiten ([Bet97]). Die Idee der Modulstruktur über Kategorien ist genau das, was ich damals schon gesucht und nicht gefunden habe.

Das sechste und letzte Kapitel gibt ein Kriterium, das es erlaubt, die im Zusammenhang mit Liegruppen gegebenen Matrixordnungen, die zunächst ziemlich abstrakt definiert sind, leichter zu bestimmen. So lassen sie sich in einfachen Beispielen ganz konkret angeben, und man sieht, wie die Theorie funktioniert.

Das Literaturverzeichnis enthält die von mir benutzte Literatur. Es ist keineswegs als eine erschöpfende Bibliographie zum Thema gedacht. Von einigen Büchern gibt es mittlerweile neuere Ausgaben als die angegebenen, die ich zur Verfügung hatte.

Paragraphennummer **2.** Diese Arbeit ist gegliedert in fortlaufend nummerierte Paragraphen, während größere Gliederungseinheiten wie Kapitel und Abschnitte keine Gliederungsnummern erhalten. Wenn nicht anders angegeben, wird bei Verweisen die Paragraphennummer an Stelle der Seitenzahl genannt.

Rand Wichtige Begriffe und Bezeichnungen werden zwecks leichterer Auffindbarkeit am Rand wiederholt.

Das Ende von Beweisen ist durch einen *Smiley* ☺ gekennzeichnet. Dies mag die Freude des Autors wie des Lesers[3] über einen gelungenen Beweis zum Ausdruck bringen. Misslungene Beweise könnte man entsprechend mit einem *Frownie* ☹ abschließen. Ich hoffe jedoch, dass das bei der vorliegenden, gedruckten Fassung der Arbeit nicht mehr nötig ist. Sollte der Leser anderer Meinung sein, so sei er gebeten, das Auftreten entsprechender Stimmungen mit Bleistift selbst zu markieren. Smiley ☺ Frownie ☹

$\mathbb{N}$ bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen, mit Eins beginnend, $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen inklusive Null. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bezeichnen die Mengen der ganzen, reellen und komplexen Zahlen. Die Formelzeichen i, e und π stehen für die gleichnamigen Zahlen ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$). Die kursiven Formelbuchstaben i, e, π sind dann frei für andere Zwecke.

3. Ich möchte mich an dieser Stelle bei vielen bedanken, die diese Arbeit auf die eine odere andere Weise gefördert oder meine Zeit an der Universität des Saarlandes sonst geprägt haben: Danke!

An erster Stelle bei Professor Dr. Gerd Wittstock, der sich auf dieses Projekt eingelassen und es kritisch begleitet und unterstützt hat. Er war immer für eine Diskussion zu haben und wusste meistens mehr, als er zugegeben hat.

Gleichermaßen Dank gebührt Robert T. Powers, der durch seine Vorarbeit die vorliegenden Untersuchungen überhaupt erst ermöglicht hat.

Mathematische Hinweise verdanke ich auch Heinz König und Norbert Poschadel.

An weiteren Hochschullehrern, denen ich wichtige (nicht nur mathematische) Impulse verdanke, möchte ich nennen (in alphabetischer Reihenfolge): Carl-Martin Bunz, Theo de Jong, Heinrich Kroeger, Kuno Lorenz, Ephräm Malki, Gerd-Rüdiger Puin, Shahid Rahman, Wilfrid Rohrbach und Ralf Schmidt.

Ich danke den Chorleitern, Sängerinnen und Sängern des Unichores für die gemeinsamen Montagabende,

den Physikerinnen und Physikern des 2000er und benachbarter Jahrgänge für alle Grill- und sonstigen Feiern, zu denen eingeladen zu werden ich die Ehre hatte,

und nicht zuletzt Mirko Bukowski und Peter Michaely für das professionelle Lektorat.

Saarbrücken, April 2004 *Benedikt Betz*

---

[3]

> *Die Leserinnen aber mögen mich nicht für herzlos halten, daß ich sie grammatisch dem Maskulinum zuordne; nur kopflos können Formen der Sprache für Formen der Welt gehalten werden.*
> KUNO LORENZ

KUNO LORENZ: *Einführung in die philosophische Anthropologie.* Zweite, unveränderte Auflage. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1992. Seite IX.

Matrixstrukturen in der Sprache der Mat$(\mathbb{C})$-Bimoduln

Matrixordnungen und algebraische Matrixordnungen werden im Rahmen geordneter $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-Moduln über einer komplexen Vektorkategorie $\mathscr{A}$ erklärt. Die später benötigten Beispiele sowie ein Fortsetzungssatz werden bereitgestellt.

Dabei werden einige Informationen über (möglicherweise unbeschränkte) Operatoren zwischen Prähilberträumen zusammengestellt.

Weitere Beispiele und Ansatzpunkte für einen Ausbau der Theorie werden skizziert.

Die Kategorie der Matrizen $\mathbb{C}$-linearer Abbildungen wird als die Kategorie der $\oplus$-**Mat**$(\mathbb{C})$-Bimodulhomomorphismen charakterisiert.

Für das Verständnis der späteren Kapitel genügt es, die Begriffe eines matrixgeordneten $*$-Vektorraumes und einer matrixgeordneten $*$-Algebra sowie der Positivität von Sesquilinearformen und Operatoren auf Prähilberträumen und den Fortsetzungssatz zur Kenntnis zu nehmen.

Zur Motivation

4. Ein matrixgeordneter Vektorraum ist ein komplexer Vektorraum V zusammen mit einer Menge K_n von $n \times n$-Matrizen über V für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle v, $w \in K_n$ auch $v + w \in K_n$ ist, und für alle $v \in K_n$ und komplexe $n \times m$-Matrizen α die $m \times m$-Matrix $\alpha^* v \alpha \in K_m$ ist.

Bei einer matrixgeordneten Algebra A hat man nicht nur komplexe Matrizen α zuzulassen, sondern Matrizen über A.

Und bei den wichtigen Beispielen der Matrixordnung für Sesquilinearformen und Operatoren auf Prähilberträumen kann man auf natürliche Weise mit noch allgemeineren Objekten multiplizieren, so dass eine entsprechende Bedingung erfüllt ist.

5. Wir werden einen begrifflichen Rahmen entwickeln, in dem diese Phänomene einheitlich beschrieben werden können. (Und der auch den klassischen Fall geordneter Vektorräume umfasst.) Dieses Ziel wird mit dem Begriff des *Moduls* über Vektorkategorien erreicht: Wir werden die vorkommenden Räume von Sesquilinearformen, Operatoren zwischen Prähilberträumen und Matrizen über Vektorräumen als Moduln erkennen und die vorhandene Zusatzstruktur (Ordnung, Involution, ...) im Rahmen von Moduln mit Zusatzstruktur behandeln. Die matrixgeordneten Vektorräume werden sich dabei als die geordneten $\oplus$-**Mat**($\mathbb{C}$)-Bimoduln herausstellen.

Als Vorbereitung dazu benötigen wir die Begriffe des *Vektorgraphen,* der *Vektorkategorie* und des *linearen Funktors.*

6. In vielen Kategorien bilden die Morphismen zwischen zwei Objekten wieder ein Objekt derselben Kategorie. So bilden zum Beispiel die Homomorphismen zwischen zwei abelschen Gruppen wieder eine abelsche Gruppe, und die beschränkten linearen Abbildungen zwischen Banachräumen sind ein Banachraum. Dieser Sachverhalt ermöglicht eine *Dualitätstheorie,* die nichts anderes ist als das Studium des kontravarianten Morphismenfunktors bezüglich eines ausgezeichneten Objekts: Zu einer abelschen Gruppe G untersucht man die abelsche Gruppe der Homomorphismen $G \to U(1)$, zu einem Banachraum V den Raum der beschränkten linearen Abbildungen $V \to \mathbb{C}$.

Eine derartige Situation werden wir auch hier vorfinden: Die Menge der Modulhomomorphismen zwischen zwei Moduln wird sich wieder als ein Modul herausstellen, und speziell sind – die Bezeichnungen werden später erklärt – die $\oplus$-Modulhomomorphismen zwischen geordneten **Mat**($\mathbb{C}$)-Bimoduln wieder ein geordneter **Mat**($\mathbb{C}$)-Bimodul. Darauf beruht die erfolgreiche Dualitätstheorie matrixgeordneter Räume. (Bei Operatorräumen ist die Situation ähnlich.)

Matrizen als Vektorgraphen und Vektorkategorien

Matrizen über einem Vektorraum

Matrizen über einem Vektorraum

7. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir betrachten zu V auch die Räume $V^{m\times n}$ der *$m \times n$-Matrizen* über V. Dies sind ebenfalls $\mathbb{K}$-Vektorräume unter komponentenweisen Vektorraumoperationen. Es ist

$$V^{m\times n} = \mathbb{K}^{m\times n} \otimes_{\mathbb{K}} V.$$

$M_{m,n}(V)$ $M_n(V)$ **Mat**(V)

Wir schreiben auch $M_{m,n}(V)$ für $V^{m\times n}$ und $M_n(V)$ für $M_{n,n}(V)$. **Mat**(V) sei die Menge aller Matrizen über V.

Amplifikation einer linearen Abbildung

8. Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert lineare Abbildungen, ihre *Amplifikationen,*

$$\varphi\colon M_{m,n}(V) \to M_{m,n}(W);\ [v_{ij}]_{ij} \mapsto [\varphi(v_{ij})]_{ij}.$$

Amplifikationen einer bilinearen Abbildung

9. Für bilineare Abbildungen $\varphi\colon U \times V \to W$ sind drei verschiedene Arten von Amplifikationen in Gebrauch:

1. Ist $u \in \mathbf{Mat}(U)$ und $v \in M_{m,n}(V)$, so setzen wir

   Allgemeine Amplifikation

   $$\varphi(u,v) = [\varphi(u_{ij}, v_{kl})]_{(ik)(jl)}$$

   und identifizieren diese doppelt indizierte Matrix gemäß hiermit getroffener Vereinbarung mit

   $$\big[[\varphi(u_{ij}, v_{kl})]_{kl}\big]_{ij}$$ [4]

   und diese Blockmatrix durch Ignorieren der Blockstruktur mit

   $$[\varphi(u_{ij}, v_{kl})]_{(i(m-1)+k)(j(n-1)+l)} \in \mathbf{Mat}(W).$$ [5]

   Dies ergibt als *allgemeine Amplifikation* bilineare Abbildungen

   $$\varphi\colon M_{m,n}(U) \times M_{k,l}(V) \to M_{mk,nl}(W).$$

2. Für jeweils »passende« Matrizen erhält man daraus durch Verjüngung die *Matrizenmultiplikation:* Für $u \in M_{l,m}(U)$ und $v \in M_{m,n}(V)$ setzen wir

   Matrizenmultiplikation

   $$\varphi^{\odot}(u,v) = \left[\sum_j \varphi(u_{ij}, v_{jk})\right]_{ik} \in M_{l,n}(W).$$

   Durch diese Amplifikation, angewandt auf die Skalarmultiplikation von links beziehungsweise von rechts, ist eine Multiplikation von Matrizen über einem Vektorraum mit skalaren Matrizen von links beziehungsweise von rechts erklärt.

3. Für quadratische Matrizen $u \in \mathbf{Mat}(U)$ und $v \in \mathbf{Mat}(V)$ gleichen Formats kann man zweimal verjüngen und gelangt zu

   $$\sum_{i,j} \varphi(u_{ij}, v_{ij}).$$

   Diese Amplifikation wurde historisch als Erste untersucht.

10. Ist nicht genauer bezeichnet, welche der drei Amplifikationen gemeint ist, muss sich dies aus dem Kontext ergeben. Wir vereinbaren als *Faustregel:* Bei Moduloperationen[6] sei ohne weitere Angabe die Matrizenmultiplikation gemeint, bei Auswertungen linearer Abbildungen die allgemeine Amplifikation. Die dritte Art der Amplifikation ist etwas aus der Mode gekommen und kommt gelegentlich bei Dualitäten vor neben der allgemeinen Amplifikation. (Siehe etwa Paragraph 86.)

Faustregel für Amplifikationen

[4] Erstes Argument »außen«, zweites »innen«.

[5] Diese Vereinbarung enthält natürlich eine gewisse Willkür, sie beruht auf den Identifizierungen

$$\{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,r\} \to \{1,\dots,nr\};\ (i,k) \mapsto i(r-1)+k$$

für n, $r \in \mathbb{N}$.

[6] wie zum Beispiel der Skalarmultiplikation

Tensorprodukt

11. Die allgemeine Amplifikation der Skalarmultiplikation schreiben wir als *Tensorprodukt:*[7]

$$\alpha \otimes_{\mathbb{K}} v \qquad \text{und} \qquad v \otimes_{\mathbb{K}} \alpha$$

für $\alpha \in \mathbf{Mat}(\mathbb{K})$ und $v \in \mathbf{Mat}(V)$.

Direkte Summe

12. Für Matrizen v und w über einem Vektorraum gibt es die *direkte Summe*

$$v \oplus w = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ 0 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

mit Einsen $\mathbb{1}$ jeweils passenden Formats, auf passendes Format mit Nullen aufgefüllt.

Es ist

$$\mathbb{1}_n \otimes_{\mathbb{K}} v = \bigoplus_{i=1}^{n} v = v \oplus \cdots \oplus v.$$

(Gerichteter) Graph
Ecke
Kante

13. Es ist nützlich, sich die Matrizen über einem Vektorraum V als *Kanten* eines *(gerichteten) Graphen*[8] $\mathbf{Mat}(V)$ vorzustellen: Die *Ecken*[9] sind die natürlichen Zahlen, und eine $m \times n$-Matrix ist eine Kante von n nach m.

Kategorie

Der Graph der Matrizen über einer $\mathbb{K}$-Algebra ist mit der Matrizenmultiplikation als Komposition eine *Kategorie.*[10]

Vektorgraphen und Vektorkategorien

Vektorgraph
Vektorkategorie
$\mathscr{C}(A,B)$

14. Allgemeiner nennen wir einen Graphen oder eine Kategorie $\mathscr{C}$, in der alle Kantenmengen $\mathscr{C}(A,B)$ [11] mit einer $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur versehen oder leer sind, und so dass im Kategorienfalle die Kompositionsabbildungen bilinear oder leer sind, einen $\mathbb{K}$-*Vektorgraphen* beziehungsweise eine $\mathbb{K}$-*Vektorkategorie*.

$\mathscr{C}(A)$

Wir schreiben auch kurz $\mathscr{C}(A)$ statt $\mathscr{C}(A,A)$.

15. Beispiele:

1. Jede $\mathbb{K}$-Vektorkategorie ist auch ein $\mathbb{K}$-Vektorgraph.

$\mathbf{Mat}(V)$

2. Wir kennen bereits den $\mathbb{K}$-Vektorgraphen $\mathbf{Mat}(V)$ der Matrizen über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und

$\mathbf{Mat}(\mathbb{K})$

3. die $\mathbb{K}$-Vektorkategorie $\mathbf{Mat}(\mathbb{K})$,

$\mathbf{Mat}(A)$

4. allgemeiner die $\mathbb{K}$-Vektorkategorie $\mathbf{Mat}(A)$ der Matrizen über einer $\mathbb{K}$-Algebra A.

$M(V)$

5. Wir schreiben $M(V)$ für den Untergraphen der *quadratischen* Matrizen von $\mathbf{Mat}(V)$.

---

7 Es handelt sich tatsächlich um Tensorprodukte von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

8 Ordnen wir den »Graphen« in Analogie zu dem zweiten Kompositionsbestandteil von »Fotograph« oder »Stenograph« in die schwache Deklination ein: Der Graph, des, dem, den

6. Ist A eine Algebra, so ist $M(A)$ eine Kategorie. $M(A)$

7. Jede $\mathbb{K}$-Algebra können wir als eine $\mathbb{K}$-Vektorkategorie mit genau einem Objekt ansehen, genauso jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum als $\mathbb{K}$-Vektorgraphen mit genau einer Ecke.

8. Zu einem Vektorgraphen oder einer Vektorkategorie $\mathscr{C}$ gibt es den Vektorgraphen beziehungsweise die Vektorkategorie $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, die aus $\mathscr{C}$ entsteht, indem man die Richtung der Kanten umdreht,[12] und im Kategorienfalle mit der umgedrehten Komposition $\circ^{\mathrm{op}}$: $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$

   $$a \circ^{\mathrm{op}} b = ba.$$

   Es ist $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}$.

9. Zu einem $\mathbb{C}$-Vektorgraphen oder einer $\mathbb{C}$-Vektorkategorie $\mathscr{C}$ gibt es den $\mathbb{C}$-Vektorgraphen beziehungsweise die $\mathbb{C}$-Vektorkategorie $\overline{\mathscr{C}}$ mit der konjugiert linearen Skalarmultiplikation $\overline{\cdot}$: $\overline{\mathscr{C}}$

   $$\alpha \overline{\cdot} v = \overline{\alpha} v.$$

   Es ist $\overline{\overline{\mathscr{C}}} = \mathscr{C}$.

10. Ist $\mathscr{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorgraph beziehungsweise eine $\mathbb{C}$-Vektorkategorie, so auch $\mathscr{C}^*$

    $$\mathscr{C}^* = \overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} = \overline{\mathscr{C}}^{\mathrm{op}}.$$

11. Es seien D und E komplexe Vektorräume. Betrachten wir eine Sesquilinearform[13] $E \times D \to \mathbb{C}$ als Kante von D nach E, so erhalten wir den komplexen Vektorgraphen **Sesq** mit den komplexen Vektorräumen als Ecken.[14] **Sesq**

    Es ist $\textbf{Sesq}(D,E) = (\overline{E} \otimes_{\mathbb{C}} D)'$ (algebraischer Dual des algebraischen Tensorproduktes).

12. Den Vektorgraphen der Sesquilinearformen zwischen Prähilberträumen bezeichnen wir mit **SesqH**. Es ist $\textbf{SesqH}(D,E) = \textbf{Sesq}(\mathbf{V}D, \mathbf{V}E)$ mit dem Vergissfunktor $\mathbf{V}$, der das Skalarprodukt vergisst, und wir schreiben dafür kurz $\textbf{Sesq}(D,E)$. **SesqH**

Graphen; die Graphen. Die starke Deklination (des Graphs, dem Graph, den Graph; die Graphe) scheint mir weniger und nur umgangssprachlich gebräuchlich zu sein.

9 Ich bevorzuge die Bezeichnung »Ecke« statt »Knoten«.

10 Mit den natürlichen Zahlen als Objekten; alle Algebren haben in dieser Arbeit eine Eins.

11 $\mathscr{C}(A,B)$ bezeichne die Menge der Kanten von der Ecke A zur Ecke B.

12 Formal: Die Kanten sind dieselben, nur die Anfangs- und Endpunktabbildungen werden vertauscht.

13 Konjugiert linear im ersten, linear im zweiten Argument.

14 Beachte die Reihenfolge: $\textbf{Sesq}(D,E)$ besteht aus Sesquilinearformen $E \times D \to \mathbb{C}$.

Lin **LinH** **BLin**

13. Die Kategorie **Lin** der linearen Abbildungen zwischen komplexen Vektorräumen ist eine komplexe Vektorkategorie. Mit **LinH** bezeichnen wir die komplexe Vektorkategorie der linearen Operatoren zwischen Prähilberträumen. Diese enthält die Unterkategorie **BLin** der beschränkten Operatoren. Es ist $\textbf{LinH}(D,E) = \textbf{Lin}(\mathbf{V}D, \mathbf{V}E)$, und wir schreiben dafür wieder kurz $\textbf{Lin}(D,E)$.

$\mathscr{B}$

Wir schreiben wie (manchmal) üblich $\mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ für die beschränkten linearen Abbildungen zwischen den *Hilberträumen* $\mathscr{H}$ und $\mathscr{K}$. Dadurch ist eine komplexe Vektorkategorie $\mathscr{B}$ mit den Hilberträumen als Objekten gegeben.

$\underline{\textbf{Lin}}$

14. Es seien D und E Prähilberträume und $\mathscr{K}$ die Vervollständigung von E. Mit $\underline{\textbf{Lin}}(D,E)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Operatoren $D \to \mathscr{K}$. Damit erhalten wir einen komplexen Vektorgraphen $\underline{\textbf{Lin}}$. **LinH** ist ein Untergraph von $\underline{\textbf{Lin}}$.

$\underline{\textbf{BLin}}$

15. $\underline{\textbf{BLin}}$ bezeichne den Untergraphen der beschränkten Operatoren aus $\underline{\textbf{Lin}}$. Beschränkte Operatoren lassen sich eindeutig stetig auf die Vervollständigung ihres Definitionsbereiches fortsetzen. Damit ist für Prähilberträume D und E mit Vervollständigungen $\mathscr{H}$ und $\mathscr{K}$

$$\underline{\textbf{BLin}}(D,E) = \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K}),$$

und mit der Komposition in $\mathscr{B}$ wird auch $\underline{\textbf{BLin}}$ eine Vektorkategorie.

$V \times S$

16. Zu einer vorgegebenen Menge S von Ecken und einem Vektorraum oder einer Algebra V kann man einen Vektorgraphen beziehungsweise eine Vektorkategorie $V \times S$ mit der Eckenmenge S konstruieren und den Kantenmengen

$$(V \times S)(A,A) = V \times \{A\} \qquad \text{und} \qquad (V \times S)(A,B) = \emptyset$$

für $A \neq B$ in S.[15, 16]

Lineare Funktoren

(Linearer) Funktor
Linke / rechte Eckenabbildung
Φ_L, Φ_R

16. Ein *linearer Funktor*[17] $\Phi\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorgraphen $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ ist gegeben durch zwei *Eckenabbildungen,* die *linke* Φ_L und die *rechte* Φ_R, von der Menge der Ecken von $\mathscr{C}$ in die Menge der Ecken von $\mathscr{D}$ und lineare Abbildungen

$$\Phi\colon \mathscr{C}(A,B) \to \mathscr{D}(\Phi_L(A), \Phi_R(B))$$

15 Die Menge aller Kanten ist dann gerade $V \times S$, daher die Bezeichnung.

16 Die Konstruktion $V \times \{A\}$ statt einfach V macht verschiedene Eckenmengen formal disjunkt. Ist dies für Eckenmengen $\mathscr{C}(A,B)_{\text{ungenau}}$ nicht der Fall, so funktioniert im Allgemeinen auch die Konstruktion $\mathscr{C}(A,B)_{\text{korrekt}} = \{A\} \times \mathscr{C}(A,B)_{\text{ungenau}} \times \{B\}$.

17 Wir werden auch einfach »Funktor« sagen, wo die Linearität klar ist, genau wie »Operator« statt »linearer Operator«.

für Ecken A und B von $\mathscr{C}$. Für einen linearen Funktor zwischen $\mathbb{K}$-Vektorkategorien gelte zusätzlich, sofern die Komposition ab definiert ist,

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b),$$[18]

und Φ bilde Einsen auf Einsen ab.

Ein linearer Funktor Φ zwischen Vektorkategorien ist ein Funktor im üblichen Sinne, da die Existenz der Einsen $\Phi_L = \Phi_R$ erzwingt. Lineare Funktoren zwischen Vektorgraphen sind dagegen nicht unbedingt Graphenmorphismen.

Im Falle von Kategorien schreiben wir wie üblich auch einfach Φ statt Φ_L und Φ_R, solange keine Verwechselungsgefahr besteht.

17. Beispiele:

1. Der Vergissfunktor $\mathbf{V}$: **LinH** $\to$ **Lin** ist ein linearer Funktor zwischen Vektorkategorien. Vergissfunktor $\mathbf{V}$

2. Durch $\mathbf{V}$ sowohl als linke als auch als rechte Eckenabbildung und die Identität auf den Kanten ist ein linearer Funktor **SesqH** $\to$ **Sesq** gegeben. Diesen nennen wir ebenfalls *Vergissfunktor* und bezeichnen ihn mit $\mathbf{V}$.

3. Es seien D und E Prähilberträume. Jeder lineare Operator $T \in \underline{\mathbf{Lin}}(D,E)$ definiert eine Sesquilinearform $\varphi_T \in \mathbf{Sesq}(D,E)$ durch Zugeordnete Sesquilinearform φ_T

   $$\langle x \mid \varphi_T \mid y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$[19]

   Die Abbildung $T \mapsto \varphi_T$ definiert einen linearen Funktor – die Eckenabbildungen sind die Identität – von $\underline{\mathbf{Lin}}$ nach **SesqH**.

   Diese Abbildung ist injektiv. Daher können wir $\underline{\mathbf{Lin}}$ als Untergraphen von **SesqH** auffassen.

   Ist T beschränkt, so auch φ_T. Jede beschränkte Sesquilinearform φ zwischen *Hilberträumen* ist bekanntlich von der Form $\varphi = \varphi_T$ mit einem beschränkten Operator T.

4. Sind zwei komplexe Vektorräume D und E gegeben, so ist durch $\Phi\colon \mathbf{Mat}(\mathbf{Sesq}(D,E)) \to \mathbf{Sesq}$

   $$\Phi_L(n) = D^n, \qquad \Phi_R(m) = E^m \qquad \text{und}$$

   $$\langle [x_i]_i \mid \Phi([\varphi_{ij}]_{ij}) \mid [y_j]_j\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i \mid \varphi_{ij} \mid y_j\rangle$$

   ein linearer Funktor Φ von $\mathbf{Mat}(\mathbf{Sesq}(D,E))$ nach **Sesq** gegeben.

   Φ liefert Bijektionen $M_{m,n}(\mathbf{Sesq}(D,E)) = \mathbf{Sesq}(D^n,E^m)$

[18] Diese Gleichung impliziert, dass die rechte Seite definiert ist, und das bedeutet, wenn man sie etwa auf die Einsen anwendet, $\Phi_L = \Phi_R$.

[19] Ist φ eine Sesquilinearform, so schreiben wir $\langle x \mid \varphi \mid y\rangle$ für $\varphi(x,y)$. Skalarprodukte $\langle\ ,\ \rangle$ sind wie Sesquilinearformen konjugiert linear im ersten und linear im zweiten Argument.

$$M_{m,n}(\textbf{Sesq}(D,E)) = \textbf{Sesq}(D^n,E^m).$$ [20]

Wir können Φ also als Einbettung von **Mat**(**Sesq**(D,E)) in **Sesq** betrachten; eine $m \times n$-Matrix von Sesquilinearformen auf $E \times D$ wird dabei als Sesquilinearform auf $E^m \times D^n$ gelesen.

5. Diese Konstruktion liefert für Prähilberträume D und E eine Einbettung von **Mat**(**Sesq**(D,E)) in **SesqH**. Dabei wird eine Matrix von beschränkten Sesquilinearformen auf eine beschränkte Sesquilinearform abgebildet.

Ψ: **Mat**(**Lin**$(D,E)) \to$ **Lin**

6. Für komplexe Vektorräume D und E gibt es einen linearen Funktor Ψ von **Mat**(**Lin**(D,E)) nach **Lin** mit denselben Eckenabbildungen wie in Beispiel 4:

$$\Psi_L(n) = D^n, \qquad \Psi_R(m) = E^m \qquad \text{und}$$

$$\Psi([T_{ij}]_{ij})[x_j]_j = \left[\sum_j T_{ij}x_j\right]_i .$$

$M_{m,n}(\textbf{Lin}(D,E)) = \textbf{Lin}(D^n,E^m)$

Ψ liefert Bijektionen

$$M_{m,n}(\textbf{Lin}(D,E)) = \textbf{Lin}(D^n,E^m).$$ [21]

Wir können also Ψ als Einbettung von **Mat**(**Lin**(D,E)) in **Lin** betrachten; eine $m \times n$-Matrix von Operatoren $D \to E$ wird dabei gelesen als Operator $D^n \to E^m$. Die Komposition solcher Operatoren entspricht gerade der Matrizenmultiplikation der entsprechenden Matrizen von Operatoren. Im Falle $D = E$ ist Ψ also ein Funktor zwischen Vektorkategorien.

---

[20] Zur Injektivität: Ist $\langle [x_i]_i \mid \Phi([\varphi_{ij}]_{ij}) \mid [y_j]_j\rangle = 0$ für alle $[x_i]_i \in E^m$ und $[y_j]_j \in D^n$, so auch

$$\langle x \mid \varphi_{ij} \mid y\rangle = \langle [\delta_{ik}x]_k \mid \Phi([\varphi_{kl}]_{kl}) \mid [\delta_{jl}y]_l\rangle$$

für alle $x \in E$ und $y \in D$.

Zur Surjektivität: $\varphi \in \textbf{Sesq}(D^n,E^m)$ können wir schreiben als $\varphi = \Phi([\varphi_{ij}]_{ij})$ mit

$$\langle x \mid \varphi_{ij} \mid y\rangle = \langle [\delta_{ik}x]_k \mid \varphi \mid [\delta_{jl}y]_l\rangle.$$

[21] Zur Injektivität: Ist $\Psi([T_{ij}]_{ij})[x_j]_j = 0$ für alle $[x_j]_j \in D^n$, so auch

$$T_{ij}x = \Psi([T_{ik}]_{ik})[\delta_{jk}x]_k$$

für alle $x \in D$.

Zur Surjektivität: $T \in \textbf{Lin}(D^n,E^m)$ können wir schreiben als $T = \Psi([T_{ij}]_{ij})$ mit

$$T_{ij}x = \mathrm{pr}_i T[\delta_{jk}x]_k,$$

wobei pr_i die Projektion auf die i^{te} Komponente in E^m bezeichnet.

7. Diese Konstruktion liefert für Prähilberträume D und E Einbettungen von $\mathbf{Mat}(\mathbf{LinH}(D,E))$ in **LinH** und von $\mathbf{Mat}(\underline{\mathbf{Lin}}(D,E))$ in $\underline{\mathbf{Lin}}$ mit Identifizierungen
$$\begin{aligned} M_{m,n}(\mathbf{Lin}(D,E)) &= \mathbf{Lin}(D^n,E^m) \qquad \text{und} \\ M_{m,n}(\underline{\mathbf{Lin}}(D,E)) &= \underline{\mathbf{Lin}}(D^n,E^m). \end{aligned}$$
   Dabei werden Matrizen von beschränkten Operatoren auf beschränkte Operatoren abgebildet.

   Auf der Ebene der zugeordneten Sesquilinearformen passiert dabei nichts Neues: Für $T \in \underline{\mathbf{Lin}}(D,E)$ ist
$$\varphi_{\Psi([T_{ij}]_{ij})} = \Phi([\varphi_{T_{ij}}]_{ij}).$$
   Diese Einbettungen von $\mathbf{Mat}(\mathbf{Sesq}(D,E))$ in **Sesq** beziehungsweise **SesqH** und $\mathbf{Mat}(\mathbf{Lin}(D,E))$ in **Lin** beziehungsweise **LinH** werden wir benutzen, um zusätzliche Struktur von **Sesq**, ... auf die Matrizen über $\mathbf{Sesq}(D,E)$, ... zu übertragen.

8. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Durch Ignorieren der Blockstruktur von Matrizen über $M_{k,l}(V)$ erhalten wir eine Einbettung von $\mathbf{Mat}(M_{k,l}(V))$ in $\mathbf{Mat}(V)$ mit Identifizierungen
$$M_{m,n}(M_{k,l}(V)) = M_{mk,nl}(V).$$
   Diese bilden einen linearen Funktor $\varphi\colon \mathbf{Mat}(M_{k,l}(V)) \to \mathbf{Mat}(V)$ mit Eckenabbildungen $\varphi_L(n) = nl$ und $\varphi_R(m) = mk$.

   $\mathbf{Mat}(M_{k,l}(V)) \to \mathbf{Mat}(V)$
   $M_{m,n}(M_{k,l}(V)) = M_{mk,nl}(V)$

9. Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, so ist durch die Amplifikationen ein linearer Funktor φ von $\mathbf{Mat}(V)$ nach $\mathbf{Mat}(W)$ gegeben mit $\varphi_L = \varphi_R = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Diesen nennen wir *die* Amplifikation von φ.

   Amplifikation einer linearen Abbildung

   Ist φ ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren, so ist der durch φ gegebene Funktor ein Funktor zwischen den jeweiligen Kategorien von Matrizen.[22]

10. Wir können allgemeiner einer *$m \times n$-Matrix* φ von linearen Abbildungen $\varphi_{ij}\colon V \to W$ durch die allgemeine Amplifikation des Auswertungsfunktionals $(v,\varphi) \mapsto \varphi(v)$ einen linearen Funktor, ihre *Amplifikation*,
$$\varphi\colon \mathbf{Mat}(V) \to \mathbf{Mat}(W);\ v \mapsto [\varphi_{ij}(v_{kl})]_{(ki)(lj)}$$
    zuordnen[23] mit den Eckenabbildungen $\varphi_L(l) = ln$ und $\varphi_R(k) = km$.[24]

    Amplifikation einer Matrix von linearen Abbildungen

11. Es seien A und B $\mathbb{K}$-Algebren und $\psi\colon A \to B$ ein Homomorphismus. Die Am-

    $\psi(a) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_n$

---

22 Es ist $\varphi(\sum_j a_{ij}b_{jk}) = \sum_j \varphi(a_{ij})\varphi(b_{jk})$.

23 Doppelt indizierte Matrizen sind wie in Paragraph 9, Nummer 1 mit gewöhnlichen Matrizen identifiziert zu denken.

24 Das entspricht der Amplifikation von φ, gelesen als Abbildung $V \to M_{m,n}(W)$. Der Spezialfall $\varphi = \mathrm{id}\colon M_{k,l}(V) \to M_{k,l}(V)$ ergibt gerade das Beispiel 8.

plifikation der $n \times n$-Matrix φ von linearen Abbildungen $\varphi_{ij}\colon A \to B$; $a \mapsto \delta_{ij}\psi(a)$ ist ein linearer Funktor **Mat**$(A) \to$ **Mat**(B). Es ist $\varphi(a) = \psi(a) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_n$ für Matrizen a über A.[25]

Kontravarianter Funktor
Kovarianter Funktor

12. Es seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Vektorgraphen. Ein *kontravarianter* Funktor von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ ist ein Funktor von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ oder gleichbedeutend von $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathscr{D}$. Funktoren nennt man zur Abgrenzung auch *kovariant*.

Konjugiert linearer Funktor

13. Es seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ komplexe Vektorgraphen. Ein *konjugiert linearer* Funktor von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ ist ein Funktor von $\mathscr{C}$ nach $\overline{\mathscr{D}}$ oder gleichbedeutend von $\overline{\mathscr{C}}$ nach $\mathscr{D}$.

Konjugiert linearer, kontravarianter Funktor

14. Jetzt erwartet der Leser vielleicht eine Bemerkung zu Funktoren von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}^*$ oder gleichbedeutend von $\mathscr{C}^*$ nach $\mathscr{D}$.[26] Spezielle solche konjugiert lineare, kontravariante Funktoren, die *Involutionen*, werden in Paragraph 18 betrachtet.

Hintereinanderausführung von Funktoren $\Phi \circ \Psi$

15. Die *Hintereinanderausführung* $\Phi \circ \Psi$ von linearen Funktoren Φ und Ψ ist ein linearer Funktor mit den Eckenabbildungen

$$(\Phi \circ \Psi)_L = \Phi_L \circ \Psi_L \qquad \text{und} \qquad (\Phi \circ \Psi)_R = \Phi_R \circ \Psi_R.$$

$\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$

Damit bilden die linearen Funktoren die Morphismen von Kategorien von Vektorgraphen beziehungsweise Vektorkategorien; die Einsen sind gegeben durch

$$(\mathrm{id}_{\mathscr{C}})_L = (\mathrm{id}_{\mathscr{C}})_R = \mathrm{id}_{\{\text{Ecken von } \mathscr{C}\}} \qquad \text{und}$$
$$\mathrm{id}_{\mathscr{C}} = \mathrm{id}_{\{\text{Kanten von } \mathscr{C}\}}$$

für einen Vektorgraphen $\mathscr{C}$.

$\mathbb{K}$-**VGraph**
$\mathbb{K}$-**VKat**
VGraph
VKat

Die Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorgraphen beziehungsweise -Kategorien bezeichnen wir mit $\mathbb{K}$-**VGraph** beziehungsweise $\mathbb{K}$-**VKat** oder auch **VGraph** beziehungsweise **VKat**, falls der Grundkörper nicht weiter spezifiziert zu werden braucht.

VGraph$(\mathscr{C},\mathscr{D})$ als Vektorgraph

16. Es seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Vektorgraphen. Die linearen Funktoren $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ mit jeweils denselben, fest gewählten Eckenabbildungen bilden einen Vektorraum unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation. Betrachten wir einen Funktor als Kante von seiner rechten zu seiner linken Eckenabbildung, so ist daher **VGraph**$(\mathscr{C},\mathscr{D})$ ein Vektorgraph mit den Eckenabbildungen als Ecken:

$$\{\text{Ecken von } \mathbf{VGraph}(\mathscr{C},\mathscr{D})\} = \{\text{Ecken von } \mathscr{D}\}^{\{\text{Ecken von } \mathscr{C}\}}.$$

[25] Es ist $(\psi(a) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_n)(\psi(b) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_n) = \psi(ab) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_n$ für passende Matrizen a und b.

[26] Oder von $\overline{\mathscr{C}}$ nach $\mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ oder …

Für Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ ist aber **VKat**$(\mathscr{C},\mathscr{D})$ im Allgemeinen kein Vektorgraph.[27]

17. Dafür bilden die natürlichen Transformationen[28] zwischen linearen Funktoren aus **VKat**$(\mathscr{C},\mathscr{D})$ eine Vektorkategorie **NatTrf**$(\mathscr{C},\mathscr{D})$ mit den Funktoren aus **VKat**$(\mathscr{C},\mathscr{D})$ als Objekten. **NatTrf**$(\mathscr{C},\mathscr{D})$

Involutionen

$*$-Vektorgraphen und $*$-Kategorien

18. Es sei $\mathscr{C}$ ein komplexer Vektorgraph oder eine komplexe Vektorkategorie. Eine *Involution* auf $\mathscr{C}$ ist ein konjugiert linearer, kontravarianter Funktor Involution

$$*\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C};\ a \mapsto a^*$$

mit Eckenabbildungen $*_L = *_R = \mathrm{id}$, so dass für alle Morphismen a von $\mathscr{C}$ gilt:

$$a^{**} = a.$$

19. Ein $*$-*Vektorgraph*, kurz $*$-*Graph*, beziehungsweise eine $*$-*Vektorkategorie*, kurz $*$-*Kategorie*, ist ein komplexer Vektorgraph beziehungsweise eine komplexe Vektorkategorie mit einer Involution.[29] $*$-(Vektor)graph $*$-(Vektor)kategorie

Ein $*$-*Vektorraum* beziehungsweise eine $*$-*Algebra* ist ein komplexer Vektorraum beziehungsweise eine komplexe Algebra[30] mit einer Involution. $*$-Vektorraum $*$-Algebra

20. Eine Kante c eines $*$-Vektorgraphen $\mathscr{C}$ heißt *hermitesch*, falls $c^* = c$ ist. Hermitesche Kanten haben also denselben Anfangs- wie Endpunkt. Den Graphen der hermiteschen Kanten von $\mathscr{C}$ bezeichnen wir mit $\mathscr{C}_{\mathrm{h}}$. Dies ist ein reeller Vektorgraph. Ist $\mathscr{A}$ eine $*$-Kategorie, so ist $\mathscr{A}_{\mathrm{h}}$ im Allgemeinen keine Kategorie, da die Komposition hermitescher Kanten nicht hermitesch sein muss.[31] Hermitesche Kante $\mathscr{C}_{\mathrm{h}}$

Hermitesche Funktoren

21. Es sei Φ ein linearer Funktor zwischen den $*$-Graphen oder $*$-Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$. Wir definieren einen Funktor Φ^* von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ mit den vertauschten Eckenabbildungen Φ^* Hermitescher Funktor

$$(\Phi^*)_L = \Phi_R, \qquad (\Phi^*)_R = \Phi_L \qquad \text{sowie}$$

---

[27] Die Homomorphismen zwischen zwei Algebren bilden ja auch keinen Vektorraum. Die Summe von zwei Funktoren bildet zum Beispiel Einsen nicht mehr auf Einsen ab.

[28] Siehe [ML88, I.4]. Natürliche Transformationen zwischen Darstellungen von Algebren sind bekannt als *intertwining operators.*

[29] Ghez *et al.* ([GLR85]) fordern weitere Bedingungen für $*$-Kategorien. Diese sind erst für C^*-Kategorien wichtig, in unserem allgemeineren Kontext dagegen zu restriktiv.

[30] aufgefasst als Graph mit genau einer Ecke

[31] Die hermiteschen $n \times n$-Matrizen bilden ja auch keine Algebra.

$$\Phi^*(v) = \Phi(v^*)^*.$$

Φ heißt *hermitesch*, falls $\Phi = \Phi^*$. Bei einem hermiteschen Funktor stimmen also notwendig die beiden Eckenabbildungen überein.

Φ ist genau dann hermitesch, wenn für alle Kanten in $\mathscr{C}$ gilt:

$$\Phi(v^*) = \Phi(v)^*.$$

Dann gilt auch für alle Kanten in $\mathscr{C}_\mathrm{h}$:

$$\Phi(v) = \Phi(v)^*.$$

Ist $\mathscr{C}$ ein $*$-Vektorraum, so ist auch diese Bedingung hinreichend.[32]

$*$-Homomorphismus

Hermitesche Homomorphismen von $*$-Algebren nennt man auch $*$-*Homomorphismen.*

Beispiele

22. Wir haben folgende Beispiele:

1. Die Involution auf einem $*$-Graphen $\mathscr{C}$ ist ein hermitescher Funktor von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{C}^*$ und genauso von $\mathscr{C}^*$ nach $\mathscr{C}$. Diese beiden sind invers zueinander.

2. Die komplexen Matrizen sind eine $*$-Vektorkategorie mit der Involution

$$[\alpha_{ij}]^*_{ij} = [\overline{\alpha_{ij}}]_{ji}.$$ [33]

3. Allgemeiner sind die Matrizen über einem $*$-Vektorraum oder einer $*$-Algebra V ein $*$-Vektorgraph beziehungsweise eine $*$-Vektorkategorie mit der Involution

$$[v_{ij}]^*_{ij} = [v^*_{ij}]_{ji}.$$

   Im Falle der $*$-Algebra $\mathbb{C}$ [34] erhalten wir das Beispiel 2 der Matrizen mit der üblichen Involution.

4. Ist $\mathscr{C}$ ein $*$-Graph und A eine Ecke von $\mathscr{C}$, so ist $\mathscr{C}(A)$ ein $*$-Vektorraum.

Duale Involution

5. Der algebraische Dual V' eines $*$-Vektorraumes V besteht aus linearen Funktoren $\Phi: V \to \mathbb{C}$. Er ist ein $*$-Vektorraum mit der *dualen Involution* $\Phi \mapsto \Phi^*$.

6. Ist D ein komplexer Vektorraum, so ist $\overline{D} \otimes_\mathbb{C} D$ ein $*$-Vektorraum mit der Involution $(x \otimes_\mathbb{C} y)^* = y \otimes_\mathbb{C} x$.

---

[32] In einem $*$-Vektorraum ist jeder Vektor Linearkombination von hermiteschen Vektoren.

[33] $[\alpha_{ij}]^*_{ij}$ ist zu lesen als $([\alpha_{ij}]_{ij})^*$, das heißt, die Angabe der Laufindizes gehört zur Benennung der Matrix, auf die die Operation $*$ angewandt wird.

[34] mit der Involution $z^* = \overline{z}$

7. **Sesq** und **SesqH** sind $*$-Vektorgraphen mit der Involution

$$\langle x \mid \varphi^* \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid \varphi \mid x \rangle}.$$

   Die dadurch gegebene Involution auf $\textbf{Sesq}(D) = (\bar{D} \otimes_{\mathbb{C}} D)'$ ist gerade die duale Involution.

8. Die Untergraphen <u>**Lin**</u>, **LinH** und **BLin** von **SesqH** sind nicht abgeschlossen bezüglich der Involution $*$. Sie sind also keine $*$-Graphen.

9. Es seien D, E Prähilberträume. Ist $T \in \underline{\textbf{BLin}}(D,E)$ ein beschränkter Operator, so gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $S \in \underline{\textbf{BLin}}(E,D)$, so dass für die zugeordneten Sesquilinearformen gilt: Adjungierter Operator $T^\dagger$

$$\varphi_S = \varphi_T^*.$$

   Man nennt S den zu T *adjungierten Operator* und bezeichnet ihn mit $T^\dagger$. Durch die Involution $\dagger$ wird <u>**BLin**</u> und genauso $\mathscr{B}$ zu einer $*$-Vektorkategorie. Es ist

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^\dagger x, y \rangle$$

   für alle $x \in E$, $y \in D$.

   Für beschränkte Operatoren zwischen *Hilberträumen* schreibt man T^* statt $T^\dagger$.

10. Durch dieselbe Konstruktion sind auch Involutionen gegeben auf dem Vektorgraphen $\textbf{Lin}^{(\dagger)}$ und den Vektorkategorien $\textbf{Lin}^\dagger$ und $\textbf{BLin}^\dagger$ von (nicht notwendig beschränkten) Operatoren zwischen Prähilberträumen, die in Abschnitt 24 eingeführt werden. Das sind dann $*$-Untergraphen von **SesqH**.

11. Es seien D ein komplexer Vektorraum, E ein Prähilbertraum und V ein $*$-Vektorraum. Die Involutionen auf $\textbf{Mat}(\textbf{Sesq}(D))$, $\textbf{Mat}(\textbf{Sesq}(E))$ und $\textbf{Mat}(M_k)(V)$, die durch die Einbettung der Matrizen über diesen Räumen in **Sesq**, **SesqH**, und $\textbf{Mat}(V)$ gegeben sind, stimmen mit den in Beispiel 3 definierten überein. Das bedeutet, diese Einbettungen sind hermitesche Funktoren.

12. Die Hintereinanderausführung von hermiteschen Funktoren ist hermitesch, und für $*$-Vektorgraphen $\mathscr{C}$ ist $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ hermitesch. Damit bilden die hermiteschen Funktoren Morphismen von Kategorien von $*$-Graphen und $*$-Kategorien.

    Die Kategorien der $*$-Graphen beziehungsweise $*$-Kategorien mit den hermiteschen Funktoren bezeichnen wir mit $*$-**Graph** beziehungsweise $*$-**Kat**. $*$-**Graph** $*$-**Kat**

13. Für $*$-Vektorgraphen $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ ist $\textbf{VGraph}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ ein $*$-Vektorgraph mit der Involution $\Phi \mapsto \Phi^*$. Es ist $\textbf{VGraph}(\mathscr{C},\mathscr{D})_{\mathrm{h}} = *\textbf{-Graph}(\mathscr{C},\mathscr{D})$. $\textbf{VGraph}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ als $*$-Graph

Operatoren zwischen Prähilberträumen

23. Nun führen wir die Begriffe und Bezeichnungen ein, die wir für die Beispiele von $*$-Graphen von Operatoren zwischen Prähilberträumen brauchen. Grundsätzlich wird vorausgesetzt, dass der Leser bereits mit unbeschränkten Operatoren vertraut ist. Ansonsten verweise ich auf die Literatur, etwa [Rud73], [KR83] oder [SZ79].

Adjungierter Operator
$\mathscr{D}(T^*)$
T^*

24. Es seien D und E Prähilberträume mit Vervollständigungen $\mathscr{H}$ und $\mathscr{K}$, und es sei $T \in \underline{\mathbf{Lin}}(D,E)$ ein linearer Operator. Man erklärt

$$T^* \colon \mathscr{D}(T^*) \to \mathscr{H},$$

den *adjungierten Operator* zu T, durch

$$\langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

für alle $x \in \mathscr{K}$, für die dies eine stetige Linearform in $y \in D$ ist. Diese bilden den Definitionsbereich $\mathscr{D}(T^*) \subseteq \mathscr{K}$.

$\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D,E)$
$T^\dagger$

25. Den Raum aller Operatoren $T \in \underline{\mathbf{Lin}}(D,E)$, für die $E \subseteq \mathscr{D}(T^*)$ ist, bezeichnen wir mit $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D,E)$. Für $T \in \mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D,E)$ definieren wir den Operator $T^\dagger$ durch

$$T^\dagger = T^*|_E.$$

Es ist also genau dann $T \in \mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D,E)$, wenn es einen (dann eindeutig bestimmten) Operator $S \in \underline{\mathbf{Lin}}(E,D)$ gibt, so dass in $\mathbf{Sesq}(E,D)$

$$\varphi_S = \varphi_T^*$$

ist, und dieser ist gerade $T^\dagger$.

$\mathbf{Lin}^{(\dagger)}$

Damit ist ein $*$-Vektorgraph $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}$ definiert mit der Involution $\dagger$. Dieser ist ein Untergraph von $\underline{\mathbf{Lin}}$ und ein $*$-Untergraph von $\mathbf{SesqH}$. $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D,E)$ enthält alle *beschränkten* Operatoren $D \to \mathscr{K}$, also $\underline{\mathbf{BLin}}(D,E)$.

$\mathbf{Lin}^{\dagger}(D,E)$

26. Den Raum aller Operatoren $T \in \mathbf{Lin}(D,E)$, für die $E \subseteq \mathscr{D}(T^*)$ und $T^*E \subseteq D$ ist, bezeichnen wir mit $\mathbf{Lin}^\dagger(D,E)$.

$\mathbf{Lin}^\dagger$

Dadurch ist ein $*$-Vektorgraph $\mathbf{Lin}^\dagger$ mit der Involution $\dagger$ definiert. Dieser ist ein $*$-Untergraph von $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}$ und ist eine $*$-Vektorkategorie mit der Hintereinanderausführung als Komposition.

Für *Hilberträume* $\mathscr{H}$ und $\mathscr{K}$ ist

$$\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(\mathscr{H},\mathscr{K}) = \mathbf{Lin}^\dagger(\mathscr{H},\mathscr{K}) = \underline{\mathbf{BLin}}(\mathscr{H},\mathscr{K}) = \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K}).$$ [35]

27. Ein linearer Operator $T \in \underline{\mathbf{Lin}}(D,E)$ heißt *abschließbar*, falls der Abschluss des Graphen von T in $\mathscr{H} \times \mathscr{K}$ wieder ein Funktionsgraph ist. Dieser definiert dann den linearen Operator Abschließbarer Operator Abschluss von T $\overline{T}$ Abgeschlossener Operator

$$\overline{T}\colon \mathscr{D}(\overline{T}) \to \mathscr{K},$$

den *Abschluss* von T. T heißt *abgeschlossen*, falls $T = \overline{T}$.

Für abschließbare Operatoren T ist $\overline{T}^* = T^*$. Adjungierte Operatoren T^* sind abgeschlossen. Alle Operatoren aus $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D,E)$ sind abschließbar.

28. Ein Operator $T \in \underline{\mathbf{Lin}}(D)$ heißt *hermitesch*, falls $\varphi_T \in \mathbf{Sesq}(D)$ hermitesch ist, das heißt, falls für alle $x, y \in D$ gilt: Hermitescher Operator

$$\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn $T \in \mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D)$ ist und $T = T^\dagger$.

T heißt *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$. T ist genau dann selbstadjungiert, wenn T hermitesch ist und $\mathscr{D}(T^*) \subseteq D$.[36] T heißt *schiefadjungiert*, falls $T = -T^*$, oder äquivalent, wenn iT selbstadjungiert ist. Selbstadjungierter Operator Schiefadjungierter Operator

Ein abschließbarer Operator T heißt *wesentlich selbstadjungiert*, falls $\overline{T}$ selbstadjungiert ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\overline{T} = T^*$. Wesentlich selbstadjungierter Operator

Moduloperationen

Moduln über Vektorkategorien

29. Es sei $\mathscr{C}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorgraph und $\mathscr{A}$ eine $\mathbb{K}$-Vektorkategorie mit den Ecken von $\mathscr{C}$ als Objekten. Eine *linke $\mathscr{A}$-Moduloperation* auf $\mathscr{C}$ ist gegeben durch bilineare Abbildungen Linke Moduloperation

$$\mathscr{A}(B,C) \times \mathscr{C}(A,B) \to \mathscr{C}(A,C);\ (a,c) \mapsto ac,$$

so dass für Kanten c von $\mathscr{C}$, Morphismen a, b von $\mathscr{A}$ und Einsen e von $\mathscr{A}$ gilt:

$$(ab)c = a(bc), \qquad ec = c,$$

sofern die jeweiligen Produkte definiert sind.

Eine *rechte $\mathscr{A}$-Moduloperation* ist entsprechend gegeben durch bilineare Abbildungen Rechte Moduloperation

$$\mathscr{C}(B,C) \times \mathscr{A}(A,B) \to \mathscr{C}(A,C);\ (c,a) \mapsto ca$$

mit den Rechenregeln

$$c(ab) = (ca)b, \qquad ce = c.$$

Linker $\mathscr{A}$-Modul
Rechter $\mathscr{A}$-Modul
($\mathscr{A} \mid \mathscr{B}$)-Modul
Modul

30. Ein linker (rechter) $\mathscr{A}$-Modul ist ein Vektorgraph mit einer linken (rechten) $\mathscr{A}$-Moduloperation.

Ein *($\mathscr{A} \mid \mathscr{B}$)-Modul* ist ein Vektorgraph $\mathscr{C}$ einer linken Moduloperation über $\mathscr{A}$ und einer rechten über $\mathscr{B}$, so dass gilt:

$$(ac)b = a(cb)$$

für passende Kanten a von $\mathscr{A}$, b von $\mathscr{B}$ und c von $\mathscr{C}$. Ein *Modul* ist ein ($\mathscr{A} \mid \mathscr{B}$)-Modul über Kategorien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

Bimodul

Ein *$\mathscr{A}$-Bimodul* oder *Bimodul* über $\mathscr{A}$ ist ein ($\mathscr{A} \mid \mathscr{A}$)-Modul.[37]

Modulhomomorphismen

Modulhomomorphismus
Linker Funktor
Rechter Funktor
Φ^L, Φ^R

31. Es sei $\mathscr{C}$ ein $(\mathscr{A}_1 \mid \mathscr{B}_1)$-Modul und $\mathscr{D}$ ein $(\mathscr{A}_2 \mid \mathscr{B}_2)$-Modul. Ein *Modulhomomorphismus* Φ von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ ist gegeben durch zwei lineare Funktoren, den *linken Funktor* Φ^L von $\mathscr{A}_1$ nach $\mathscr{A}_2$ und den *rechten Funktor* Φ^R von $\mathscr{B}_1$ nach $\mathscr{B}_2$, und einen linearen Funktor Φ von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$, so dass für alle Kanten c von $\mathscr{C}$ und Morphismen a von $\mathscr{A}$ gilt:

$$\Phi(ac) = \Phi^L(a)\Phi(c), \quad \Phi(ca) = \Phi(c)\Phi^R(a),$$

sofern die links stehenden Produkte definiert sind.[38]

Beispiele

32. Wir haben folgende Beispiele:

1. Der Graph **Mat**(V) der Matrizen über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist ein Bimodul über **Mat**$(\mathbb{K})$ mit der Matrizenmultiplikation als Moduloperation.
2. Allgemeiner sind die Matrizen **Mat**(V) über einem $(A \mid B)$-Modul V über $\mathbb{K}$-Algebren A und B ein (**Mat**$(A) \mid$ **Mat**(B))-Modul.
3. Jede Vektorkategorie ist ein Bimodul über sich selbst mit der Komposition als Moduloperation.[39]
4. Jeder Funktor zwischen $\mathbb{K}$-Vektorkategorien ist ein Modulhomomorphismus mit sich selbst als linkem und rechtem Funktor, wenn man die Kategorien als Bimoduln über sich selbst auffasst.

---

35 Jeder Operator aus $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(\mathscr{H},\mathscr{K}) = \mathbf{Lin}^{\dagger}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ hat einen abgeschlossenen Graphen als adjungierter Operator (siehe Paragraph 27) und ist damit beschränkt.

36 Ist T hermitesch, so ist automatisch $D \subseteq \mathscr{D}(T^*)$.

37 In dieser Arbeit sind alle vorkommenden Moduln Bimoduln oder vom Typ $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$. Andere Typen werden in der Literatur auch betrachtet. So untersucht zum Beispiel Anselm Lambert ([Lam02]) Linksmoduln über **Mat**$(\mathbb{C})$.

38 Dies impliziert, dass dann auch die rechten Seiten definiert sind, und daher muss die linke Eckenabbildung Φ_L mit den Eckenabbildungen von Φ^L übereinstimmen und entsprechend Φ_R mit den Eckenabbildungen von Φ^R.

39 Genauso wie jede Algebra ein Bimodul über sich selbst ist.

5. Es sei $\mathscr{A}$ eine $*$-Kategorie. Zu jeder linken (rechten) $\mathscr{A}$-Moduloperation auf einem $\mathbb{C}$-Vektorgraphen $\mathscr{C}$ gibt es eine linke (rechte) $\mathscr{A}^*$-Moduloperation $\circledast$ auf $\mathscr{C}$, gegeben durch
$$a \circledast c = a^* c \qquad \text{beziehungsweise} \qquad c \circledast a = ca^*$$
für passende Kanten a von $\mathscr{A}$ und c von $\mathscr{C}$.
Diese Konstruktion definiert auf jedem $\mathscr{A}$-Bimodul auch eine $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-Modulstruktur.

6. **Sesq** ist ein $(\textbf{Lin}^* \mid \textbf{Lin})$-Modul mit der Moduloperation
$$\langle x \mid S \cdot \varphi T \mid y\rangle = \langle Sx \mid \varphi \mid Ty\rangle$$
für passende Operatoren S und T und Sesquilinearformen φ.
Genauso ist **SesqH** ein $(\textbf{LinH}^* \mid \textbf{LinH})$-Modul.

7. **SesqH** ist auch ein $\textbf{Lin}^\dagger$-Bimodul mit der Moduloperation
$$\langle x \mid S\varphi T \mid y\rangle = \langle S^\dagger x \mid \varphi \mid Ty\rangle$$
für passende Operatoren S und T und Sesquilinearformen φ.
Die wie in Beispiel 5 zugeordnete $(\textbf{Lin}^{\dagger *} \mid \textbf{Lin}^\dagger)$-Modulstruktur auf **SesqH** ist gerade die Einschränkung der $(\textbf{LinH}^* \mid \textbf{LinH})$-Modulstruktur.

8. $\underline{\textbf{Lin}}$ ist ein $(\underline{\textbf{BLin}} \mid \textbf{LinH})$-Modul mit der Moduloperation
$$(B, T, S) \mapsto \overline{B} T S$$
für passende Operatoren B aus $\underline{\textbf{BLin}}$, T aus $\underline{\textbf{Lin}}$ und S aus **LinH**.
Die Konstruktion aus Beispiel 5 liefert auch eine $(\underline{\textbf{BLin}}^* \mid \textbf{LinH})$-Modulstruktur auf $\underline{\textbf{Lin}}$, die Moduloperation ist
$$(B, T, S) \mapsto \overline{B^\dagger} T S = B^* T S.$$

9. $\textbf{Lin}^{(\dagger)}$ ist ein $(\textbf{BLin}^* \mid \textbf{BLin})$-Untermodul von $\underline{\textbf{Lin}}$ mit der Einschränkung der $(\underline{\textbf{BLin}}^* \mid \textbf{LinH})$-Modulstruktur.

10. Durch die Abbildung $T \mapsto \varphi_T$ sind Modulhomomorphismen gegeben: von dem $(\textbf{BLin}^* \mid \textbf{LinH})$-Modul $\underline{\textbf{Lin}}$ in den $(\textbf{LinH}^* \mid \textbf{LinH})$-Modul **SesqH**, und von dem $\textbf{Lin}^\dagger$-Bimodul[40] $\textbf{Lin}^\dagger$ in den $\textbf{Lin}^\dagger$-Bimodul **SesqH**. Der linke und der rechte Funktor sind die Einbettungen von **BLin** und **LinH** in **LinH** beziehungsweise $\mathrm{id}_{\textbf{Lin}^\dagger}$: Für passende Operatoren B, S, T und U gilt für die zugeordneten Sesquilinearformen:
$$\varphi_{B^* UT} = B \cdot \varphi_U T \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{SUT} = S\varphi_U T.$$

[40] bezüglich der Bimodulstruktur über sich selbst

11. Es seien D und E $\mathbb{C}$-Vektorräume. Die Einbettung von $\mathbf{Mat}(\mathbf{Sesq}(D,E))$ in **Sesq** ist ein Modulhomomorphismus Φ bezüglich der $(\mathbf{Mat}(\mathbb{C})^* \mid \mathbf{Mat}(\mathbb{C}))$-Modulstruktur auf $\mathbf{Mat}(\mathbf{Sesq}(D,E))$ mit $\Phi^L(\alpha) = \alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{1}_E$ und $\Phi^R(\beta) = \beta \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{1}_D$ für skalare Matrizen α, β. Dabei ist $\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{1}_E \in \mathbf{Mat}(\mathbf{Lin}(E))$ zu lesen als Operator in **Lin**.[41]

    Für Prähilberträume D und E sind die Einbettungen von $\mathbf{Mat}(\mathbf{Sesq}(D,E))$ in **SesqH**, $\mathbf{Mat}(\underline{\mathbf{Lin}}(D,E))$ in $\underline{\mathbf{Lin}}$, …ebenfalls Modulhomomorphismen, die linken und rechten Funktoren sind genauso definiert.

12. Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist die Einbettung $\mathbf{Mat}(M_{k,l}(V))$ in $\mathbf{Mat}(V)$ ein Modulhomomorphismus mit linkem Funktor $\alpha \mapsto \alpha \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_k$ und rechtem Funktor $\beta \mapsto \beta \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_l$ auf $\mathbf{Mat}(\mathbb{K})$.

13. Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Die Amplifikation einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist ein $\mathbf{Mat}(\mathbb{K})$-Bimodulhomomorphismus von $\mathbf{Mat}(V)$ nach $\mathbf{Mat}(W)$ mit $\varphi^L = \varphi^R = \mathrm{id}_{\mathbf{Mat}(\mathbb{K})}$.

14. Sind allgemeiner V und W Moduln über $\mathbb{K}$-Algebren, so ist die Amplifikation[42] einer $m \times n$-Matrix φ von Modulhomomorphismen $\varphi_{st}\colon V \to W$, alle mit demselben linken Funktor ψ^L und demselben rechten Funktor ψ^R, ein Modulhomomorphismus $\varphi\colon \mathbf{Mat}(V) \to \mathbf{Mat}(W)$ mit $\varphi^L(a) = \psi^L(a) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_m$ und $\varphi^R(b) = \psi^R(b) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_n$ für Matrizen a und b über den jeweiligen Algebren.[43]

Hintereinanderausführung von Modulhomomorphismen $\Phi \circ \Psi$

15. Die *Hintereinanderausführung* $\Phi \circ \Psi$ von Modulhomomorphismen Φ und Ψ ist ein Modulhomomorphismus mit

$$(\Phi \circ \Psi)^L = \Phi^L \circ \Psi^L \qquad \text{und} \qquad (\Phi \circ \Psi)^R = \Phi^R \circ \Psi^R.$$

    $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$

    Damit bilden die Modulhomomorphismen die Morphismen von Kategorien von Moduln. Die Einsen sind gegeben durch $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ mit

$$(\mathrm{id}_{\mathscr{C}})^L = \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \quad \text{und} \quad (\mathrm{id}_{\mathscr{C}})^R = \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$$

    für einen $(\mathscr{A} \mid \mathscr{B})$-Modul $\mathscr{C}$.

    $\mathbb{K}$-**Mod**
    Mod

    Die Kategorie der Moduln über $\mathbb{K}$-Vektorkategorien bezeichnen wir mit $\mathbb{K}$-**Mod**. Wir schreiben auch kurz **Mod**, wenn der Körper $\mathbb{K}$ nicht genauer angegeben werden muss.

$\mathbf{Mod}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ als Modul

16. Es sei $\mathscr{C}$ ein $(\mathscr{A}_1 \mid \mathscr{B}_1)$-Modul und $\mathscr{D}$ ein $(\mathscr{A}_2 \mid \mathscr{B}_2)$-Modul. Die Modulhomomorphismen $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ mit jeweils denselben, fest gewählten linken und rechten Funktoren bilden einen Vektorraum unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation. Betrachten wir einen Modulhomomorphismus Φ als

[41] Also für $\alpha \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ als der Operator $E^n \to E^m$; $[x_j]_j \mapsto [\sum_j \alpha_{ij} x_j]_i$.

[42] Paragraph 17, Beispiel 10.

[43] Es ist $\varphi_{st}(\sum_{jk} a_{ij} v_{jk} b_{kl}) = \sum_{jk} \psi^L(a_{ij}) \varphi_{st}(v_{jk}) \psi^R(b_{kl})$.

Pfeil von Φ^R nach Φ^L, so ist daher $\mathbf{Mod}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ ein Vektorgraph mit den linearen Funktoren $\mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ und $\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ als Ecken:

$$\{\text{Ecken von } \mathbf{Mod}(\mathscr{C},\mathscr{D})\} = \mathbf{VKat}(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2) \cup \mathbf{VKat}(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2).$$

Dieser Vektorgraph ist ein $(\mathbf{NatTrf}(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2) \mid \mathbf{NatTrf}(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2))$-Modul[44] mit der folgenden Moduloperation: Ist Φ ein Modulhomomorphismus mit linkem Funktor Φ^L und rechtem Funktor Φ^R, ist $c\colon A \to B$ eine Kante von $\mathscr{C}$ und sind $\varphi\colon \Phi^L \to S$ und $\psi\colon T \to \Phi^R$ natürliche Transformationen, so setzen wir

$$\varphi\Phi\psi(c) = \varphi_B \Phi(c) \psi_A.$$

Dann ist $\varphi\Phi\psi$ ein Modulhomomorphismus mit linkem Funktor S und rechtem Funktor T, und die Multiplikation mit passendem φ und ψ ist eine Links- beziehungsweise Rechts-Moduloperation.[45]

$*$-Moduln

33. Es sei $\mathscr{A}$ eine komplexe Vektorkategorie und $\mathscr{C}$ ein $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-Modul. Ist auf $\mathscr{C}$ eine Involution $*$ gegeben, so dass für passende Kanten a und b von $\mathscr{A}$ und c von $\mathscr{C}$ gilt: $\mathscr{A}$-$*$-Modul

$$(ac)^* = c^*a \qquad \text{und} \qquad (cb)^* = bc^*,$$

so heißt $\mathscr{C}$ ein $*$-*Modul* über $\mathscr{A}$ oder $\mathscr{A}$-$*$-Modul.

[44] Die Kategorien und der Graph haben nicht dieselben Eckenmengen. Um der Form genüge zu tun, ergänzen wir die Kategorien durch die fehlenden Einsen. Wahrscheinlich ist es die elegantere Lösung, bei der Definition nur zu fordern, dass für eine rechte Moduloperation nur alle Anfangspunkte von Kanten Objekte der Kategorie sein müssen und für eine linke Moduloperation alle Endpunkte.

[45] Die natürliche Transformation φ ordnet jedem Objekt A von $\mathscr{A}_1$ einen Morphismus $\varphi_A\colon \Phi^L(A) \to S(A)$ zu, so dass für jeden Morphismus $a\colon A \to B$ von $\mathscr{A}_1$ das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \Phi^L(A) \arrow[r, "\Phi^L(a)"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & \Phi^L(B) \arrow[d, "\varphi_B"] \\ S(A) \arrow[r, "S(a)"] & S(B) \end{tikzcd}$$

Analog für ψ. Dann ist für Kanten $a\colon C \to D$ von $\mathscr{A}_1$, $b\colon A \to B$ von $\mathscr{B}_1$ und $c\colon B \to C$ von $\mathscr{C}$

$$\begin{aligned} \varphi\Phi\psi(acb) &= \varphi_D \Phi(acb)\psi_A \\ &= \varphi_D \Phi^L(a)\Phi(c)\Phi^R(b)\psi_A \\ &= S(a)\varphi_C \Phi(c)\psi_B T(b) \\ &= S(a)\varphi\Phi\psi(c)T(b). \end{aligned}$$

$\mathscr{A}$-$*$-Bimodul

Ist $\mathscr{A}$ eine $*$-Kategorie und $\mathscr{C}$ ein $\mathscr{A}$-Bimodul, so lesen sich diese Rechenregeln mit der zugeordneten $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-Modulstruktur als

$$(ac)^* = c^* a^* \qquad \text{und} \qquad (cb)^* = b^* c^*.$$

Ein $\mathscr{A}$-Bimodul mit einer solchen Involution heißt *$\mathscr{A}$-$*$-Bimodul.*

Hermitesche Modulhomomorphismen

34. Es sei Φ ein Modulhomomorphismus zwischen den $*$-Moduln $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$. Dann gibt es einen Modulhomomorphismus Φ^* von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ mit den vertauschten linken und rechten Funktoren

$$(\Phi^*)^L = \Phi^R, \qquad (\Phi^*)^R = \Phi^L \qquad \text{sowie}$$

$$\Phi^*(v) = \Phi(v^*)^*.$$

Hermitescher Modulhomomorphismus

Φ heißt *hermitesch*, falls $\Phi = \Phi^*$.[46]

Beispiele

35. Wir haben folgende Beispiele:

1. Jede $*$-Vektorkategorie ist ein $*$-Bimodul über sich selbst, jede $*$-Algebra ist ein $*$-Bimodul über sich selbst.
2. Die Matrizen über einem $*$-Vektorraum sind ein $\mathbf{Mat}(\mathbb{C})$-$*$-Bimodul.
3. Und allgemeiner sind die Matrizen über einem $*$-Modul über einer Algebra A ein $*$-Modul über $\mathbf{Mat}(A)$. Die Matrizen über einem $*$-Bimodul über einer $*$-Algebra sind ein $*$-Bimodul über der $*$-Kategorie $\mathbf{Mat}(A)$.
4. **Sesq** ist ein **Lin**-$*$-Modul und **SesqH** ein **LinH**-$*$-Modul. Der Vergissfunktor $\mathbf{V}$: **SesqH** $\to$ **Sesq** ist ein hermitescher Modulhomomorphismus mit $\mathbf{V}$: **LinH** $\to$ **Lin** als linkem und rechtem Funktor.
5. **SesqH** ist auch ein $\mathbf{Lin}^\dagger$-$*$-Bimodul.
6. $\underline{\mathbf{Lin}}$ und $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}$ sind **BLin**-$*$-Moduln.
7. Und natürlich gibt es auch Kategorien von $*$-Moduln und -Bimoduln …

[46] Bei einem hermiteschen Modulhomomorphismus stimmen also notwendig der linke und der rechte Funktor überein.

Ordnungen

Geordnete Moduln

36. Es sei $\mathscr{A}$ eine komplexe Vektorkategorie und $\mathscr{C}$ ein $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-Modul. Eine *Ordnung* auf $\mathscr{C}$ ist gegeben durch einen *Kegel* K in $\mathscr{C}$: Das ist eine Menge von *geschlossenen Kanten*[47], so dass Kegel Ordnung

$$\begin{aligned} K + K &\subseteq K \quad \text{und} \\ aKa &\subseteq K \end{aligned}$$

für alle Morphismen a von $\mathscr{A}$.[48] Für einen Bimodul über einer $*$-Kategorie liest sich diese Definition als

$$\begin{aligned} K + K &\subseteq K \quad \text{und} \\ a^*Ka &\subseteq K. \end{aligned}$$

Für c und $d \in \mathscr{C}(A)$ nennen wir $c \leqslant d$, falls $d - c \in K$. Damit ist $\mathscr{C}(A)$ geordnet. K ist genau die Menge der *positiven* Kanten von $\mathscr{C}$. Positive Kante

37. Ein *geordneter Modul* ist ein $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-Modul über einer komplexen Vektorkategorie $\mathscr{A}$, in dem ein Kegel positiver Kanten ausgezeichnet ist. Geordneter Modul

Geordnete $*$-Moduln

38. Ein *geordneter $*$-Modul* ist ein $*$-Modul $\mathscr{C}$ mit einem Kegel $K \subseteq \mathscr{C}_\mathrm{h}$ *hermitescher* positiver Kanten. Eine *geordnete $*$-Kategorie* ist eine $*$-Kategorie $\mathscr{A}$ mit einem Kegel hermitescher positiver Kanten bezüglich der Bimodulstruktur über $\mathscr{A}$. Geordneter $*$-Modul Geordnete $*$-Kategorie

Positive Funktoren

39. Ein Funktor Φ zwischen geordneten Moduln heißt *positiv*, falls er positive Kanten auf positive abbildet. Positiver Funktor

Beispiele

40. Wir haben folgende Beispiele:

1. Ein *geordneter $\mathbb{C}$-Vektorraum* ist ein geordneter $\mathbb{C}$-Bimodul. Kegel bezüglich dieser Modulstruktur sind (die bekannten) Kegel in $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Geordneter $\mathbb{C}$-Vektorraum

2. Ein *geordneter $*$-Vektorraum* ist ein geordneter $*$-Modul über $\mathbb{C}$. Kegel bezüglich dieser Modulstruktur sind Kegel hermitescher Vektoren. Geordneter $*$-Vektorraum

Geordnete $*$-Algebra
Algebraischer Kegel

3. Eine *geordnete $*$-Algebra* ist ein geordneter $*$-Modul über sich selbst. Die Kegel bezüglich dieser Modulstruktur heißen *algebraische Kegel*.

Matrixgeordneter Vektorraum
Matrixkegel

4. Ein *matrixgeordneter Vektorraum* ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einer Ordnung auf **Mat**(V) bezüglich der **Mat**$(\mathbb{C})$-Bimodulstruktur. Die Kegel bezüglich dieser Modulstruktur heißen *Matrixkegel*.

Matrixgeordneter $*$-Vektorraum

5. Ein *matrixgeordneter $*$-Vektorraum* ist ein $*$-Vektorraum V mit einer Ordnung auf dem **Mat**$(\mathbb{C})$-$*$-Bimodul **Mat**(V).

6. Ist V ein matrixgeordneter Vektorraum, so auch $M_n(V)$ durch die Einbettung **Mat**$(M_n(V))$ in **Mat**(V).

Vollständig positive Abbildung

7. Eine lineare Abbildung zwischen matrixgeordneten Vektorräumen heißt *vollständig positiv*, falls der durch ihre Amplifikationen gegebene Funktor positiv ist.

Duale Matrixordnung

8. Ist V ein matrixgeordneter Vektorraum, so ist der algebraische Dual V' matrixgeordnet durch die *duale Matrixordnung* der Matrizen von Linearformen, deren Amplifikation vollständig positiv ist.

Matrixgeordnete $*$-Algebra
Algebraischer Matrixkegel

9. Eine *matrixgeordnete $*$-Algebra* ist eine $*$-Algebra A mit einer Ordnung auf **Mat**(A) bezüglich der Bimodulstruktur über **Mat**(A). Die Kegel bezüglich dieser Modulstruktur heißen *algebraische Matrixkegel*.

Kleinster algebraischer Matrixkegel

10. Zu jeder $*$-Algebra A gibt es einen *kleinsten* algebraischen Matrixkegel in **Mat**(A), nämlich die Menge aller Matrizen der Form a^*a mit a aus **Mat**(A).[49] Jeder hermitesche Funktor von **Mat**(A) in eine geordnete $*$-Kategorie ist positiv. Jede C^*-Algebra ist auf diese Weise matrixgeordnet.

11. Ähnlich ist die folgende Konstruktion: Es sei D ein komplexer Vektorraum. Auf $\overline{D} \otimes_{\mathbb{C}} D$ ist eine Matrixordnung gegeben durch alle Matrizen der Form $x^{\mathrm{t}} \odot_{\mathbb{C}} x$ mit Matrizen x über D, dabei bezeichne x^{t} die transponierte Matrix und $\odot_{\mathbb{C}}$ die Matrizenprodukt-Amplifikation des Tensorproduktes $\otimes_{\mathbb{C}}$.

    Dieser Matrixkegel wird erzeugt von den Matrizen der Form $[x_i \otimes_{\mathbb{C}}^{\odot} x_j]_{ij}$ mit einem Tupel $[x_i]_i$ von Vektoren aus D.

47 das heißt: Anfangs- gleich Endpunkt

48 $K+K$ ist wie üblich aufzulösen als $\{x \mid \bigvee_{y\in K} \bigvee_{z\in K} x = y+z\}$ und aKb als $\{x \mid \bigvee_{y\in K} x = ayb\}$.

49 Summen von Matrizen der Form a^*a lassen sich wieder in dieser Form schreiben:

$$\sum_i a_i^* a_i = (\mathbb{1} \dots \mathbb{1}) \left(\bigoplus_i a_i\right)^* \left(\bigoplus_j a_j\right) (\mathbb{1} \dots \mathbb{1})^*.$$

In $*$-Kategorien ist diese Reduktion im Allgemeinen nicht möglich. Dort besteht der kleinste Kegel aus *Summen* von Kanten der Form a^*a.

12. Es sei D ein komplexer Vektorraum. Eine Sesquilinearform $\varphi \in \mathbf{Sesq}(D)$ heißt *positiv*, falls für alle $x \in D$ gilt: Positive Sesquilinearform

$$\langle x \mid \varphi \mid x \rangle \geqslant 0.$$

    Jede positive Sesquilinearform ist hermitesch.[50] Durch den Kegel der positiven Sesquilinearformen ist der **Lin**-$*$-Modul **Sesq** geordnet.

13. Durch den Vergissfunktor **V** wird eine Ordnung auf **SesqH** definiert: Eine Sesquilinearform φ zwischen Prähilberträumen heißt *positiv*, falls φ, gelesen als Sesquilinearform $\mathbf{V}\varphi$ zwischen den unterliegenden komplexen Vektorräumen, positiv ist.

14. Es sei D ein komplexer Vektorraum beziehungsweise ein Prähilbertraum. Durch die Einbettung von $\mathbf{Mat}(\mathbf{Sesq}(D))$ in **Sesq** beziehungsweise **SesqH** wird eine Matrixordnung auf $\mathbf{Sesq}(D)$ definiert: Eine $n \times n$-Matrix von Sesquilinearformen auf D heißt positiv, falls die zugehörige Sesquilinearform auf D^n positiv ist.

    Diese Matrixordnung auf $\mathbf{Sesq}(D) = (\overline{D} \otimes_{\mathbb{C}} D)'$ ist gerade die duale Matrixordnung.

15. Ein Operator T aus $\underline{\mathbf{Lin}}$ heißt *positiv,* falls die zugeordnete Sesquilinearform φ_T positiv ist. Jeder positive Operator ist hermitesch und liegt daher in $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}$. Dadurch sind die $(\mathbf{BLin}^* \mid \mathbf{BLin})$-Moduln $\underline{\mathbf{Lin}}$ und $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}$ geordnet, und ebenso die $*$-Kategorien $\mathbf{Lin}^\dagger$, $\underline{\mathbf{BLin}}$ und $\mathscr{B}$.[51] Positiver Operator

16. Es sei D ein Prähilbertraum und $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum. Der komplexe Vektorraum $\underline{\mathbf{Lin}}(D)$ und die $*$-Vektorräume $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D)$, $\mathbf{Lin}^\dagger(D)$, $\underline{\mathbf{BLin}}(D)$ und $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ werden durch die Einbettungen von $\mathbf{Mat}(\underline{\mathbf{Lin}}(D))$ in $\underline{\mathbf{Lin}}$, $\ldots$ matrixgeordnet.

    Ebenso jede C^*-Algebra als $*$-Unterraum eines $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Die dadurch gegebene Matrixordnung stimmt bekanntlich mit der in Beispiel 10 erklärten überein.

17. Die Hintereinanderausführung von positiven Funktoren und Modulhomomorphismen ist positiv. Damit bilden sie die Morphismen von Kategorien von geordneten Moduln.

18. Für einen geordneten $(\mathscr{A}^* \mid \mathscr{A})$-Modul $\mathscr{C}$ und einen geordneten $(\mathscr{B}^* \mid \mathscr{B})$-Modul $\mathscr{D}$ ist $\mathbf{Mod}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ ein geordneter $(\mathbf{NatTrf}(\mathscr{A}, \mathscr{B})^* \mid \mathbf{NatTrf}(\mathscr{A}, \mathscr{B}))$-Modul mit dem Kegel der positiven Modulhomomorphismen. Beachte dabei: $\mathbf{NatTrf}(\mathscr{A}, \mathscr{B})^* = \mathbf{NatTrf}(\mathscr{A}^*, \mathscr{B}^*)$.[52]

[50] Polarisation.
[51] Beachte bei $\underline{\mathbf{BLin}}$: Ein abschließbarer Operator ist genau dann positiv, wenn sein Abschluss positiv ist.
[52] Übungsaufgabe.

Kofinale Mengen

Kofinale Menge von Kanten **41.** Eine Menge X von Kanten eines geordneten $*$-Moduls $\mathscr{C}$ heißt *kofinal*, falls es zu jeder Kante v in $\mathscr{C}_\mathrm{h}$ ein $w \in X$ gibt, so dass $w \geqslant v$.

42. Es gilt:[53]

Proposition: *Ist V ein matrixgeordneter $*$-Vektorraum und W ein $*$-Unterraum von V, so ist W genau dann in V kofinal, wenn $M(W)$ in* **Mat**(V) *kofinal ist. Ein Matrixkegel X in* **Mat**(V) *ist genau dann kofinal, wenn $X \cap M_1(V)$ in V kofinal ist.*

Beweis: Es sei X in **Mat**(V) ein Matrixkegel oder von der Form $M(W)$ mit einem $*$-Unterraum W von V. Ist X in **Mat**(V) kofinal, so auch $X \cap M_1(V)$ in V, da das nach Definition eine schwächere Aussage ist.

Umgekehrt lässt sich jedes Element x von **Mat**$(V)_\mathrm{h}$ darstellen als

$$x = \sum_i \alpha_i^* x_i \alpha_i$$

mit Matrizen $\alpha_i \in$ **Mat**$(\mathbb{C})$ und $x_i \in V_\mathrm{h}$.[54] Ist jetzt $X \cap M_1(V)$ kofinal in V, so gibt es zu jedem x_i ein $y_i \in X \cap M_1(V)$, so dass $x_i \leqslant y_i$ ist. Dann ist

$$x \leqslant \sum_i \alpha_i^* y_i \alpha_i \in X.$$

☺

43. Ist $\mathscr{C}$ ein geordneter $*$-Modul und ist der Kegel der positiven Kanten in $\mathscr{C}$ kofinal, dann lässt sich jede hermitesche Kante als Differenz zweier positiver darstellen. Folglich ist jeder positive Funktor von $\mathscr{C}$ nach einem geordneten $*$-Modul $\mathscr{D}$ automatisch hermitesch.

53 Vergleiche [Pow74, Lemma 3.4]. Dort wird nur ein Teil der Aussage formuliert.

54 Es ist

$$\begin{aligned} x \quad = \quad & \sum_i [\delta_{ik}]_{1,k}^* [x_{ii}]_{1,1} [\delta_{ik}]_{1,k} \\ & + \sum_{i<j} \Big([\delta_{ik} - \mathrm{i}\delta_{jk}]_{1,k}^* \left[\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(x_{ji} - x_{ij})\right]_{1,1} [\delta_{ik} - \mathrm{i}\delta_{jk}]_{1,k} \\ & + [\delta_{ik} + \delta_{jk}]_{1,k}^* \left[\tfrac{1}{2}(x_{ji} + x_{ij})\right]_{1,1} [\delta_{ik} + \delta_{jk}]_{1,k} \\ & - [\delta_{ik}]_{1,k}^* \left[\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(x_{ji} - x_{ij}) + \tfrac{1}{2}(x_{ji} + x_{ij})\right]_{1,1} [\delta_{ik}]_{1,k} \\ & - [\delta_{jk}]_{1,k}^* \left[\tfrac{1}{2\mathrm{i}}(x_{ji} - x_{ij}) + \tfrac{1}{2}(x_{ji} + x_{ij})\right]_{1,1} [\delta_{jk}]_{1,k} \Big). \end{aligned}$$

Ein Fortsetzungssatz

44. Es gilt:[55]

Satz: *Es sei V_0 ein kofinaler $*$-Unterraum eines matrixgeordneten $*$-Vektorraumes V, D ein komplexer Vektorraum und $\varphi_0\colon V_0 \to$ **Sesq**(D) eine vollständig positive Abbildung. Dann hat φ_0 eine vollständig positive Fortsetzung $\varphi\colon V \to$ **Sesq**(D).* Fortsetzungssatz

Ist φ_0 hermitesch, so kann auch die Fortsetzung hermitesch gewählt werden.

Beweis: Wie beim Fortsetzungssatz von Hahn-Banach genügt es, auf den von einem Vektor x_0 und V_0 erzeugten Unterraum fortzusetzen. Dann folgt die Behauptung mit dem Lemma von Zorn.

Die Fortsetzung auf den von einem hermiteschen Vektor x_0 und V_0 erzeugten Unterraum (der dann ein $*$-Unterraum ist) findet Powers ([Pow74, Lemma 3.6]) mit Hilfe des klassischen Trennungssatzes der konvexen Analysis derart, dass die Fortsetzung wieder vollständig positiv ist.

Ist φ_0 hermitesch, so ist die von Powers konstruierte Fortsetzung ebenfalls hermitesch. Siehe dazu den Beweis von Lemma 3.6 in [Pow74], speziell Seite 276, Zeile 6 ff. Dort steht, dass die Fortsetzung überhaupt nur so gesucht wird, dass $\varphi(x_0)$ hermitesch ist, und das gelingt auch (festgestellt auf Seite 277, Zeile 8). ☺

Biprodukte und das Geheimnis der Matrizen

Biprodukte

45. Ein *Biprodukt*[56] zweier Objekte A und B einer Vektorkategorie ist ein Objekt $A \oplus B$ mit Morphismen $\mathrm{pr}_1^{A\oplus B}$, $\mathrm{pr}_2^{A\oplus B}$, $\mathrm{in}_1^{A\oplus B}$ und $\mathrm{in}_2^{A\oplus B}$, kurz pr_i und in_i:

Biprodukt
Projektion
Injektion
$\mathrm{pr}_1^{A\oplus B}$, $\mathrm{pr}_2^{A\oplus B}$, $\mathrm{in}_1^{A\oplus B}$, $\mathrm{in}_2^{A\oplus B}$
pr_i, in_i

$$A \underset{\mathrm{in}_1^{A\oplus B}}{\overset{\mathrm{pr}_1^{A\oplus B}}{\leftrightarrows}} A \oplus B \underset{\mathrm{in}_2^{A\oplus B}}{\overset{\mathrm{pr}_2^{A\oplus B}}{\rightleftarrows}} B\,,$$

den *Projektionen* und *Injektionen*, so dass $\mathrm{pr}_1^{A\oplus B}\,\mathrm{in}_1^{A\oplus B} = \mathrm{id}_A$, $\mathrm{pr}_2^{A\oplus B}\,\mathrm{in}_2^{A\oplus B} = \mathrm{id}_B$ und $\mathrm{in}_1^{A\oplus B}\,\mathrm{pr}_1^{A\oplus B} + \mathrm{in}_2^{A\oplus B}\,\mathrm{pr}_2^{A\oplus B} = \mathrm{id}_{A\oplus B}$.

Dann ist $\mathrm{pr}_2\,\mathrm{in}_1 = 0$ und $\mathrm{pr}_1\,\mathrm{in}_2 = 0$.[57]

Mehrfache Biprodukte sind analog erklärt.

Eine *Biproduktkategorie* oder *$\oplus$-Kategorie* ist eine Vektorkategorie $\mathscr{A}$ mit einem Funktor $\oplus\colon \mathscr{A}\times\mathscr{A} \to \mathscr{A}$, der je zwei Objekten A und B ein Biprodukt zuordnet und zwei Morphismen $a\colon A \to B$ und $b\colon C \to D$ den Morphismus $a\oplus b\colon A\oplus C \to B\oplus D$, gegeben durch

Biproduktkategorie
$\oplus$-Kategorie

$$a\oplus b = \mathrm{in}_1^{B\oplus D}\, a\, \mathrm{pr}_1^{A\oplus C} + \mathrm{in}_2^{B\oplus D}\, b\, \mathrm{pr}_2^{A\oplus C}.$$

55 [Pow74, Theorem 3.7]. Der Zusatz ist dort nicht formuliert.

56 Siehe [ML88, VIII.2].

57 Denn $\mathrm{in}_1\,\mathrm{pr}_1\,\mathrm{in}_1 = \mathrm{in}_1 = \mathrm{in}_2\,\mathrm{pr}_2\,\mathrm{in}_1 + \mathrm{in}_1\,\mathrm{pr}_1\,\mathrm{in}_1$, also $\mathrm{in}_2\,\mathrm{pr}_2\,\mathrm{in}_1 = 0$ und daher $\mathrm{pr}_2\,\mathrm{in}_1 = \mathrm{pr}_2\,\mathrm{in}_2\,\mathrm{pr}_2\,\mathrm{in}_1 = 0$.

Dieser Funktor ist dann automatisch linear.

Damit wir mit mehrfachen direkten Summen vernünftig rechnen können, fordern wir zudem die Assoziativität von $\oplus$.[58]

Direkte Summe
$\oplus$-Modul

Analog ist auch eine *direkte Summe* von Kanten eines Moduls über $\oplus$-Kategorien erklärt, vergleiche Paragraph 12. Moduln über $\oplus$-Kategorien nennen wir $\oplus$-*Moduln*.

$\oplus$-Funktor

46. Ein $\oplus$-*Funktor* zwischen $\oplus$-Kategorien ist ein linearer Funktor Φ, der die Biprodukte respektiert:

$$\begin{aligned} \Phi(A \oplus B) &= \Phi(A) \oplus \Phi(B), \\ \Phi(\mathrm{in}_1^{A \oplus B}) &= \mathrm{in}_1^{\Phi(A) \oplus \Phi(B)}, \end{aligned}$$

und so weiter.

$\oplus$-Modulhomomorphismus

Ein $\oplus$-*Modulhomomorphismus* zwischen $\oplus$-Moduln ist ein Modulhomomorphismus Φ mit $\oplus$-Funktoren Φ^L und Φ^R. Dann gilt für Kanten c und d:

$$\Phi(c \oplus d) = \Phi(c) \oplus \Phi(d).$$

47. Beispiele:

1. Ist A eine $\mathbb{K}$-Algebra, so versehen wir **Mat**(A) mit den Biprodukten

   $$m \oplus n = m + n$$

   für natürliche Zahlen m und n mit Projektionen

   $$\mathrm{pr}_1^{m \oplus n} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{id}_A \qquad \text{und} \qquad \mathrm{pr}_2^{m \oplus n} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{id}_A$$

   und Injektionen

   $$\mathrm{in}_1^{m \oplus n} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m \\ 0 \end{pmatrix} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{id}_A \qquad \text{und} \qquad \mathrm{in}_2^{m \oplus n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{id}_A.$$

   Es ist dann[59] für Matrizen a und b gerade

   $$a \oplus b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

2. Auf **Lin**, **LinH** und Unterkategorien davon haben wir als Biprodukt die übliche direkte Summe mit den zugehörigen Projektionen und Injektionen.

---

[58] Diese Forderung kann man abschwächen, siehe [Kas95, XI.2.1].

[59] wie in Paragraph 12

3. Die Beispiele 4, 6 und 8 in Paragraph 17 lassen sich mit Hilfe von Biprodukten formulieren. Auf die gleiche Weise erhalten wir für Ecken C und D eines $\oplus$-Moduls $\mathscr{C}$ eine Einbettung

$$\Phi\colon \mathbf{Mat}(\mathscr{C}(C,D)) \to \mathscr{C};\ [c_{ij}]_{ij} \mapsto \sum_{ij} \mathrm{in}_i\, c_{ij}\, \mathrm{pr}_j$$

mit Eckenabbildungen

$$\Phi_L(n) = C^{\oplus n} \quad \text{und} \quad \Phi_R(m) = D^{\oplus m}.$$

Diese liefert Identifizierungen $M_{m,n}(\mathscr{C}(C,D)) = \mathscr{C}(C^{\oplus n}, D^{\oplus m})$.[60] Φ ist ein $\oplus$-Modulhomomorphismus mit

$$\Phi^L(\alpha) = \sum_{ij} \alpha_{ij} \mathrm{in}_i\, \mathrm{id}_D\, \mathrm{pr}_j \quad \text{und} \quad \Phi^R(\beta) = \sum_{ij} \beta_{ij} \mathrm{in}_i\, \mathrm{id}_C\, \mathrm{pr}_j.$$

4. In allen unseren Beispielen von $*$-Kategorien, die auch $\oplus$-Kategorien sind, gilt $(\mathrm{in}_i^{A\oplus B})^* = \mathrm{pr}_i^{A\oplus B}$. Wir verzichten hier darauf, für diese Struktur noch eine eigene Bezeichnung einzuführen.

5. Ebenso sollte klar sein, was unter geordneten $\oplus$-*Moduln* und -*Bimoduln* zu verstehen ist. Geordneter $\oplus$-Modul Geordneter $\oplus$-Bimodul

6. Die natürlichen Transformationen zwischen $\oplus$-Funktoren zwischen $\oplus$-Kategorien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ bilden eine $\oplus$-Kategorie $\oplus$-**NatTrf**$(\mathscr{A},\mathscr{B})$ mit der direkten Summe $\oplus$-**NatTrf**$(\mathscr{A},\mathscr{B})$

$$\Phi \oplus \Psi(a) = \Phi(a) \oplus \Psi(a)$$

für $\oplus$-Funktoren Φ und Ψ zwischen $\oplus$-Kategorien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ und Morphismen a von $\mathscr{A}$ sowie

$$(\mathrm{in}_i^{\Phi\oplus\Psi})_A = \mathrm{in}_i^{\Phi(A)\oplus\Psi(A)} \quad \text{und} \quad (\mathrm{pr}_i^{\Phi\oplus\Psi})_A = \mathrm{pr}_i^{\Phi(A)\oplus\Psi(A)}$$

für Objekte A von $\mathscr{A}$.

Dann ist für natürliche Transformationen φ und ψ zwischen $\oplus$-Funktoren

$$(\varphi \oplus \psi)_A = \varphi_A \oplus \psi_A.$$

[60] Zur Infektivität: Ist $\Phi([c_{ij}]_{ij}) = 0$, so auch

$$c_{ij} = \mathrm{pr}_i\, \Phi([c_{kl}]_{kl})\, \mathrm{in}_j.$$

Zur Surjektivität: $c \in \mathscr{C}(C^{\oplus n}, D^{\oplus m})$ können wir schreiben als $c = \Phi([c_{ij}]_{ij})$ mit

$$c_{ij} = \mathrm{pr}_i\, c\, \mathrm{in}_j.$$

7. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Jeder $\oplus$-Funktor $\Phi\colon \mathbf{Mat}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Mat}(\mathbb{K})$ ist gegeben durch eine natürliche Zahl n und $\Phi(\alpha) = \Phi_n(\alpha) = \alpha \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_n$.[61]

   Für einen Körper $\mathbb{K}$ ist $\oplus$-$\mathbf{NatTrf}(\mathbf{Mat}(\mathbb{K})) = \mathbf{Mat}(\mathbb{K})$. Dabei entspricht der natürlichen Transformation $\varphi\colon \Phi_n \to \Phi_m$ die $m \times n$-Matrix φ_1, und es ist $\varphi_n = \mathbb{1}_n \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_1$.[62]

Das Geheimnis der Matrizen

48. Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und sind A und B $\mathbb{K}$-Algebren, so gilt:

Proposition: *Jeder $(\mathbf{Mat}(A) \mid \mathbf{Mat}(B))$-Modul ist (bis auf Isomorphie) von der Form $\mathbf{Mat}(V)$ mit einem $(A \mid B)$-Modul V, speziell ist jeder $\mathbf{Mat}(\mathbb{C})$-Bimodul von der Form $\mathbf{Mat}(V)$ mit einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V, und jeder $\mathbf{Mat}(\mathbb{C})$-$*$-Bimodul ist von der Form $\mathbf{Mat}(V)$ mit einem $*$-Vektorraum V.*

Beweis: Es sei $\mathscr{C}$ ein $(\mathbf{Mat}(A) \mid \mathbf{Mat}(B))$-Modul. Wir setzen

$$V = \mathscr{C}(1,1)$$

und haben zwei Modulhomomorphismen

$$\Phi\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Mat}(V);\ v \mapsto \big[[\delta_{ik}\mathrm{id}_A]_{1,k} v [\delta_{jl}\mathrm{id}_B]_{l,1}\big]_{ij}$$

und

$$\Psi\colon \mathbf{Mat}(V) \to \mathscr{C};\ [v_{ij}]_{ij} \mapsto \sum_{i,j} [\delta_{ik}\mathrm{id}_A]_{k,1}[v_{ij}]_{1,1}[\delta_{jl}\mathrm{id}_B]_{1,l}$$

mit $\Phi^L = \Psi^L = \mathrm{id}_{\mathbf{Mat}(A)}$ und $\Phi^R = \Psi^R = \mathrm{id}_{\mathbf{Mat}(B)}$.[63, 64] Φ und Ψ sind invers zueinander. Falls $\mathscr{C}$ ein $\mathbf{Mat}(\mathbb{C})$-$*$-Bimodul ist, ist V ein $*$-Vektorraum, und Φ und Ψ sind hermitesch. ☺

61 Man kann die Matrix α mit Hilfe von Projektionen und Injektionen aus den Komponenten α_{ij} zusammensetzen.

62 Betrachte für geeignete α das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & nl \arrow[d, "\varphi_l"] \\ m \arrow[r, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] & ml \end{tikzcd}$$

63 Beachte dabei für Matrizen α über A beziehungsweise B:

$$[\delta_{ik}]_{1,k}[\alpha_{kl}]_{kl} = [\alpha_{il}]_{1,l} = \sum_j [\alpha_{ij}]_{1,1}[\delta_{jl}]_{1,l}$$

und

$$\sum_i [\delta_{ik}]_{k,1}[\alpha_{il}]_{1,1} = [\alpha_{kl}]_{k,1} = [\alpha_{kj}]_{kj}[\delta_{jl}]_{j,1}.$$

64 Dies imitiert gerade die bekannte Technik, wie man die Einträge einer Matrix durch Multiplikation mit geeigneten skalaren Matrizen gewinnt und die ursprüngliche Matrix aus den Einträgen wieder rekonstruiert.

49. Dies wirft die Frage auf, ob man auch die für Matrixstrukturen relevanten Morphismen zwischen $\mathbf{Mat}(V)$ und $\mathbf{Mat}(W)$, nämlich Matrizen von Modulhomomorphismen $V \to W$ mit gemeinsamem linkem Funktor ψ^L und gemeinsamem rechtem Funktor ψ^R gemäß Paragraph 32 Beispiel 14, in der Sprache der $(\mathbf{Mat}(A) \mid \mathbf{Mat}(B))$-Moduln charakterisieren kann.

50. Zunächst halten wir fest: Ist $\Phi\colon \mathbf{Mat}(V) \to \mathbf{Mat}(W)$ ein Modulhomomorphismus mit $\Phi^L(a) = \psi^L(a) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_m$ und $\Phi^R(b) = \psi^R(b) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_n$, so ist durch $\Phi\colon V \to M_{m,n}(W)$ eine Matrix von Modulhomomorphismen $V \to W$ mit linkem Funktor ψ^L und rechtem Funktor ψ^R gegeben, deren Amplifikation gerade Φ ergibt.[65]

Und zumindest im Falle $A = B = \mathbb{K}$ können wir die Funktoren vom Typ $a \mapsto \psi(a) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_m$ beschreiben als die $\oplus$-Funktoren – in diesem Fall ist notwendig $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$, denn sonst gibt es keine $\mathbb{K}$-linearen Homomorphismen $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Biprodukt

51. Damit ist die Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume mit den Matrizen von linearen Abbildungen gemäß Paragraph 17 Beispiel 10 als Morphismen äquivalent zu $\oplus$-$(\mathbf{Mat}(\mathbb{K}) \mid \mathbf{Mat}(\mathbb{K}))$-**Mod**. Die Moduloperation der Multiplikation mit skalaren Matrizen entspricht genau der Bimodulstruktur über $\oplus$-$\mathbf{NatTrf}(\mathbf{Mat}(\mathbb{K}))$.

Und die Kategorie der matrixgeordneten Räume mit den vollständig positiven Matrizen von linearen Abbildungen ist äquivalent zur Kategorie der geordneten $\mathbf{Mat}(\mathbb{C})$-Bimoduln mit den positiven $\oplus$-Modulhomomorphismen.

Weitere Strukturen

52. Es werden in der Literatur noch weitere Strukturen auf Vektorgraphen und Vektorkategorien untersucht:

Banachkategorien sind komplexe Vektorkategorien und C^*- und W^*-Kategorien $*$-Kategorien $\mathscr{A}$ mit Normen auf allen Vektorräumen $\mathscr{A}(A,B)$, die gewissen Zusatzbedingungen genügen, siehe etwa [GLR85].

Man kann normierte Moduln über C^*-Kategorien definieren. Operatorräume sind normierte $\mathbf{Mat}(\mathbb{C})$-Bimoduln, siehe etwa [ER00].

[Pop00] untersucht allgemeiner normierte $(\mathbf{Mat}(A) \mid \mathbf{Mat}(B))$-Moduln mit C^*-Algebren A und B, [Mag00] betreibt auf diesen konvexe Analysis.

Um normierte $\mathbf{Mat}(\mathbb{C})$-Linksmoduln geht es in [Lam02].

In [EW97] werden entsprechende Verallgemeinerungen lokalkonvexer Topologien auf $\mathbf{Mat}(\mathbb{C})$-Bimoduln betrachtet.

---

[65] Jedes v aus $\mathbf{Mat}(V)$ lässt sich durch Moduloperationen aus den Komponenten v_{kl} zusammensetzen: $v = \sum_{ij} [\delta_{ik}\mathrm{id}_A]_{k,1} [v_{kl}]_{1,1} [\delta_{jl}\mathrm{id}_B]_{1,l}$.

$*$-Darstellungen

Mengen, speziell $*$-Algebren, von Operatoren und die durch sie gegebenen Topologien auf Prähilberträumen werden diskutiert. Die entwickelten Begriffe werden auf $*$-Darstellungen von $*$-Algebren übertragen. Ein Darstellungssatz wird bereitgestellt.

Literatur: [Pow71], [Pow74].

Mengen von Operatoren

53. Es seien D und E Prähilberträume und $\mathscr{S} \subseteq \underline{\mathbf{Lin}}(D,E)$ eine Menge von linearen Operatoren. Wir nennen $\mathscr{S}$ *abschließbar,* falls alle $T \in \mathscr{S}$ abschließbar sind. Dann definieren wir $\bar{\mathscr{S}}$, den *Abschluss* von $\mathscr{S}$, durch

Abschließbare Menge von Operatoren

Abschluss von $\mathscr{S}$

$\bar{\mathscr{S}}$

$$\bar{\mathscr{S}} = \{\bar{T}|_{\mathscr{D}(\bar{\mathscr{S}})} \mid T \in \mathscr{S}\}$$
$$\text{mit} \quad \mathscr{D}(\bar{\mathscr{S}}) = \bigcap_{T\in\mathscr{S}} \mathscr{D}(\bar{T}).$$

$\mathscr{S}$ heißt *abgeschlossen,* falls $\mathscr{S} = \bar{\mathscr{S}}$. Das ist genau dann der Fall, wenn $D = \mathscr{D}(\bar{\mathscr{S}})$.

Abgeschlossene Menge von Operatoren

Ist $\mathscr{S} \subseteq \mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D,E)$, so ist $\mathscr{S}$ abschließbar.

54. Für $\mathscr{S} \subseteq \mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D,E)$ erklären wir

$\mathscr{S}^*$

$$\mathscr{S}^* = \{T^*|_{\mathscr{D}(\mathscr{S}^*)} \mid T \in \mathscr{S}\}$$
$$\text{mit} \quad \mathscr{D}(\mathscr{S}^*) = \bigcap_{T\in\mathscr{S}} \mathscr{D}(T^*).$$

$\mathscr{S}^*$ ist abgeschlossen.

Eine Menge $\mathscr{S}$ von Operatoren in $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D)$ heißt *hermitesch,* falls sie abgeschlossen ist unter der Involution $\dagger$. $\mathscr{S}$ heißt *selbstadjungiert,* falls $\mathscr{S} = \mathscr{S}^*$. Die Menge von Operatoren $\mathscr{S}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn sie hermitesch ist und $\mathscr{D}(\mathscr{S}^*) \subseteq D$.[66] Eine Menge $\mathscr{S}$ von Operatoren in $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D)$ nennen wir *wesentlich selbstadjungiert,* falls $\bar{\mathscr{S}} = \mathscr{S}^*$.

Hermitesche Menge von Operatoren

Selbstadjungierte Menge von Operatoren

Wesentlich selbstadjungierte Menge von Operatoren

[66] Die andere Inklusion gilt dann ebenfalls.

$\mathscr{S}$-Topologie **55.** Es sei $\mathscr{S} \subseteq \underline{\textbf{Lin}}(D,E)$ eine Menge von Operatoren. Auf D definieren wir eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie, die *$\mathscr{S}$-Topologie*, durch die Halbnormen

$$|x|_T = \|Tx\|$$

für $T \in \mathscr{S}$. Das heißt, eine Nullumgebungsbasis ist gegeben durch Mengen der Form

$$U_{\varepsilon,\mathscr{F}}(0) = \left\{ x \in D \;\middle|\; \max_{T \in \mathscr{F}} |x|_T < \varepsilon \right\}$$

für endliche Teilmengen $\mathscr{F}$ von $\mathscr{S}$ und $\varepsilon > 0$. Wir setzen

$$|x|_{\mathscr{F}} = \max_{T \in \mathscr{F}} |x|_T .$$

Die Mengen

$$U_{\varepsilon,T}(0) = \{x \in D \mid |x|_T < \varepsilon\}$$

bilden eine Nullumgebungssubbasis.

Ist $\mathscr{S}$ eine $*$-Unteralgebra von $\textbf{Lin}^\dagger(D)$, so bilden diese schon eine Nullumgebungsbasis, sogar schon die $U_{\varepsilon,S}(0)$ für hermitesche S: Ist nämlich $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{S}$ endlich und $S = \mathbb{1} + \sum_{T \in \mathscr{F}} T^\dagger T$, so ist $|x|_S \geqslant |x|_{\mathscr{F}}$.

Die $\{\mathbb{1}\}$-Topologie und die $\mathscr{B}(\mathscr{H})$-Topologie sind gleich der Normtopologie auf $\mathscr{H}$, die $\mathbb{0}$-Topologie ist die indiskrete Topologie.

56. Proposition:

a) *Ist $\mathscr{S} \subseteq \underline{\textbf{Lin}}(D,E)$ abgeschlossen, so ist D $\mathscr{S} \cup \{\mathbb{1}\}$-vollständig*[67].

b) *Ist $\mathscr{S}$ eine $*$-Unteralgebra von $\textbf{Lin}^\dagger(D)$ oder enthält $\mathscr{S}$ höchstens ein Element, so ist D in $\mathscr{D}(\overline{\mathscr{S}})$ $\overline{\mathscr{S}} \cup \{\mathbb{1}\}$-dicht.*

c) *Ist $\mathscr{S}$ eine $*$-Unteralgebra von $\textbf{Lin}^\dagger(D)$ oder enthält $\mathscr{S}$ höchstens ein Element, und ist D $\mathscr{S} \cup \{\mathbb{1}\}$-vollständig, so ist $\mathscr{S}$ abgeschlossen.*

Beweis:

a) Es sei $\mathscr{S}$ abgeschlossen und es sei $(x_n)_n$ ein $\mathscr{S} \cup \{\mathbb{1}\}$-Cauchynetz. Weiter sei $\mathscr{H}$ die Vervollständigung von D. Dann ist $(x_n)_n$ insbesondere ein Norm-Cauchynetz, dieses hat einen Grenzwert $x \in \mathscr{H}$, und für alle $T \in \mathscr{S}$ konvergiert Tx_n gegen $\overline{T}x$. Also ist $x \in \mathscr{D}(\overline{\mathscr{S}}) = D$, und x_n konvergiert gegen x bezüglich $\mathscr{S} \cup \{\mathbb{1}\}$.

b) Es sei $x_0 \in \mathscr{D}(\overline{\mathscr{S}})$. Zu $\varepsilon > 0$ und $T \in \mathscr{S}$ enthält die Umgebung $U_{\varepsilon,\{\overline{T},\mathbb{1}\}}(x_0)$ nach Definition von $\overline{T}$ auch Elemente von D, und diese Umgebungen bilden eine Umgebungsbasis bezüglich $\overline{\mathscr{S}} \cup \{\mathbb{1}\}$.

---

67 Korrekt wäre: $\mathbb{1}|_{\mathscr{D}(\mathscr{S})}$ statt $\mathbb{1}$. Sparen wir uns das – es ist klar, was gemeint ist.

c) Es sei D $\mathscr{S}\cup\{\mathbb{1}\}$-vollständig. Es ist D in $\mathscr{D}(\overline{\mathscr{S}})$ nach b) $\overline{\mathscr{S}}\cup\{\mathbb{1}\}$-dicht, und da auf D die $\mathscr{S}\cup\{\mathbb{1}\}$-Topologie mit der $\mathscr{S}\cup\{\mathbb{1}\}$-Topologie übereinstimmt, ist $\mathscr{D}(\mathscr{S})=\mathscr{D}(\mathscr{S})$.

☺

∗-Algebren von Operatoren

57. Ist $\mathscr{S}$ eine ∗-Unteralgebra von $\mathbf{Lin}^\dagger(D)$, so ist $\overline{\mathscr{S}}$ eine ∗-Unteralgebra von $\mathbf{Lin}^\dagger(\mathscr{D}(\overline{\mathscr{S}}))$, und die Abbildung

$$\mathscr{S}\to\overline{\mathscr{S}};\ T\mapsto\overline{T}|_{\mathscr{D}(\bar{\mathscr{S}})}$$

ist ein vollständig positiver ∗-Homomorphismus.[68]

58. Und $\mathscr{S}^*$ ist eine ∗-Unteralgebra von $\mathbf{Lin}^\dagger(\mathscr{D}(\mathscr{S}^*))$, und die Abbildung

$$\mathscr{S}\to\mathscr{S}^*;\ T\mapsto T^{\dagger *}|_{\mathscr{D}(\mathscr{S}^*)}$$

ist ein (nicht notwendig hermitescher) Homomorphismus.[69]

∗-Darstellungen von ∗-Algebren

59. Eine ∗-*Darstellung* einer ∗-Algebra A auf einem Prähilbertraum D ist ein ∗-Homomorphismus $A\to\mathbf{Lin}^\dagger(D)$. ∗-Darstellung

Ist π eine ∗-Darstellung von A auf D, so sind durch

Abschluss einer Darstellung $\overline{\pi}$

$$\overline{\pi}\colon A\xrightarrow{\pi}\pi(A)\to\overline{\pi(A)}\subseteq\mathbf{Lin}^\dagger(\mathscr{D}(\overline{\pi(A)}))$$

Adjungierte Darstellung π^*

eine ∗-Darstellung und durch

$$\pi^*\colon A\xrightarrow{\pi}\pi(A)\to\pi(A)^*\subseteq\mathbf{Lin}^\dagger(\mathscr{D}(\pi(A)^*))$$

eine Darstellung von A auf

$$\mathscr{D}(\overline{\pi})=\mathscr{D}(\overline{\pi(A)})$$

beziehungsweise

$$\mathscr{D}(\pi^*)=\mathscr{D}(\pi(A)^*)$$

gegeben, der *Abschluss* und die *adjungierte Darstellung* von π.

π heißt *abgeschlossen*, falls $\pi=\overline{\pi}$, *selbstadjungiert*, falls $\pi=\pi^*$ und *wesentlich selbstadjungiert*, falls $\overline{\pi}=\pi^*$.

Abgeschlossene Darstellung

Selbstadjungierte Darstellung

Wesentlich selbstadjungierte Darstellung

[68] Die Homomorphismeneigenschaft ist nicht offensichtlich. Der Beweis enthält aber keine besonderen Schwierigkeiten, siehe [Pow71, Lemma 2.6]. Weil der Abschluss eines positiven Operators positiv ist, ergibt sich die vollständige Positivität.

[69] [Pow71, Lemma 4.1]

π^* ist abgeschlossen.[70]

Ist A matrixgeordnet und π vollständig positiv, so ist auch $\overline{\pi}$ vollständig positiv.

Ist π selbstadjungiert, so hat π keine echte selbstadjungierte Fortsetzung (der darstellenden Operatoren auf einen größeren Definitionsbereich in der Vervollständigung $\mathscr{H}$ von D).[71]

Ein Darstellungssatz

60. Es gilt:[72]

Darstellungssatz

Satz: *Es sei A eine matrixgeordnete $*$-Algebra, E ein komplexer Vektorraum und $\varphi\colon A \to \mathbf{Sesq}(E)$ eine hermitesche[73], vollständig positive Abbildung. Dann gibt es einen Prähilbertraum D, eine vollständig positive $*$-Darstellung π von A auf D und eine lineare Abbildung $V\colon E \to D$, so dass für alle $x, y \in E$ und $a \in A$ gilt:*

$$\langle x \mid \varphi(a) \mid y\rangle = \langle Vx, \pi(a)Vy\rangle:$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Sesq}(E) & E \arrow[dd, dashed, "V"] \\
A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & \\
 & \mathbf{Lin}^\dagger(D) \arrow[uu, dashed, "\langle V\cdot, TV\cdot\rangle \mapsfrom T"'] & D
\end{tikzcd}$$

Man kann D so wählen, dass $\pi(A)VE$ in D $\pi(A)$-dicht und π abgeschlossen ist. Dann sind π und V bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Beweis: Durch

$$\langle a \otimes x, b \otimes y\rangle = \langle x \mid \varphi(a^*b) \mid y\rangle$$

wird auf $A \otimes_{\mathbb{C}} E$ eine positive Sesquilinearform definiert. Sei D_1 der Quotient von $A \otimes_{\mathbb{C}} E$ nach dem Kern dieser Sesquilinearform. Dies ist dann ein Prähilbertraum, auf dem A operiert vermöge

$$\pi_1(a)b \otimes x = ab \otimes x.$$

Weiter setzen wir

$$V\colon E \to D_1;\ x \mapsto 1_A \otimes x,$$

$D = \mathscr{D}(\overline{\pi}_1)$ und $\pi = \overline{\pi}_1$.

Jetzt sind nur noch alle gewünschten Eigenschaften nachzurechnen. Ausführlicher vorgeführt findet man den Beweis in [Pow74, Theorem 2.3] ☺

70 [Pow71, Lemma 4.1]

71 [Pow71, Lemma 4.2]

72 [Pow74, Theorem 2.3]

73 Diese Voraussetzung fehlt bei Powers, sie ist aber an den Stellen erfüllt, an denen wir den Satz brauchen (Paragraph 120 und 149, dritter Schritt).

61. Diese Konstruktion verläuft genauso wie bei den bekannten Darstellungssätzen von Gelfand-Neumark-Segal und Stinespring. Eine weitere Verallgemeinerung sei hier nur noch angedeutet:

$*$-Darstellung
Natürliche Transformation

Satz: *Ist $\mathscr{A}$ eine kleine geordnete $*$-Kategorie und $\varphi\colon \mathscr{A} \to \mathbf{Sesq}$ ein positiver, hermitescher Funktor,*[74] *so gibt es eine positive $*$-*Darstellung *von $\mathscr{A}$, das heißt, einen positiven, hermiteschen Funktor $\pi\colon \mathscr{A} \to \mathbf{Lin}^\dagger$, und zu jedem Objekt A von $\mathscr{A}$ eine lineare Abbildung*

$$V_A\colon \varphi_R(A) = \varphi_L(A) \to \pi(A),$$

so dass für jede Kante $a\colon A \to B$ von $\mathscr{A}$ und passende Vektoren x und y gilt:

$$\langle x \mid \varphi(a) \mid y\rangle = \langle V_B x, \pi(a) V_A y\rangle.$$

Man kann die Zuordnung $A \mapsto V_A$ als natürliche Transformation *$V\colon \varphi \to \pi$ ansehen – ein Begriff, den wir hier nicht mehr formal definieren.*

Beweis: Für Objekte A, B von $\mathscr{A}$ betrachten wir auf

$$\mathscr{A}(B,A) \otimes_{\mathbb{C}} \varphi_L(B)$$

das Halbskalarprodukt

$$\langle a \otimes x, b \otimes y\rangle = \langle x \mid \varphi(a^* b) \mid y\rangle.$$

Durch Herausfaktorisieren des Kernes erhalten wir einen Prähilbertraum D_B, und wir setzen

$$\pi(A) = \bigoplus_B D_B$$

und

$$V_A\colon \varphi_L(A) \to \pi(A);\ x \mapsto \mathrm{id}_A \otimes x.$$

Für Morphismen $a\colon A \to B$ und $b\colon C \to A$ von $\mathscr{A}$ und $x \in \varphi_L(C)$ setzen wir

$$\pi(a) b \otimes x = ab \otimes x \in \pi(B).$$

$\pi(a)$ ist auf $\pi(A)$ wohldefiniert: Ist $\langle b \otimes x, b \otimes x\rangle = 0$, so ist wegen der Schwarzschen Ungleichung auch

$$\langle \pi(a) b \otimes x, \pi(a) b \otimes x\rangle = \langle x \mid \varphi(b^* a^* ab) \mid x\rangle = \langle \pi(a^* a) b \otimes x, b \otimes x\rangle.$$

π ist offensichtlich ein Funktor, und für $a\colon A \to B$ ist

$$\langle V_B x, \pi(a) V_A y\rangle = \langle x \mid \varphi(a) \mid y\rangle.$$

Ist $a \geqslant 0$, so auch

$$\langle b \otimes x, \pi(a) b \otimes x\rangle = \langle x \mid \varphi(b^* ab) \mid x\rangle.$$

Also ist π positiv.

Die Gleichung $\pi(a^*) = \pi(a)^\dagger$ zeigt man nach derselben Methode. ☺

[74] Es ist dann $\varphi_L = \varphi_R$.

Liegruppen und ihre Liealgebren

Jeder gute Vortrag beginnt mit den Worten: »Sei G eine lokalkompakte Gruppe.«
MATTHIAS NEUFANG[75]

Einige Informationen über Liegruppen und ihre Liealgebren werden zusammengestellt. Dies dient nur der Erinnerung und der Klarstellung der Bezeichnungen. Grundsätzlich wird eine Bekanntschaft mit Liegruppen und der Sprache der Differentialgeometrie vorausgesetzt. Für Beweise oder weitergehende Informationen verweise ich auf die reichlich vorhandene Literatur: Siehe zum Beispiel [War83], [HN91] oder [Kna86, Chapter III].

Matrixwertige positiv definite Funktionen gemäß [Pow74] und die Matrixordnung auf der einhüllenden Algebra werden eingeführt.

Liegruppen

62. Eine *Liegruppe* ist eine Gruppe G mit einer Struktur als Hausdorffsche analytische Mannigfaltigkeit[76], so dass die Gruppenoperation $(g,h) \mapsto gh$ und die In- Liegruppe

[75] MATTHIAS NEUFANG: Kommentar zu dem Standardbeginn seiner Saarbrücker Oberseminarvorträge. Mündlich überliefert. Dazu ist erstens anzumerken: Jede Liegruppe ist lokalkompakt, und zweitens: Fast jede lokalkompakte Gruppe kann durch Liegruppen »approximiert« werden ([MZ55, 4.6], [Kap71, Theorem 18]).

[76] Das heißt, es ist ein Atlas mit analytischen Kartenwechseln gegeben. Für eine Hausdorffsche Mannigfaltigkeit M sind die folgenden topologischen Eigenschaften äquivalent ([Spi70, A-1]):

- M ist parakompakt.
- M ist metrisierbar.
- Jede Zusammenhangskomponente von M hat eine abzählbare Basis ihrer offenen Mengen.
- Jede Zusammenhangskomponente von M ist σ-kompakt.

Für Liegruppen sind diese Eigenschaften erfüllt: Es gibt eine kompakte Umgebung der Eins, deren Potenzen sind kompakt und überdecken die Zusammenhangskomponente der Eins.

versenbildung $g \mapsto g^{-1}$ analytisch sind.[77, 78]

Linkstranslation L_g

63. Für eine Liegruppe G sind die *Linkstranslation* mit einem Element $g \in G$,

$$L_g\colon G \to G;\ h \mapsto gh,$$

Rechtstranslation R_g

und die *Rechtstranslation* mit g,

$$R_g\colon G \to G;\ h \mapsto hg,$$

analytisch und bijektiv mit Inversen $L_{g^{-1}}$ beziehungsweise $R_{g^{-1}}$.

Die Liealgebra einer Liegruppe

Invariantes Vektorfeld

64. Ein Vektorfeld X auf G heißt *links-* beziehungsweise *rechtsinvariant*, falls für alle $g \in G$

$$\mathrm{d}L_g(X_h) = X_{gh} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}R_g(X_h) = X_{hg}$$

ist. Ein solches Vektorfeld ist durch seinen Wert an einem einzigen Punkt, etwa e, eindeutig festgelegt:

$$X_g = \mathrm{d}L_g(X_e) \quad \text{bzw.} \quad X_g = \mathrm{d}R_g(X_e).$$

Damit haben wir eine Bijektion zwischen der Menge der links- beziehungsweise rechtsinvarianten Vektorfelder und T_eG. Entsprechendes gilt für Tensorfelder beliebigen Typs. Die Koeffizienten sind jeweils automatisch analytisch.

Vektorfelder als Differentialoperatoren

65. C^∞-Vektorfelder wirken als lineare Differentialoperatoren auf den C^∞-Funktionen:

$$(Xf)(g) = X_g f = \mathrm{d}f(X_g).$$

Zwei Vektorfelder sind gleich, wenn die zugehörigen Differentialoperatoren gleich sind. Die Linksinvarianz von X bedeutet in der Sprache der Differentialoperatoren

$$(Xf) \circ L_g = X(f \circ L_g)$$

für alle C^∞-Funktionen f und $g \in G$.[79]

77 Die Inversenbildung ist bei analytischer Gruppenoperation *automatisch* analytisch als durch eine analytische Gleichung implizit definierte Funktion.

78 Ist G nur eine topologische Gruppe mit einer Struktur als C^0-Mannigfaltigkeit, so enthält die C^0-Struktur genau eine analytische Struktur, die G zu einer Liegruppe macht. Daher kann man auch eine lokal euklidische topologische Gruppe eine Liegruppe nennen. Stetige Gruppenhomomorphismen zwischen Liegruppen sind automatisch analytisch ([War83, S. 109 f.]). Dies ist eine Teilantwort auf das berühmte 5. Hilbertsche Problem ([Hil00], siehe etwa [Kap71] und [MZ55], dort ist auch die Originalliteratur aufgeführt.).

79 $(Xf) \circ L_g(h) = Xf(gh) = \mathrm{d}f(X_{gh})$, und $X(f \circ L_g)(h) = \mathrm{d}(f \circ L_g)(X_h) = \mathrm{d}f(\mathrm{d}L_g(X_h))$.

66. Sind X und Y zwei C^∞-Vektorfelder, so ist auch der Differentialoperator $XY - YX$ durch ein C^∞-Vektorfeld gegeben. Dieses nennt man die *Lieklammer* $[X,Y]$ von X und Y. Lieklammer $[X,Y]$

Sind X und Y links- beziehungsweise rechtsinvariant, so auch $[X,Y]$.[80]

Durch die Identifizierung von T_eG mit den linksinvarianten Vektorfeldern wird die Lieklammer auf T_eG definiert. T_eG wird so zu einer (reellen) Liealgebra, der *Liealgebra* $\mathfrak{g}$ von G.[81] Liealgebra

67. Verschiedene Liegruppen haben nicht notwendigerweise verschiedene Liealgebren. Ist etwa G nicht zusammenhängend, so ist die Zusammenhangskomponente G_e der Eins eine Liegruppe mit derselben Liealgebra. Aber auch verschiedene zusammenhängende Liegruppen haben nicht notwendigerweise verschiedene Liealgebren. Unter allen zusammenhängenden Liegruppen mit derselben Liealgebra gibt es genau eine einfach zusammenhängende, und alle anderen sind Quotienten von dieser nach einer diskreten Untergruppe des Zentrums.

68. Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Die Liegruppe G^{op} hat dieselbe Struktur als Mannigfaltigkeit wie G, und damit ist die Liealgebra $\mathfrak{g}^{\mathrm{op}}$ von G^{op} als Vektorraum gleich $\mathfrak{g}$. Die Lieklammer $[\,,\,]^{\mathrm{op}}$ von $\mathfrak{g}^{\mathrm{op}}$ ergibt sich aus der Lieklammer von $\mathfrak{g}$ als

$$[X,Y]^{\mathrm{op}} = -[X,Y] = [Y,X].$$

69. Das Differential im Punkt e eines stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ ist ein Liealgebrenhomomorphismus der zugehörigen Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Differential eines Gruppenhomomorphismus

Zum Beispiel ist das Differential des Gruppenisomorphismus

$$G \to G^{\mathrm{op}};\ g \mapsto g^{-1}$$

ein Isomorphismus

$$*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{\mathrm{op}};\ X \mapsto X^* = -X$$

der zugehörigen Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^{\mathrm{op}}$. Wir können $*$ auch als Antiautomorphismus von $\mathfrak{g}$ auffassen.

70. Ist umgekehrt ein Liealgebrenhomomorphismus Exakter Liealgebrenhomomorphismus

$$\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

80 So ist etwa für *links*invariante Vektorfelder X und Y, eine C^∞-Funktion f und $h \in G$

$$\begin{aligned}([X,Y]f)\circ L_g &= (XYf)\circ L_g - (YXf)\circ L_g\\ &= XY(f\circ L_g) - YX(f\circ L_g)\\ &= [X,Y](f\circ L_g).\end{aligned}$$

81 Die Identifizierung mit den rechtsinvarianten Vektorfeldern liefert dieselbe Lieklammer.

gegeben, so stellt sich die Frage, ob π *exakt*, das heißt das Differential eines Gruppenhomomorphismus ist. Dies ist der Fall, wenn G zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

Wir werden in dieser Arbeit eine genaue Charakterisierung kennenlernen: Ist G zusammenhängend, so ist π *genau dann* exakt, wenn π vollständig positiv ist bezüglich gewisser durch die Gruppen definierter Matrixordnungen. Dabei ist allerdings nicht die Liealgebra selbst matrixgeordnet, sondern ihre *komplexe einhüllende Algebra:*

Die komplexe einhüllende Algebra einer Liealgebra

Einhüllende Algebra

71. Zu jeder rellen Liealgebra $\mathfrak{g}$ gibt es eine komplexe Algebra $\mathfrak{G}$, ihre *(komplexe) einhüllende Algebra* und einen Liealgebrenhomomorphismus $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}$ [82] mit der folgenden universellen Abbildungseigenschaft:

Für jeden Liealgebrenhomomorphismus φ von $\mathfrak{g}$ in eine komplexe Algebra A (mit der Lieklammer $[a,b] = ab - ba$ für a, $b \in A$) gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $\pi\colon \mathfrak{G} \to A$, so dass $\varphi = \pi \circ \iota$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathfrak{G} \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Die Elemente von $\mathfrak{G}$ sind $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von formalen Produkten von Elementen von $\mathfrak{g}$ modulo $\mathbb{C}$-Bilinearität und modulo den Relationen der Form $[X,Y] = XY - YX$, und es ist $\iota X = X/\sim$. Die Abbildung ι ist injektiv; wir schreiben einfach X für ιX und betrachen $\mathfrak{g}$ als Teilmenge von $\mathfrak{G}$.

Jede Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf einem komplexen Vektorraum lässt sich eindeutig zu einer Darstellung von $\mathfrak{G}$ fortsetzen, und jeder Liealgebrenhomomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ lässt sich eindeutig zu einem Homomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ der einhüllenden Algebren fortsetzen.[83]

$\mathfrak{G}$ als Differentialoperatoren oder Distributionen

72. Ist $\mathfrak{g}$ die Liealgebra einer Liegruppe G, so lassen sich die Elemente von $\mathfrak{G}$ mit den linksinvarianten Differentialoperatoren auf G identifizieren und diese wiederum mit den Distributionen auf G mit Träger $\subseteq \{e\}$. Dabei entspricht dem Differentialoperator X die Distribution $\tilde{X}$, definiert durch Auswertung im Punkt e:

$$\tilde{X}(f) = X|_{g=e} f(g)$$

für C^∞-Funktionen f.[84]

[82] Das heißt, $\iota([X,Y]) = \iota X \iota Y - \iota Y \iota X$ für X, $Y \in \mathfrak{g}$.

[83] Mittels der Einbettung $\iota\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{H}$.

[84] Siehe etwa [War72, A2.4].

Dadurch steht $\mathfrak{G}$ in Dualität mit $C^\infty(G)$. Das Produkt in $\mathfrak{G}$ entspricht der Faltung von Distributionen.[85]

73. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mathfrak{G}^{(k)} \subseteq \mathfrak{G}$ der Untervektorraum aller Elemente, die sich als Linearkombination von Produkten mit höchstens k Faktoren aus $\mathfrak{g}$ schreiben lassen. Diese entsprechen Differentialoperatoren oder Distributionen von Grad $\leqslant k$. Dadurch ist eine Filtrierung auf der Algebra $\mathfrak{G}$ gegeben: Es ist $\mathfrak{G}^{(k)}\mathfrak{G}^{(l)} \subseteq \mathfrak{G}^{(k+l)}$. Wir setzen noch $\mathfrak{G}^{(\omega)} = \mathfrak{G}^{(\infty)} = \mathfrak{G}$, um später einheitliche Bezeichnungen zur Verfügung zu haben. $\mathfrak{G}^{(k)}$

74. Der Antiautomorphismus $*$ von $\mathfrak{g}$ setzt sich eindeutig zu einer Involution $*$ auf $\mathfrak{G}$ fort. Damit wird $\mathfrak{G}$ zu einer $*$-Algebra und $\mathfrak{G}^{(k)}$ zu einem $*$-Vektorraum für alle k.[86] Die zu $*$ duale Involution auf $C^\infty(G)$ ist gegeben durch Involution auf $\mathfrak{G}$ $*$

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})},$$

das heißt, für $X \in \mathfrak{G}$ und $f \in C^\infty(G)$ ist

$$\overline{X^*|_{g=e} f(g)} = X|_{g=e} \overline{f(g^{-1})}.$$ [87]

Die Fortsetzung eines Liealgebrenhomomorphismus $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ zu einem Homomorphismus $\mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ der einhüllenden Algebren ist hermitesch.

---

85 Für $X, Y \in \mathfrak{G}$ und $f \in C^\infty(G)$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{X} * \tilde{Y} f = \tilde{X}|_g \tilde{Y}|_h f(gh) &= X|_{g=e} Y|_{h=e} f(gh)\\ = X|_{g=e} Y|_{h=g} f(h) &= XY|_{g=e} f(g) = (XY)^\sim f.\end{aligned}$$

Hierbei ist es wichtig, dass X und Y *links*invariant sind. Bei einer Identifizierung von $\mathfrak{G}$ mit den *rechts*invarianten Differentialoperatoren wäre $(XY)^\sim = \tilde{Y} * \tilde{X}$.

86 $\mathfrak{G}^{(k)}$ ist invariant unter $*$.

87 Für $X \in \mathfrak{g}$ ist nach Definition von $*$

$$X^*|_{g=h} f(g) = X^*|_{g=e} f(hg) = X|_{g=e} f(hg^{-1}),$$

und gilt diese Formel für Produkte X und Y von Elementen aus $\mathfrak{g}$, so auch für XY:

$$\begin{aligned}(XY)^*|_{g=h} f(g) &= Y^*|_{g=h} X^*|_{s=g} f(s)\\ &= Y^*|_{g=h} X|_{s=e} f(gs^{-1})\\ &= Y|_{g=e} X|_{s=e} f(hg^{-1}s^{-1})\\ &= X|_{s=e} Y|_{g=e} f(h(sg)^{-1})\\ &= X|_{s=e} Y|_{g=s} f(hg^{-1})\\ &= XY|_{g=e} f(hg^{-1}).\end{aligned}$$

Also ist für alle Produkte X von Elementen aus $\mathfrak{g}$

$$\overline{X^*|_{g=e} f(g)} = \overline{X|_{g=e} f(g^{-1})} = X|_{g=e} \overline{f(g^{-1})}.$$

Da $\mathfrak{G}$ von diesen $\mathbb{C}$-linear aufgespannt wird, gilt dies dann auch für alle $X \in \mathfrak{G}$.

75. Ist $\varphi\colon G \to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus zwischen den Liegruppen G und H mit Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und einhüllenden Algebren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, so ist $\mathrm{d}\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Liealgebrenhomomorphismus und setzt sich fort zu einem Homomorphismus $\mathrm{d}\varphi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ der einhüllenden Algebren.

Für $X \in \mathfrak{G}$ und $f \in C^\infty(H)$ ist

$$\mathrm{d}\varphi(X)|_{h=e} f(h) = X|_{g=e} f \circ \varphi(g).$$ [88]

Die adjungierte Darstellung

$\mathscr{A}d$ **76.** Jede Liegruppe G operiert auf sich selbst durch Konjugation $\mathscr{A}d(g)$ mit einem Element $g \in G$:

$$\mathscr{A}d(g)(h) = ghg^{-1} = L_g \circ R_{g^{-1}}(h).$$

Adjungierte Darstellung von G Ad

Das Differential des Gruppenhomomorphismus $\mathscr{A}d(g)\colon G \to G$ im Punkt e ist ein Liealgebrenendomorphismus $\mathrm{Ad}(g)$ von $\mathfrak{g}$.

Ad ist eine Darstellung von G auf dem Vektorraum $\mathfrak{g}$, die *adjungierte Darstellung* von G. $\mathrm{Ad}(g)$ setzt sich wegen der universellen Abbildungseigenschaft von $\mathfrak{G}$ eindeutig fort zu einem Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ und lässt $\mathfrak{G}^{(k)}$ invariant für alle k. Für $X \in \mathfrak{G}$ und $f \in C^\infty(G)$ ist

$$\mathrm{Ad}(g)X|_{h=e} f(h) = X|_{h=e} f \circ \mathscr{A}d(g)(h) = X|_{h=e} f(ghg^{-1}).$$ [89]

Adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ ad

Die Ableitung des Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ist

$$\mathrm{ad} = \mathrm{d}\,\mathrm{Ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g});\ X \mapsto \mathrm{ad}(X) = [Y \mapsto [X,Y]],$$

die *adjungierte Darstellung* von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{g}$.

---

88 Für $X \in \mathfrak{g}$ gilt das nach Definition, und diese Formel überträgt sich auf Produkte und $\mathbb{C}$-Linearkombinationen: Gilt sie für X und Y, so ist

$$\mathrm{d}\varphi(XY)|_{h=e} f(h) = \mathrm{d}\varphi(X)|_{s=e}\mathrm{d}\varphi(Y)|_{h=e} f(sh) = X|_{r=e}Y|_{g=e} f(\varphi(r)\varphi(g)) = XY|_{g=e} f \circ \varphi(g).$$

Damit gilt diese Formel für alle $X \in \mathfrak{G}$.

89 Für $X \in \mathfrak{g}$ ist das die Definition, und die Formel überträgt sich auf Produkte und $\mathbb{C}$-Linearkombinationen: Gilt sie für X und Y, so ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(g)(XY)|_{h=e} f(h) &= \mathrm{Ad}(g)X|_{s=e}\mathrm{Ad}(g)Y|_{h=s} f(h) \\
&= \mathrm{Ad}(g)X|_{s=e}Y|_{h=e} f(sghg^{-1}) \\
&= X|_{s=e}Y|_{h=e} f(gsg^{-1}ghg^{-1}) \\
&= X|_{s=e}Y|_{h=s} f(ghg^{-1}) = XY|_{h=e} f(ghg^{-1}).
\end{aligned}$$

Die Exponentialabbildung

77. Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$, und es sei $X \in \mathfrak{g}$. Der Liealgebrenhomomorphismus

Exponentialabbildung exp

$$\mathbb{R} \to \mathfrak{g};\ 1 \mapsto X$$

ist die Ableitung eines eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R} \to G;\ t \mapsto \exp_X(t).$$

Durch

$$\mathfrak{g} \to G;\ X \mapsto \exp(X) = \exp_X(1)$$

wird die *Exponentialabbildung* der Gruppe definiert. Es ist

$$\mathrm{d}\exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}.$$

Daher ist exp ein lokaler Diffeomorphismus bei 0, und da die Potenzen jeder Einsumgebung in G die Zusammenhangskomponente der Eins überdecken, lässt sich jedes Element einer zusammenhängenden Liegruppe als Produkt von Elementen der Form $\exp(X)$ darstellen mit X aus der Liealgebra.

78. Für $X \in \mathfrak{g}$ und $f \in C^\infty(G)$ ist

$$X|_{g=e} f(g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\exp(tX)),$$

und für einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Durch dieses Diagramm ist $\mathrm{d}\varphi$ eindeutig bestimmt: Kommutiert für einen Liealgebrenhomomorphismus $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

so ist $\pi = \mathrm{d}\varphi$.[90]

[90] Denn dann ist für alle $f \in C^\infty(H)$

$$\begin{aligned} \pi(X)|_{h=e} f(h) &= \left.\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\exp(t\pi(X))) \\ &= \left.\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\varphi(\exp(tX))) \\ &= \left.\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\exp(t\mathrm{d}\varphi(X))) \\ &= \mathrm{d}\varphi(X)|_{h=e} f(h). \end{aligned}$$

Integration über Liegruppen

Linkes Haarmaß **79.** Für eine n-dimensionale Liegruppe G gibt es bis auf positive skalare Vielfache genau eine positive ungerade n-Form auf dem n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum T_eG [91] und damit bis auf positive skalare Vielfache genau eine positive, linksinvariante ungerade n-Form $\mathrm{d}\lambda$ auf G. Durch diese ist ein linksinvariantes so genanntes *Haarmaß* auf G gegeben mit in lokalen Koordinaten analytischer Lebesgue-Dichte.

λ
$\mathrm{d}g$
Für jede Liegruppe sei eine solche Form $\mathrm{d}\lambda$ ausgezeichnet, das zugehörige Maß nennen wir λ. Wir schreiben kurz $\mathrm{d}g$ für $\mathrm{d}\lambda(g)$. Das Integral einer Funktion f über die Gruppe schreibt sich dann

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g,$$

die Linksinvarianz bedeutet

$$\int_G f(hg)\,\mathrm{d}g = \int_G f(g)\,\mathrm{d}g$$

für alle $h \in G$.

Rechtes Haarmaß
ρ
Modularfunktion
Δ
Auf G gibt es genauso ein bis auf positive skalare Vielfache eindeutiges positives *rechtsinvariantes* Haarmaß. Dieses hat bezüglich des linksinvarianten eine analytische Dichte ρ; deren punktweisen Kehrwert $\Delta(g) = \rho(g)^{-1}$ nennt man die *Modularfunktion.* Für abelsche und für kompakte Gruppen ist Δ konstant, und die linken und rechten Haarmaße sind gleich (bis auf positive skalare Vielfache).[92]

Die Gruppenalgebra

Gruppenalgebra
$\mathbb{C}(G)$
80. Zu jeder Gruppe G gibt es eine komplexe Algebra $\mathbb{C}(G)$, die *Gruppenalgebra*, mit den universellen Abbildungseigenschaften:

- Jede Funktion von G in einen komplexen Vektorraum V setzt sich eindeutig fort zu einer linearen Abbildung $\mathbb{C}(G) \to V$.
- Jeder Gruppenhomomorphismus von G in die Gruppe der invertierbaren Elemente einer komplexen Algebra A setzt sich eindeutig fort zu einem Algebrenhomomorphismus $\mathbb{C}(G) \to A$.
- Speziell: Jede Darstellung von G auf einem komplexen Vektorraum V induziert auf diese Weise eine Darstellung von $\mathbb{C}(G)$ auf V.

$\mathbb{C}(G)$ besteht aus allen endlichen formalen $\mathbb{C}$-Linearkombinationen

$$\sum_{g\in G} a_g g = \sum_i a_i g_i$$

von Gruppenelementen mit der formalen Fortsetzung der Gruppenverknüpfung als Multiplikation.

---

[91] Nämlich der Absolutbetrag der auf einer Basis von T_eG normierten Determinante.
[92] Für weitere Informationen siehe [HR63, 15.10 ff].

81. Durch Involution auf $\mathbb{C}(G)$

$$g^* = g^{-1} \quad \text{für } g \in G$$ $*$

ist auf $\mathbb{C}(G)$ eine Involution gegeben, mit der $\mathbb{C}(G)$ eine $*$-Algebra ist.

Jede unitäre Darstellung von G auf einem Prähilbertraum setzt sich fort zu einer $*$-Darstellung von $\mathbb{C}(G)$, und die Einschränkung einer $*$-Darstellung von $\mathbb{C}(G)$ auf einem Prähilbertraum auf G ist eine unitäre Darstellung. Alle darstellenden Operatoren einer $*$-Darstellung von $\mathbb{C}(G)$ sind beschränkt. Abgeschlossene $*$-Darstellungen von $\mathbb{C}(G)$ haben daher Hilberträume als Definitionsbereich.

Ist V ein $*$-Vektorraum, so auch der Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{C}(G) \to V$. Dieser ist durch die universelle Abbildungseigenschaft von $\mathbb{C}(G)$ kanonisch zu identifizieren mit V^G, dem Raum aller Abbildungen $G \to V$. Damit ist auch dieser Raum ein $*$-Vektorraum, und die Involution ist gegeben durch

$$f^*(g) = f(g^{-1})^*$$

für $f\colon G \to V$ und $g \in G$.

82. Wir versehen $\mathbb{C}(G)$ mit dem algebraischen Matrixkegel aller Matrizen der Form a^*a mit $a \in \textbf{Mat}(\mathbb{C}(G))$. Damit ist $\mathbb{C}(G)$ eine matrixgeordnete $*$-Algebra. Matrixordnung auf $\mathbb{C}(G)$
Dieser Matrixkegel wird erzeugt von den Elementen der Form $[g_i^{-1}g_j]_{ij}$ mit $g_i \in G$, das heißt, diese sind positiv und jede positive Matrix über $\mathbb{C}(G)$ lässt sich als Summe von Matrizen der Form $\alpha^*[g_i^{-1}g_j]_{ij}\alpha$ darstellen.[93]

Jeder Homomorphismus von $\mathbb{C}(G)$ in eine matrixgeordnete Algebra ist vollständig positiv, insbesondere jede $*$-Darstellung auf einem Prähilbertraum.

Positiv definite Funktionen

83. Es sei V ein matrixgeordneter Vektorraum. Dann ist auf V^G eine Matrixordnung gegeben durch den Matrixkegel aller Funktionen, deren Fortsetzung auf $\mathbb{C}(G)$ vollständig positiv ist. Diese Funktionen nennt man *positiv definit.*[94] Positiv definite Funktion

Eine Funktion $f\colon G \to V$ ist genau dann positiv definit, wenn

$$f([g_i^{-1}g_j]_{ij}) \geqslant 0 \quad \text{für alle Tupel } [g_i]_i \text{ mit } g_i \in G,$$[95]

93 Es ist

$$\begin{aligned}
\left[\sum_i a_i^{kl} g_i\right]_{kl}^* \left[\sum_i a_i^{kl} g_i\right]_{kl} &= \left[\sum_i \bar{a}_i^{kl} g_i^{-1}\right]_{lk} \left[\sum_j a_j^{km} g_j\right]_{km} \\
&= \left[\sum_k \left(\sum_i \bar{a}_i^{kl} g_i^{-1}\right)\left(\sum_j a_j^{km} g_j\right)\right]_{lm} \\
&= \sum_k \left[a_i^{kl}\right]_{il}^* \left[g_i^{-1} g_j\right]_{ij} \left[a_j^{km}\right]_{jm}.
\end{aligned}$$

94 Matrizen von Funktionen kann man auch lesen als matrixwertige Funktionen. Die komplexwertigen positiv definiten Funktionen werden schon lange als wichtiges Hilfsmittel in der harmonischen Analysis benutzt, siehe etwa [HR70, 29]. $M_n(\mathbb{C})$-wertige positiv definite Funktionen führt [Pow74] ein.

und im Falle $V = M_n(\mathbb{C})$, wenn

$$\left[f_{ij}(g_{ik}^{-1}g_{jl})\right]_{(ik)(jl)} \geqslant 0 \quad \text{für alle Tupel } [g_{ik}]_{ik} \text{ mit } g_{ik} \in G \; (1 \leqslant i \leqslant n).^{96}$$

84. Positiv definite Funktionen haben viele schöne Eigenschaften. (Für komplexwertige Funktionen siehe etwa [HR70, 32].) In dieser Arbeit brauchen wir:

Proposition: *Es sei $f\colon G \to M_n(\mathbb{C})$ positiv definit. Dann gilt:*

- ***a)*** *Es ist f hermitesch.*
- ***b)*** *Für alle $g \in G$ ist $\|f(g)\| \leqslant \|f(e)\|$.*
- ***c)*** *Ist auch noch $h\colon G \to M_m(\mathbb{C})$ positiv definit, so auch das punktweise Tensorprodukt $f \otimes h$; $g \mapsto f(g) \otimes h(g)$.*
- ***d)*** *Ist G eine kompakte Liegruppe (oder auch allgemeiner eine kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe), und ist f stetig, so ist $\int_G f(g)\,\mathrm{d}g \geqslant 0$.*

Beweis: a) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} f(e) & f(g) \\ f(g^{-1}) & f(e) \end{pmatrix}$$

ist positiv, also auch hermitesch, und daher ist $f(g^{-1})^* = f(g)$ für alle $g \in G$.

b) Außerdem folgt: $\|f(g)\| \leqslant \|f(e)\|$.

c) $[f_{kl}(g_i^{-1}g_j)h_{rs}(g_{i'}^{-1}g_{j'})]_{(kiri')(ljsj')}$ ist positiv als Tensorprodukt positiver Matrizen, und daher ist auch die Teilmatrix mit $i = i'$ und $j = j'$ positiv.

d) $\int_G \mathrm{d}g$ sei auf 1 normiert. Es seien $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Dann ist $\hat{f} = \sum_{ij} \overline{\alpha_i}\alpha_j f_{ij}\colon G \to \mathbb{C}$ eine positiv definite Funktion, und mit dieser ist

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \overline{\alpha_i}\alpha_j \int_G f_{ij}(g)\,\mathrm{d}g &= \int_G \hat{f}(g)\,\mathrm{d}g \\ &= \int_G\int_G \hat{f}(g)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\ &= \int_G\int_G \hat{f}(h^{-1}g)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \geqslant 0 \end{aligned}$$

wegen [HR70, 32.35]. ☺

95 Da die Matrixordnung von Matrizen der Form $[g_i^{-1}g_j]_{ij}$ erzeugt wird.

96 Diese Matrizen sind für positiv definites f positiv, da

$$[f_{ij}(g_{ik}^{-1}g_{jl})]_{(ik)(jl)} = [\delta_{ii'}\delta_{mi'}\delta_{kk'}]^*_{(imk)(i'k')}[f_{ij}(g_{mk}^{-1}g_{rl})]_{(imk)(jrl)}[\delta_{jj'}\delta_{rj'}\delta_{ll'}]_{(jrl)(j'l')},$$

und umgekehrt ist

$$[f_{ij}(g_k^{-1}g_l)]_{(ik)(jl)} = f_{ij}(g_{ik}^{-1}g_{jl})]_{(ik)(jl)}$$

mit $g_{ik} = g_k$. Diese etwas unhandliche und nur für matrixwertige Funktionen brauchbare Bedingung dient in [Pow74, 4.3] zur Definition.

85. Ist $\varphi\colon G \to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus zwischen den Liegruppen G und H und ist $f\colon H \to M_n(\mathbb{C})$ eine positiv definite C^∞-Funktion, so ist $f \circ \varphi\colon G \to M_n(\mathbb{C})$ ebenfalls positiv definit. Denn es ist

$$f \circ \varphi(g_i^{-1} g_j) = f(\varphi(g_i)^{-1}\varphi(g_j)).$$

Die Matrixordnung auf $\mathfrak{G}$

86. Für eine Liegruppe G ist $C^\infty(G)$ matrixgeordnet als Unterraum von $\mathbb{C}^G$. Matrixordnung auf $\mathfrak{G}$
Wir versehen $\mathfrak{G}$ mit der Matrixordnung der vollständig positiven Funktionale auf $C^\infty(G)$:[97] Eine Matrix $X \in M(\mathfrak{G})$ heißt genau dann positiv, wenn

$$[X_{ij}|_{g=e} f_{kl}(g)]_{(ik)(jl)}$$

positiv ist für alle positiv definiten matrixwertigen C^∞-Funktionen f. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\sum_{ij} X_{ij}|_{g=e} f_{ij}(g) \geqslant 0$$

ist für alle positiv definiten matrixwertigen C^∞-Funktionen f gleichen Formats.[98]

Damit sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(k)}$ matrixgeordnete Vektorräume. Wir werden in Paragraph 125 sehen: $\mathfrak{G}$ ist sogar eine matrixgeordnete Algebra.

87. Ist $\varphi\colon G \to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus zwischen den Liegruppen G und H mit Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und einhüllenden Algebren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, so ist $\mathrm{d}\varphi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ vollständig positiv. Ist nämlich $f\colon H \to M_n(\mathbb{C})$ eine positiv definite C^∞-Funktion und $X \in M(\mathfrak{G})$ positiv, so ist auch $f \circ \varphi$ positiv definit, und daher

$$[\mathrm{d}\varphi(X_{ij})|_{h=e} f_{kl}(h)]_{(ik)(jl)} = [X_{ij}|_{g=e} f_{kl} \circ \varphi(g)]_{(ik)(jl)} \geqslant 0.$$

97 Powers ([Pow74]) fordert zusätzlich noch $X = X^*$, damit er eine matrixgeordnete $*$-Algebra erhält. Wir brauchen diese Einschränkung nicht.

98 Dies benutzt [Pow74, 4.3] als Definition. Einerseits ist

$$\sum_{ij} X_{ij} f_{ij} = [\delta_{ik}]^*_{(ik),1}[X_{ij} f_{kl}]_{(ik)(jl)}[\delta_{jl}]_{(jl),1},$$

und andererseits ist für $\alpha_{ik} \in \mathbb{C}$ mit f auch

$$h = [\alpha_{ik}]^*_{ki}[f_{kl}]_{kl}[\alpha_{jl}]_{lj}$$

positiv definit, und es ist

$$\sum_{ijkl} \overline{\alpha_{ik}}\alpha_{jl} X_{ij} f_{kl} = \sum_{ij} X_{ij} h_{ij}.$$

Links und rechts

manche meinen
lechts und rinks
kann man nicht velwechsern
werch ein illtum
ERNST JANDL[99]

88. Die Unterscheidung von rechts und links ist eine Hauptschwierigkeit und eine der häufigsten Fehlerquellen beim Rechnen mit nicht kommutativen Gruppen: Zu jedem Konzept, bei dessen Definition das Wort »links« vorkommt, gibt es auch ein entsprechendes »rechtes« Konzept und umgekehrt. Die über rechtsinvariante Vektorfelder definierte Lieklammer unterscheidet sich nicht von der über linksinvariante Vektorfelder definierten. Aber das rechtsinvariante Haarmaß zum Beispiel ist im Allgemeinen nicht linksinvariant. Leider gibt es in der Literatur keine Einheitlichkeit, welches Konzept mit »rechts« und welches mit »links« zu definieren ist.

Daher gilt:

Regel 1: *Beim Umgang mit rechts und links ist größte Sorgfalt geboten.*

Sobald man sich an Regel 1 hält, gilt aber auch:

Regel 2: *Im Grunde ist es egal, ob man bei einem bestimmten Konzept die rechte oder die linke Variante wählt. Es gibt immer passende Übersetzungsregeln.*

Dies ermöglicht

Regel 3: *Am besten legt man sich ein für alle Mal sein eigenes Konzept zurecht und übersetzt alle Literatur konsequent in dieses.*

Bei den Übersetzungstricks kommt üblicherweise die adjungierte Darstellung ins Spiel, wie etwa bei den Formeln

$$gh = \mathscr{A}d(g)(hg)$$

für Gruppenelemente g und $h \in G$, sowie

$$XY = YX + [X,Y] = YX + \mathrm{ad}(X)(Y)$$

für X, $Y \in \mathfrak{g}$.[100]

[99] ERNST JANDL: »lichtung«. *Poetische Werke.* Herausgeber: KLAUS SIBLEWSKI. Band 2: *Laut und Luise & verstreute gedichte 2*. Luchterhand Literaturverlag GmbH, München 1997. Seite 171.

[100] Letztere Formel ist jedem Physiker geläufig. Die Berechnung von $X|_{g=e}Y|_{h=e}f(gh)$ mittels beider Formeln liefert als Anwendung die Gleichheit der linken und der rechten Lieklammer.

In dieser Arbeit werden generell die *linken* Konzepte bevorzugt: Die Elemente der einhüllenden Algebra der Liealgebra einer Liegruppe werden als *linksinvariante* Differentialoperatoren auf der Gruppe betrachtet, und wir integrieren ausschließlich gegen das *linksinvariante* Haarmaß.

Unitäre Darstellungen von Liegruppen und ihre Ableitungen

Die Ableitungen einer unitären Darstellung einer Liegruppe werden diskutiert. Eine Schlüsselrolle spielt dabei ein Approximationslemma.

Da Informationen über differenzierbare, hilbertraumwertige Funktionen schwer zu finden sind, werden diese bereitgestellt.

Mit Hilfe des Funktionalkalküls für normale Operatoren wird eine Verallgemeinerung des Satzes von Stone über unitäre Einparametergruppen und ihre Erzeuger bewiesen und damit ein Kriterium für C^∞-Vektoren hergeleitet.

Es werden die Hilfsmittel bereitgestellt, um im nächsten Kapitel die exakten Liealgebrendarstellungen charakterisieren zu können, insbesondere die universelle Darstellung einer Liegruppe und Informationen über Kommutanten.

Die regulären Darstellungen werden diskutiert.

Die Ableitungen einer unitären Darstellung

Differenzierbare Vektoren

89. Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$. Es sei weiter $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $U\colon G \to \mathscr{U}(\mathscr{H})$ eine unitäre Darstellung. Ein Vektor $x \in \mathscr{H}$ heißt *C^k-Vektor* für U ($k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$), falls für alle $y \in \mathscr{H}$ die Funktion $G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \langle y, U(g)x\rangle$ von der Klasse C^k ist.[101] Die C^∞-Vektoren nennt man auch *differenzierbare Vektoren,* die C^ω-Vektoren *analytische Vektoren.*

C^k-Vektor
Differenzierbarer Vektor
Analytischer Vektor

Die Menge aller C^k-Vektoren für U bezeichnen wir mit $C^k(U)$. Es ist

$$C^0(U) \supseteq C^1(U) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(U) \supseteq C^\omega(U).$$

90. U ist genau dann schwach stetig, wenn $\mathscr{H} = C^0(U)$. Die schwache Stetigkeit von U impliziert schon die starke Stetigkeit.[102] Die Funktion $g \mapsto U(g)x$ ist genau

[101] C^ω bezeichne die Klasse der analytischen Funktionen.

[102] [War72, 4.2.2.1]

dann stark beziehungsweise schwach stetig, wenn sie es im Punkt e ist.[103]

91. $C^0(U)$ ist abgeschlossen, da für Folgen $x_n \to x$ mit $x_n \in C^0(U)$ und $y \in \mathscr{H}$ die Funktionen $\langle y, U(g)x_n\rangle$ gleichmäßig gegen $\langle y, U(g)x\rangle$ konvergieren. Außerdem gilt:

Proposition: *$C^k(U)$ ist $U(G)$-invariant.*

Beweis: Sei $x \in C^k(U)$, $y \in \mathscr{H}$ und $h \in G$. Die Funktion

$$g \mapsto \langle y, U(g)U(h)x\rangle = \langle y, U(gh)x\rangle = \langle y, U(R_h(g))x\rangle$$

ist von der Klasse C^k als Verknüpfung der analytischen Funktion R_h und der C^k-Funktion $g \mapsto \langle y, U(g)x\rangle$. ☺

Damit können wir für unsere Zwecke statt U auch stets die *stetige* Darstellung $U|_{C^0(U)}$ betrachten oder der Einfachheit halber U gleich als stetig voraussetzen.

Exkurs: Hilbertraumwertige C^k-Funktionen

Skalar differenzierbar
Schwach differenzierbar
Stark differenzierbar

92. Die C^k-Vektoren von U für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sind definiert über die (k-fache stetige) Differenzierbarkeit (bezüglich lokaler Karten) der Funktionen $g \mapsto \langle y, U(g)x\rangle$ für alle $y \in \mathscr{H}$. Wir werden sehen, dass aus dieser *skalaren* (k-fachen stetigen) Differenzierbarkeit schon die (k-fache stetige) *schwache* und sogar *starke* Differenzierbarkeit, das heißt (k-fache stetige) Differenzierbarkeit der Funktionen $g \mapsto U(g)x$ bezüglich der schwachen beziehungsweise der Normtopologie auf $\mathscr{H}$ folgt. Die umgekehrten Implikationen sind klar.[104]

93. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon M \to \mathscr{H}$ eine Funktion. Für alle $x \in \mathscr{H}$ sei die Funktion $\langle x, f(t)\rangle$ in $t_0 \in M$ differenzierbar, das heißt, es gibt in t_0 stetige Funktionen $\Delta_x\colon M \to (\mathbb{R}^n)'$, so dass für alle $t \in M$ gilt:

$$\langle x, f(t)\rangle = \langle x, f(t_0)\rangle + \Delta_x(t)(t - t_0).$$

Die Werte von $\Delta_x(t_0)$ auf den Standardbasisvektoren $e_i = [\delta_{ik}]_k$ sind wegen der Stetigkeit von Δ_x Grenzwerte der Differenzenquotienten:

$$\Delta_x(t_0)(e_i) = \lim_{h \to 0} \frac{\langle x, f(t_0 + he_i) - f(t_0)\rangle}{h}.$$

Da man sich bei dieser Grenzwertbildung auf Folgen $h_n \to 0$ beschränken kann und der punktweise Grenzwert einer Folge $\frac{\langle x, f(t_0 + h_n e_i) - f(t_0)\rangle}{h_n}$ von beschränkten Antilinearformen in $x \in \mathscr{H}$ wieder eine solche ist, können wir $\Delta(t_0)$ als beschränkte lineare Abbildung $\mathscr{H} \to (\mathbb{R}^n)'$; $x \mapsto \Delta_x(t_0)$ und somit als lineare Abbildung

[103] Daraus folgt die Stetigkeit in g durch Verschieben mit dem unitären und damit stetigen Operator $U(g^{-1})$.

[104] Vergleiche [Gro73, Chapter 3.8].

$\Delta(t_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathscr{H}$ auffassen.[105] Setzen wir für $t \neq t_0$

$$\Delta(t)(t-t_0) = f(t) - f(t_0)$$

und für $s \perp (t-t_0)$ [106]

$$\Delta(t)(s) = \Delta(t_0)(s),$$

so ist dadurch eine Abbildung Δ von M in die linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathscr{H}$ definiert, so dass für alle $t \in M$ gilt:

$$f(t) = f(t_0) + \Delta(t)(t-t_0).$$

Außerdem ist für alle $t \in M$ und $x \in \mathscr{H}$

$$\langle x, \Delta(t)(t-t_0)\rangle = \Delta_x(t)(t-t_0).$$

Für jede Folge $t_n \to t_0$ in M ist daher die Folge

$$\Delta(t_n)(t_n-t_0) - \Delta(t_0)(t_n-t_0)$$

eine schwache Nullfolge und damit beschränkt.[107] Also konvergiert

$$\begin{aligned} \|(\Delta(t_n)-\Delta(t_0))(s)\| &= \|\langle s, t_n-t_0\rangle(\Delta(t_n)-\Delta(t_0))(t_n-t_0)\| \\ &= |\langle s, t_n-t_0\rangle| \|(\Delta(t_n)-\Delta(t_0))(t_n-t_0)\| \end{aligned}$$

gleichmäßig für $\|s\| \leqslant 1$ gegen Null, Δ ist in t_0 normstetig, f ist also in t_0 stark differenzierbar und somit auch normstetig.

Damit haben wir gezeigt:

Proposition: *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $f\colon M \to \mathscr{H}$ eine Funktion und $t_0 \in M$. Dann sind äquivalent:*

1. *Für alle $x \in \mathscr{H}$ ist die Funktion $M \to \mathbb{C};\ t \mapsto \langle x, f(t)\rangle$ in t_0 differenzierbar (das heißt, f ist in t_0* skalar *differenzierbar),*

2. *Es gibt eine in t_0 schwach stetige[108] Funktion $\Delta\colon M \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathscr{H})$, so dass für alle $t \in M$ gilt:*
$$f(t) = f(t_0) + \Delta(t)(t-t_0)$$
(das heißt, f ist in t_0 schwach *differenzierbar),*

3. *Es gibt eine in t_0 normstetige Funktion $\Delta\colon M \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathscr{H})$, so dass für alle $t \in M$ gilt:*
$$f(t) = f(t_0) + \Delta(t)(t-t_0)$$
(das heißt, f ist in t_0 stark *differenzierbar).*

---

105 Dabei sei $(\mathbb{R}^n)'$ der Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Es ist $\Delta_x(t_0)(s) = \langle x, \Delta(t_0)(s)\rangle$ für $x \in \mathscr{H}$.

106 Wir betrachten der Bestimmtheit wegen auf $\mathbb{R}^n$ das Standardskalarprodukt.

107 Δ_x ist in t_0 stetig.

108 Das heißt, für alle $x \in \mathscr{H}$ und $s \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, \Delta(t)(s)\rangle$ in t_0 stetig.

94. Induktiv folgen die Teile a) und b) der folgenden Proposition, für Teil c) siehe etwa [Bro62].

Proposition: *In der Situation von Proposition 93 gilt:*

a) *Ist $f: M \to \mathscr{H}$ skalar von der Klasse C^k, so ist f stark von der Klasse $C^{(k-1)}$, die starken k^{ten} Ableitungen existieren und sind schwach stetig.*

b) *Ist f skalar von der Klasse C^∞, so auch stark.*

c) *Ist f skalar analytisch, so auch stark.*

95. Kehren wir jetzt zu der unitären Darstellung U zurück. Auf der Gruppe G lassen sich die ersten partiellen Ableitungen bezüglich lokaler Koordinaten stets als Linearkombination linksinvarianter Vektorfelder mit analytischen Koeffizienten schreiben und umgekehrt. Daher können wir an Stelle von Ableitungen bis zur Ordnung k stets auch die Differentialoperatoren aus $\mathfrak{G}^{(k)}$ betrachten.

Ist $x \in C^k(U)$, $y \in \mathscr{H}$, $X \in \mathfrak{G}^{(k)}$ und $z = X|_{g=e}U(g)x$ die starke Ableitung, so ist

$$\begin{aligned} X|_{g=h}\langle y, U(g)x\rangle &= X|_{g=e}\langle y, U(hg)x\rangle \\ &= X|_{g=e}\langle U(h^{-1})y, U(g)x\rangle \\ &= \langle y, U(h)z\rangle. \end{aligned}$$

Also ist $X|_{g=h}U(g)x = U(h)z$, und dies hängt normstetig von h ab. Damit sind die k^{ten} Ableitungen sogar normstetig. Außerdem sieht man, dass es reicht, die Differenzierbarkeit nur im Punkt e nachzurechnen, da sie daraus schon auf ganz G folgt. Damit gilt:[109]

Proposition: *Ist U eine unitäre Darstellung der Liegruppe G auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ und $x \in C^k(U)$, so ist die Funktion $g \mapsto U(g)x$ bereits stark von der Klasse C^k.*

Die Ableitungen einer unitären Darstellung

Ableitung von U
$\mathrm{d}U^{(k)}$

96. Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ induziert $X \in \mathfrak{G}^{(k)}$ einen Operator $\mathrm{d}U^{(k)}(X): C^k(U) \to \mathscr{H}$ durch

$$\mathrm{d}U^{(k)}(X)x = X|_{g=e}U(g)x.$$

Ist $k \leqslant l$, so ist der Operator $\mathrm{d}U^{(k)}(X)$ eine Fortsetzung von $\mathrm{d}U^{(l)}(X)$. Die Abbildungen $\mathrm{d}U^{(k)}$ nennen wir die *Ableitungen* von U.

Darstellungseigenschaft von $\mathrm{d}U$

97. Proposition: *Sind $k, l \in \mathbb{N}_0$, $X \in \mathfrak{G}^{(k)}$, $Y \in \mathfrak{G}^{(l)}$ und $x \in C^{k+l}(U)$, so ist*

$$Y|_{h=g}U(h)x = U(g)\mathrm{d}U^{(l)}(Y)x,$$

109 Den Sonderfall $k = 0$ haben wir bereits erwähnt.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U^{(l)}(Y)x \in C^k(U) \quad &\textit{und} \\ \mathrm{d}U^{(k)}(X)\mathrm{d}U^{(l)}(Y)x = \mathrm{d}U^{(k+l)}(XY)x.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\mathrm{d}U^{(k)}(1) = \mathbb{1}|_{C^k(U)}.$$

Beweis: Für $g \in G$ ist

$$\begin{aligned}U(g)\mathrm{d}U^{(l)}(Y)x &= U(g)Y|_{h=e}U(h)x \\ &= Y|_{h=e}U(g)U(h) = Y|_{h=e}U(gh)x \\ &= Y|_{h=g}U(h)x,\end{aligned}$$

also $g \mapsto U(g)\mathrm{d}U^{(l)}(Y)x$ von der Klasse C^k als Ableitung vom Grad $\leqslant l$ einer C^{k+l}-Funktion, und es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U^{(k)}(X)\mathrm{d}U^{(l)}(Y)x &= X|_{g=e}U(g)\mathrm{d}U^{(l)}(Y)x \\ &= X|_{g=e}Y|_{h=g}U(h)x = XY|_{h=e}U(h)x \\ &= \mathrm{d}U^{(k+l)}(XY)x.\end{aligned}$$

☺

98. Insbesondere ist $C^\infty(U)$ invariant unter $\mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})$, und $\mathrm{d}U^{(\infty)}$ ist eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ auf $C^\infty(U)$.

Da auch $C^\omega(U)$ invariant ist unter $\mathrm{d}U^{(\omega)}$,[110] ist auch $\mathrm{d}U^{(\omega)}$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}$.

Die adjungierte Darstellung

99. Proposition: *Für $k \in \mathbb{N}_0$ (und dann auch für $k \in \{\infty, \omega\}$), $X \in \mathfrak{G}^{(k)}$, $g \in G$ und $x \in C^k(U)$ gilt:*

$$\mathrm{d}U^{(k)}(\mathrm{Ad}(g)X)x = U(g)\mathrm{d}U^{(k)}(X)U(g^{-1})x.$$

Beweis: Für alle $y \in \mathscr{H}$ ist

$$\begin{aligned}\langle y, \mathrm{d}U^{(k)}(\mathrm{Ad}(g)X)x\rangle &= \mathrm{Ad}(g)X|_{h=e}\langle y, U(h)x\rangle \\ &= X|_{h=e}\langle y, U(ghg^{-1})x\rangle \\ &= X|_{h=e}\langle U(g^{-1})y, U(h)U(g^{-1})x\rangle \\ &= \langle y, U(g)\mathrm{d}U^{(k)}(X)U(g^{-1})x\rangle.\end{aligned}$$

☺

[110] Gleiches Argument: Ableitungen analytischer Funktionen sind analytisch.

100. Proposition: *Für $k \in \mathbb{N}_0$ (und dann auch für $k \in \{\infty, \omega\}$), $x \in C^k(U)$ und $X \in \mathfrak{G}^{(k)}$ ist die Funktion*

$$g \mapsto \mathrm{d}U^{(k)}(X)U(g)x$$

stetig.

Beweis: Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}U^{(k)}(X)U(g)x &= U(g)\mathrm{d}U^{(k)}\left(\mathrm{Ad}(g^{-1})X\right)x \\
&= U(g)\sum_i a_i(g^{-1})\mathrm{d}U^{(k)}(X_i)x \\
&= \sum_i a_i(g^{-1})U(g)x_i,
\end{aligned}$$

wobei die a_i die analytischen Koeffizientenfunktionen von Ad sind bezüglich einer Basis $(X_i)_i$ von $\mathfrak{g}$ und die Vektoren $x_i = \mathrm{d}U^{(k)}(X_i)x \in C^{(k-1)}(U)$. Für $X \in \mathfrak{G}^{(k)}$ folgt induktiv: $\mathrm{d}U^{(k)}(X)U(g)x$ ist eine Linearkombination

$$\mathrm{d}U^{(k)}(X)U(g)x = \sum_i f_i(g)U(g)x_i$$

mit stetigen Funktionen f_i und Vektoren $x_i \in C^0(U)$. ☺

Die Dichtheit der differenzierbaren Vektoren

101. Untersuchen wir nun die Menge $\mathrm{d}U^{(k)}(\mathfrak{G}^{(k)}) \subseteq \underline{\mathbf{Lin}}(C^k(U), \mathscr{H})$ von Operatoren und die von ihr erzeugte Topologie auf $C^k(U)$. Diese nennen wir kurz $\mathfrak{G}^{(k)}$-Topologie. Solange klar ist, mit welcher Darstellung wir es zu tun haben, sind Missverständnisse nicht zu befürchten.

Approximationslemma **Proposition (Approximationslemma):** *Ist $G_0 \subseteq G$ eine Lieuntergruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}_0$, ist $U_0 = U|_{G_0}$, und ist $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, so ist $C^\infty(U)$ in $C^l(U_0)$ dicht bezüglich der $\mathfrak{G}_0^{(l)}$-Topologie.*

Beweis: Wir wählen eine Folge F_n von positiven C_c^∞-Funktionen auf G, so dass für alle $f \in C^0(G)$ gilt:

$$\int_G F_n(g)f(g)\,\mathrm{d}g \to f(e) \qquad \text{und} \qquad \int_G F_n(g)\,\mathrm{d}g = 1.$$

Wir wählen eine Folge $F_{0,n}$ ebensolcher Funktionen für G_0.

Dann sind für $x, y \in \mathscr{H}$ Integrale der Form

$$\int_G F_n(g)\langle y, U(g)x\rangle\,\mathrm{d}g$$

konjugiert linear und beschränkt in y, definieren also Vektoren $\int_G F_n(g)U(g)x\,\mathrm{d}g$, so dass gilt:

$$\left\langle y, \int_G F_n(g)U(g)x\,\mathrm{d}g \right\rangle = \int_G F_n(g)\langle y, U(g)x\rangle\,\mathrm{d}g.$$

Diese Vektoren hängen wiederum linear und beschränkt von x ab, definieren also einen beschränkten Operator $\int_G F_n(g)U(g)\,\mathrm{d}g$, so dass gilt:

$$\int_G F_n(g)U(g)\,\mathrm{d}g\,x = \int_G F_n(g)U(g)x\,\mathrm{d}g.$$

Man kann beschränkte Operatoren unter das Integral ziehen, und es gelten die Abschätzungen:

$$\left\| \int_G F_n(g)U(g)x\,\mathrm{d}g \right\| \leqslant \int_G \|F_n(g)U(g)x\|\,\mathrm{d}g \qquad \text{und}$$

$$\left\| \int_G F_n(g)U(g)\,\mathrm{d}g \right\| \leqslant \int_G \|F_n(g)U(g)\|\,\mathrm{d}g.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert $\int_G F_n(g)U(g)x\,\mathrm{d}g$ gegen x, falls $x \in C^0(U)$, da

$$\left\| \int_G F_n(g)U(g)x\,\mathrm{d}g - x \right\| \leqslant \int_G F_n(g)\|(U(g)x - x)\|\,\mathrm{d}g$$

gegen Null geht.[111]

Es sei nun $x \in C^l(U_0)$. Wir setzen

$$\begin{aligned} x_{m,n} &= \int_{G_0} F_{0,m}(g_0)U_0(g_0)\,\mathrm{d}g_0 \int_G F_n(g)U(g)\,\mathrm{d}g\,x \\ &= \int_{G_0} F_{0,m}(g_0) \int_G F_n(g)U_0(g_0)U(g)x\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g_0. \end{aligned}$$

Es ist $x_{m,n}$ ein C^∞-Vektor für U: Für $y \in \mathscr{H}$ ist

$$\begin{aligned} \langle y, U(h)x_{m,n}\rangle &= \int_{G_0} F_{0,m}(g_0) \int_G F_n(g)\langle y, U(hg_0g)x\rangle\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g_0 \\ &= \int_{G_0} F_{0,m}(g_0) \int_G F_n(g_0^{-1}h^{-1}g)\langle y, U(g)x\rangle\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g_0, \end{aligned}$$

und das ist eine C^∞-Funktion von $h \in G$.

---

111 Beachte: U ist stark stetig auf $C^0(U)$.

Es sei $X \in \mathfrak{G}_0^{(l)}$, $y \in \mathscr{H}$ und $\|y\| \leqslant 1$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& \langle y, \mathrm{d}U_0^{(l)}(X) x_{m,n} \rangle \\
= \quad & X|_{h=e} \langle y, U_0(h) x_{m,n} \rangle \\
= \quad & X|_{h=e} \int_{G_0} F_{0,m}(g_0) \left\langle y, U_0(hg_0) \int_G F_n(g) U(g) x \, \mathrm{d}g \right\rangle \mathrm{d}g_0 \\
= \quad & X|_{h=e} \int_{G_0} F_{0,m}(h^{-1}g_0) \left\langle y, U_0(g_0) \int_G F_n(g) U(g) x \, \mathrm{d}g \right\rangle \mathrm{d}g_0 \\
= \quad & \int_{G_0} X|_{h=e} F_{0,m}(h^{-1}g_0) \left\langle y, U_0(g_0) \int_G F_n(g) U(g) x \, \mathrm{d}g \right\rangle \mathrm{d}g_0 \\
\longrightarrow \quad & \int_{G_0} X|_{h=e} F_{0,m}(h^{-1}g_0) \langle y, U_0(g_0) x \rangle \, \mathrm{d}g_0 \quad \text{glm. in } y \text{ für } n \to \infty \;^{112} \\
= \quad & X|_{h=e} \int_{G_0} F_{0,m}(h^{-1}g_0) \langle y, U_0(g_0) x \rangle \, \mathrm{d}g_0 \\
= \quad & X|_{h=e} \int_{G_0} F_{0,m}(g_0) \langle y, U_0(hg_0) x \rangle \, \mathrm{d}g_0 \\
= \quad & \int_{G_0} F_{0,m}(g_0) \langle y, \mathrm{d}U_0^{(l)}(X) U_0(g_0) x \rangle \, \mathrm{d}g_0 \;^{113} \\
\longrightarrow \quad & \langle y, \mathrm{d}U_0^{(l)}(X) x \rangle \quad \text{glm. in } y \text{ für } m \to \infty.
\end{aligned}
$$

Also konvergiert $x_{m,n}$ gegen x in der $\mathfrak{G}_0^{(l)}$-Topologie. ☺

Zusatz: Der Beweis zeigt im Falle $G_0 = G$ noch etwas mehr. Für Funktionen f_1 und $f_2 \in C_c^\infty(G)$ und Vektoren $x, y \in \mathscr{H}$ ist nämlich

$$
\begin{aligned}
& \left\langle x, \int_G f_1(g) U(g) \, \mathrm{d}g \int_G f_2(h) U(h) \, \mathrm{d}h y \right\rangle \\
= \quad & \int_G f_1(g) \left\langle x, U(g) \int_G f_2(h) U(h) \, \mathrm{d}h y \right\rangle \mathrm{d}g \\
= \quad & \int_G f_1(g) \left\langle U(g)^* x, \int_G f_2(h) U(h) \, \mathrm{d}h y \right\rangle \mathrm{d}g \\
= \quad & \int_G f_1(g) \int_G f_2(h) \langle x, U(gh) y \rangle \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}g \\
= \quad & \int_G f_1(g) \int_G f_2(g^{-1}h) \langle x, U(h) y \rangle \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}g \\
= \quad & \int_G \left(\int_G f_1(g) f_2(g^{-1}h) \, \mathrm{d}g \right) \langle x, U(h) y \rangle \, \mathrm{d}h.
\end{aligned}
$$

Also ist $\int_G f_1(g) U(g) \, \mathrm{d}g \int_G f_2(h) U(h) \, \mathrm{d}h$ wieder von der Form $\int_G f(g) U(g) \, \mathrm{d}g$ mit $f \in C_c^\infty(G)$, und die Approximation eines C^k-Vektors x erfolgt nicht durch *irgendwelche* C^∞-Vektoren, sondern durch solche der Form $\int_G f(g) U(g) \, \mathrm{d}g x$ mit

[113] Der Integrand konvergiert gleichmäßig in y und g_0.

[113] Die Ableitung unter dem Integral existiert, da $U_0(g_0) x \in C^l(U_0)$ ist, und ist stetig wegen Proposition 100.

$f \in C_c^\infty(G)$. Man kann aber auch zeigen, dass bereits jeder C^∞-Vektor von der Form $\int_G f(g)U(g)\,\mathrm{d}g\,y$ mit $f \in C_c^\infty(G)$ und $y \in \mathscr{H}$ ist.[114]

102. Korollar:

a) *Für $k \geqslant l$ ist $C^k(U)$ in $C^l(U_0)$ dicht bezüglich $\mathfrak{G}_0^{(l)}$.*

b) *Mit $l = 0$ ist $\mathfrak{G}^{(l)} = \mathbb{C}$, die $\mathfrak{G}^{(l)}$-Topologie gleich der Normtopologie, und daher, wenn wir U als stetig voraussetzen, $C^k(U)$ dicht in $\mathscr{H} = C^0(U)$.*

c) *Mit $l = 1$ und $G_0 = \{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\}$ erhält man:*

$$\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)} \supseteq \mathrm{d}U_0^{(1)}(X).$$

Beweis: Zu c): Die $\mathfrak{G}_0^{(1)}$-Topologie ist gerade die Graphennormtopologie des Operators $\mathrm{d}U_0^{(1)}(X)$. Also ist

$$C^1(U_0) \subseteq \mathscr{D}(\overline{\mathrm{d}U_0^{(1)}(X)|_{C^\infty(U)}}) = \mathscr{D}(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}).$$

☺

103. Proposition: *Ist U stetig, so ist auch C^ω dicht in $\mathscr{H}$.*

Beweis: Siehe [War72, 4.4.5.7]. Idee: Die C_c^∞-Funktionen F_n des obigen Beweises werden ersetzt durch den Wärmeleitungskern auf G für Zeiten $t > 0$. Dadurch erhält man analytische Vektoren, die für $t \to 0$ gegen den ursprünglichen Vektor konvergieren. ☺

Verträglichkeit mit der Involution

104. Betrachten wir nun die Involution auf $\mathfrak{G}^{(k)}$. Es seien $x, y \in C^k(U)$ und $X \in \mathfrak{G}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\langle y, \mathrm{d}U^{(k)}(X^*)x\rangle &= X^*|_{g=e}\langle y, U(g)x\rangle = \overline{X|_{g=e}\langle x, U(g)y\rangle}\\ &= \overline{\langle x, \mathrm{d}U^{(k)}(X)y\rangle} = \langle \mathrm{d}U^{(k)}(X)y, x\rangle.\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathrm{d}U^{(k)}(X^*) = \mathrm{d}U^{(k)}(X)^*|_{C^k(U)} = \mathrm{d}U^{(k)}(X)^\dagger.$$

Halten wir als Ergebnis fest:

Proposition: *Die Menge von Operatoren $\mathrm{d}U^{(k)}\left(\mathfrak{G}^{(k)}\right) \subseteq \underline{\mathbf{Lin}}(C^k(U))$ ist für alle $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ sowohl in $\mathbf{Lin}^{(\dagger)}(C^k(U))$ als auch hermitesch, und die Abbildung $\mathrm{d}U^{(k)} \colon \mathfrak{G}^{(k)} \to \mathbf{Lin}^{(\dagger)}(C^k(U))$ ist hermitesch. Im Falle $k \in \{\infty, \omega\}$ ist sogar, da es sich um* Algebren *von Operatoren handelt, $\mathrm{d}U^{(k)}\left(\mathfrak{G}^{(k)}\right) \subseteq \mathbf{Lin}^\dagger(C^k(U))$.*

[114] [DM78]

105. Da wir nun $\mathscr{S} = \mathrm{d}U^{(k)}\left(\mathfrak{G}^{(k)}\right)$ als hermitesch erkannt haben, stellt sich die Frage nach der Selbstadjungiertheit dieser Menge von Operatoren. Dazu ist zu zeigen: $\mathscr{D}(\mathscr{S}^*) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{S}) = C^k(U)$.

Es sei also $x \in \mathscr{D}(\mathscr{S}^*)$ und $y \in \mathscr{H}$. Es ist zu zeigen:

$$g \mapsto F(g) = \langle y, U(g)x\rangle$$

ist eine C^k-Funktion auf G.

Ist U stetig, so können wir Folgen x_n, $y_m \in C^k(U)$ mit $x_n \to x$ und $y_m \to y$ wählen. Wir setzen

$$F_{mn}(g) = \langle y_m, U(g)x_n\rangle.$$

Dann ergibt sich für $X \in \mathfrak{G}^{(k)}$ folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
X|_{g=h}F_{mn}(g) &= \langle y_m, U(h)\mathrm{d}U^{(k)}(X)x_n\rangle \\
&= \langle \mathrm{d}U^{(k)}(X^*)U(h^{-1})y_m, x_n\rangle \\
&\longrightarrow \langle \mathrm{d}U^{(k)}(X^*)U(h^{-1})y_m, x\rangle \quad \text{lok. glm. in } h \text{ für } n \to \infty \text{ [115]} \\
&= \langle y_m, U(h)\mathrm{d}U^{(k)}(X^*)^*x\rangle \\
&\longrightarrow \langle y, U(h)\mathrm{d}U^{(k)}(X^*)^*x\rangle \quad \text{gleichmäßig in } h \text{ für } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Für $X = 1$ folgt die (in diesem Fall nicht nur lokal) gleichmäßige Konvergenz der C^k-Funktionen F_{mn} gegen F. Außerdem konvergieren alle Ableitungen endlicher Ordnung höchstens k lokal gleichmäßig. Also ist – für $k \neq \omega$ – auch $F \in C^k(G)$ und $x \in C^k(U)$.

Damit gilt:

Proposition: *Ist U eine stetige, unitäre Darstellung von G auf einem Hilbertraum, so ist $\mathrm{d}U^{(k)}\left(\mathfrak{G}^{(k)}\right)$ eine selbstadjungierte Menge von Operatoren für alle $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Die Darstellung $\mathrm{d}U^{(\infty)}$ von $\mathfrak{G}$ ist selbstadjungiert.*

106. Korollar: *Ist U eine stetige, unitäre Darstellung von G auf einem Hilbertraum, $X \in \mathfrak{g}$, $G_0 = \{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $U_0 = U|_{G_0}$, so ist $\mathrm{d}U_0^{(1)}(X)$ schiefadjungiert und somit abgeschlossen. Folglich gilt:*

$$\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)} = \mathrm{d}U_0^{(1)}(X).$$

Insbesondere ist $\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)$ wesentlich schiefadjungiert.

Beweis: Die Selbstadjungiertheit von $\mathrm{d}U_0^{(1)}(\mathfrak{G}_0^{(1)})$ bedeutet gerade die Selbstadjungiertheit von $\mathrm{i}\,\mathrm{d}U_0^{(1)}(X)$ oder die Schiefadjungiertheit von $\mathrm{d}U_0^{(1)}(X)$. Mit Korollar 102 c) ergibt sich dann die Gleichheit

$$\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)} = \mathrm{d}U_0^{(1)}(X).$$

☺

115 $\mathrm{d}U^{(k)}(X^*)U(h^{-1})y_m$ ist stetig und damit lokal beschränkt in h wegen Proposition 100.

Vollständige Positivität

107. Nun untersuchen wir die Matrixordnung auf $\mathfrak{G}$. Es sei $X \in M(\mathfrak{G})$ positiv, und es seien $x_1, \ldots, x_n \in C^k(U)$. Dann ist

$$\langle x_i, \mathrm{d}U^{(k)}(X)x_j\rangle = X|_{g=e}\langle x_i, U(g)x_j\rangle.$$

Die Funktion $g \mapsto [\langle x_i, U(g)x_j\rangle]_{ij}$ ist positiv definit.[116] Daher ist auch die Matrix $[\langle x_i, \mathrm{d}U^{(k)}(X_{kl})x_j\rangle]_{(ki)(lj)}$ positiv, und somit $\mathrm{d}U^{(k)}(X) \geqslant 0$.

Damit haben wir gezeigt:

Proposition: *Die Abbildung* $\mathrm{d}U^{(k)}\colon \mathfrak{G}^{(k)} \to \mathbf{Lin}^{(\dagger)}(C^k(U))$ *ist vollständig positiv.*

Die Exponentialabbildung für $\mathscr{U}(\mathscr{H})$

108. Für Liegruppen G und H und einen Gruppenhomomorphismus φ haben wir das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} & \mathfrak{h} \end{array}$$

Ersetzt man die Gruppe H durch die unitäre Gruppe $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ eines Hilbertraums, den Gruppenhomomorphismus φ durch eine stetige, unitäre Darstellung U und $\mathrm{d}\varphi$ durch $\mathrm{d}U^{(\infty)}$, so erhält man:

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{U} & \mathscr{U}(\mathscr{H}) & & \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\exp} & & \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{d}U^{(\infty)}} & \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{g}) & \subseteq & \mathbf{Lin}^{\dagger}(C^{\infty}(U)) \end{array}$$

Ziel dieses Abschnitts ist es, hier die Exponentialabbildung exp zu erklären und das Diagramm zu rechtfertigen.

Dazu benötigen wir den Funktionalkalkül für normale Operatoren:

Der Funktionalkalkül für normale Operatoren

Dicht definierte, abgeschlossene Operatoren

109. Es seien $\mathscr{H}$ und $\mathscr{K}$ Hilberträume. Ein *partiell definierter Operator*

Partiell definierter Operator
Dicht definierter Operator

$$T\colon \mathscr{H} \supseteq \mathscr{D}(T) \to \mathscr{K}$$

ist ein Operator auf einem linearen Teilraum $\mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H}$. T heißt *dicht definiert*, falls $\mathscr{D}(T)$ in $\mathscr{H}$ dicht liegt.

$S \supseteq T$ Falls T durch einen Operator $S\colon \mathscr{H} \supseteq \mathscr{D}(S) \to \mathscr{K}$ fortgesetzt wird,[117] so schreiben wir

$$S \supseteq T.$$

Zwei partiell definierte Operatoren S und T von $\mathscr{H}$ nach $\mathscr{K}$ kann man auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche punktweise addieren und erhält einen partiell definierten Operator

$$S+T : \mathscr{H} \supseteq \mathscr{D}(S+T) \to \mathscr{K};\, x \mapsto Sx+Tx$$

mit

$$\mathscr{D}(S+T) = \mathscr{D}(S) \cap \mathscr{D}(T).$$

Diese Addition ist assoziativ, kommutativ und distributiv bezüglich der Skalarmultiplikation, hat ein neutrales Element $0\colon \mathscr{H} \to \mathscr{K}$, aber im Allgemeinen keine inversen Elemente.

Die Hintereinanderausführung von partiell definierten Operatoren wird durch die Komposition von Relationen erklärt: Ist $\mathscr{L}$ ein weiterer Hilbertraum und sind $T : \mathscr{H} \supseteq \mathscr{D}(T) \to \mathscr{K}$ und $S\colon \mathscr{K} \supseteq \mathscr{D}(S) \to \mathscr{L}$ partiell definierte Operatoren, so definiert man einen partiell definierten Operator

$$ST : \mathscr{H} \supseteq \mathscr{D}(ST) \to \mathscr{L};\, x \mapsto STx$$

mit

$$\mathscr{D}(ST) = \mathscr{D}(T) \cap T^{-1}\mathscr{D}(S).$$

Diese Komposition ist assoziativ, es gelten die Distributivgesetze

$$(S+T)U = SU+TU \qquad \text{und} \qquad U(S+T) \supseteq US+UT,$$

und es ist

$$\mathbb{1}_{\mathscr{K}}T = T = T\mathbb{1}_{\mathscr{H}}.$$

110. Für abgeschlossene, dicht definierte Operatoren S und T definieren wir

$$S \hat{+} T = \overline{S+T}$$

beziehungsweise

$$S \hat{\cdot} T = \overline{ST},$$

sofern $S+T$ beziehungsweise ST dicht definiert und abschließbar ist.

Für abgeschlossene, dicht definierte Operatoren T ist T^* ebenfalls abgeschlossen und dicht definiert.[118] Es gilt die Rechenregel

$$(ST)^* \supseteq T^*S^*.$$

Gewisse Mengen von abgeschlossenen, dicht definierten Operatoren bilden mit
Messbarer Operator den Operationen $\hat{+}$, $\hat{\cdot}$ und $*$ $*$-Algebren, so etwa die *messbaren Operatoren* bezüglich einer Von-Neumann-Algebra mit Spur (siehe etwa [Neu87] oder [Ter81]). Ein weiteres Beispiel werden wir gleich kennenlernen.

116 Die Matrix $[\langle U(g_k)x_i, U(g_l)x_j\rangle]_{(ik)(jl)}$ ist positiv für alle Tupel $[g_k]_k$ von Gruppenelementen.

117 Das heißt, $D(S) \supseteq \mathscr{D}(T)$ und $S|_{\mathscr{D}(T)} = T$.

118 [KR83, 2.7.8]

111. Ein dicht definierter, abgeschlossener Operator T auf $\mathscr{H}$ heißt *normal*, falls $T^*T = TT^*$. T heißt *wesentlich normal*, falls $\overline{T}$ normal ist. Normaler Operator Wesentlich normaler Operator

Jeder dicht definierte, selbstadjungierte Operator ist normal.

Das Spektralmaß einer kommutativen Von-Neumann-Algebra

112. Es sei $\mathscr{A}$ eine kommutative Von-Neumann-Algebra auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$. Durch die Gelfand-Transformation ist auf dem Spektrum Ω von $\mathscr{A}$ ein projektorenwertiges Borelmaß[119] E, das *Spektralmaß* von $\mathscr{A}$, gegeben, dessen Nullmengen genau die mageren Mengen sind: Jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$ unterscheidet sich von genau einer offen-abgeschlossenen Menge um eine magere Menge, und deren charakteristische Funktion entspricht unter der Gelfand-Transformation einem Projektor $E(A)$.[120] Spektralmaß von $\mathscr{A}$

Dieses induziert für Vektoren $x, y \in \mathscr{H}$ skalarwertige Maße

$$A \mapsto \langle x, E(A)y \rangle.$$

Integration von Funktionen bezüglich E

113. Es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Wir setzen

$$\mathscr{D}(T_f) = \left\{ x \in \mathscr{H} \;\middle|\; \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\langle y, E(\lambda)x\rangle \text{ ist beschränkt in } y \in \mathscr{H} \right\}.$$

Jedes $x \in \mathscr{D}(T_f)$ definiert einen Vektor $\int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)x$ durch

$$\left\langle y, \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)x \right\rangle = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\langle y, E(\lambda)x\rangle.$$

Diese Zuordnung ist linear in x und definiert einen partiell definierten Operator $T_f = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)\colon \mathscr{H} \supseteq \mathscr{D}(T_f) \to \mathscr{H}$ durch

$$T_f x = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)x.$$ [121]

---

119 Genauer gesagt die Vervollständigung eines solchen.

120 [KR83, 5.2].

121 $\mathscr{D}(T_f)$ lässt sich auch anders angeben: Für $x \in \mathscr{D}(T_f)$ ist für jede messbare Menge $A \subseteq \Omega$

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)x, E(A)x \right\rangle &= \overline{\left\langle E(A)x, \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)x \right\rangle} \\
&= \overline{\int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\langle E(A)x, E(\lambda)x\rangle} \\
&= \overline{\int_A f(\lambda)\,\mathrm{d}\langle x, E(\lambda)x\rangle} \\
&= \int_A \overline{f(\lambda)}\,\mathrm{d}\langle x, E(\lambda)x\rangle,
\end{aligned}$$

T_f ist abgeschlossen, dicht definiert, normal und $\mathscr{A}$ affiliiert[122], und jeder solche Operator ist von der Gestalt T_f für eine messbare Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Die Zuordnung $f \mapsto T_f$ ist ein $*$-Isomorphismus von der $*$-Algebra der messbaren Funktionen auf Ω modulo E-Nullfunktionen auf die $*$-Algebra $\mathscr{N}(\mathscr{A})$ der normalen, $\mathscr{A}$ affiliierten Operatoren mit den Operationen $\hat{+}$, $\hat{\cdot}$ und $*$.[123]

Der Funktionalkalkül für normale Operatoren

Spektralmaß von T

114. Ist T ein normaler Operator, so gibt es eine kommutative Von-Neumann-Algebra $\mathscr{A}$ mit Spektralmaß E, der er affiliiert[124] ist.

Ist $T = T_f$ mit der messbaren Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, und ist $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ messbar, so erklärt man

$$g(T) \coloneqq T_{g\circ f}.$$

Es ist also

$$g(T) = \int_\Omega g\circ f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda),$$

und das kann man auch schreiben als

$$g(T) = \int_{\mathbb{C}} g(\lambda)\,\mathrm{d}E_f(\lambda),$$

wobei E_f das Bildmaß von E unter f bezeichnet.[125] Dieses Bildmaß hängt nur noch von T ab und nicht mehr von der Von-Neumann-Algebra $\mathscr{A}$, mit der wir gearbeitet haben.[126] Wir bezeichnen es mit E_T und nennen es das *Spektralmaß* von T. Der Träger von $E_T = E_{T_f}$ ist der wesentliche Wertebereich von f, und dieser ist gleich dem Spektrum $\sigma(T)$ von $T = T_f$.[127] Es ist also

$$g(T) = \int_{\sigma(T)} g(\lambda)\,\mathrm{d}E_T(\lambda),$$

---

und daher

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\langle x, E(\lambda)x\rangle &= \int_\Omega f(\mu)\,\mathrm{d}\left\langle \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)x, E(\mu)x\right\rangle \\ &= \left\langle \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)x, \int_\Omega f(\mu)\,\mathrm{d}E(\mu)x\right\rangle \\ &= \|T_f x\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Ist umgekehrt $\int_\Omega |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\langle x, E(\lambda)x\rangle < \infty$, so ist $x \in \mathscr{D}(T_f)$ ([Rud73, 13.22 ff]).

122 Das heißt, $BT \subseteq TB$ für alle beschränkten Operatoren B, die mit $\mathscr{A}$ vertauschen.

123 [KR83, 5.6.15, 5.6.19, 5.6.22], [Rud73, 13.24].

124 [KR83, 5.6.18].

125 [Rud73, 13.28].

126 Man nehme etwa zusätzlich die eindeutig bestimmte kleinste kommutative Von-Neumann-Algebra $\mathscr{A}_0$, der T affiliiert ist ([KR83, 5.6.18]). Diese habe das Spektrum Ω_0 mit projektorenwertigem Maß E_0, und T sei dort durch die Funktion f_0 gegeben. Dann entspricht die Einbettung $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ unter der Gelfandtransformation einer stetigen Abbildung $g\colon \Omega \to \Omega_0$, und es ist $T_{f_0\circ g} = T_f$, also $f = f_0\circ g$ fast überall. Das Bildmaß von E unter g ist E_0. Und dann ist das Bildmaß von E unter $f = f_0\circ g$ gleich dem von E_0 unter f_0.

127 [KR83, 5.6.20], [Rud73, 13.27]. Dabei ist das Spektrum eines abgeschlossenen, dicht definierten Operators T definiert als die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $T - \lambda\mathbb{1}\colon \mathscr{D}(T) \to \mathscr{H}$ nicht bijektiv ist.

und das Spektrum von $g(T)$ ist gleich dem wesentlichen Wertebereich von $g|_{\sigma(T)}$. T ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ ist, genau dann schiefadjungiert, wenn $\sigma(T) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$ ist, genau dann positiv, wenn $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geqslant 0\}$, genau dann unitär, wenn $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ und genau dann beschränkt mit Norm $\leqslant 1$, wenn $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. [128]

Die Zuordnung $g \mapsto g(T)$ ist ein $*$-Isomorphismus von der $*$-Algebra der messbaren Funktionen auf $\sigma(T)$ modulo E_T-Nullfunktionen auf eine $*$-Algebra $\mathscr{N}(T)$ von normalen Operatoren mit den Operationen $\hat{+}$, $\hat{\cdot}$ und $*$.

115. Die auf allen kompakten Teilmengen von $\sigma(T)$ beschränkten, messbaren Funktionen modulo E_T-Nullfunktionen bilden eine $*$-Algebra $\mathscr{B}$. Alle Operatoren $g(T)$ mit $g \in \mathscr{B}$ sind mindestens auf dem dichten, unter allen solchen $g(T)$ invarianten Teilraum

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_T(\{z \mid |z| \leqslant n\})\mathscr{H}$$

definiert, und es ist

$$\overline{g(T)|_D} = g(T).^{129}$$

Also ist

$$(g(T)|_D)^* = \overline{g(T)|_D}^* = g(T)^* = \overline{g}(T) = \overline{\overline{g}(T)|_D}.$$

Das bedeutet, die Operatoren $g(T)|_D$ bilden eine zu $\mathscr{B}$ isomorphe, wesentlich selbstadjungierte $*$-Algebra von Operatoren. Mit dem gleichen Argument ist auch jede $*$-Unteralgebra von dieser wesentlich selbstadjungiert.

Die Exponentialabbildung für $\mathscr{U}(\mathscr{H})$

116. Ist nun G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$, ist $U\colon G \to \mathscr{U}(\mathscr{H})$ eine stetige, unitäre Darstellung von G auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$, und ist $X \in \mathfrak{g}$, so ist $\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)$ wesentlich schiefadjungiert und damit wesentlich normal. Wir können somit $\exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(X))$ erklären als

$$\exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)) = \exp(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)})$$

mittels des Funktionalkalküls für normale Operatoren. Der so definierte Operator $\exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(X))$ ist unitär, und es ist

$$\exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(-X)) = \exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(X))^*.$$

Für $x \in \mathscr{H}$, $y \in C^\infty(U)$ und $X \in \mathfrak{g}$ betrachten wir die Funktion

$$F_{x,y}(t) = \langle x, U(\exp(tX))y \rangle,$$

128 [KR83, 5.6.12], [KR83, 5.6.21], [KR83, 5.6.26], [Rud73, 12.26].
129 Vergleiche [SZ79, 9.11].

und für einen schiefadjungierten Operator $T: D \to \mathscr{H}$ auf einem dichten Teilraum D von $\mathscr{H}$, $x \in \mathscr{H}$ und $y \in D$ die Funktion

$$G_{x,y}(t) = \langle x, \exp(tT)y\rangle = \int_{\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\lambda t} \mathrm{d}\langle x, E(\lambda)y\rangle$$

mit dem Spektralmaß E von T.

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}F_{x,y}(t)}{\mathrm{d}t} = \langle x, \mathrm{d}U^{(\infty)}(X)U(\exp(tX))y\rangle,$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G_{x,y}(t)}{\mathrm{d}t} &= \lim_{h_n \to 0} \int_{\mathrm{i}\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\lambda(t+h_n)} - \mathrm{e}^{\lambda t}}{h_n} \mathrm{d}\langle x, E(\lambda)y\rangle \\
&= \int_{\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\lambda t}\lambda \mathrm{d}\langle x, E(\lambda)y\rangle \text{ [130]} \\
&= \langle x, \exp(tT)Ty\rangle,
\end{aligned}$$

und die Ableitungen sind stetig in t.[131]

Mit $T = \overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}$ sehen wir: Für $x \in \mathscr{H}$ und $y \in C^\infty(U)$ ist die Funktion

$$(s,t) \mapsto \langle x, \exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(-sX))U(\exp(tX))y\rangle$$

differenzierbar,[132] und es ist[133]

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x, \exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(-tX))U(\exp(tX))y\rangle \\
= \; & \langle x, \exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(-tX))\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)U(\exp(tX))y\rangle \\
& -\langle x, \exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(-tX))\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)U(\exp(tX))y\rangle \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(tX))^{-1}U(\exp(tX)) &= \exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(-tX))U(\exp(tX)) \\
&= \exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(-0X))U(\exp(0X)) \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}$$

für alle t und damit $\exp(\mathrm{d}U^{(\infty)}(tX)) = U(\exp(tX))$.

Damit haben wir gezeigt:

---

130 Dominierte Konvergenz: $|\mathrm{e}^{\lambda s} - 1| = |\int_0^s \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t| \leqslant \int_0^s |\lambda| \mathrm{d}t = |\lambda s|$ für reelle s und $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, und mit λ ist auch $|\lambda|$ integrierbar bezüglich $\mathrm{d}\langle x, E(\lambda)y\rangle$. Beachte: $y \in D$.

131 Beachte bei $G_{x,y}$ die dominierte Konvergenz der Integrale für eine Folge $t_n \to t$.

132 Mit y ist auch $U(\exp(tX))y \in C^\infty(U)$.

133 Kettenregel

Proposition: *Das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "U"] & \mathscr{U}(\mathscr{H}) & \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{d}U^{(\infty)}"] & \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"'] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathbf{Lin}^{\dagger}(C^{\infty}(U)) \end{tikzcd}$$

117. Für die Gruppe $G = \mathbb{R}$ ist $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ und $\exp(s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) = s$. Damit lässt sich eine stetige, unitäre Darstellung U von $\mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum aus dem schiefadjungierten Operator $\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})}$ wieder rekonstruieren, und umgekehrt erzeugt jeder schiefadjungierte Operator T auf einem dichten Teilraum D von $\mathscr{H}$ eine stetige unitäre Darstellung U von $\mathbb{R}$ auf $\mathscr{H}$ durch $U(t) = \exp(tX)$,[134] und man erhält T zurück als $T = \overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})} = \mathrm{d}U^{(1)}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$.[135]

Damit erhalten wir den bekannten Satz von Stone über unitäre Ein-Parameter-Gruppen und ihre Erzeuger:

Proposition: *Durch*

$$T = \mathrm{d}U^{(1)}(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$$

und

$$U(t) = \exp(tT)$$

ist eine Bijektion zwischen den stetigen unitären Darstellungen U von $\mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum $\mathscr{H}$ und den auf einem dichten Teilraum von $\mathscr{H}$ definierten, schiefadjungierten Operatoren T gegeben.

Ein Kriterium für C^{∞}-Vektoren

118. Es sei U eine stetige, unitäre Darstellung der Liegruppe G auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$. Für einen Vektor $x \in \mathscr{H}$ mit $\|x\| = 1$ und $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\langle x, U(\exp(tX))x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}\langle x, E(\lambda)x\rangle,$$

wobei E das Spektralmaß von $-\mathrm{i}\,\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}$ bezeichne. Die Funktion

$$t \mapsto \langle x, U(\exp(tX))x\rangle$$

ist also die Fouriertransformierte des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\langle x, Ex\rangle$ auf $\mathbb{R}$. Ist diese von der Klasse C^{∞}, so sind alle Momente gerader Ordnung (und dann auch die übrigen) des Maßes endlich.[136]

---

[134] Die Stetigkeit ergibt sich aus der Stetigkeit der Funktionen $G_{x,y}$ aus Paragraph 116.

[135] Wir haben in Paragraph 116 tatsächlich gezeigt: $D \subseteq C^1(U)$, und $\mathrm{d}U^{(1)}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) \supseteq T$. Da T als schiefadjungierter Operator keine echte schiefadjungierte Fortsetzung hat, folgt die Gleichheit.

[136] [Chu01, 6.4], vergleiche auch [Kön60]. Das brauchen wir später auch mehrdimensional:

Das heißt,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2n} \mathrm{d}\langle x, E(\lambda)x\rangle < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist – bezeichnen wir mit U_0 die Einschränkung von U auf die Untergruppe $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ –

$$x \in \mathscr{D}\left(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}^n\right) = \mathscr{D}(\mathrm{d}U_0^{(1)}(X)^n).$$[137]

Proposition: *Es sei μ ein endliches, positives Maß auf $\mathbb{R}^n$. Die Fouriertransformierte f von μ, gegeben durch*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu(r),$$

ist genau dann von der Klasse C^∞, wenn alle Polynomfunktionen p für $p \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ gegen μ integrierbar sind, und dann erhält man die Ableitungen durch Differentiation unter dem Integral:

$$p(-\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_n})f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(r_1,\ldots,r_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu(r).$$

Beweis: Wir zeigen zuerst: Sind alle Polynomfunktionen p für $p \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ vom Grad höchstens k gegen μ integrierbar, so kann man bis zum Grad k unter dem Integral differenzieren. Für $k=0$ ist das klar. Es sei $p \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, es gelte (inklusive Existenz von Ableitung und Integral)

$$g(x) = p(-\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_1},\ldots,-\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_n})f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(r_1,\ldots,r_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu(r),$$

und es sei $r_i p$ integrierbar. Dann ist für $h_n \to 0$ ($e_i = [\delta_{ik}]_k$)

$$\frac{g(x+h_n e_i)-g(x)}{h_n} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_n r_i}-1}{h_n} p(r_1,\ldots,r_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu(r),$$

es ist $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_n r_i}-1| \leqslant |h_n r_i|$ wie in Fußnote 130 vorgerechnet, und daher erhält man im Grenzwert $n \to \infty$ die Ableitung unter dem Integral. Die Behauptung folgt nun durch Induktion nach k.

Nun sei f von der Klasse C^∞. Es ist zu zeigen: Alle Polynomfunktionen p für $p \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ sind integrierbar. Dazu genügt es, die Integrierbarkeit aller r_i^{2k} zu zeigen, denn es ist $\left|\prod_i r_i^{k_i}\right| \leqslant \sum_i \left|r_i^{\sum_i k_i}\right|$, und falls $k \leqslant l$, ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |r_i^k|\,\mathrm{d}\mu(r) &= \int_{|r_i|<1} |r_i^k|\,\mathrm{d}\mu(r) + \int_{|r_i|\geqslant 1} |r_i^k|\,\mathrm{d}\mu(r)\\ &\leqslant \mu(\mathbb{R}^n) + \int_{|r_i|\geqslant 1} |r_i^l|\,\mathrm{d}\mu(r).\end{aligned}$$

Wenn also alle r_i^{2k} integrierbar sind, so auch alle Polynome vom Grad höchstens $2k$, und man kann wie oben gezeigt die Fouriertransformierte bis zum Grad $2k$ unter dem Integral differenzieren. Sei dies für $k \in \mathbb{N}_0$ der Fall (für $k=0$ gilt das trivialerweise). Wir zeigen: Dann ist r_i^{2k+2} integrierbar gegen μ. Dazu setzen wir $\nu = r_i^{2k}\mu$. Es ist ν ein endliches, positives Maß mit Fouriertransformierter

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} r_i^{2k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu(r) = (-1)^k \tfrac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}} f(x).$$

Ist $g \mapsto \langle x, U(g)x \rangle$ also von der Klasse C^∞ auf G, so ist

$$x \in \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathscr{D}\left(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}^n\right),$$

und dieser Raum ist gerade $C^\infty(U)$.[138]

Es gilt also:

Proposition: *Es sei U eine stetige, unitäre Darstellung der Liegruppe G auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$. Ein Vektor $x \in \mathscr{H}$ ist genau dann in $C^\infty(U)$, wenn die Funktion $g \mapsto \langle x, U(g)x \rangle$ von der Klasse C^∞ ist.*

Die universelle Darstellung

Positiv definite Funktionen als Koeffizientenfunktionale

119. Es sei G eine Gruppe und $U\colon G \to \mathscr{U}(\mathscr{H})$ eine unitäre Darstellung auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$. Seien weiter $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{H}$. Dann ist durch das *Koeffizientenfunktional* Koeffizientenfunktional

$$[\varphi_{ij}]_{ij}(g) = [\langle x_i, U(g)x_j \rangle]_{ij}$$

eine $M_n(\mathbb{C})$-wertige Funktion φ auf G gegeben. Diese ist positiv definit:

$$\varphi(g_k^{-1}g_l) = [\langle U(g_k)x_i, U(g_l)x_j \rangle]_{(ik)(jl)},$$

und diese Matrix ist positiv.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} r_i^{2k+2} \mathrm{d}\mu(r) &= \int_{\mathbb{R}^n} r_i^2 \, \mathrm{d}\nu(r) \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(hr_i)}{h^2} \, \mathrm{d}\nu(r) \\
&\leqslant 2 \varliminf_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(hr_i)}{h^2} \, \mathrm{d}\nu(r) \qquad \text{(Fatou)} \\
&= -\varliminf_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}hr_i} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}hr_i}}{h^2} \, \mathrm{d}\nu(r) \\
&= -\varliminf_{h \to 0} \frac{g(he_i) - 2g(0) + g(-he_i)}{h^2} \\
&= -\tfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} g(0) \\
&= (-1)^{k+1} \tfrac{\partial^{2k+2}}{\partial x_i^{2k+2}} f(0) < \infty.
\end{aligned}$$

☺

[137] Für diese Gleichheit siehe [KR83, 5.6.35], beachte: $\mathrm{d}U_0^{(1)}(X) = \overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}$ wegen Korollar 106.

[138] [War72, 4.4.4.10 (Goodman)], beachte Korollar 106.

120. Umgekehrt kann man jede $M_n(\mathbb{C})$-wertige positiv definite Funktion φ auf diese Weise als Koeffizientenfunktional einer unitären Darstellung schreiben. Denn φ lässt sich auffassen als vollständig positive[139] Abbildung $\mathbb{C}(G) \to \mathrm{Sesq}(\mathbb{C}^n)$, und nach dem Darstellungssatz 60 gibt es einen Prähilbertraum $\mathscr{H}$, eine abgeschlossene $*$-Darstellung π von $\mathbb{C}(G)$ auf $\mathscr{H}$ – dann ist $\mathscr{H}$ sogar ein Hilbertraum – und eine lineare Abbildung $V\colon \mathbb{C}^n \to \mathscr{H}$, so dass

$$\langle x \mid \varphi(g) \mid y\rangle = \langle Vx, \pi(g)Vy\rangle$$

für $x, y \in \mathbb{C}^n$, und so dass $\pi(\mathbb{C}(G))V\mathbb{C}^n$ dicht in $\mathscr{H}$ ist.[140] Die Einschränkung von π auf G ist eine unitäre Darstellung U, und wenn man nun als die x_i die Bilder der Standardbasisvektoren des $\mathbb{C}^n$ unter V nimmt, erhält man die gewünschte Darstellung von φ als Koeffizientenfunktional.

121. Ist G eine Liegruppe und ist φ stetig, so ist auch U stetig: $\mathscr{H}$ wird von Vektoren der Form $\pi(a)x_j$ mit $a \in \mathbb{C}(G)$ aufgespannt, für diese ist

$$\langle \pi(a)x_j, U(g)x_i\rangle = \langle x_j, \pi(a^*)U(g)x_i\rangle,$$

und dies ist eine Linearkombination von Translationen der φ_{ij}, welche als stetig vorausgesetzt waren. Also ist U schwach und damit auch stark stetig.

122. Ist φ von der Klasse C^∞, so auch die Funktion $\varphi_{ii} = [g \mapsto \langle x_i, U(g)x_i\rangle]$. Also sind die x_i nach dem Kriterium 118 in $C^\infty(U)$. Man kann φ also als Koeffizientenfunktional einer stetigen unitären Darstellung bezüglich C^∞-Funktionen darstellen.

Die universelle Darstellung

Universelle Darstellung **123.** Es sei G eine Liegruppe. Nimmt man zu jeder positiv definiten matrixwertigen C^∞-Funktion φ auf G eine solche stetige, unitäre Darstellung, zu der φ ein Koeffizientenfunktional bezüglich C^∞-Vektoren ist, und bildet die direkte Summe all dieser Darstellungen, so erhält man *eine* stetige, unitäre Darstellung von G, deren Koeffizientenfunktionale bezüglich C^∞-Vektoren schon *alle* positiv definiten matrixwertigen C^∞-Funktionen sind. Diese nennen wir die *universelle* Darstellung U_u von G. Zur Abkürzung schreiben wir π_u statt $\mathrm{d}U^{(\infty)}(U_\mathrm{u})$.

124. Die Matrixordnung auf $\mathfrak{G}$ ist durch das Bild unter π_u bereits festgelegt:

Proposition: *Ist $X \in M(\mathfrak{G})$, so ist $X \geqslant 0$ genau dann, wenn $\pi_\mathrm{u}(X) \geqslant 0$.*

[139] und damit hermitesche, siehe Proposition 84 a)

[140] Bezüglich der $\pi(\mathbb{C}(G))$-Topologie, welche, da es sich um beschränkte Operatoren unter Einschluss der $\mathbb{1}$ handelt, mit der Normtopologie übereinstimmt.

Beweis: Die eine Richtung ist bereits gezeigt, da π_u vollständig positiv ist als Ableitung einer unitären Darstellung. Sei umgekehrt $\pi_\mathrm{u}(X) \geqslant 0$ und $f\colon G \to M_n(\mathbb{C})$ eine positiv definite C^∞-Funktion. f lässt sich als Koeffizientenfunktional von U_u schreiben:

$$f_{ij}(g) = \langle x_i, U_\mathrm{u} x_j \rangle$$

mit Vektoren $x_i \in C^\infty(U_\mathrm{u})$. Es ist dann

$$X|_{g=e} f(g) = [\langle x_i, \pi_\mathrm{u}(X_{kl}) x_j \rangle]_{(ik)(jl)},$$

und das ist nach Voraussetzung eine positive Matrix. ☺

125. Korollar: *Die Matrixordnung auf $\mathfrak{G}$ ist algebraisch, $\mathfrak{G}$ ist also eine matrixgeordnete Algebra.*

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\left[\sum_{jk} \langle x_s, \pi_\mathrm{u}(Y_{ij}^* X_{jk} Y_{kl}) x_t \rangle\right]_{(is)(lt)} &= \left[\sum_{jk} \langle \pi_\mathrm{u}(Y_{ji}) x_s, \pi_\mathrm{u}(X_{jk}) \pi_\mathrm{u}(Y_{kl}) x_t \rangle\right]_{(is)(lt)} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

als Verjüngung einer positiven Matrix. ☺

126. Daraus lässt sich eine universelle Abbildungseigenschaft von $\pi_\mathrm{u}(\mathfrak{G})$ gewinnen:

Proposition: *Jede vollständig positive Abbildung $\pi\colon \mathfrak{G} \to$ **Sesq**(D) in die Sesquilinearformen auf einem Prähilbertraum D faktorisiert eindeutig in π_u und eine vollständig positive Abbildung $\varphi\colon \pi_\mathrm{u}(\mathfrak{G}) \to$ **Sesq**(D):*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_\mathrm{u}"'] & \mathbf{Sesq}(D) \\ \pi_\mathrm{u}(\mathfrak{G}) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

φ ist genau dann hermitesch beziehungsweise eine Darstellung auf D [141] beziehungsweise eine $*$-Darstellung auf D [142], wenn π es ist.

Beweis: Ist $X \in \mathfrak{G}$ und $\pi_\mathrm{u}(X) = 0$, so ist

$$\pi_\mathrm{u}(X) \geqslant 0 \qquad \text{und} \qquad \pi_\mathrm{u}(X) \leqslant 0.$$

Nach obiger Proposition ist dann auch

$$X \geqslant 0 \qquad \text{und} \qquad X \leqslant 0,$$

[141] mit Werten nur in **Lin**$(D) \subseteq$ **Sesq**(D)

[142] mit Werten in **Lin**$^\dagger(D)$

und da π vollständig positiv ist,

$$\pi(X) \geqslant 0 \qquad \text{und} \qquad \pi(X) \leqslant 0.$$

Für die Sesquilinearform $\pi(X)$ bedeutet dies aber[143]

$$\pi(X) = 0.$$

Damit faktorisiert π eindeutig in die universelle Darstellung π_u und eine lineare Abbildung $\varphi\colon \pi_\mathrm{u}(\mathfrak{G}) \to \mathbf{Sesq}(D)$.

Es sei $X \in M(\mathfrak{G})$ und $\pi_\mathrm{u}(X) \geqslant 0$. Dann ist $X \geqslant 0$ und

$$\pi(X) = \varphi(\pi_\mathrm{u}(X)) \geqslant 0.$$

Also ist φ vollständig positiv.

Ist φ hermitesch, so auch $\pi = \varphi \circ \pi_\mathrm{u}$, und ist π hermitesch und $X \in \mathfrak{G}$, so ist

$$\varphi(\pi_\mathrm{u}(X)^\dagger) = \varphi(\pi_\mathrm{u}(X^*)) = \pi(X^*) = \pi(X)^* = \varphi(\pi_\mathrm{u}(X))^*$$

und somit φ hermitesch.

Ist φ eine Darstellung, so auch π als Hintereinanderausführung von Algebrenhomomorphismen. Ist umgekehrt π eine Darstellung und sind $X, Y \in \mathfrak{G}$, so ist

$$\begin{aligned}
\varphi(\pi_\mathrm{u}(X)\pi_\mathrm{u}(Y)) &= \varphi(\pi_\mathrm{u}(XY)) \\
&= \pi(XY) \\
&= \pi(X)\pi(Y) \\
&= \varphi(\pi_\mathrm{u}(X))\varphi(\pi_\mathrm{u}(Y)),
\end{aligned}$$

und

$$\varphi(\mathbb{1}) = \varphi(\pi_\mathrm{u}(1)) = \pi(1) = \mathbb{1}.$$

Also ist auch φ eine Darstellung. ☺

127. Wir nennen $\mathscr{A}$ die in $\mathbf{Lin}^\dagger(C^\infty(U_\mathrm{u}))$ von $\pi_\mathrm{u}(\mathfrak{G})$ und $U_\mathrm{u}(G)$ erzeugte $*$-Algebra. Es gilt:[144]

Proposition: *Es ist $\pi_\mathrm{u}(\mathfrak{G})$ in $\mathscr{A}$ kofinal.*

Beweis: Für $X \in \mathfrak{G}$ und $g \in G$ ist

$$\pi_\mathrm{u}(X)U_\mathrm{u}(g) = U_\mathrm{u}(g)\pi_\mathrm{u}(\mathrm{Ad}(g^{-1})X)$$

wegen Proposition 99. Daher lässt sich jedes Element $A \in \mathscr{A}$ schreiben als endliche Summe

$$A = \sum_i U_\mathrm{u}(g_i)A_i$$

---

143 Polarisation!

144 [Pow74, S. 282]

mit $A_i \in \pi_{\mathrm{u}}(\mathfrak{G})$ und $g_i \in G$.

Ist $A = A^\dagger = \sum_i A_i^\dagger U_{\mathrm{u}}(g_i^{-1})$, so erhalten wir

$$A = \tfrac{1}{2}\sum_i (U_{\mathrm{u}}(g_i)A_i + A_i^\dagger U_{\mathrm{u}}(g_i^{-1})).$$

Für jedes i ist

$$0 \leqslant (A_i - U_{\mathrm{u}}(g_i^{-1}))^\dagger (A_i - U_{\mathrm{u}}(g_i^{-1})) = A_i^\dagger A_i + \mathbb{1} - A_i^\dagger U_{\mathrm{u}}(g_i^{-1}) - U_{\mathrm{u}}(g_i)A_i.$$

Setzen wir

$$B = \tfrac{1}{2}\sum_i (A_i^\dagger A_i + \mathbb{1}),$$

so ist $B \in \pi_{\mathrm{u}}(\mathfrak{G})$, $B \geqslant 0$, und

$$B \geqslant \tfrac{1}{2}\sum_i (U_{\mathrm{u}}(g_i)A_i + A_i^\dagger U_{\mathrm{u}}(g_i^{-1})) = A.$$

☺

Kommutanten und invariante Teilräume

128. Es sei D ein Prähilbertraum mit Vervollständigung $\mathscr{H}$ und $\mathscr{S} \subseteq \mathbf{Lin}^{(\dagger)}(D)$ eine Menge von Operatoren. Wir definieren (etwas allgemeiner als [Pow71, 3.1]) den *schwachen Kommutanten* $\mathscr{S}'$ von $\mathscr{S}$ als die Menge aller beschränkten Operatoren B auf $\mathscr{H}$, so dass für alle $x, y \in D$ und $T \in \mathscr{S}$ gilt: Schwacher Kommutant $\mathscr{S}'$

$$\langle x, BTy\rangle = \langle T^* x, By\rangle.$$

129. $\mathscr{S}'$ enthält insbesondere alle beschränkten Operatoren B, die D invariant lassen und auf D mit allen Operatoren aus $\mathscr{S}$ vertauschen, das heißt, für die für alle $T \in \mathscr{S}$ gilt: Starker Kommutant

$$BT \subseteq TB.$$

Diese bilden den *starken Kommutanten* von $\mathscr{S}$. Der starke Kommutant von $\mathscr{S}$ ist eine Unteralgebra von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

130. $\mathscr{S}'$ ist ein in der schwachen Operatortopologie abgeschlossener Untervektorraum von $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, aber im Allgemeinen keine Algebra, selbst wenn $\mathscr{S}$ eine $*$-Algebra von Operatoren ist.[145]

Es ist $\mathscr{S}' = \overline{\mathscr{S}}'$,[146] und für hermitesches $\mathscr{S}$ ist $\mathscr{S}'$ hermitesch.[147]

Ist $\mathscr{S} \subseteq \mathbf{Lin}^\dagger(D)$, so ist $\mathscr{S}'$ gleich dem Kommutanten der von $\mathscr{S}$ in $\mathbf{Lin}^\dagger(D)$ erzeugten Algebra.

145 Für ein Gegenbeispiel siehe [Pow71, 3.2].

146 Betrachte Folgen $x_n \to x$, $T^* x_n = T^\dagger x_n \to \overline{T}^\dagger x = T^* x$, $y_n \to y$, $Ty_n \to \overline{T}y$.

147 $\langle x, B^* Ty\rangle = \langle Bx, T^{\dagger *} y\rangle = \langle BT^\dagger x, y\rangle = \langle T^* x, B^* y\rangle$.

Ist $\mathscr{A} \subseteq \textbf{Lin}^\dagger(D)$ eine $*$-Algebra von Operatoren, so ist $\mathscr{A}'D \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{A}^*)$, und für $B \in \mathscr{A}'$, $T \in \mathscr{A}$ und $x \in D$ ist

$$BTx = T^{\dagger *}Bx.$$[148]

Für eine *selbstadjungierte* $*$-Algebra $\mathscr{A}$ von Operatoren lassen folglich alle Operatoren aus $\mathscr{A}'$ den Raum D invariant und vertauschen auf D mit allen Operatoren aus $\mathscr{A}$, das heißt, der starke und der schwache Kommutant stimmen überein. Für eine selbstadjungierte $*$-Algebra $\mathscr{A}$ ist $\mathscr{A}'$ also eine Algebra, genauer eine Von-Neumann-Algebra ([Pow71, 4.6]), ebenso für eine wesentlich selbstadjungierte $*$-Algebra $\mathscr{A}$, da $\mathscr{A}' = \overline{\mathscr{A}}'$ ist. Die Operatoren aus $\mathscr{A}$ und ihre Abschlüsse sind der Von-Neumann-Algebra $\mathscr{A}''$ affiliiert.

Für abgeschlossene $*$-Algebren $\mathscr{A}$ von *beschränkten* Operatoren ist also auch der starke gleich dem schwachen und gleich dem üblichen Kommutanten aller beschränkten Operatoren, die mit $\mathscr{A}$ vertauschen.[149]

131. Ist D ein Prähilbertraum mit Vervollständigung $\mathscr{H}$, $\mathscr{A} \subseteq \textbf{Lin}^\dagger(D)$ eine $*$-Algebra und $D_0 \subseteq D$ ein unter $\mathscr{A}$ invarianter Teilraum, so ist

$$\mathscr{A}|_{D_0} = \{T|_{D_0} \mid T \in \mathscr{A}\}$$

eine $*$-Unteralgebra von $\textbf{Lin}^\dagger(D_0)$, und für $T \in \mathscr{A}$ ist $T^\dagger|_{D_0} = T|_{D_0}^\dagger$. Es gilt:[150]

Proposition: *Es sei D ein Prähilbertraum mit Vervollständigung $\mathscr{H}$ und $\mathscr{A} \subseteq \textbf{Lin}^\dagger(D)$ eine $*$-Algebra.*

a) *Ist $\mathscr{A}$ selbstadjungiert und $P \in \mathscr{A}'$ ein Projektor, so ist $PD = D \cap P\mathscr{H}$, dieser Raum – wir nennen ihn D_0 – ist invariant unter $\mathscr{A}$, und $\mathscr{A}|_{D_0} \subseteq \textbf{Lin}^\dagger(D_0)$ ist selbstadjungiert. Es ist $\overline{D_0} = P\mathscr{H}$.*

b) *Ist $D_0 \subseteq D$ ein unter $\mathscr{A}$ invarianter Teilraum und $\mathscr{A}|_{D_0}$ selbstadjungiert, so ist der Projektor P auf $\overline{D_0}$ in $\mathscr{A}'$ und $D_0 = PD$.*[151]

Für eine selbstadjungierte $*$-Algebra $\mathscr{A} \subseteq \textbf{Lin}^\dagger(D)$ gibt es also eine Bijektion zwischen den unter $\mathscr{A}$ invarianten Teilräumen von D, für die $\mathscr{A}|_{D_0}$ selbstadjungiert ist, und den Projektoren in $\mathscr{A}'$. Dabei entspricht dem Projektor P der Teilraum PD.

---

148 Für $x, y \in D$ ist $\langle T^\dagger x, By\rangle = \langle x, BTy\rangle$, also $By \in \mathscr{D}(T^{\dagger *})$ und das für alle $T = T^{\dagger\dagger} \in \mathscr{A}$, und $\langle x, BTy\rangle = \langle x, T^{\dagger *}By\rangle$, vergleiche [Pow71, Lemma 4.5].

149 Abgeschlossene $*$-Algebren von beschränkten Operatoren liegen in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ und sind selbstadjungiert.

150 Vergleiche [Pow71, Theorem 4.7].

151 Die Bemerkung in [Pow71], dies gelte auch, falls $\mathscr{A}|_{D_0}$ nur wesentlich selbstadjungiert ist, kann ich nicht nachvollziehen.

Beweis:

a) Es ist $D \cap P\mathscr{H} \subseteq PD$. Die umgekehrte Inklusion gilt auch, da D unter P invariant ist. Also ist $PD = D \cap P\mathscr{H}$. Weil P auf D mit $\mathscr{A}$ vertauscht, ist $D_0 = PD$ auch unter $\mathscr{A}$ invariant:

$$\mathscr{A}D_0 = \mathscr{A}PD = P\mathscr{A}D \subseteq PD = D_0.$$

Es ist $\overline{D \cap P\mathscr{H}} \subseteq P\mathscr{H}$, und $P\mathscr{H} \subseteq \overline{PD}$, da D dicht in $\mathscr{H}$ ist.[152] Also ist $\overline{D_0} = P\mathscr{H}$.

Weiter ist für jeden Operator $T \in \mathscr{A}$, $x \in P\mathscr{H}$ und $y \in D$

$$\langle x, Ty \rangle = \langle Px, Ty \rangle = \langle x, PTy \rangle = \langle x, TPy \rangle.$$

Ist $x \in \mathscr{D}(T|_{D_0}^*)$, so ist dies gleich $\langle T^*x, Py \rangle$, und das ist eine beschränkte Linearform in y. Es ist also auch $x \in \mathscr{D}(T^*)$. Ist umgekehrt $x \in \mathscr{D}(T^*) \cap P\mathscr{H}$, so ist auch $x \in \mathscr{D}(T|_{D_0}^*)$. Also ist

$$\mathscr{D}(T|_{D_0}^*) = \mathscr{D}(T^*) \cap P\mathscr{H}.$$

Damit ist $\mathscr{D}(\mathscr{A}|_{D_0}^*) = \mathscr{D}(\mathscr{A}^*) \cap P\mathscr{H} = D \cap P\mathscr{H} = D_0$, und $\mathscr{A}|_{D_0}$ ist selbstadjungiert.

b) Es sei $y \in D_0$, $x \in D$ und $T \in \mathscr{A}$. Dann ist

$$\langle Px, Ty \rangle = \langle x, PTy \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle.$$

Also ist $Px \in \mathscr{D}(\mathscr{A}|_{D_0}^*) = D_0 \subseteq D$, da wir $\mathscr{A}|_{D_0}$ als selbstadjungiert vorausgesetzt haben. Daher ist $PD \subseteq D_0 \subseteq PD$. Und es ist weiter für $x, y \in D$

$$\begin{aligned}
\langle x, PTy \rangle &= \langle Px, Ty \rangle \\
&= \langle T^\dagger Px, y \rangle \\
&= \langle PT^\dagger Px, y \rangle \\
&= \langle x, PTPy \rangle \\
&= \langle x, TPy \rangle = \langle T^*x, Py \rangle,
\end{aligned}$$

also $P \in \mathscr{A}'$.

☺

132. Es sei nun G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$, U eine stetige, unitäre Darstellung von G auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$, und es sei $\mathscr{H}_0 \subseteq \mathscr{H}$ ein abgeschlossener Unterraum und P der Projektor auf $\mathscr{H}_0$.

[152] Zu $x \in P\mathscr{H}$ gibt es $x_n \in D$, so dass $x_n \to x$. Dann konvergiert aber auch Px_n gegen $Px = x$.

Der Raum $\mathscr{H}_0$ ist genau dann invariant unter $U(G)$, wenn er invariant ist unter $U(\mathbb{C}(G))$, und es ist $U(G)' = U(\mathbb{C}(G))'$. Da $U(\mathbb{C}(G))$ eine $*$-Algebra von beschränkten Operatoren ist, ist sie auf jedem abgeschlossenen invarianten Unterraum von $\mathscr{H}$ selbstadjungiert, und daher gilt wegen Proposition 131: $\mathscr{H}_0$ ist genau dann invariant unter $U(G)$, wenn $P \in U(G)'$.

Ist $\mathscr{H}_0$ invariant unter U, so induziert U eine ebenfalls stetige unitäre Darstellung $U|_{\mathscr{H}_0}$ auf $\mathscr{H}_0$ durch

$$U|_{\mathscr{H}_0}(g) = U(g)|_{\mathscr{H}_0}.$$

Es ist

$$C^k(U|_{\mathscr{H}_0}) = C^k(U) \cap \mathscr{H}_0$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$, und für alle $X \in \mathfrak{G}$

$$\mathrm{d}U|_{\mathscr{H}_0}^{(k)}(X) = \mathrm{d}U^{(k)}(X)|_{C^k(U)\cap\mathscr{H}_0}.$$ [153]

133. Ist $D_0 \subseteq C^\infty(U)$ ein unter $\mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})$ invarianter Unterraum, so induziert $\mathrm{d}U^{(\infty)}$ eine $*$-Darstellung $\mathrm{d}U^{(\infty)}|_{D_0}$ durch

$$\mathrm{d}U^{(\infty)}|_{D_0}(X) = \mathrm{d}U^{(\infty)}(X)|_{D_0}.$$

Ist diese selbstadjungiert, so ist wegen Proposition 131 der Raum D_0 von der Form $PC^\infty(U)$ mit einem Projektor $P \in \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})'$. Umgekehrt ist zu jedem Projektor $P \in \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})'$ der Raum $D_0 = PC^\infty(U)$ invariant unter $\mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})$, und $\mathrm{d}U^{(\infty)}|_{D_0}$ ist selbstadjungiert. Es ist $\mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})' = \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{g})'$.

134. Sind x und $y \in C^\infty(U)$, $B \in U(G)'$ und $X \in \mathfrak{G}$, so ist

$$\begin{aligned} \langle x, B\,\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)y\rangle &= X|_{g=e}\langle x, BU(g)y\rangle \\ &= X|_{g=e}\langle U(g)^*x, By\rangle \\ &= \langle \mathrm{d}U^{(\infty)}(X)^*x, By\rangle, \end{aligned}$$

also $B \in \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})'$. Damit ist $U(G)' \subseteq \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})'$.

Ist $X \in \mathfrak{g}$, so ist der normale Operator $\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}$ der Von-Neumann-Algebra $\mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})''$ affiliiert. Daher ist der Operator $U(\exp X) = \exp(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)})$ als beschränkter, affiliierter Operator bereits in $\mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})''$. Da in einer zusammenhängenden Gruppe jedes Element als Produkt von Termen der Form $\exp X$ dargestellt werden kann, ist daher in diesem Fall

$$U(G) \subseteq \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})''$$

[153] Betrachte für $x \in \mathscr{H}$ und $y \in \mathscr{H}_0$ die Funktion

$$g \mapsto \langle x, U(g)y\rangle = \langle x, U(g)Py\rangle = \langle Px, U(g)y\rangle.$$

und

$$\mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})' \subseteq U(G)'.$$ [154]

135. Ist $D_0 \subseteq C^\omega(U)$ ein unter $\mathrm{d}U^{(\omega)}(\mathfrak{G})$ invarianter Unterraum, so induziert $\mathrm{d}U^{(\omega)}$ eine $*$-Darstellung $\mathrm{d}U^{(\omega)}|_{D_0}$ durch

$$\mathrm{d}U^{(\omega)}|_{D_0}(X) = \mathrm{d}U^{(\omega)}(X)|_{D_0}.$$

Im Falle einer zusammenhängenden Gruppe G ist dann $\mathscr{H}_0 = \overline{D_0}$ invariant unter $U(G)$.[155] In Absatz 144 sehen wir ein Beispiel, dass eine entsprechende Aussage für $C^\infty(U)$ und $\mathrm{d}U^{(\infty)}$ nicht gilt. (Dann kann $\mathrm{d}U^{(\infty)}|_{D_0}$ nicht selbstadjungiert sein.)

136. Setzen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir:

Proposition: *Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$, U eine stetige, unitäre Darstellung von G auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$, D_0 ein Unterraum und P der Projektor auf $\mathscr{H}_0 = \overline{D_0}$. Dann gelten folgende Implikationen:*

$$\begin{array}{rcl}
 & D_0 \subseteq C^\omega(U) \textit{ und} & \\
 & D_0 \textit{ invariant unter } \mathrm{d}U^{(\omega)}(\mathfrak{G}) & \\
\textit{falls } G \textit{ zusammenhängend ist} & \Downarrow \qquad \Uparrow & \textit{falls } D_0 = C^\omega(U) \cap \mathscr{H}_0 \\
 & \mathscr{H}_0 \textit{ invariant unter } U(G) & \\
 & \Updownarrow & \\
 & P \in U(G)' = U(\mathbb{C}(G))' & \\
\textit{in jedem Fall} & \Downarrow \qquad \Uparrow & \textit{falls } G \textit{ zusammenhängend ist} \\
 & P \in \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})' = \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{g})' & \\
\textit{falls } D_0 = PC^\infty(U) & \Downarrow \qquad \Uparrow & \textit{in jedem Fall, dann ist } D_0 = PC^\infty(U) \\
 & D_0 \subseteq C^\infty(U), & \\
 & D_0 \textit{ invariant unter } \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G}) \textit{ und} & \\
 & \mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})|_{D_0} \textit{ selbstadjungiert.} &
\end{array}$$

---

154 Alternativer Beweis: Für analytische Vektoren x und y, $B \in \mathrm{d}U^{(\omega)}(\mathfrak{G})'$ und $X \in \mathfrak{G}$ ist

$$X|_{g=e}\langle x, BU(g)y\rangle = \langle \mathrm{d}U^{(\infty)}(X^*)x, By\rangle = X|_{g=e}\langle U(g)^* x, By\rangle,$$

also haben die analytischen Funktionen $\langle x, BU(g)y\rangle$ und $\langle x, U(g)By\rangle$ in e dieselben Ableitungen und stimmen daher auf der zusammenhängenden Gruppe überein. Da die analytischen Vektoren in $\mathscr{H}$ dicht liegen, folgt: $BU(g) = U(g)B$. Daher ist $\mathrm{d}U^{(\omega)}(\mathfrak{G})' \subseteq U(G)'$, und trivialerweise ist $\mathrm{d}U^{(\infty)}(\mathfrak{G})' \subseteq \mathrm{d}U^{(\omega)}(\mathfrak{G})'$.

155 [War72, 4.4.5.6]

Die regulären Darstellungen

Die linksreguläre Darstellung

Linksreguläre Darstellung **137.** Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$. Auf dem Hilbertraum $L^2(G)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf G modulo Nullfunktionen ist eine Darstellung L von G, die *linksreguläre Darstellung*, gegeben durch

$$L(g)f = f \circ L_{g^{-1}}.$$

Diese ist unitär:

$$\langle L(g)f, h\rangle = \int_G \overline{f}(g^{-1}s)\,h(s)\,\mathrm{d}s = \int_G \overline{f}(s)\,h(gs)\,\mathrm{d}s = \langle f, L(g^{-1})h\rangle$$

für $f, h \in L^2(G)$ und $g \in G$.

138. Jede C^∞-Funktion f auf G mit kompaktem Träger ist ein C^∞-Vektor für L, und es ist $\mathrm{d}L^{(\infty)}(X)f = (X\check{f})\check{}$ für $X \in \mathfrak{G}$. Dabei ist $\check{f}(g) = f(g^{-1})$. Denn für $h \in L^2(G)$ ist

$$\begin{aligned}
X|_{g=e}\langle h, L(g)f\rangle &= X|_{g=e}\int_G \overline{h}(s)\,f(g^{-1}s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_G \overline{h}(s)\,X|_{g=e}\,f(g^{-1}s)\,\mathrm{d}s \text{ [156]} \\
&= \int_G \overline{h}(s)\,X|_{g=e}\,\check{f}(s^{-1}g)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_G \overline{h}(s)\,X|_{g=s^{-1}}\,\check{f}(g)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_G \overline{h}(s)\,(X\check{f})\check{}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \langle h, (X\check{f})\check{}\rangle.
\end{aligned}$$

Daher ist $\mathrm{d}L$ injektiv.

139. Es ist $C_c^\infty(G)$ dicht in $L^2(G)$. Denn $C_c(G)$ ist dicht in $L^2(G)$,[157] und jede C_c-Funktion f lässt sich in $L^2(G)$ durch C_c^∞-Funktionen approximieren: Wir wählen Funktionen $F_n \in C_c^\infty(G)$ wie im Beweis des Approximationslemmas 101. Dann ist

$$g \mapsto \int_G F_n(gh)\,f(h^{-1})\,\mathrm{d}h = \int_G F_n(h)\,f(h^{-1}g)\,\mathrm{d}h$$

[156] Dominierte Konvergenz der Differenzenquotienten.
[157] [Ped89, 6.4.11]

in $C_c^\infty(G)$ und konvergiert in $L^2(G)$ gegen f:

$$\begin{aligned}
&\int_G \left| \int_G F_n(h) f(h^{-1}g)\,\mathrm{d}h - f(g) \right|^2 \mathrm{d}g \\
=\ &\int_G \left| \int_G F_n(h)^{1/2} \left(F_n(h)^{1/2} (f(h^{-1}g) - f(g)) \right) \mathrm{d}h \right|^2 \mathrm{d}g \\
\leqslant\ &\int_G F_n(h)\,\mathrm{d}h \int_G \int_G F_n(h) |f(h^{-1}g) - f(g)|^2 \,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}g\ ^{158} \\
=\ &\int_G F_n(h) \int_G |f(h^{-1}g) - f(g)|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \to 0,
\end{aligned}$$

da $\int_G |f(h^{-1}g) - f(g)|^2 \,\mathrm{d}g$ stetig in h ist.

Also hat L einen dichten Teilraum von C^∞-Vektoren und ist damit stetig.

140. L ist injektiv: Ist $g \in G$, $g \neq e$, so gibt es eine Funktion $f \in C_c(G)$, so dass $f(g^{-1}) \neq f(e)$ ist. Dann ist $L(g)f(e) = f(g^{-1}) \neq f(e)$, also $L(g)f \neq f$ und $L(g) \neq \mathbb{1}$.

141. Versehen wir das Bild $L(G) \subseteq \mathscr{U}(L^2(G))$ von L mit der schwachen Operatortopologie, so ist die Umkehrung $L^{-1}\colon L(G) \to G$ ebenfalls stetig: Es sei $g_0 \in G$ und V eine Umgebung von g_0. Dann ist $g_0^{-1}V$ eine Einsumgebung, und es gibt eine Einsumgebung W, so dass $WW^{-1} \subseteq g_0^{-1}V$ ist. Weiter gibt es eine stetige Funktion f auf G mit Träger $\subseteq W$ und $\|f\|_2 = 1$. Wir setzen $h = L(g_0)f$. Dann ist für $g \notin V$

$$\begin{aligned}
\langle h, (L(g_0) - L(g))f \rangle &= \|f\|_2^2 - \int_G \overline{f(g_0^{-1}s)}\, f(g^{-1}s)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 - \int_G \overline{f(g_0^{-1}gs)}\, f(s)\,\mathrm{d}s = 1,
\end{aligned}$$

denn für $s \notin W$ ist $f(s) = 0$, und wäre für $s \in W$ auch $g_0^{-1}gs \in W$, so wäre $g_0^{-1}g \in WW^{-1} \subseteq g_0^{-1}V$ und $g \in V$, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Also ist für $s \in W$ $f(g_0^{-1}gs) = 0$, und das Integral verschwindet.

Daher ist das Bild der Umgebung $\{L(g) \mid |\langle h, (L(g) - L(g_0))f \rangle| < 1\}$ von $L(g_0)$ ganz in V enthalten.

Die rechtsreguläre Darstellung

142. Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$. Auf dem Hilbertraum $L^2(G,\rho)$ der bezüglich dem rechten Haarmaß $\rho\lambda$ quadratintegrierbaren Funktionen auf G modulo Nullfunktionen ist eine Darstellung R von G, die *rechtsreguläre Darstellung,* gegeben durch Rechtsreguläre Darstellung

$$R(g)f = f \circ R_g.$$

[158] Hölder-Ungleichung

Diese ist unitär:

$$\langle R(g)\,f,h\rangle = \int_G \overline{f}(sg)\,h(s)\,\rho(s)\,\mathrm{d}s = \int_G \overline{f}(s)\,h(sg^{-1})\,\rho(s)\,\mathrm{d}s = \langle f,R(g^{-1})h\rangle$$

für f, $h \in L^2(G,\rho)$ und $g \in G$.

143. Genau wie bei der linksregulären Darstellung zeigt man: Jede C^∞-Funktion f auf G mit kompaktem Träger ist ein C^∞-Vektor für R, und es ist $\mathrm{d}R^{(\infty)}(X)\,f = X\,f$ für $X \in \mathfrak{G}$.[159] Daher ist dR injektiv. R ist stetig, injektiv, und die Umkehrung $R^{-1}\colon R(G) \to G$ ist ebenfalls stetig.

Ein Beispiel

144. Betrachten wir die rechtsreguläre Darstellung der additiven Gruppe $\mathbb{R}$, so ist der Raum $C_c^\infty([0,1]) \subseteq C^\infty(R)$ invariant unter Differentiation, also unter $\mathrm{d}R^{(\infty)}$, aber sein L^2-Abschluss ist nicht invariant unter Translation, also unter R. Die Darstellung $\mathrm{d}R^{(\infty)}|_{C_c^\infty([0,1])}$ kann also nicht selbstadjungiert sein.

[159] Die Rechnung sieht so aus: Für $h \in L^2(G,\rho)$ ist

$$\begin{aligned}
X|_{g=e}\langle h,R(g)\,f\rangle &= X|_{g=e}\int_G \overline{h}(s)\,f(sg)\,\rho(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_G \overline{h}(s)\,X|_{g=e}\,f(sg)\,\rho(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_G \overline{h}(s)\,X|_{g=s}\,f(g)\,\rho(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_G \overline{h}(s)\,X\,f(s)\,\rho(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \langle h,X\,f\rangle.
\end{aligned}$$

Exakte Liealgebrendarstellungen und -homomorphismen

Die Hauptsätze der Arbeit werden bewiesen: Die Charakterisierung der exakten Liealgebrendarstellungen und -homomorphismen mittels vollständiger Positivität.

Exakte Liealgebrendarstellungen

145. Wir haben gesehen:

Satz: *Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$. Ist U eine stetige, unitäre Darstellung von G auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$, so ist $\mathrm{d}U^{(\infty)}$ eine selbstadjungierte, vollständig positive Darstellung von $\mathfrak{G}$ auf $C^\infty(U)$.* Eigenschaften von $\mathrm{d}U^{(\infty)}$

Außerdem gilt:[160] *Ist $\Delta = \sum_i X_i^2$, wobei die X_i eine Basis von $\mathfrak{g}$ bilden, so ist $\mathrm{d}U^{(\infty)}(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert und*

$$C^\infty(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathscr{D}\left(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(\Delta)}^n\right).$$

146. Ist umgekehrt eine Darstellung π von $\mathfrak{G}$ auf einem Prähilbertraum D gegeben, so stellt sich die Frage, ob π *exakt* ist, das heißt, von der Form $\mathrm{d}U^{(\infty)}$ für eine stetige, unitäre Darstellung U von G ist, oder zumindest $D \subseteq C^\infty(U)$ und $\pi \subseteq \mathrm{d}U^{(\infty)}$, das heißt, ob π eine *exakte Fortsetzung* hat. Weiter stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit von U. Exakte Darstellung Exakte Fortsetzung

147. Ist die Gruppe G zusammenhängend, so gibt es höchstens eine unitäre Darstellung U, so dass $\pi = \mathrm{d}U^{(\infty)}$. Denn jedes Element von G ist dann ein Produkt von Elementen der Form $\exp X$ mit $X \in \mathfrak{g}$, und es ist Zur Eindeutigkeit

$$U(\exp X) = \exp\left(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}\right) = \exp\left(\overline{\pi(X)}\right)$$

160 [War72, 4.4.4.3 (Nelson, Stinespring)], [War72, 4.4.4.5 (Nelson)].

durch π bereits eindeutig festgelegt.

Falls G nicht zusammenhängend ist, kann man keine Eindeutigkeit erwarten, denn $\mathrm{d}U^{(\infty)}$ ist allein durch die Zusammenhangskomponente der Eins von G bestimmt. Ist etwa eine stetige, unitäre Darstellung U von $\mathbb{R}$ gegeben, so bestimmt zum Beispiel jede komplexe Zahl λ mit $|\lambda| = 1$ eine stetige, unitäre Darstellung von $G = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ durch $(r,n) \mapsto \lambda^n U(r)$, die $\mathrm{d}U^{(\infty)}$ als Ableitung hat.

Zur Existenz **148.** Ein bekanntes Ergebnis zur Existenz ist der folgende Satz:[161]

Satz: *Es sei G eine zusammenhängende Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$. Es sei D ein Prähilbertraum mit Vervollständigung $\mathscr{H}$, und es sei $\pi\colon \mathfrak{G} \to \mathbf{Lin}^\dagger(D)$ eine $*$-Darstellung. Weiter sei $\Delta = \sum_i X_i^2$, wobei die X_i eine Basis von $\mathfrak{g}$ bilden.*

Ist G einfach zusammenhängend und der Operator $\pi(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert, so hat π eine exakte Fortsetzung.

Ist darüber hinaus $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathscr{D}(\overline{\pi(\Delta)}^n)$, so ist π exakt.

149. Wir werden die Bedingung »G einfach zusammenhängend« durch eine Bedingung an π ersetzen. Hat π eine exakte Fortsetzung, so ist π notwendig hermitesch und vollständig positiv.

Es sei also π eine vollständig positive $*$-Darstellung von $\mathfrak{G}$, und wir versuchen, eine zugehörige Gruppendarstellung zu finden.

Erster Schritt: Wir betrachten die universelle Darstellung von G. Gemäß Proposition 126 faktorisiert π über $\pi_{\mathrm{u}}(\mathfrak{G})$ mit einer vollständig positiven $*$-Darstellung φ:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{u}}"'] & \mathbf{Lin}^\dagger(D) & \subseteq & \mathbf{Sesq}(D) \\
\pi_{\mathrm{u}}(\mathfrak{G}) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Zweiter Schritt: Da $\pi_{\mathrm{u}}(\mathfrak{G})$ in der in Paragraph 127 eingeführten Algebra $\mathscr{A}$ kofinal ist, gibt es nach dem Fortsetzungssatz 44 eine hermitesche, vollständig positive Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ von φ:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{u}}"'] & \mathbf{Lin}^\dagger(D) & \subseteq & \mathbf{Sesq}(D) \\
\pi_{\mathrm{u}}(\mathfrak{G}) \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\subseteq$}"] & & & \\
\mathscr{A} \arrow[uurrr, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

161 [War72, 4.4.6.6, 4.4.6.8 (Nelson)]

Dritter Schritt: Zu $\tilde{\varphi}$ gibt es nach dem Darstellungssatz 60 einen Prähilbertraum $\tilde{D}$, eine abgeschlossene $*$-Darstellung $\tilde{\pi}$ von A auf $\tilde{D}$ und eine lineare Abbildung $V: D \to \tilde{D}$, so dass

$$\langle x \mid \tilde{\varphi}(a) \mid y \rangle = \langle Vx, \tilde{\pi}(a)Vy \rangle:$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{u}}"'] & \mathbf{Lin}^{\dagger}(D) & \subseteq & \mathbf{Sesq}(D) & & D \arrow[ddd, dashed, "V"] \\
\pi_{\mathrm{u}}(\mathfrak{G}) \arrow[ur, "\varphi"] & & & & \begin{array}{c} \langle V\cdot, TV\cdot\rangle \\ \uparrow \\ T \end{array} & \\
\rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & & & & \\
\mathscr{A} \arrow[rrr, dashed, "\tilde{\pi}"] \arrow[uuurrr, "\tilde{\varphi}"] & & & \mathbf{Lin}^{\dagger}(\tilde{D}) \arrow[uuu, dashed] & & \tilde{D}
\end{tikzcd}$$

Vierter Schritt: Nun definieren wir eine unitäre Darstellung $\tilde{U}$ von G auf der Vervollständigung $\tilde{\mathscr{H}}$ von $\tilde{D}$ durch

$$\tilde{U}(g) = \overline{\tilde{\pi}(U_{\mathrm{u}}(g))}\ ^{162}$$

sowie eine vollständig positive $*$-Darstellung π_1 von $\mathfrak{G}$ auf $\tilde{D}$ durch

$$\pi_1(X) = \tilde{\pi}(\pi_{\mathrm{u}}(X)):$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{u}}"'] \arrow[dddrrr, dashed, bend left, "\pi_1"] & \mathbf{Lin}^{\dagger}(D) & \subseteq & \mathbf{Sesq}(D) & & D \arrow[ddd, "V"] \\
 & \pi_{\mathrm{u}}(\mathfrak{G}) \arrow[ur, "\varphi"] & & & & \begin{array}{c} \langle V\cdot, TV\cdot\rangle \\ \uparrow \\ T \end{array} & \\
 & \rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & & & & \\
G \arrow[r, "U_{\mathrm{u}}"] \arrow[ddrrrr, dashed, bend right, "\tilde{U}"] & \mathscr{A} \arrow[rrr, "\tilde{\pi}"] \arrow[uuurrr, "\tilde{\varphi}"] & & & \mathbf{Lin}^{\dagger}(\tilde{D}) \arrow[uuu] & & \tilde{D} \\
 & & & & & & \rotatebox{-90}{$\subseteq$} \\
 & & & & \mathscr{U}(\tilde{\mathscr{H}}) & & \tilde{\mathscr{H}}
\end{tikzcd}$$

Fünfter Schritt: Jeder Vektor $x \in \tilde{D}$ ist ein C^1-Vektor für $\tilde{U}$. Dazu betrachten wir zu $X \in \mathfrak{g}$ und $t \in \mathbb{R}$ die Operatoren

$$C(t) = U_{\mathrm{u}}(\exp(tX)) - \mathbb{1} - t\pi_{\mathrm{u}}(X)$$

[162] Dies ist eine unitäre Darstellung, da es sich auf dem Niveau der Gruppenalgebra um den Abschluss einer Hintereinanderausführung von $*$-Darstellungen handelt.

auf $C^\infty(U_\mathrm{u})$. Es sei E das Spektralmaß des schiefadjungierten Operators $\overline{\pi_\mathrm{u}(X)}$. Für $y \in C^\infty(U_\mathrm{u})$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle y, C(t)^\dagger C(t) y\rangle &= \int_{\mathrm{i}\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{\lambda t} - 1 - \lambda t|^2 \, \mathrm{d}\langle y, E(\lambda) y\rangle \\ &\leqslant \int_{\mathrm{i}\mathbb{R}} \tfrac{1}{4}\lambda^4 t^4 \, \mathrm{d}\langle y, E(\lambda) y\rangle \text{ [163]} \\ &= \tfrac{1}{4} t^4 \langle y, \pi_\mathrm{u}(X)^4 y\rangle \\ &= \tfrac{1}{4} t^4 \langle y, \pi_\mathrm{u}(X^2)^\dagger \pi_\mathrm{u}(X^2) y\rangle.\text{[164]}\end{aligned}$$

Da $\tilde{\pi}$ (vollständig) positiv ist, folgt daraus für $x \in \tilde{D}$:

$$\begin{aligned}\|\tilde{\pi}(C(t))x\|^2 &= \langle x, \tilde{\pi}(C(t)^\dagger C(t)) x\rangle \\ &\leqslant \tfrac{1}{4} t^4 \langle x, \pi_1(X^2)^\dagger \pi_1(X^2) x\rangle \\ &= \left(\tfrac{1}{2} t^2 \left\|\pi_1(X^2) x\right\|\right)^2,\end{aligned}$$

und damit

$$\left\|\left(\frac{\tilde{U}(\exp(tX)) - \mathbb{1}}{t} - \pi_1(X)\right) x\right\| \leqslant \tfrac{1}{2}|t| \left\|\pi_1(X^2) x\right\|.$$

Für $t \longrightarrow 0$ sieht man:

$$X|_{g=e} \tilde{U}(g) x = \pi_1(X) x,$$

und x ist ein C^1-Vektor für $\tilde{U}$.

Sechster Schritt: Da $\tilde{D}$ unter $\pi_1(\mathfrak{G})$ invariant ist, ist für jedes $X \in \mathfrak{g}$ $\pi_1(X)x$ wieder ein C^1-Vektor für $\tilde{U}$, x also bereits ein C^2-Vektor. Induktiv folgt: $\tilde{D}$ besteht aus C^∞-Vektoren für $\tilde{U}$. Insbesondere sind das alles C^0-Vektoren, und $\tilde{U}$ ist stetig. Außerdem haben wir aus dem fünften Schritt die Formel

$$\pi_1(X) \subseteq \mathrm{d}\tilde{U}^{(\infty)}(X),$$

zunächst für $X \in \mathfrak{g}$, sie gilt aber dann auch für $X \in \mathfrak{G}$.[165] Es hat also π_1 eine exakte Fortsetzung, und zwar $\mathrm{d}\tilde{U}^{(\infty)}$.

Siebenter Schritt: Sei nun $X \in \mathfrak{G}$ und $x, y \in D$. Es ist

$$\begin{aligned}\langle Vx, \pi_1(X) Vy\rangle &= \langle Vx, \tilde{\pi}(\pi_\mathrm{u}(X)) Vy\rangle \\ &= \langle x \mid \tilde{\varphi}(\pi_\mathrm{u}(X)) \mid y\rangle \\ &= \langle x, \varphi(\pi_\mathrm{u}(X)) y\rangle \\ &= \langle x, \pi(X) y\rangle.\end{aligned}$$

163 Für $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ ist

$$|\mathrm{e}^{\lambda t} - 1 - \lambda t| = \left|\lambda \int_0^t (\mathrm{e}^{\lambda s} - 1)\, \mathrm{d}s\right| \leqslant |\lambda| \int_0^t |\mathrm{e}^{\lambda x} - 1|\, \mathrm{d}s \leqslant |\lambda| \int_0^t |\lambda s|\, \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}|\lambda t|^2,$$

da $|\mathrm{e}^{\lambda s} - 1| \leqslant |\lambda s|$ wie in Fußnote 130 auf Seite 70.

164 Es ist π_u eine $*$-Darstellung und X^2 hermitesch.

165 Betrachte Produkte von Elementen aus $\mathfrak{g}$.

Für $X = 1$ bedeutet das[166]

$$\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle,$$

also ist V isometrisch und setzt sich stetig fort zu

$$V\colon \mathscr{H} \to \tilde{\mathscr{H}}.$$

Achter Schritt: $VD \subseteq \tilde{D}$ ist invariant unter $\pi_1(\mathfrak{G})$: Sei $X \in \mathfrak{G}$ und $x \in D$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|\pi_1(X)Vx - V\pi(X)x\|^2 &= \langle \pi_1(X)Vx, \pi_1(X)Vx\rangle - \langle V\pi(X)x, \pi_1(X)Vx\rangle \\ &\quad - \langle \pi_1(X)Vx, V\pi(X)x\rangle + \langle V\pi(X)x, V\pi(X)x\rangle \\ &= \langle Vx, \pi_1(X^*X)Vx\rangle - \langle V\pi(X)x, \pi_1(X)Vx\rangle \\ &\quad - \langle Vx, \pi_1(X^*)V\pi(X)x\rangle + \langle \pi(X)x, \pi(X)x\rangle \text{ [167]} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da wegen der Rechnung in Schritt 7 die ersten drei Skalarproduktterme jeweils gleich dem vierten sind. Damit ist

$$\pi_1(X)Vx = V\pi(X)x,$$

und $VD \subseteq \tilde{D}$ invariant unter $\pi_1(\mathfrak{G})$. Es ist also $\pi_1|_{VD}$ eine $*$-Darstellung, und diese ist zu π unitär äquivalent mittels V.

Neunter Schritt: Um nun die unitäre Darstellung $\tilde{U}$ auf $\mathscr{H}_0$ einschränken und mittels V auf $\mathscr{H}$ zurückziehen zu können, benötigen wir eine *Zusatzvoraussetzung*, die sicherstellt, dass $\mathscr{H}_0$ auch unter $\tilde{U}$ invariant ist. Das ist der Fall, wenn die Gruppe G zusammenhängend ist und wenn π selbstadjungiert ist. Dann ist nämlich auch die zu π unitär äquivalente Darstellung $\pi_1|_{VD}$ selbstadjungiert, und mit Proposition 136 folgt die Invarianz von $\mathscr{H}_0$ unter $\tilde{U}$.

Setzen wir stattdessen voraus, dass G zusammenhängend ist und der Operator $\pi(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert, wobei $\Delta = \sum_i X_i^2$ und die X_i eine Basis von $\mathfrak{g}$ bilden. Dann ist der Operator $V\pi(\Delta)V^*\colon VD \to VD$ wesentlich selbstadjungiert und sein Abschluss S selbstadjungiert als dicht definierter Operator auf $\mathscr{H}_0$. Für $\overline{d\tilde{U}^{(\infty)}(\Delta)}$ schreiben wir kurz T. T ist ebenfalls selbstadjungiert.[168] Für $x = Vy \in VD$ ist

$$Sx = V\pi(\Delta)V^*Vy = V\pi(\Delta)y = \pi_1(\Delta)Vy = Tx.$$

Also ist $\mathscr{D}(S) \subseteq \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{H}_0$. Es sei nun $x \in \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{H}_0 = \mathscr{D}(T^*) \cap \mathscr{H}_0$. Dann ist $\langle x, Ty\rangle$ beschränkt in $y \in \mathscr{H}$, für $y \in VD$ ist dies gleich $\langle x, Sy\rangle$, und daher ist $x \in \mathscr{D}(S^*) = \mathscr{D}(S)$.

---

166 Für $X = 1$ hätte man die Rechnung schon nach dem vierten Schritt durchführen können. Wir brauchen sie später aber auch für alle $X \in \mathfrak{G}$.

167 V ist isometrisch.

168 [War72, 4.4.4.3 (Nelson, Stinespring)]

Analytischer Vektor

Es ist also $\mathscr{D}(S) = \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{H}_0$, und $\mathbb{1} - S = (\mathbb{1} - T)|_{\mathscr{D}(T)\cap\mathscr{H}_0}$. Dieser selbstadjungierte Operator hat eine in $\mathscr{H}_0$ dichte Menge D_0 von *analytischen Vektoren,*[169] diese sind auch analytische Vektoren für $\mathbb{1} - T$ und auch für $(\mathbb{1} - T)^{1/2}$.[170] Die analytischen Vektoren dieses Operators sind genau die analytischen Vektoren für $\tilde{U}$.[171] Also gibt es einen in $\mathscr{H}_0$ dichten, unter $\mathrm{d}\tilde{U}^{(\omega)}(\mathfrak{G})$ invarianten Teilraum[172] von $C^\omega(\tilde{U})$, und da wir G als zusammenhängend vorausgesetzt haben, ist wegen Proposition 136 $\mathscr{H}_0$ invariant unter $\tilde{U}$.

Es sei also zusätzlich vorausgesetzt, dass $\mathscr{H}_0$ unter $\tilde{U}$ invariant ist.

Zehnter Schritt: Dann ist $\tilde{U}|_{\mathscr{H}_0}$ eine stetige, unitäre Darstellung von G, und

$$U(g) = V^*\tilde{U}(g)V$$

ist eine dazu unitär äquivalente Darstellung von G auf $\mathscr{H}$.

Wegen

$$\langle x, U(g)y\rangle = \langle Vx, \tilde{U}(g)Vy\rangle$$

ist jeder Vektor aus D ein C^∞-Vektor für U, und für $X \in \mathfrak{G}$ ist

$$\begin{aligned}\langle x, \mathrm{d}U^{(\infty)}(X)y\rangle &= X|_{g=e}\langle x, U(g)y\rangle \\ &= X|_{g=e}\langle Vx, \tilde{U}(g)Vy\rangle \\ &= \langle Vx, \pi_1(X)Vy\rangle \\ &= \langle x, \pi(X)y\rangle.\end{aligned}$$

Also hat π die exakte Fortsetzung $\mathrm{d}U^{(\infty)}$.

Elfter Schritt: Ist π selbstadjungiert, so ist sogar $\pi = \mathrm{d}U^{(\infty)}$, da eine selbstadjungierte Darstellung keine echte selbstadjungierte Fortsetzung hat. Die Gleichheit gilt auch, wenn $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathscr{D}(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(\Delta)}^n)$ ist, da dieser Raum gerade gleich $C^\infty(U)$ ist,[173] und falls $\pi(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert ist, ist dies gleich

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathscr{D}(\overline{\pi(\Delta)}^n),$$

da dann $\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(\Delta)}$ eine selbstadjungierte Fortsetzung von $\pi(\Delta)$ ist.[174] In diesen Fällen ist also π exakt.

---

169 Ein analytischer Vektor eines auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$ dicht definierten Operators T ist ein Vektor $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathscr{D}(T^n)$, so dass die Potenzreihe in t

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n x\| t^n}{n!}$$

einen positiven Konvergenzradius hat. Ist T normal mit Spektralmaß E, so ist das für alle Vektoren aus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\{z \mid |z| \leqslant n\})\mathscr{H}$ der Fall, T hat also einen dichten Teilraum von analytischen Vektoren.

170 Für $\lambda \in \sigma(\mathbb{1} - T) \subseteq \{z \in \mathbb{R} \mid z \geqslant 1\}$ ist $\lambda^n \leqslant \lambda^{2n}$, also – mittels Spektralkalkül für $(\mathbb{1} - T)$ – $\mathscr{D}(((\mathbb{1} - T)^{1/2})^n) \supseteq \mathscr{D}((\mathbb{1} - T)^n)$ und $\|((\mathbb{1} - T)^{1/2})^n x\| \leqslant \|(\mathbb{1} - T)^n x\|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

171 [War72, 4.4.6.1 (Goodman)]

172 Man nehme etwa $\mathrm{d}\tilde{U}^{(\omega)}(\mathfrak{G})D_0$.

173 [War72, 4.4.4.5 (Nelson)]

174 [War72, 4.4.4.3 (Nelson, Stinespring)]

Ist π nur *wesentlich* selbstadjungiert, so ist $\overline{\pi}$ selbstadjungiert und immer noch vollständig positiv, wir können die Konstruktion also mit $\overline{\pi}$ durchführen und erhalten eine exakte Fortsetzung von π.

150. Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

Charakterisierung exakter Liealgebrendarstellungen mittels vollständiger Positivität

Satz: *Es sei G eine zusammenhängende Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$ und π eine vollständig positive Darstellung von $\mathfrak{G}$ auf dem Prähilbertraum D. Weiter sei $\Delta = \sum_i X_i^2$, wobei die X_i eine Basis von $\mathfrak{g}$ bilden. Ist dann*

- *π wesentlich selbstadjungiert oder*
- *$\pi(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert,*

so hat π eine exakte Fortsetzung. Ist sogar

- *π selbstadjungiert oder*
- *$\pi(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert und $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathscr{D}(\overline{\pi(\Delta)}^n)$,*

so ist π selbst exakt.

Die Variante »π selbstadjungiert« dieses Satzes sowie die Beweisidee gehen zurück auf [Pow74, Theorem 4.5]. Powers setzt zwar zusätzlich voraus, dass G einfach zusammenhängend sein soll, benutzt diese Voraussetzung aber nirgends, wie der hier gegebene Beweis zeigt: Es ist im Wesentlichen der Beweis von Powers, nur neu aufbereitet und anders in Einzelschritte zerlegt.

151. Zusammen mit Satz 145 folgt:

Korollar: *Unter den Voraussetzungen von Satz 150 ist π genau dann selbstadjungiert, wenn $\pi(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert ist und $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathscr{D}(\overline{\pi(\Delta)}^n)$.*

Exakte Liealgebrenhomomorphismen

Exakter Liealgebrenhomomorphismus

152. Nun seien zwei Liegruppen G und H gegeben mit Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und einhüllenden Algebren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$. Wir untersuchen, welche Liealgebrenhomomorphismen $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *exakt,* das heißt das Differential eines stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ sind.

Zur Eindeutigkeit

153. Ist die Gruppe G zusammenhängend, so gibt es höchstens einen Gruppenhomomorphismus φ, so dass $\pi = \mathrm{d}\varphi$. Denn jedes Element von G ist ein Produkt von Elementen der Form $\exp X$ mit $X \in \mathfrak{g}$, und es ist

$$\varphi(\exp X) = \exp(\pi(X))$$

durch π bereits eindeutig festgelegt.

Ist G nicht zusammenhängend, so ist aus demselben Grund wie bei Darstellungen keine Eindeutigkeit zu erwarten. Das in Paragraph 147 gegebene Gegenbeispiel liefert auch hier ein Gegenbeispiel, wenn man U als Darstellung auf einem *endlichdimensionalen* Hilbertraum wählt.

Zur Existenz

154. Man könnte die Formel $\varphi(\exp X) = \exp(\pi(X))$ auch als Ansatz für einen Existenzbeweis nehmen und versuchen, die Wohldefiniertheit und Homomorphismuseigenschaft zu beweisen.[175] Das erweist sich jedoch in der Regel als schwierig. Wir werden daher einen anderen Weg wählen.

155. Ein klassischer Satz der Lietheorie ist der folgende:

Satz: *Es seien G und H Liegruppen mit Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Liealgebrenhomomorphismus. Ist G zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so ist π exakt.*

156. Wir können auch hier die Bedingung »G einfach zusammenhängend« durch die vollständige Positivität von π ersetzen. Diese ist auf jeden Fall *notwendig* für die Exaktheit, wie wir in Paragraph 87 gesehen haben. Es gilt also:

Satz: *Es seien G und H Liegruppen mit Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und einhüllenden Algebren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$. Es sei $\varphi\colon G \to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\mathrm{d}\varphi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ vollständig positiv.*

157. Falls G zusammenhängend ist, ist die vollständige Positivität von π auch hinreichend für die Exaktheit:

Charakterisierung exakter Liealgebrenhomomorphismen mittels vollständiger Positivität

Satz: *Es seien G und H Liegruppen mit Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und einhüllenden Algebren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$. Es sei $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Liealgebrenhomomorphismus. Ist G zusammenhängend und $\pi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ vollständig positiv, so ist π exakt.*

Beweis: Es sei $H_0 \subseteq H$ die von $\exp(\pi(\mathfrak{g}))$ erzeugte Untergruppe. Diese hat die Liealgebra $\mathfrak{h}_0 = \pi(\mathfrak{g})$ und die einhüllende Algebra $\mathfrak{H}_0 = \pi(\mathfrak{G})$. Wir betrachten die linksreguläre Darstellung L von H_0 auf dem Hilbertraum $L^2(H_0)$. Diese ist unitär. Es ist $\mathrm{d}L^{(\infty)} \circ \pi$ eine vollständig positive $*$-Darstellung von $\mathfrak{G}$. Diese ist auch selbstadjungiert, weil

$$\mathrm{d}L^{(\infty)} \circ \pi(\mathfrak{G}) = \mathrm{d}L^{(\infty)}(\mathfrak{H}_0),$$

und weil $\mathrm{d}L^{(\infty)}$ selbstadjungiert ist.

[175] Der Satz 148 etwa wird mit einer ähnlichen Methode bewiesen.

Also ist $\mathrm{d}L^{(\infty)} \circ \pi$ exakt.[176]

Es sei nun $U\colon G \to \mathscr{U}(L^2(H_0))$ eine stetige, unitäre Darstellung, so dass gilt: $\mathrm{d}U^{(\infty)} = \mathrm{d}L^{(\infty)} \circ \pi$.

Da G zusammenhängend ist, ist jedes Element von G ein Produkt von Elementen der Form $\exp X$ mit $X \in \mathfrak{g}$, und es ist

$$U(\exp X) = \exp\left(\overline{\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)}\right) = \exp\left(\overline{\mathrm{d}L^{(\infty)} \circ \pi(X)}\right) = L(\exp(\pi X)) \in L(H_0).$$

Also ist $U(G) \subseteq L(H_0)$. L ist injektiv, und $L^{-1}\colon L(H_0) \to H_0$ ist stetig.[177] Also ist der Gruppenhomomorphismus $\varphi = L^{-1} \circ U\colon G \to H_0$ stetig. Der markierte Teil des folgenden Diagramms kommutiert, da alle anderen Teile kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "U"] \arrow[dr, phantom, "///"] & H_0 \arrow[r, shift left, "L"] & L(H_0) \arrow[l, shift left, "L^{-1}"] & \subseteq & \mathscr{U}(L^2(H_0)) \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{d}U^{(\infty)}"'] & \mathfrak{h}_0 \arrow[u, "\exp"'] \arrow[r, "\mathrm{d}L^{(\infty)}"] & \mathrm{d}L^{(\infty)}(\mathfrak{h}_0) \arrow[u, "\exp"'] & \subseteq & \mathbf{Lin}^{\dagger}(C^{\infty}(L))
\end{tikzcd}$$

Daher ist $\pi = \mathrm{d}\varphi$,[178] und das gilt auch noch, wenn wir φ als Homomorphismus $G \to H$ statt $G \to H_0 \subseteq H$ betrachten. ☺

158. Dieser Satz ist ein typisches Beispiel für die Anwendung der Funktionalanalysis als »Hilfswissenschaft«: Man beschafft sich den eigentlich interessierenden Objekten, hier den Liegruppen, zugeordnete Hilberträume, in diesen kennt man sich gut aus und kann rechnen, und schließlich übersetzt man die Ergebnisse wieder zurück in eine »hilbertraumfreie« Formulierung.

---

176 Mit der anderen Version des Satzes 150 lässt sich zeigen, dass $\mathrm{d}L^{(\infty)} \circ \pi$ zumindest eine exakte Fortsetzung hat, was aber für den Fortgang des Beweises genügt: Ist eine Basis $[X_i]_i$ von $\mathfrak{g}$ gegeben und eine Basis $[Y_j]_j$ von $\mathfrak{h}_0$, so ist $\pi(X_i) = \sum_j a_{ij} Y_j$ mit einer Matrix $[a_{ij}]_{ij}$. Diese hat vollen Rang und ist injektiv. Ist $\Delta = \sum_i X_i^2$, so ist $\pi(\Delta)$ elliptisch in $\mathfrak{H}_0$: Es ist $\pi(\Delta) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} Y_j\right)^2$. Ist für $t_j \in \mathbb{R}$

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} t_j\right)^2 = 0,$$

so ist $\sum_j a_{ij} t_j = 0$ für alle i und daher $t_j = 0$ für alle j. Das bedeutet, $\pi(\Delta)$ ist elliptisch. (Für die Definition siehe [War72, S. 267].) Daher ist $\mathrm{d}L^{(\infty)} \circ \pi(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert ([War72, 4.4.4.5 (Nelson)]). Also hat $\mathrm{d}L^{(\infty)} \circ \pi$ eine exakte Fortsetzung.

177 Siehe Paragraph 141.

178 Siehe Paragraph 78.

Bestimmung der positiven Elemente von $M(\mathfrak{G})$

Ich sah ein großes Herbstblatt, das der Wind
Die Straße lang trieb, und ich dachte: Schwierig
Den künftigen Weg des Blattes auszurechnen!
BERTOLD BRECHT[179]

Es wird ein Kriterium bewiesen für die Positivität von Differentialoperatoren aus $M(\mathfrak{G})$. Dabei werden die Fälle der zusammenhängenden, abelschen und der kompakten Gruppen mit Hilfe spezieller Methoden zuerst behandelt und dann der beide umfassende Fall separabler Gruppen mit Hilfe der Mautnerschen Zerlegung unitärer Darstellungen als direkte Integrale irreduzibler Darstellungen.

Einige Beispiele werden diskutiert und weiterführende Fragen aufgeworfen.

159. In unseren Sätzen spielt die Matrixordnung auf $\mathfrak{G}$ die entscheidende Rolle. Um die Sätze anwenden zu können, muss man daher wissen, welche Elemente von $M(\mathfrak{G})$ positiv sind. Und dazu ist die Definition ziemlich unhandlich, da man einen Differentialoperator $X \in M(\mathfrak{G})$ auf allen positiv definiten C^∞-Funktionen testen muss, und dafür muss man erst alle positiv definiten C^∞-Funktionen kennen …

Ein handlicheres Kriterium tut also Not. Wir werden ein solches Kriterium angeben und beweisen, zunächst für die Spezialfälle der abelschen und der kompakten Gruppen, für die spezielle Techniken zur Verfügung stehen, und danach im allgemeinen Fall.

160. Die folgende Vorüberlegung ermöglicht es, sich für den Positivitätstest auf zusammenhängende Gruppen zu beschränken.[180]

Es sei G eine Liegruppe und G_0 die Zusammenhangskomponente der Eins. Beide Gruppen haben die gleiche Liealgebra und die gleiche einhüllende Algebra $\mathfrak{G}$.

[179] BERTOLD BRECHT: »Kalifornischer Herbst II«. *Das Herbstbuch: Gedichte und Prosa.* Herausgegeben von HANS BENDER. Insel Verlag, Frankfurt am Main 1982. Seite 66.
[180] Der nicht zusammenhängende Fall spielt in unseren Sätzen ohnehin keine Rolle.

Schränkt man einerseits eine positiv definite Funktion auf G auf die Untergruppe G_0 ein, so erhält man eine positiv definite Funktion auf G_0. Setzt man andererseits eine positiv definite Funktion auf G_0 durch 0 auf ganz G fort, so erhält man eine positiv definite Funktion auf G.[181]

Und da man für die Positivität eines Differentialoperators $X \in M(\mathfrak{G})$ diesen nur im Punkt Eins anwenden muss und es daher reicht, eine positiv definite Funktion auf einer Umgebung der Eins wie zum Beispiel G_0 zu kennen, bestimmen die Gruppen G und G_0 dieselbe Matrixordnung auf $\mathfrak{G}$.

Es genügt also, einen Positivitätstest für zusammenhängende Gruppen zu kennen.

Zusammenhängende, abelsche Gruppen

161. Es sei G eine n-dimensionale, zusammenhängende, abelsche Liegruppe. Die Liealgebra ist dann die (bis auf Isomorphie) einzige n-dimensionale, kommutative[182] Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$, zu dieser gehört die einfach zusammenhängende (additive) Liegruppe $\mathbb{R}^n$, und G ist ein Quotient von dieser nach einer diskreten Untergruppe. Eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathfrak{g}$ bilden die Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Die einhüllende Algebra $\mathfrak{G}$ kann man mit der $*$-Algebra der Polynome $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ mit kommutierenden, hermiteschen Unbestimmten $X_i = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ identifizieren, und wir tun das im Folgenden. Wir suchen also nach einer Matrixordnung für *Polynome*.

Die Charaktergruppe

Charakter
Charaktergruppe
$\hat{G}$

162. Die *Charaktergruppe* $\hat{G}$ aller *Charaktere*, das heißt stetigen Homomorphismen $\chi\colon G \to U(1)$ kann man identifizieren mit einer Untergruppe von $\mathbb{R}^n$: Die Charaktere von $\mathbb{R}^n$ werden parametrisiert durch $r \in \mathbb{R}^n$ vermöge

$$\chi_r(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle},$$

es ist $\chi_{r+s} = \chi_r \cdot \chi_s$ und $r \mapsto \chi_r$ ist bijektiv.[183] Also ist $\hat{\mathbb{R}}^n$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$, und $\hat{G}$ ist die Untergruppe der Charaktere, die sich mit der Quotientenabbildung $\mathbb{R}^n \to G$ vertragen.[184]

163. Im Falle $G = \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist zum Beispiel $\hat{G} = \hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$.

181 Sind von den g_i die $g_{i_k} \in G_0$ und ist $f|_{G\setminus G_0} = 0$, so ist $[f(g_i^{-1}g_j)]_{ij} = [\delta_{i_k,i}]^*_{ki}[f(g_{i_k}^{-1}g_{i_l})]_{kl}[\delta_{i_l,i}]_{lj}$. Vergleiche [HR70, 32.43 (a)].

182 Alle Lieklammern sind gleich Null.

183 [Rud62, 1.2.7, 2.2.2]

184 Das heißt, die konstant auf den Äquivalenzklassen sind.

164. Charaktere sind positiv definite Funktionen,[185] und für einen positiven Differentialoperator $X = p(X_1, \ldots, X_n) \in M(\mathfrak{G})$ ist daher

$$0 \leqslant X|_{x=0}\, \chi_r(x) = p(-\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_n})|_{x=0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle} = p(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle}|_{x=0} = p(r).$$

Es ist also $p(r) \geqslant 0$ für alle $r \in \hat{G}$.

Ein matrixwertiger Satz von Bochner

165. Es sei $f \in M(C^\infty(G))$ positiv definit. Jede Komponente f_{ij} ist eine Linearkombination von positiv definiten Funktionen aus $C^\infty(G)$ mittels Polarisation:

$$f_{ij} = \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} \mathrm{i}^\nu [\mathrm{i}^\nu \delta_{ki} + \delta_{kj}]^*_{k,1} [f_{kl}]_{kl} [\mathrm{i}^\nu \delta_{li} + \delta_{lj}]_{l,1}.$$

Nach dem klassischen Satz von Bochner ist jede positiv definite Funktion h aus $C^\infty(G)$ die Fouriertransformierte eines endlichen, positiven Maßes auf $\hat{G}$:[186]

$$h(x) = \int_{\hat{G}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle} \mathrm{d}\mu(r).$$

Damit ist jede Komponente f_{ij} von f die Fouriertransformierte eines komplexwertigen, endlichen Maßes μ_{ij}.

Diese bilden ein positives, matrixwertiges Maß $\mu = [\mu_{ij}]_{ij}$.[187] Damit ist f die (komponentenweise) Fouriertransformierte eines positiven, matrixwertigen Maßes μ auf $\hat{G}$ – wir haben also einen *matrixwertigen Satz von Bochner* bewiesen.

Positivitätskriterium für abelsche Gruppen

166. Wir haben in Paragraph 164 gesehen: Für einen positiven Differentialoperator $X = p(X_1, \ldots, X_n) \in M(\mathfrak{G})$ ist $p(r) \geqslant 0$ für alle $r \in \hat{G}$. Sei jetzt umgekehrt $p \in M(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n])$ und $p(r) \geqslant 0$ für alle $r \in \hat{G}$, und sei $f \in M(C^\infty(G))$ positiv definit, also $f(x) = \int_{\hat{G}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle} \mathrm{d}\mu(r)$ mit einem positiven, matrixwertigen Maß μ.

Wenden wir nun den Differentialoperator $X = p(X_1, \ldots, X_n)$ auf f an:

$$\begin{aligned} X|_{x=0} f(x) &= p(-\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_n})|_{x=0} \int_{\hat{G}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle} \mathrm{d}\mu(r) \\ &= \int_{\hat{G}} p(-\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -\mathrm{i}\tfrac{\partial}{\partial x_n})|_{x=0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle r,x\rangle} \mathrm{d}\mu(r) \ {}^{188} \\ &= \left[\int_{\hat{G}} p_{ij}(r) \mathrm{d}\mu_{kl}(r)\right]_{(ik)(jl)} \geqslant 0.^{189} \end{aligned}$$

185 $[\chi(g_i^{-1} g_j)]_{ij} = \left[\overline{\chi(g_i)}\chi(g_j)\right]_{ij} = [\chi(g_i)]_i^* [\chi(g_j)]_j$.

186 [Rud62, 1.4.3]

187 Jeder messbaren Menge wird eine positive Matrix als Maß zugeordnet, oder äquivalent: Für alle Tupel $[\xi_i]_i$ komplexer Zahlen ist $\sum_{ij} \overline{\xi_i} \mu_{ij} \xi_j$ ein positives Maß. Das ist hier nach dem klassischen Satz von Bochner der Fall, da $\sum_{ij} \overline{\xi_i} \mu_{ij} \xi_j$ die inverse Fouriertransformierte der positiv definiten Funktion $\sum_{ij} \overline{\xi_i} f_{ij} \xi_j$ ist.

167. Damit haben wir gezeigt:

Proposition: *Es sei G eine zusammenhängende, abelsche Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$. Ein Differentialoperator $X \in M(\mathfrak{G})$ ist genau dann positiv, wenn er einem Polynom entspricht, das in der Identifizierung aus Paragraph 161 punktweise positiv auf $\hat{G}$ ist, und das ist genau dann der Fall, wenn er auf allen Charakteren positiv ist.*

Man braucht also nicht gegen alle positiv definiten Funktionen zu testen, es genügen die Charaktere. Und für später halten wir noch fest: Die Charaktere sind genau die irreduziblen, stetigen, unitären Darstellungen von G, und es ist $X|_{x=0}\,\chi(x) = \mathrm{d}\chi^{(\infty)}(X)$.

Beispiele

Einfach zusammenhängende, abelsche Gruppen, $\mathbb{R}^n$

168. Für eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Liegruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$ sind alle $*$-Darstellungen π von $\mathfrak{G}$ vollständig positiv, sofern nur $\pi(\Delta)$ wesentlich selbstadjungiert ist,[190] und jeder Liealgebrenhomomorphismus $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ in die Liealgebra $\mathfrak{h}$ einer Liegruppe ist vollständig positiv als Homomorphismus der einhüllenden Algebren.[191]

Man könnte vermuten, dies sei aus trivialen Gründen der Fall, etwa weil die Matrixordnung auf $\mathfrak{G}$ die gröbste algebraische Matrixordnung, gegeben durch Matrizen der Form X^*X, sei.

Das ist aber zum Beispiel für die Gruppen $\mathbb{R}^n$ für $n \geqslant 2$ nicht der Fall. Denn ein Differentialoperator ist genau dann positiv bezüglich der Gruppe $\mathbb{R}^n$, wenn das zugehörige Polynom punktweise positiv auf $\mathbb{R}^n$ ist, und ein Polynom in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ist genau dann von der Form p^*p mit einer Matrix p von Polynomen, wenn es Summe von Quadraten von Polynomen aus $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ist. Aber David Hilbert hat gezeigt, dass für $n \geqslant 2$ nicht jedes punktweise positive Polynom auf $\mathbb{R}^n$ Summe von Quadraten ist.[192]

Die Gruppen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{T}$

169. Die bezüglich der Gruppe $\mathbb{R}$ positiven Differentialoperatoren entsprechen genau den auf $\mathbb{R}$ punktweise positiven Polynomen, die bezüglich $\mathbb{T}$ positiven Differentialoperatoren entsprechen den auf $\mathbb{Z}$ punktweise positiven Polynomen.

188 Zum Ableiten unter dem Integral siehe Fußnote 136 auf Seite 71. Beachte: $\hat{G} \subseteq \mathbb{R}^n$.
189 Alle Riemann-Summen sind als Tensorprodukte von positiven Matrizen positiv.
190 Satz 148 und 145.
191 Satz 154 und 156.
192 [Hil88], siehe auch den Übersichtsartikel [Rud00]. Eine verwandte Fragestellung beinhaltet das 17. Hilbertsche Problem ([Hil00]).

Jeder Homomorphismus der zugehörigen Liealgebren $\mathbb{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist gegeben durch Multiplikation mit einer reellen Zahl λ, und die Fortsetzung auf die einhüllenden Algebren $\mathbb{C}[X]$ ist

$$p(X) \mapsto p(\lambda X).$$

Ist $p \in M(\mathbb{C}[X])$ und $p(r) \geqslant 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$, so auch $p(\lambda r)$. Also gibt es zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ (genau) einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder auch $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$, der den zugehörigen Liealgebrenhomomorphismus als Ableitung hat.

Ist $\lambda \neq 0$, so gibt es ein auf $\mathbb{Z}$ positives Polynom p, so dass $p(\lambda r)$ nicht für alle $r \in \mathbb{R}$ positiv ist.[193] Also ist der zugehörige Liealgebrenhomomorphismus nicht Ableitung eines Gruppenhomomorphismus $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Für $\lambda = 0$ ist der zugehörige Liealgebrenhomomorphismus die Ableitung des einzigen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{T} \to \mathbb{R};\ r \mapsto 0$.

Ist $p \in M(\mathbb{C}[X])$ und $p(r) \geqslant 0$ für alle $r \in \mathbb{Z}$, so ist genau dann $p(\lambda r) \geqslant 0$ für alle $r \in \mathbb{Z}$, wenn $\lambda \in \mathbb{Z}$ ist.[194] Also ist der zugehörige Liealgebrenhomomorphismus genau dann die Ableitung eines (eindeutig bestimmten) Gruppenhomomorphismus $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$, wenn $\lambda \in \mathbb{Z}$ ist.

Die Sätze 156 und 157 liefern in diesen Beispielen also tatsächlich das erwartete und bekannte Ergebnis.

Kompakte Gruppen

170. Bei den abelschen Gruppen war der Satz von Bochner das entscheidende Hilfsmittel. Für kompakte Gruppen steht mit dem Satz von Peter-Weyl und seiner C^∞-Variante von Harish-Chandra ein ebenso klassischer wie nützlicher Satz zur Verfügung, der es uns erlaubt, auch in diesem Fall die positiven Differentialoperatoren zu charakterisieren.

Endlichdimensionale Darstellungen und ihre Charaktere

171. Die Spur $\mathrm{tr}(u)$ einer endlichdimensionalen, unitären Darstellung u einer Gruppe G nennt man ihren *Charakter*. Ist χ der Charakter von u, so gibt die Zahl $\chi(e)$ gerade die Dimension des Hilbertraumes an, auf dem u operiert. Es ist $\chi(gh) = \chi(hg)$ und $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ für alle $g, h \in G$. Zwei stetige, endlichdimensionale, unitäre Darstellungen einer kompakten Gruppe sind genau dann äquivalent, wenn ihre Charaktere gleich sind.[195] Charakter

Jede endlichdimensionale, unitäre Darstellung u mit Charakter χ ist mittels einer Orthonormalbasis $[x_s]_s$ äquivalent zu einer Darstellung auf $\mathbb{C}^{\chi(e)}$ durch unitäre Matrizen $[u_{st}(g)]_{st} = [\langle x_s, u(g)x_t\rangle]_{st}$. Diese bilden eine matrixwertige, positiv definite Funktion.[196]

193 Liegt λ zwischen den ganzen Zahlen n und $n+1$, so wähle $p(X) = (X-n)(X-n-1)$.

194 Gegenbeispiel im Falle $\lambda \notin \mathbb{Z}$ wie oben.

195 [HR70, 27.32]

196 Es ist $[u_{st}(g_i^{-1}g_j)]_{(si)(tj)} = [u_{rs}(g_i)]^*_{r(si)}[u_{rt}(g_j)]_{r(tj)}$.

Für jede endlichdimensionale, stetige, unitäre Darstellung u einer Liegruppe G und jeden positiven Differentialoperator $X \in M(\mathfrak{G})$ ist

$$\mathrm{d}u^{(\infty)}(X) \geqslant 0$$

oder mittels einer Orthonormalbasis $[x_s]_s$ und $[u_{st}(g)]_{st} = [\langle x_s, u(g)x_t\rangle]_{st}$

$$X|_{g=e}\,[u_{st}(g)]_{st} \geqslant 0.$$

172. Ist χ der Charakter von u, $X \in M(\mathfrak{G})$ und $\mathrm{d}u^{(\infty)}(X) \geqslant 0$, dann ist $(X\chi)\check{}$ eine positiv definite Funktion, denn für Tupel $[\alpha_{ik}]_{ik}$ komplexer Zahlen und $[h_k]_k$ von Gruppenelementen sowie $[u_{st}(g)]_{st} = [\langle x_s, u(g)x_t\rangle]_{st}$ mit einer Orthonormalbasis $[x_s]_s$ ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{ikjl} \overline{\alpha}_{ik}\alpha_{jl}X_{ij}|_{g=h_l^{-1}h_k}\,\chi(g) \\
=\;& \sum_{ikjl} \overline{\alpha}_{ik}\alpha_{jl}X_{ij}|_{g=e}\,\chi(h_l^{-1}h_k g) \\
=\;& \sum_{\substack{ikjl\\ rst}} \overline{\alpha}_{ik}u_{st}(h_k)X_{ij}|_{g=e}\,u_{tr}(g)\alpha_{jl}u_{rs}(h_l^{-1}) \\
=\;& \sum_{kl}\sum_{s} \left[\alpha_{ik}u_{ts}(h_k^{-1})\right]^*_{(it)(k)} \left[X_{ij}|_{g=e}\,u_{tr}(g)\right]_{(it)(jr)} \left[\alpha_{jl}u_{rs}(h_l^{-1})\right]_{(jr)(l)} \\
\geqslant\;& 0
\end{aligned}$$

als Summe der Einträge einer positiven Matrix.

Positivitätskriterium für kompakte Gruppen

173. Es sei G eine kompakte Liegruppe. Jede irreduzible, stetige, unitäre Darstellung u von G ist endlichdimensional.[197] Die Menge der Charaktere irreduzibler stetiger unitärer Darstellungen bezeichet man mit $\hat{G}$. Im abelschen Fall ist das gerade die Charaktergruppe. Nach dem Satz von Peter-Weyl[198] lässt sich jede L^2-Funktion f auf G in die in $L^2(G)$ konvergente Reihe

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(e)\, f * \chi$$

mit $f * \chi(g) = \int_G f(gh)\chi(h^{-1})\mathrm{d}h$ entwickeln. Für C^∞-Funktionen f konvergiert diese Reihe sogar absolut und gleichmäßig mit allen Ableitungen,[199] also insbesondere auch punktweise.

197 [HR63, 22.13]
198 [HR70, 27.40, 27.41]
199 [War72, 4.4.3.2]

174. Es sei jetzt $X \in M(\mathfrak{G})$ und

$$\mathrm{d}u^{(\infty)}(X) \geqslant 0$$

für alle irreduziblen, stetigen, unitären Darstellungen u von G. Weiter sei $f \in M(C^\infty(G))$ positiv definit. Dann ist komponentenweise

$$Xf(e) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(e)(Xf) * \chi(e),$$

und – mit der rechtsregulären Darstellung R [200]

$$\begin{aligned}
(Xf) * \chi(e) &= \int_G (Xf)(g)\chi(g^{-1})\mathrm{d}g \\
&= \int_G (Xf)(g)\overline{\chi}(g)\mathrm{d}g \\
&= \langle \chi, Xf \rangle \\
&= \langle \chi, \mathrm{d}R^{(\infty)}(X)f \rangle \\
&= \langle \mathrm{d}R^{(\infty)}(X^*)\chi, f \rangle \\
&= \langle X^*\chi, f \rangle \\
&= \int_G f(g)\overline{X^*|_{h=g}\chi(h)}\mathrm{d}g \\
&= \int_G f(g)\overline{X^*|_{h=e}\chi(gh)}\mathrm{d}g \\
&= \int_G f(g)X|_{h=e}\overline{\chi(gh^{-1})}\mathrm{d}g \\
&= \int_G f(g)X|_{h=e}\overline{\chi(h^{-1}g)}\mathrm{d}g \\
&= \int_G f(g)X|_{h=e}\chi(g^{-1}h)\mathrm{d}g \\
&= \int_G f(g)X|_{h=g^{-1}}\chi(h)\mathrm{d}g \\
&= \int_G f(g)(X\chi)\check{}(g)\mathrm{d}g \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

da der Integrand als punktweises Tensorprodukt zweier matrixwertiger positiv definiter Funktionen positiv definit und daher das Integral nach dem Haarmaß positiv ist.[201]

175. Damit haben wir gezeigt:

Proposition: *Es sei G eine kompakte Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$. Ein Differentialoperator $X \in M(\mathfrak{G})$ ist genau dann positiv, wenn er auf allen irreduziblen, stetigen, unitären Darstellungen von G positiv ist.*

200 Beachte: Für kompakte Gruppen ist das linksinvariante Haarmaß auch rechtsinvariant, siehe [HR63, 15.13].

201 Siehe Proposition 84 Teil c) und d).

Separable Gruppen

176. Bei zusammenhängenden, abelschen sowie kompakten Liegruppen ist ein Differentialoperator $X \in M(\mathfrak{G})$ genau dann positiv, wenn

$$\mathrm{d}U^{(\infty)}(X) \geqslant 0$$

für alle irreduziblen, stetigen, unitären Darstellungen U von G.

Diese Bedingung ist bei allen Liegruppen G notwendig. Und wir werden beweisen, dass sie bei allen *separablen* Liegruppen[202] auch hinreichend ist. Da für die klassischen Gruppen die irreduziblen, stetigen, unitären Darstellungen bekannt sind, bietet dieses Kriterium – im Gegensatz zur Definition – die Chance, die positiven Differentialoperatoren auch praktisch zu bestimmen.

Der Beweis kann natürlich nicht auf die speziellen Techniken zurückgreifen, die bei abelschen und kompakten Gruppen zur Verfügung stehen. Stattdessen werden wir mittels direkter Integrale eine stetige, unitäre Darstellung auf irreduzible zurückführen.

177. Es sei also G eine separable Liegruppe, $X \in M(\mathfrak{G})$, $\mathrm{d}U^{(\infty)}(X) \geqslant 0$ für alle irreduziblen, stetigen, unitären Darstellungen U von G, und es sei $f \in M_n(C^\infty(G))$ eine positiv definite Funktion.

Dann ist zu zeigen:

$$X|_{g=e} f(g) \geqslant 0.$$

Es ist f als positiv definite Funktion ein Koeffizientenfunktional einer stetigen unitären Darstellung: Es gibt einen Hilbertraum $\mathscr{H}$, eine stetige, unitäre Darstellung $U\colon G \to \mathscr{U}(\mathscr{H})$ von G auf $\mathscr{H}$ und Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in C^\infty(U)$, so dass

$$f_{ij}(g) = \langle x_i, U(g)x_j \rangle,$$

und $\mathscr{H}$ wird aufgespannt von Vektoren der Form $U(g)x_i$ für $g \in G$ oder auch – wegen der Stetigkeit von U – für g aus einer dichten Teilmenge von G. Da G separabel ist, ist also auch $\mathscr{H}$ separabel.

Direkte Integrale

Direktes Integral **178.** Nun schreiben wir U als *direktes Integral* irreduzibler, stetiger, unitärer Darstellungen U_λ:

Es gibt zu einer kommutativen Von-Neumann-Algebra $\mathscr{A}$ im Kommutanten von $U(G)$ einen kompakten, metrisierbaren Raum Ω, ein endliches Borelmaß μ auf Ω, zu jedem $\lambda \in \Omega$ einen Hilbertraum $\mathscr{H}_\lambda$ sowie eine lineare Abbildung

$$\mathscr{H} \to \prod_{\lambda\in\Omega} \mathscr{H}_\lambda/\sim;\; x \mapsto [x_\lambda]_\lambda/\sim$$

[202] Zusammenhängende Liegruppen sind separabel, genauso wie Liegruppen mit höchstens abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten.

– dabei bedeutet die Äquivalenzrelation $\sim$ Gleichheit fast überall – und einen $*$-Homomorphismus

$$U(G)'' \to \prod_{\lambda\in\Omega} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\lambda)/\sim;\ T \mapsto [T_\lambda]_\lambda/\sim\,,$$

so dass für $x, y \in \mathscr{H}$ und $T \in U(G)''$ (bei beliebiger Wahl der Vertreter) gilt (inklusive Existenz des Integrals):

$$\langle x, Ty\rangle = \int_\Omega \langle x_\lambda, T_\lambda y_\lambda\rangle\,\mathrm{d}\mu(\lambda).$$ [203]

Weiter ist für $T \in U(G)''$

$$\|T\| = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \|T_\lambda\| \leqslant \alpha \text{ für fast alle } \lambda\}.$$ [204]

Die Darstellung U von G induziert eine $*$-Darstellung U nicht nur der Gruppenalgebra, sondern der ganzen Maßalgebra[205] von G durch Operatoren aus der von $U(G)$ erzeugten Von-Neumann-Algebra $U(G)''$,[206] und diese enthält die Unteralgebra der absolutstetigen Maße, die wir über ihre Dichte mit der Faltungsalgebra $L^1(G)$ identifizieren können. Es gilt für $f \in L^1(G)$ und $x, y \in \mathscr{H}$:

$$\langle x, U(f)y\rangle = \int_G f(g)\langle x, U(g)y\rangle\,\mathrm{d}g$$

und $\|U(f)\| \leqslant \|f\|_1$.[207]

Da $L^1(G)$ separabel und U auf $L^1(G)$ beschränkt ist, können wir bei der Zerlegung von $U(f)$ in die $U(f)_\lambda$ eine *abzählbare* Menge von Ausnahmenullmengen mit Vereinigung N_1 und eine Wahl von Vertretern finden, so dass für alle $\lambda \in \Omega\setminus N_1$ die Abbildung $f \mapsto U(f)_\lambda$ eine beschränkte $*$-Darstellung von $L^1(G)$ auf $\mathscr{H}_\lambda$ ist.[208]

203 [Dix69, Chapitre II, speziell § 6, Théorème 2; § 3, Proposition 3 und Théorème 1]. Dabei braucht man die Separabilität von $\mathscr{H}$. Zur Theorie direkter Integrale siehe auch [KR86] und [Wen96], zur Zerlegung unitärer Darstellungen [Mac76]. Die Konstruktion in [Dix69] ist moderner und durchsichtiger als in [Mac76] und [KR86].

204 [Dix69, Chapitre II, § 2, Proposition 2]

205 Die Gruppenalgebra besteht aus den Maßen mit endlichem Träger.

206 [HR63, 22.3]

207 [HR63, 22.3]. Das ist genau die Konstruktion, die wir beim Beweis des Approximationslemmas 101 zur Definition von $\int_G f(g)U(g)\,\mathrm{d}g$ angewandt haben.

208 Die von einer abzählbaren, dichten Teilmenge erzeugte $*$-Unteralgebra $\mathscr{B}$ von $L^1(G)$ ist ebenfalls abzählbar und dicht. Wählen wir zu $f \in \mathscr{A}$ einen Vertreter $[U(f)_\lambda]_\lambda$ der Zerlegung von $U(f)$, so ist bis auf eine abzählbare Menge von Ausnahmenullmengen mit Vereinigung N_1 die Abbildung $f \mapsto U(f)_\lambda$ eine beschränkte $*$-Darstellung von $\mathscr{B}$.

Wählen wir zu jedem $f \in L^1(G)$ eine Folge $f_n \to f$ aus $\mathscr{B}$ und setzen wir für $\lambda \in \Omega\setminus N_1$

$$U(f)_\lambda = \lim_{n\to\infty} U(f_n)_\lambda,$$

so ist $f \mapsto U(f)_\lambda$ eine beschränkte $*$-Darstellung von $L^1(G)$ und $[U(f)_\lambda]_\lambda/\sim$ die Zerlegung von $U(f)$.

Im Beweis des Approximationslemmas 101 haben wir eine Folge von Funktionen $F_n \in L^1(G)$ angegeben, so dass $U(F_n)$ stark gegen $\mathbb{1}_{\mathscr{H}}$ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge n_k, so dass für alle λ außerhalb einer Nullmenge N_2 die Folge $U(F_{n_k})_\lambda$ gegen $\mathbb{1}_{\mathscr{H}_\lambda}$ konvergiert.[209] Das bedeutet, zu jeden $x_\lambda \in \mathscr{H}_\lambda \setminus \{0\}$ gibt es eine Funktion $f \in L^1(G)$, so dass $U(f)_\lambda x_\lambda \neq 0$ ist.

Für λ außerhalb $N_1 \cup N_2$ gibt es dann eine stetige, unitäre Darstellung U_λ von G, so dass für $f \in L^1(G)$ gilt:

$$U_\lambda(f) = U(f)_\lambda.^{210}$$

Nun konvergiert – wieder mit den Funktionen F_n aus dem Beweis des Approximationslemmas – für $g \in G$ die Folge $U(g)U(F_n) = U(F_n \circ L_{g^{-1}})$ stark gegen $U(g)$, also konvergiert eine Teilfolge von $U(F_n \circ L_{g^{-1}})_\lambda$ für fast alle λ stark gegen $U(g)_\lambda$,[211] andererseits konvergiert außerhalb $N_1 \cup N_2$

$$U(F_n \circ L_{g^{-1}})_\lambda = U_\lambda(F_n \circ L_{g^{-1}})$$

stark gegen $U_\lambda(g)$, und damit ist für fast alle λ

$$U(g)_\lambda = U_\lambda(g).$$

Wenn wir nun die Von-Neumann-Algebra $\mathscr{A}$, mit der wir gestartet sind, *maximal kommutativ* in $U(G)'$ wählen, sind fast alle Darstellungen U_λ von G irreduzibel.[212]

Da es bei der Konstruktion auf Nullmengen nicht ankommt, können wir annehmen: Zu jeden $\lambda \in \Omega$ gibt es eine irreduzible, stetige, unitäre Darstellung U_λ von G auf $\mathscr{H}_\lambda$, so dass für alle $x, y \in \mathscr{H}$ und $g \in G$ gilt:

$$\langle x, U(g)y \rangle = \int_\Omega \langle x_\lambda, U_\lambda(g) y_\lambda \rangle \, \mathrm{d}\mu(\lambda).$$

179. Für Vektoren $x, y \in \mathscr{H}$ ist die Funktion

$$(\lambda, g) \mapsto \langle x_\lambda, U_\lambda(g) y_\lambda \rangle$$

209 [Dix69, Chapitre II, § 2, Proposition 4]
210 [HR63, 22.10], vergleiche auch [Mac76, Theorem 2.8].
211 [Dix69, Chapitre II, § 2, Proposition 4]
212 [Dix69, Chapitre II, § 3, Corollaire 1 (i) zu Théorème 1]

(bei beliebiger Wahl der Vertreter $[x_\lambda]_\lambda$ und $[y_\lambda]_\lambda$) auf $\Omega \times G$ messbar.[213] Sind f_1 und $f_2 \in C_c^\infty(G)$, so ist

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_G f_1(g)U(g)x\,\mathrm{d}g, \int_G f_2(h)U(h)y\,\mathrm{d}h \right\rangle \\
= \; & \int_G \int_G \overline{f_1(g)}\, f_2(h) \langle x, U(g^{-1}h)y\rangle \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\
= \; & \int_G \int_G \overline{f_1(g)}\, f_2(h) \int_\Omega \langle x_\lambda, U_\lambda(g^{-1}h)y_\lambda\rangle \,\mathrm{d}\mu(\lambda)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\
= \; & \int_\Omega \int_G \int_G \overline{f_1(g)}\, f_2(h) \langle x_\lambda, U_\lambda(g^{-1}h)y_\lambda\rangle \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\mu(\lambda) \quad \text{(Fubini-Tonelli)} \\
= \; & \int_\Omega \left\langle \int_G f_1(g)U_\lambda(g)x_\lambda\,\mathrm{d}g, \int_G f_2(h)U_\lambda(h)y_\lambda\,\mathrm{d}h \right\rangle \mathrm{d}\mu(\lambda).
\end{aligned}$$

(Diese Gleichheit kann man auch auf die Formel $U(f)_\lambda = U_\lambda(f)$ aus dem vorigen Paragraphen zurückführen.)

Positivitätskriterium für separable Gruppen

Kehren wir zu dem Differentialoperator X und der positiv definiten Funktion f zurück. Die C^∞-Vektoren x_i, die f als Koeffizientenfunktional von U liefern, können nach dem Zusatz zum Approximationslemma 101 durch Vektoren der Form $\int_G f_n(g)U(g)x_i\,\mathrm{d}g$ mit $f_n \in C_c^\infty$ in der $\mathfrak{G}$-Topologie approximiert beziehungsweise, wenn man [DM78] heranzieht, sogar exakt in der Form $\int_G f_i(g)U(g)\,\mathrm{d}g\,y_i$ mit $y_i \in \mathscr{H}$ und $f_i \in C_c^\infty(G)$ dargestellt werden.

Es ist ($\check{f}(g) = f(g^{-1})$)

$$\begin{aligned}
& X_{kl}|_{h=e} \left\langle \int_G f_n(g)U(g)x_i\,\mathrm{d}g, U(h)\int_G f_n(g)U(g)x_j\,\mathrm{d}g \right\rangle \\
= \; & X_{kl}|_{h=e} \left\langle \int_G f_n(g)U(g)x_i\,\mathrm{d}g, \int_G f_n(g)U(hg)x_j\,\mathrm{d}g \right\rangle \\
= \; & X_{kl}|_{h=e} \left\langle \int_G f_n(g)U(g)x_i\,\mathrm{d}g, \int_G f_n(h^{-1}g)U(g)x_j\,\mathrm{d}g \right\rangle \\
= \; & \left\langle \int_G f_n(g)U(g)x_i\,\mathrm{d}g, \int_G X_{kl}|_{h=e} f_n(h^{-1}g)U(g)x_j\,\mathrm{d}g \right\rangle \\
= \; & \left\langle \int_G f_n(g)U(g)x_i\,\mathrm{d}g, \int_G X_{kl}|_{h=e} \check{f}_n(g^{-1}h)U(g)x_j\,\mathrm{d}g \right\rangle \\
= \; & \left\langle \int_G f_n(g)U(g)x_i\,\mathrm{d}g, \int_G X_{kl}|_{h=g^{-1}} \check{f}_n(h)U(g)x_j\,\mathrm{d}g \right\rangle \\
= \; & \left\langle \int_G f_n(g)U(g)x_i\,\mathrm{d}g, \int_G (X_{kl}\check{f}_n)\check{}\,(h)U(g)x_j\,\mathrm{d}g \right\rangle
\end{aligned}$$

[213] [Mac52, Lemma 9.2]

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left\langle \int_G f_n(g) U_\lambda(g)(x_i)_\lambda \,\mathrm{d}g, \int_G (X_{kl}\check{f}_n)\check{}(h) U_\lambda(g)(x_j)_\lambda \,\mathrm{d}g \right\rangle \mathrm{d}\mu(\lambda)\ ^{214} \\
&\vdots \\
&= \int_\Omega X_{kl}|_{h=e} \left\langle \int_G f_n(g) U_\lambda(g)(x_i)_\lambda \,\mathrm{d}g, U(h) \int_G f_n(g) U_\lambda(g)(x_j)_\lambda \,\mathrm{d}g \right\rangle \mathrm{d}\mu(\lambda) \\
&= \int_\Omega \left\langle \int_G f_n(g) U_\lambda(g)(x_i)_\lambda \,\mathrm{d}g, \mathrm{d}U_\lambda^{(\infty)}(X_{kl}) \int_G f_n(g) U_\lambda(g)(x_j)_\lambda \,\mathrm{d}g \right\rangle \mathrm{d}\mu(\lambda),
\end{aligned}
$$

und das ist in den Indizes $(ik)(jl)$ eine positive Matrix. Damit ist auch $X|_{g=e}f(g)$ positiv als Grenzwert für $n \to \infty$.

180. Damit gilt:

Proposition: *Es sei G eine separable Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einhüllender Algebra $\mathfrak{G}$. Ein Differentialoperator $X \in M(\mathfrak{G})$ ist genau dann positiv, wenn $\mathrm{d}U^{(\infty)}(X)$ positiv ist für alle irreduziblen, stetigen, unitären Darstellungen U von G.*

Darin sind auch die vorher bewiesenen Positivitätskriterien für zusammenhängende abelsche und kompakte Gruppen enthalten.

Und zum Schluss: Ein paar Fragen, die das Leben stellt . . .

[. . .]

Wer beißt schon gern in andrer Leute Kragen?
Und wieso wird in unserm Eisschrank nie geheizt?
Es gibt so manche dieser ausgefallnen Fragen,
Die einen klugen Kopf zum Überlegen reizt.

Von diesen Fragen, die das Leben stellt,
Von diesen Fragen, die das Leben an dich stellt . . .
[. . .]
Noch Fragen?
ULRICH ROSKI[215]

[214] wie in Paragraph 179 vorgerechnet

[215] ULRICH ROSKI: »Fragen, die das Leben stellt«. . . . *daß dich nicht die Schweine beißen.* Schallplatte. TELDEC »Telefunken-Decca« Schallplatten-Ges. mbH., Hamburg.

181. Wie jede wissenschaftliche Arbeit gibt auch diese nicht nur Antworten, sondern führt auch zu neuen Fragestellungen. Ich fände es zum Beispiel interessant, Folgendes noch zu wissen:

- Gibt es auch in anderen Bereichen der Mathematik Kategorien, die auf Graphen operieren?
- Welche Teile der matrixkonvexen Analysis gelten auch in allgemeineren Moduln?
- Nicht jede algebraische Matrixordnung auf der einhüllenden Algebra $\mathfrak{G}$ einer reellen, endlichdimensionalen Liealgebra stammt von einer Liegruppe G, wie wir in Paragraph 168 gesehen haben. Lassen sich die Matrixordnungen, die von einer Gruppe stammen, charakterisieren?
- Lässt sich die Matrixordnung auf der einhüllenden Algebra $\mathfrak{G}$ einer reellen, endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$, die zur zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden Gruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ gehört, einfach beschreiben, so dass man leicht sieht, warum jeder Liealgebrenhomomorphismus von $\mathfrak{g}$ in die Liealgebra einer Liegruppe automatisch vollständig positiv ist?
- Was lässt sich über unendlichdimensionale Liegruppen sagen? Es gibt keine allgemein anerkannte Definition, was eine unendlichdimensionale Liegruppe sein sollte. Jeder Autor hat sein Lieblingsbeispiel und versucht, dieses mit einer Definition zu erfassen, siehe etwa [Kac85] für einige Ansätze. Wir haben hier das einzige vorkommende Beispiel, die unitäre Gruppe $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ eines Hilbertraums, *ad hoc* behandelt und nicht im Rahmen einer allgemeinen Theorie.
- Was lässt sich über lokalkompakte Gruppen sagen? Viele lokalkompakte Gruppen lassen sich als projektive Limites von Liegruppen darstellen,[216] und einige Konzepte im Zusammenhang mit Differenzierbarkeit wie die Liealgebra und C^∞-Funktionen lassen sich auf diese übertragen, siehe etwa [Bru61].
- Wie sieht es mit Liegruppoiden ([Mac87]) aus?
- Und mit Quantengruppen ([Kas95])?
- Große Teile der Quantenmechanik kann man als Darstellungstheorie gewisser Liealgebren formulieren, und die Frage nach der Exaktheit von Darstellungen spielt dabei eine Rolle. Kann man die Matrixordnung oder die vollständige Positivität einer Darstellung physikalisch interpretieren?
- *Versteht jemand außer mir diese Arbeit?*[217]

---

216 [MZ55, 4.6], [Kap71, Theorem 18].

217 Fragten sich Mirko (Chemiker) und Peter (Journalist) beim Korrekturlesen.

Literatur

[Bet97] BETZ, BENEDIKT: *Matrixkonvexe Analysis*. Diplomarbeit. Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1997.

[Bro62] BROWDER, FELIX E.: »Analyticity and partial differential equations, I«. *Amer. J. Math.* 84 (1962): 666–710.

[Bru61] BRUHAT, FRANÇOIS: »Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes $\mathfrak{p}$-adiques«. *Bull. Soc. Math. France* 89 (1961): 43–75.

[Chu01] CHUNG, KAI LAI: *A course in probability theory*. Third edition. Academic Press Inc., San Diego, CA 2001.

[Dix69] DIXMIER, JACQUES: *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*. Deuxième édition, revue et augmentée. Gauthier-Villars, Paris 1969.

[DM78] DIXMIER, JACQUES, PAUL MALLIAVIN: »Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables«. *Bull. Sci. Math. (2)* 102 (1978): 305–330.

[ER00] EFFROS, EDWARD G., ZHONG-JIN RUAN: *Operator Spaces*. London Mathematical Society Monographs, new Series, volume 23. Oxford University Press, New York 2000.

[EW97] EFFROS, EDWARD G., CORRAN WEBSTER: »Operator analogues of locally convex spaces«. *Operator Algebras and Applications (Samos, 1996)*. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., volume 495. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1997. Seite 163–207

[GLR85] GHEZ, P., R. LIMA, JOHN E. ROBERTS: »W^*-categories«. *Pacific J. Math.* 120 (1985): 79–109.

[Gro73] GROTHENDIECK, ALEXANDRE: *Topological Vector Spaces*. Übersetzt von ORLANDO CHALJUB. Notes on Mathematics and its Applications. Gordon and Breach Science Publishers, New York 1973.

[Hil88] HILBERT, DAVID: »Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten«. *Mathematische Annalen* 32 (1888): 342–350.

[Hil00] HILBERT, DAVID: »Mathematische Probleme«. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* (1900): 253–297.

[HN91] HILGERT, JOACHIM, KARL-HERMANN NEEB: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren.* Vieweg, Braunschweig 1991.

[HR63] HEWITT, EDWIN, KENNETH A. ROSS: *Abstract Harmonic Analysis. Volume I: Structure of Topological Groups, Integration Theory, Group Representations.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 115. Springer-Verlag, Berlin 1963.

[HR70] HEWITT, EDWIN, KENNETH A. ROSS: *Abstract Harmonic Analysis. Volume II: Structure and Analysis for Compact Groups, Analysis on Locally Compact Abelian Groups.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 152. Springer-Verlag, New York 1970.

[Jor88] JORGENSEN, PALLE E. T.: *Operators and Representation Theorie: Canonical Models for Algebras of Operators Arising in Quantum Mechanics.* Notas de Matemática, 120. North-Holland Publishing Co, Amsterdam 1988.

[Kac85] KAC, VICTOR G. (editor): *Infinite-Dimensional Groups with Applications*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, volume 4. Springer-Verlag, New York 1985.

[Kap71] KAPLANSKY, IRVING: *Lie Algebras and Locally Compact Groups.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL 1971.

[Kas95] KASSEL, CHRISTIAN: *Quantum Groups.* Graduate Texts in Mathematics, volume 155. Springer-Verlag, New York 1995.

[Kna86] KNAPP, ANTHONY W.: *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples.* Princeton Mathematical Series, Volume 36 Princeton University Press, Princeton, NJ 1986.

[Kön60] KÖNIG, HEINZ: »Einige Eigenschaften der Fourier-Stieltjes-Transformation«. *Arch. Math.* 11 (1960): 352–365.

[KR83] KADISON, RICHARD V., JOHN R. RINGROSE: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory.* Pure and Applied Mathematics, volume 100. Academic Press Inc., New York 1983.

[KR86] KADISON, RICHARD V., JOHN R. RINGROSE: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume II: Advanced Theory.* Pure and Applied Mathematics, volume 100. Academic Press Inc., Orlando, FL 1986.

[Lam02] LAMBERT, ANSELM: *Operatorfolgenräume: Eine Kategorie auf dem Weg von den Banachräumen zu den Operatorräumen.* Dissertation. Universität des Saarlandes, Saarbrücken 2002.

[Mac52] MACKEY, GEORGE W.: »Induced representations of locally compact groups. I«. *Ann. of Math. (2)* 55 (1952): 101–139.

[Mac76] MACKEY, GEORGE W.: *The Theory of Unitary Group Representations.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL 1976.

[Mac87] MACKENZIE, KIRILL: *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry.* London Mathematical Society Lecture Note Series, volume 124. Cambridge University Press, Cambridge 1987.

[Mag00] MAGAJNA, BOJAN: »C^*-convex sets and completely bounded bimodule homomorphisms«. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 130 (2000): 375–387.

[ML88] MAC LANE, SAUNDERS: *Categories for the Working Mathematician.* Fourth corrected printing. Graduate Texts in Mathematics, volume 5. Springer-Verlag, New York 1988.

[MZ55] MONTGOMERY, DEANE, LEO ZIPPIN: *Topological Transformation Groups.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 1. Interscience Publishers Inc., New York 1955

[Neu87] NEUHARDT, ERWIN: *Zur Theorie der Kernoperatoren auf L^p-Räumen von semifiniten Von Neumann Algebren.* Dissertation. Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1987.

[Ped89] PEDERSEN, GERT K.: *Analysis Now.* Graduate Texts in Mathematics, volume 118. Springer-Verlag, New York 1989.

[Pop00] POP, CIPRIAN: »Bimodules normés représentables sur des espaces hilbertiens«. *Operator Theoretical Methods (Timişoara, 1998).* Theta Found., Bukarest 2000. S. 331–370.

[Pow71] POWERS, ROBERT T.: »Self-adjoint algebras of unbounded operators«. *Comm. Math. Phys.* 21 (1971): 85–124.

[Pow74] POWERS, ROBERT T.: »Selfadjoint algebras of unbounded operators. II«. *Trans. Amer. Math. Soc.* 187 (1974): 261–293.

[Rud62] Rudin, Walter: *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12. Interscience Publishers Inc., New York 1962.

[Rud73] Rudin, Walter: *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York 1973.

[Rud00] Rudin, Walter: »Sums of squares of polynomials«. *Amer. Math. Monthly* 107 (2000): 813–821.

[Spi70] Spivak, Michael: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Volume One.* Published by M. Spivak, Brandeis Univ., Waltham, Mass. 1970.

[SZ79] Strătilă, Şerban, László Zsidó: *Lectures on Von Neumann Algebras.* Übersetzt von Silviu Teleman. Revision of the 1975 original. Editura Academiei, Bukarest 1979.

[Ter81] Terp, Marianne: *L^p spaces associated with von Neumann algebras. Notes.* Report No. 3a+3b, Københavns Universitets Matematiske Institut, Juni 1981.

[War72] Warner, Garth: *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups. I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188. Springer-Verlag, New York 1972.

[War83] Warner, Frank W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics, volume 94. Corrected reprint of the 1971 edition. Springer-Verlag, New York 1983.

[Wen96] Wendt, Michael A.: »Measurable Hilbert sheaves«. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 61 (1996): 189–215.