

**Ein stark konsistenter Kleinst-Quadrate-Schätzer in
einem linearen Fuzzy-Regressionsmodell mit fuzzy
Parametern und fuzzy abhängigen Variablen**

Dissertation zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)

der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

Christoph Stahl

Saarbrücken 2004

Tag der Disputation: 28. Juni 2004

Dekan: Prof. Dr. Ralph Friedmann

Erstberichterstatter: Prof. Dr. Volker Steinmetz

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. Ralph Friedmann

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	iii
Abbildungsverzeichnis	vii
Abkürzungsverzeichnis	viii
Einleitung	1
1 Fuzzy-Mengen	10
1.1 Grundlagen	11
1.2 Mathematische Strukturen auf Räumen von Fuzzy-Mengen	27
2 Fuzzy-Zufallsvariablen	45
2.1 Definition von Fuzzy-Zufallsvariablen	46
2.2 Der Aumann-Erwartungswert von Fuzzy-Zufallsvariablen	51
2.3 Die Fréchet-Varianz von Fuzzy-Zufallsvariablen	54
3 Ein lineares Fuzzy-Regressionsmodell	58
3.1 Das klassische lineare Regressionsmodell	60
3.2 Das lineare Fuzzy-Regressionsmodell	64
3.3 Logit-Modelle	68
3.4 Die Identifizierbarkeit des Regressionsparametervektors im LFRM	76
3.5 Eigenschaften der Regressionsfunktion im LFRM	84
4 Die Kleinst-Quadrate-Schätzung	90
4.1 Die Kleinst-Quadrate-Schätzung im LRM	91

4.2	Die Kleinst-Quadrate-Schätzung im LFRM	93
5	Die starke Konsistenz des Kleinst-Quadrate-Schätzers	103
5.1	Die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LRM	104
5.2	Die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LFRM	107
6	Fazit und Ausblick	111
A	Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie	115
B	Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis und der Topologie	120
	Literaturverzeichnis	123

Symbolverzeichnis

1_A	Indikatorfunktion der scharfen Menge A	11
\oplus	Addition auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$	27
$\lambda \odot$	Skalarmultiplikation mit λ auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$	27
\oplus_F	Addition auf $F\mathfrak{P}(\mathbb{R})$	31
$\lambda \odot_F$	Skalarmultiplikation mit λ auf $F\mathfrak{P}(\mathbb{R})$	31
\oplus_F^n	Addition auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$	44
$\lambda \odot_F^n$	Skalarmultiplikation mit λ auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$	44
$\tilde{A}^{\geq \alpha}$	α -Schnitt der Fuzzy-Menge \tilde{A}	18
$\tilde{A}^{> \alpha}$	scharfer α -Schnitt der Fuzzy-Menge \tilde{A}	18
$\underline{\hat{B}}$	Kleinst-Quadrate-Schätzfunktion im LFRM	98
$\underline{\tilde{\beta}}$	unbekannter Regressionsparametervektor im LFRM	66
$\underline{\hat{\beta}}(\underline{y})$	Kleinst-Quadrate-Schätzwert für $\underline{\tilde{\beta}}$ im LFRM	98
\mathcal{B}_k	Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R}^k	46
$\mathcal{B}_{\tau_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)}}$	durch $\tau_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)}$ erzeugte σ -Algebra über $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$	48
$\mathcal{B}_{\tau_{\rho_2}}$	durch τ_{ρ_2} erzeugte σ -Algebra über $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$	48
δ_p	L_p -Metrik auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$	37

$E^A \check{Y}$	Aumann-Erwartungswert der zufälligen kompakten Menge \check{Y}	117
$\tilde{E}^A \tilde{Y}$	Aumann-Erwartungswert der Fuzzy-Zufallsvariablen \tilde{Y}	51
$\langle f \rangle$	Äquivalenzklasse zu einer Abbildung f	122
$f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$	nach dem Erweiterungsprinzip erweiterte Abbildung	28
$F \mathfrak{P}(\Omega)$	Fuzzy-Potenzmenge der Menge Ω	15
$F^{\text{no}}(\Omega)$	Raum aller normalen Fuzzy-Mengen in Ω	18
$F \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$	Raum aller Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k	20
$F^{\text{b}}(\mathbb{R}^k)$	Raum aller gleichmäßig beschränkten Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k	20
$F_c(\mathbb{R}^k)$	Raum aller kompakten Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k	20
$F_{\text{co}}(\mathbb{R}^k)$	Raum aller konvexen Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k	20
$F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$	Raum aller normalen, konvexen, kompakten Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k	20
$F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$	Raum aller Fuzzy-Mengen in $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ mit p -fach $\lambda^1 \otimes \lambda^{S^{k-1}}$ integrierbarer Stützfunktion	37
$F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$	Raum aller Fuzzy-Mengen in $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ mit 2-fach $\lambda^1 \otimes \lambda^{S^0}$ integrierbarer Stützfunktion	37
$\tilde{\mathbf{0}}$	Fuzzy-Null in \mathbb{R}^k	30
$\tilde{0}$	Fuzzy-Null in \mathbb{R}	30
Γ	Parametrisierung der Verteilungsannahme W	76
$j_{F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)}$	Standardeinbettung von $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ in $L_p([0, 1] \times S^{k-1})$	37
$j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}$	Standardeinbettung von $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ in $L_2([0, 1] \times S^0)$	37
$\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$	Raum der nichtleeren, kompakten, konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^k	35
l_Y^α	Randlinienfunktion von \tilde{Y}	49

$L_p([0, 1] \times S^{k-1})$	L_p -Raum auf $[0, 1] \times S^{k-1}$	37
$L_2([0, 1] \times S^0)$	L_2 -Raum auf $[0, 1] \times S^0$	37
$(M_L, M_R, l, r)_{LR}$	Fuzzy-Intervall vom LR -Typ	23
$(M, l, r)_{LR}$	Fuzzy-Zahl vom LR -Typ	23
$(M_L, M_R, l, r)_{\Delta}$	Fuzzy-Intervall in Trapezgestalt	24
$(M, l, r)_{\Delta}$	Fuzzy-Zahl in Dreiecksgestalt	24
μ_A	Indikatorfunktion der scharfen Menge A	11
$\mu_{\tilde{A}}$	Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-Menge \tilde{A}	15
\mathbb{N}	die Menge der natürlichen Zahlen	20
$\{0, 1\}^{\Omega}$	Menge aller Abbildungen von $\Omega \rightarrow \{0, 1\}$	14
Ψ	Standardeinbettung von \mathbb{R}^k in $F \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$	21
\mathbb{Q}	die Menge der rationalen Zahlen	47
$Q_{\tilde{Y}}$	Verteilung der Fuzzy-Zufallsvariablen \tilde{Y}	48
$Q_{\underline{\tilde{Y}}}$	Verteilung der Fuzzy-Zufallsvariablen $\underline{\tilde{Y}}$	50
r_Y^{α}	Randlinienfunktion von \tilde{Y}	49
\mathbb{R}	die Menge der reellen Zahlen	13
\mathbb{R}^k	k -faches Kartesisches Produkt von \mathbb{R}	20
ρ_p	L_p -Metrik auf $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$	38
ρ_2	L_2 -Metrik auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$	38
$\rho_{2,n}$	L_2 -Metrik auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$	43
s_A	Stützfunktion der beschränkten (scharfen) Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$	34

$s_{\tilde{A}}$	Stützfunktion der Fuzzy-Menge \tilde{A}	35
S^{k-1}	Einheitssphäre bzgl. der euklidischen Norm auf \mathbb{R}^k	37
$\text{supp } \tilde{A}$	Träger der Fuzzy-Menge \tilde{A}	18
$\tau_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)}$	Produkttopologie auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$	48
$\tau_{P\rho_2}$	Produkttopologie auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)^{]0,1[\cap \mathbb{Q}}$	48
$\widetilde{\text{Var}}^F \tilde{Y}$	Fréchet-Varianz der Fuzzy-Zufallsvariablen \tilde{Y}	56
W	Verteilungsannahme für $\underline{\tilde{Y}} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T)'$ im LFRM	76
X	Regressionsfunktion, Regressionsmatrix im LFRM (und LRM)	66
X^-	Abbildung mit $X^-(X(\underline{\tilde{\gamma}})) = \underline{\tilde{\gamma}}$, $\forall \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ im LFRM	84
$\ X\ $	minimale Lipschitz-Konstante der Abbildung X im LFRM	85
$\ X^-\ $	minimale Lipschitz-Konstante der Abbildung X^- im LFRM	85
$ X $	Matrix der Beträge der Elemente der Matrix X	80
x_{ti}	unabhängige Variablen im LFRM (und LRM)	66
\tilde{Y}	$F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ -wertige Fuzzy-Zufallsvariable	48
$\underline{\tilde{Y}}$	$F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ -wertige Fuzzy-Zufallsvariable	50
$\{Y_t, x_{ti}\}$	(scharfes) Regressionsmodell (LRM)	62
(\underline{y}, X)	Beobachtungswertmatrix im LRM	62
$\{\tilde{Y}_t, x_{ti}\}$	Fuzzy-Regressionsmodell (LFRM)	66
\tilde{Y}_t	abhängige Variablen im LFRM	66
$(\underline{\tilde{y}}, X)$	Beobachtungswertmatrix im LFRM	66

Abbildungsverzeichnis

1.1	scharfe Menge $K \in \mathfrak{P}(\Omega)$	16
1.2	unscharfe Menge $\tilde{K} \in \text{F}\mathfrak{P}(\Omega)$	17
1.3	Fuzzy-Menge „mittlerer“ Zinssatz	17
1.4	Referenzfunktion L_1	22
1.5	Referenzfunktion L_2	22
1.6	Referenzfunktion L_3	23
3.1	binäre Variable „Kreditwürdigkeit“	72
3.2	Klasseneinteilung mittels der relativen Häufigkeiten	72
3.3	Fuzzy-Menge „Kreditwürdigkeit“	74

Abkürzungsverzeichnis

BLUE	Best Linear Unbiased Estimator: bester, linearer, unverzerrter Schätzer
bzw.	beziehungsweise
bzgl.	bezüglich
d.h.	das heißt
engl.	englisch
et al.	et altera: und andere
i.A.	im Allgemeinen
KQ	Kleinst-Quadrate
LFRM	lineares Fuzzy-Regressionsmodell
LRM	lineares Regressionsmodell
MST	Measurable Selection Theorem
o.B.d.A	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

Einleitung

„Jeder Kreditsuchende erhält den Kredit, den er verträgt“ (Auskunft eines Kreditsachbearbeiters, so zitiert in [Bagus], Seite 15), „Schwache sollen mehr zahlen“ (Überschrift eines Artikels in der Saarbrücker Zeitung vom 23.10.01, in dem es um die neuen Richtlinien zur Eigenkapitalunterlegung von Krediten an Unternehmen geht, genannt Basel II.), „Im Kern geht es darum, die Kapitalanforderung an Banken stärker als bisher vom ökonomischen Risiko abhängig zu machen ...“ (Artikel zu Basel II, siehe [Bundesbank1], Seite 15).

Im alltäglichen Leben, in Zeitungsartikeln oder auch in wissenschaftlichen Veröffentlichungen wird man oft mit solchen vagen, unpräzisen Äußerungen konfrontiert. Die obigen Aussagen bzw. Regeln klingen an sich sehr einfach und plausibel, sind aber in der Praxis nur schwer adäquat zu realisieren. Es gibt keinen allgemein anerkannten, „richtigen“ Weg die Grenzen der „Verträglichkeit“ für einen Kreditsuchenden festzulegen. Begriffe wie „schwach“ bzw. „mehr zahlen“ lassen viele Interpretationen zu. Auch ein Begriff wie „ökonomisches Risiko“ ist nicht klar definiert.

Bei statistischen Untersuchungen sind Fehler, Unsicherheiten und Ungenauigkeiten in der Regel nicht zu vermeiden. „Ein Blick auf irgendwelche ökonomischen Daten lehrt, daß in fast jeder wirtschaftsstatistischen Reihe Meßfehler auftreten“ (siehe [Schönfeld], Band 2, Seite 106). In der mathematischen Statistik wird versucht diese Fehler zu kontrollieren bzw. die zugrunde liegende Unschärfe adäquat zu modellieren.

Grundsätzlich unterscheidet man drei Typen von Unschärfe, die verschiedene Arten von Fehlern hervorrufen können:

- Von **epistemischer Unschärfe** spricht man dann, wenn der Gegenstand der Unter-

suchung bzw. das Untersuchungsmerkmal zwar exakt ist, aber nicht exakt beobachtbar ist. Eine plastische Vorstellung ist die einer Milchglasscheibe, die den darunter befindlichen Gegenstand unscharf erscheinen lässt. Oft wird auch von **Wahrnehmungsunschärfe** gesprochen und der daraus resultierende Fehler als **Erhebungsfehler** bezeichnet. Ein klassisches Beispiel für diese Art von Unschärfe sind Messgeräte, die üblicherweise mit einer gewissen Toleranzangabe versehen sind. Es gibt dann zwar einen unbekanntem wahren Wert für die zu messende Größe, das Messgerät liefert als Ergebnis aber nur ein Intervall, in dem der wahre Wert liegt. Bei statistischen Erhebungen können beispielsweise Übertragungsfehler oder bewusst falsche Antworten Ursachen von epistemischer Unschärfe sein.

- **Physikalische Unschärfe** liegt dann vor, wenn der Gegenstand der Untersuchung in sich unscharf ist. Vorstellen kann man sich beispielsweise einen Tintenklecks auf einem Stück Löschpapier, bei dem keine klaren Grenzen zu erkennen sind und somit nur schwer festzulegen ist, wo der Klecks anfängt bzw. aufhört. Auch der Begriff der „Verträglichkeit“ eines Kredits ist nicht klar definiert. Die Frage ist dann, wie ein solcher Begriff oder ein solches Merkmal adäquat modelliert werden kann. Es ist beispielsweise fraglich, ob der Begriff „Kreditwürdigkeit“ durch eine 0-1-Variable („1“ entspricht „kreditwürdig“, „0“ entspricht „nicht kreditwürdig“) adäquat modelliert wird oder ob andere Modellierungen sinnvoller sind bzw. dem beabsichtigten Untersuchungsziel eher entsprechen. Berücksichtigt man die vorhandene physikalische Unschärfe nicht oder nur teilweise, kann der sogenannte **Adäquationsfehler** entstehen.
- Der dritte Typ von Unschärfe ist die sogenannte **stochastische Unschärfe**. Sie tritt beispielsweise auf, wenn bei statistischen Untersuchungen keine Vollerhebung durchgeführt wird, sondern nur eine Teilgesamtheit untersucht wird. Der dadurch entstehende Fehler wird als **zufälliger Fehler** bezeichnet. Charakteristisch für diesen Typ Unschärfe ist, dass die interessierenden Phänomene zwar präzise definiert sind und prinzipiell exakt anzugeben sind, über ihr Auftreten jedoch Ungewissheit herrscht.

In der klassischen mathematischen Statistik wird die stochastische Unschärfe bzw. der zufällige Fehler dadurch berücksichtigt, dass die zu messenden Größen als Zufallsvariablen modelliert werden. Bei Teilerhebungen wird die Zufallsvariable beispielsweise durch den gewählten Auswahlmechanismus festgelegt. Physikalische Unschärfe, und die daraus entstehende Adäquationsproblematik, wird in der klassischen Statistik völlig vernachlässigt, da eine Modellierung durch Zufallsvariablen nicht sinnvoll ist. Auch im Falle epistemischer Unschärfe, und damit auch beim Erhebungsfehler, ist es zumindest fraglich, ob eine Modellierung mittels Zufallsvariablen vernünftig ist. Unschärfe, die durch Zufallsvariablen nicht adäquat modelliert werden kann, wird im Folgenden als **nichtstochastische Unschärfe** bezeichnet.

Die Vorstellung der verschiedenen Unschärfe- und Fehlertypen erfolgte hier nur beschreibend und anhand von Beispielen. Eine ausführliche Darstellung mit mathematisch exakten Definitionen findet sich bei Krätschmer (siehe [Krätschmer2001-2], Kapitel 1.3). Eine Analyse der Fehlerursachen wird auch von Schneeweiß und Mittag vorgenommen (siehe [Schneeweiß/Mittag], Einleitung).

Eine Möglichkeit der Modellierung nichtstochastischer Unschärfe, stellen die 1965 von [Zadeh] vorgestellten Fuzzy-Mengen dar. Grundlegende Idee dabei ist die Erweiterung des klassischen Mengenbegriffs. Ist A eine Teilmenge der nichtleeren Grundmenge Ω ($A \subseteq \Omega$), so kann man von jedem Element ω aus Ω ($\omega \in \Omega$) feststellen, ob es zu A gehört ($\omega \in A$) oder nicht ($\omega \notin A$). Diese Tatsache kann man auch durch die sogenannte charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion) der Menge A beschreiben, die jedem $\omega \in \Omega$ eins zuordnet, wenn $\omega \in A$ und null, wenn $\omega \notin A$. Zadeh's Idee war es, dieses „entweder oder“, die „null oder eins“-Sichtweise abzuschwächen und als Funktionswerte der sogenannten Zugehörigkeitsfunktion einer (Fuzzy-)Menge \tilde{A} auch Werte zwischen null und eins zuzulassen. Interpretiert wird dieser Funktionswert dann als der Zugehörigkeitsgrad des Elements $\omega \in \Omega$ zur, jetzt als unscharf (engl. fuzzy) bezeichneten, Menge \tilde{A} .

Die Theorie der Fuzzy-Mengen wurde zunächst kaum beachtet. Aber seit der erfolgreichen Anwendung der Fuzzy-Mengentheorie bei der Prozessregelung eines Kraftwerks (siehe [Altrock], Seite 7) kam es zu einer Vielzahl von technischen Anwendungen, so

zum Beispiel in Waschmaschinen, Videokameras und Staubsaugern (siehe [Biewer], Seite 371) und einer großen Anzahl von theoretischen Veröffentlichungen. Auch im Bereich der Wirtschaftswissenschaften wurde der Einsatz von Fuzzy-Mengen untersucht. So zum Beispiel bei der Kreditwürdigkeitsprüfung (siehe [Bagus]), bei der Produktionsplanung (siehe [Nietsch et al.]) oder einer Vielzahl anderer Bereiche (siehe Fuzzy-Entscheidungsmodelle und Fuzzy-Optimierungsmodelle bei [Rommelfanger1994]).

Der Einsatz von Fuzzy-Methoden erfolgte auch schon bald in der Statistik, um nichtstochastische Unschärfe in die Untersuchungen mit einzubeziehen. Durch die Definition von Fuzzy-Zufallsvariablen wurde es möglich stochastische und nichtstochastische Unschärfe zu kombinieren. Eine gründliche Fundierung einer Statistik mit Fuzzy-Mengen erfolgte durch Krätschmer (siehe [Krätschmer2001-2] oder [Krätschmer2001-1]), der einen einheitlichen Begriff von Fuzzy-Zufallsvariablen vorstellte und die sogenannten Fundamentalsätze der Statistik (Starkes Gesetz der Großen Zahlen, Zentraler Grenzwertsatz, Satz von Glivenko-Cantelli) auf Fuzzy-Zufallsvariablen übertrug (siehe [Krätschmer2001-2], Kapitel 4.5 oder [Krätschmer2002-1]).

Ein wichtiges Teilgebiet der Ökonometrie und der Statistik ist die Regressionsanalyse. Dort wird versucht, Zusammenhänge zwischen verschiedenen ökonomischen Variablen nachzuweisen. Dabei wird die Abhängigkeit einer Variablen, der sogenannten abhängigen Variablen, von verschiedenen anderen Variablen, den sogenannten unabhängigen Variablen, untersucht. Beispielsweise wird die Abhängigkeit des privaten Konsums vom verfügbaren Einkommen (siehe [Schönfeld], Band 1, Seite 2ff) oder die Abhängigkeit der Kreditwürdigkeit eines Kunden vom verfügbaren Einkommen, der Höhe des Kredits und anderen Einflussfaktoren (siehe [Fahrmeir], Seite 238ff) analysiert. Oft wird dabei ein linearer Zusammenhang unterstellt. Das liegt zum einen daran, dass viele nichtlineare Modelle durch geeignete Transformationen linearisiert werden können bzw. im relevanten oder interessierenden Bereich zumindest näherungsweise linear sind. Zum anderen haben lineare Modelle „gute“ mathematische Eigenschaften und machen viele Methoden erst rechenbar.

Auch bei linearen Regressionsmodellen wurde die Verwendung von Fuzzy-Mengen un-

tersucht und es kam zu vielen Veröffentlichungen zu diesem Themenbereich. Zunächst lassen sich die in der Literatur vorgestellten Fuzzy-Regressionsmodelle in deterministische Modelle (d.h. ohne die Verwendung von Zufallsvariablen) und stochastische Modelle unterteilen:

- deterministische Fuzzy-Regressionsmodelle
 - Lösung eines Minimierungsproblems mit Nebenbedingungen, sogenannte possibilistische Methoden (siehe [Tanaka et al.], [Savic/Pedrycz]),
 - Erweiterung von Schätzern mit „vernünftigen“ Eigenschaften auf Fuzzy-Mengen mittels des Erweiterungsprinzips von Zadeh (siehe Definition und Satz 1.2.2) (siehe [Viertl], [Kruse/Meyer], [Körner/Näther]),
 - Verwendung eines Kleinst-Quadrate-Ansatzes mit einer geeigneten Metrik (siehe [Diamond/Kloeden]),
- stochastische Fuzzy-Regressionsmodelle in der Form

$$\tilde{E}^A \underline{\tilde{Y}} = X \underline{\beta}^1$$

$$- \tilde{E}^A \underline{\tilde{Y}} = \tilde{X} \underline{\beta},$$

Verwendung eines Kleinst-Quadrate-Schätzers (KQ-Schätzers)

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^n} d(\underline{\tilde{y}}, \tilde{X} \underline{\beta})$$

mit einer Metrik d (siehe [Krätschmer2001-2] oder [Krätschmer2003-3]),

$$- \tilde{E}^A \underline{\tilde{Y}} = X \underline{\beta},$$

ebenfalls Verwendung eines KQ-Schätzers (siehe [Körner/Näther], [Petry]).

In diesen Arbeiten wurden auch stochastische Eigenschaften der Schätzer, wie Erwartungstreue oder Konsistenz, untersucht.

Eine Übersicht über die verschiedenen Ansätze und nähere Erläuterungen findet man bei Petry (siehe [Petry], Kapitel 7 und Seite 99).

¹ Zur Definition von Fuzzy-Regressionsmodellen in dieser Form siehe Definition 3.2.1.

Hauptziel dieser Arbeit ist die Vorstellung eines linearen Fuzzy-Regressionsmodells, die Herleitung eines Schätzverfahrens zur Schätzung des unbekanntem Parametervektors und der Nachweis statistischer Eigenschaften des verwendeten Schätzers für eine möglichst allgemeine Klasse von Fuzzy-Mengen. Daher kommen die angegebenen deterministischen Ansätze nicht in Frage. Eine weitere wichtige Frage ist, welche der beteiligten Größen als fuzzy angenommen werden. In dieser Arbeit wird das Modell von [Körner/Näther] benutzt und damit ein lineares Fuzzy-Regressionsmodell mit fuzzy abhängigen Variablen und fuzzy Parametern. Zur Schätzung des unbekanntem Parameters wird ein Kleinst-Quadrate-Ansatz verfolgt, wie auch von [Körner/Näther] und [Petry] vorgeschlagen. [Körner/Näther] und [Körner 1997-1] konnten jedoch keine statistischen Eigenschaften ihres KQ-Schätzers nachweisen. [Petry] zeigte in seinem Modell die schwache Konsistenz des KQ-Schätzers. In dieser Arbeit wird die starke Konsistenz des vorgestellten KQ-Schätzers für ein Regressionsmodell mit möglichst allgemeinen Fuzzy-Mengen nachgewiesen und damit werden die Ergebnisse von [Petry] verallgemeinert. [Krätschmer2001-2] zeigte ein ähnliches Resultat, allerdings für ein anderes Modell mit unscharfen abhängigen und unabhängigen Variablen sowie scharfen Parametern.

In der statistischen Literatur werden auch andere Möglichkeiten untersucht, Unschärfe bzw. Mess- und Erhebungsfehler in die Modellierung mit einzubeziehen. Die sogenannten „Fehler in den Variablen“-Modelle (siehe [Hübler], Kapitel 14, [Schönfeld], Band 2, Kapitel 11 oder [Schneeweiß/Mittag]) sind jedoch nicht geeignet zur Modellierung nicht-stochastischer Unschärfe. Dort wird Unsicherheit bzw. Unschärfe immer mit klassischen Zufallsvariablen modelliert, was nicht immer adäquat ist.

In dieser Arbeit wird das verwendete Fuzzy-Regressionsmodell am Beispiel der Kreditwürdigkeitsprüfung illustriert. In der Literatur wurde der Einsatz von Fuzzy-Methoden in der Kreditwürdigkeitsprüfung bereits diskutiert (siehe [Bagus], [Rommelfanger1993]). Allerdings wurden dort vor allem Regelsysteme eingesetzt. Aufgrund der Verwendung rein deterministischer Modelle und Methoden ist der Nachweis statistischer Eigenschaften dort nur begrenzt möglich. Deshalb werden diese Ansätze in der Arbeit nicht weiter verfolgt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In **Kapitel 1 Fuzzy-Mengen** werden zunächst Fuzzy-Mengen als Erweiterung von klassischen Mengen eingeführt. Außerdem werden einige Hilfsmittel aus der Fuzzy-Mengentheorie bereitgestellt. Dazu gehören insbesondere die sogenannten α -Schnitte einer Fuzzy-Menge, die für die nachfolgenden Kapitel von enormer Bedeutung sind. **Kapitel 1.2** dient der Einführung mathematischer Strukturen auf Räumen von Fuzzy-Mengen. Zunächst wird dabei das Erweiterungsprinzip von Zadeh angegeben, das eine Möglichkeit bietet, Abbildungen auf Fuzzy-Mengen zu übertragen. Mittels des Erweiterungsprinzips werden Addition und Skalarmultiplikation auf Fuzzy-Mengen über \mathbb{R}^k ($k \in \mathbb{N}$) definiert und somit wird eine lineare Struktur eingeführt. Der Raum der betrachteten Fuzzy-Mengen über \mathbb{R}^k wird etwas eingeschränkt und auf diesem Raum werden Metriken definiert. Grundgedanke dabei ist immer, dass im scharfen Fall die bekannten Ergebnisse erhalten werden und somit die Theorie der Fuzzy-Mengen eine echte Verallgemeinerung der klassischen Mengentheorie darstellt.

In **Kapitel 2 Fuzzy-Zufallsvariablen** wird der Begriff der Zufallsvariable auf Fuzzy-Mengenwertige Abbildungen übertragen und somit die Grundlage für eine Wahrscheinlichkeitstheorie für Fuzzy-Mengen gelegt. Fuzzy-Zufallsvariablen werden als messbare Abbildungen definiert, was zunächst die Einführung einer σ -Algebra auf dem Raum der betrachteten Fuzzy-Mengen erfordert. In **Kapitel 2.2** und **Kapitel 2.3** werden die bekannten Kenngrößen von Zufallsvariablen, Erwartungswert und Varianz, auf den Fall von Fuzzy-Zufallsvariablen übertragen.

Kapitel 3 Ein lineares Fuzzy-Regressionsmodell dient der Definition des in der Arbeit untersuchten linearen Regressionsmodells. Dazu wird in **Kapitel 3.1** das klassische lineare Regressionsmodell der Ökonometrie vorgestellt und werden einige Eigenschaften angegeben. In **Kapitel 3.2** wird das lineare Fuzzy-Regressionsmodell mit fuzzy abhängigen Variablen und fuzzy Parametern definiert. Das Modell stellt eine Verallgemeinerung des klassischen Regressionmodells dar und ermöglicht es, stochastische und nichtstochastische Unschärfe in die Untersuchungen mit einzubeziehen. Da die Modelle am Beispiel der Kreditwürdigkeitsprüfung erläutert werden, wird das klassische lineare Re-

gressionsmodell in **Kapitel 3.3** auf den Fall qualitativer abhängiger Variablen übertragen und der Spezialfall der sogenannten Logit-Modelle vorgestellt. Darüber hinaus wird eine mögliche Anwendung von Fuzzy-Regressionsmodellen als Verallgemeinerung von Logit-Modellen diskutiert. In **Kapitel 3.4** wird das Identifikationsproblem der Ökonometrie erläutert. Dieses Problem stellt sich, wenn man anhand des empirischen Befunds nicht auf den unbekanntem wahren Parameter zurückschließen kann. Es zeigt sich, dass die Bedingungen, die im scharfen Fall die Identifikation des Parameters gewährleisten im Fuzzy-Fall nicht mehr ausreichen und eine zusätzliche Bedingung gefordert werden muss. In den nachfolgenden Abschnitten werden dann nur noch identifizierbare Parameter betrachtet. In **Kapitel 3.5** werden schließlich einige Eigenschaften der Regressionsfunktion angegeben, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden.

In **Kapitel 4 Die Kleinst-Quadrate-Schätzung** wird eine Methode vorgestellt, den unbekanntem Parameter im linearen Fuzzy-Regressionsmodell anhand einer empirischen Beobachtung zu schätzen. Dazu wird in **Kapitel 4.1** die bekannte Kleinst-Quadrate-Schätzung (KQ-Schätzung) für das klassische lineare Regressionsmodell vorgestellt und werden wichtige statistische Güteeigenschaften des KQ-Schätzers angegeben. In **Kapitel 4.2** wird der KQ-Schätzer aus dem klassischen Regressionsmodell zunächst mittels des Erweiterungsprinzips von Zadeh auf den Fuzzy-Fall übertragen. Es stellt sich jedoch heraus, dass der erweiterte Schätzer i.A. weder seine statistischen noch seine geometrischen Eigenschaften beibehält. Deshalb wird in der Arbeit ein direkter KQ-Ansatz untersucht. Der KQ-Schätzer wird als die eindeutige Lösung eines Minimierungsproblems definiert und nachgewiesen, dass dadurch tatsächlich ein Schätzer, also eine messbare Abbildung, definiert wird.

Statistische Eigenschaften des in Kapitel 4 vorgestellten Schätzers werden in **Kapitel 5 Die starke Konsistenz des Kleinst-Quadrate-Schätzers** untersucht. Gezeigt wird die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im linearen Fuzzy-Regressionsmodell, d.h. die fast sichere Konvergenz der Folge von KQ-Schätzfunktionen gegen den wahren Parametervektor. Umgangssprachlich bedeutet dies, dass der vorgestellte Schätzer unter „optimalen“ Bedingungen möglichst „gute“ Ergebnisse liefern soll. In **Kapitel 5.1** werden

dazu Bedingungen hergeleitet, unter denen der klassische KQ-Schätzer stark konsistent ist und die sich auf das vorgestellte lineare Fuzzy-Regressionsmodell übertragen lassen. In **Kapitel 5.2** erfolgt dann der Nachweis der starken Konsistenz des KQ-Schätzers im linearen Fuzzy-Regressionsmodell und damit eine statistische Absicherung der vorgestellten Schätzmethode.

Abschließend erfolgt in **Kapitel 6 Fazit und Ausblick** eine Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse der Arbeit. Des Weiteren werden einige ungeklärte Fragen und Probleme angegeben, die noch weiterer Forschung bedürfen.

In **Anhang A Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie** und **Anhang B Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis und der Topologie** sind für die Arbeit notwendige Definitionen und Sätze zusammengestellt.

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Prof. Dr. Volker Steinmetz für die Betreuung dieser Arbeit und die Übernahme des Erstgutachtens. Ebenfalls möchte ich mich bei Prof. Dr. Ralph Friedmann für die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken. Ein besonderer Dank geht an PD Dr. Volker Krätschmer, der durch seine Forschungen und Arbeiten im Bereich der Fuzzy-Statistik diese Arbeit erst möglich gemacht hat. Darüber hinaus war er immer ein Ansprechpartner für meine Fragen und unterstützte mich durch konstruktive Lösungsvorschläge. Ein weiterer Dank geht an meine Kollegen Dipl. Kfm. Martin Becker, Dr. Rolf Hauser und Dipl. Kfm. Dipl. Math. Stefan Klößner, die mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite standen, egal ob es um mathematische oder \LaTeX -Fragen ging. Vielen Dank für die vielen hilfreichen Diskussionen. Danke auch an das gesamte Team vom Statistik-Flur, das zu jeder Zeit eine angenehme Arbeitsatmosphäre ermöglichte. Zum Abschluss noch ein herzliches Dankeschön an Sylvia Puhl für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Kapitel 1

Fuzzy-Mengen

In diesem Kapitel werden die für die Arbeit notwendigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der Fuzzy-Mengen bereitgestellt. Dabei werden Fuzzy-Mengen als Verallgemeinerung der klassischen Mengen eingeführt. Die Ausführungen orientieren sich hauptsächlich an [Krätschmer2001-2] und [Steinmetz2003-1]. Für die Beweise der angegebenen Sätze wird auf die Literatur verwiesen.

In Kapitel 1.1 wird der Begriff der Fuzzy-Menge definiert und an Beispielen erläutert. Darüber hinaus werden einige wichtige Kenngrößen von Fuzzy-Mengen angegeben. Zum Abschluss des Abschnitts werden noch einige spezielle Fuzzy-Mengen vorgestellt.

Kapitel 1.2 dient der Einführung mathematischer Operationen auf Räumen von Fuzzy-Mengen. Mittels des sogenannten Erweiterungsprinzips von Zadeh werden Abbildungen wie Addition und Skalarmultiplikation auf Fuzzy-Mengen übertragen. Des Weiteren wird eine Klasse von Metriken auf Räumen von Fuzzy-Mengen definiert. Grundlegend für diesen Abschnitt und auch für die gesamte Arbeit ist es, Fuzzy-Mengen als Verallgemeinerung klassischer Mengen darzustellen. Ziel ist es, bei Anwendung der vorgestellten Operationen auf den Spezialfall von klassischen Mengen, die für klassische Mengen bekannten Ergebnisse zu erhalten.

1.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden, ausgehend vom klassischen Mengenbegriff, Fuzzy-Mengen definiert und einige Eigenschaften erläutert. „Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen . . .“ ([Cantor], so zitiert in [Petry], Seite 6). Diese etwas vage Beschreibung induziert zu einer Teilmenge A einer nichtleeren Grundmenge Ω eine Abbildung

$$\mu_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{mit}$$
$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 & : \omega \in A \\ 0 & : \omega \notin A \end{cases},$$

es wird also einem Element $\omega \in \Omega$ die Zahl eins zugeordnet, falls ω in der Menge A ist, andernfalls wird die Zahl null zugeordnet. Diese Abbildung wird als Indikatorfunktion oder charakteristische Funktion der Menge A bezeichnet.

Definition 1.1.1

Gegeben seien die Menge $\Omega \neq \emptyset$ und die Teilmenge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Man bezeichnet die Abbildung

$$\mu_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

mit

$$\mu_A(\omega) := \begin{cases} 1 & : \omega \in A \\ 0 & : \omega \notin A \end{cases}$$

als **Indikatorfunktion (charakteristische Funktion)** von A bzgl. Ω . Ω heißt **Grundmenge (Universalmenge, U-Menge)**. (siehe [Steinmetz2003-1], Seite 1, Definition 1.1.2)

◆

Bemerkung 1.1.2

- .1 Im Folgenden werden klassische Mengen auch als scharfe Mengen bezeichnet. Die Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ wird stets als scharfe Menge vorausgesetzt.
- .2 Die Indikatorfunktion einer Menge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ bzgl. einer U-Menge $\Omega \neq \emptyset$ wird auch mit 1_A bezeichnet.

◆

An den folgenden Beispielen werden die in dieser Arbeit auftretenden Begriffe illustriert.

Beispiel 1.1.3 (Kreditwürdigkeitsprüfung, Credit Scoring)

Die Grundmenge Ω sei die Menge der (potentiellen) Kreditkunden¹ einer Bank. Anhand von an jedem Kunden erhobenen Merkmalen soll die Kreditwürdigkeit dieser Kunden geprüft werden, d.h. ob die Rückzahlung des Kredits ordnungsgemäß abgewickelt werden kann oder ob es zu Verzögerungen bei der Ratenzahlung oder gar zum Kreditausfall kommen könnte.² Zunächst werden als mögliche Entscheidungen nur die Alternativen „kreditwürdig“ oder „nicht kreditwürdig“ betrachtet. Die Menge $K \subseteq \Omega$ bestehe aus allen Kunden der Bank, die kreditwürdig sind, also

$$K = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ ist kreditwürdig}\} .$$

Alternativ kann K durch die folgende Abbildung beschrieben werden:

$$\mu_K : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

mit

$$\mu_K(\omega) := \begin{cases} 1 & : \omega \text{ kreditwürdig} \\ 0 & : \omega \text{ nicht kreditwürdig} \end{cases} .$$

Damit gilt

$$K = \{\omega \in \Omega \mid \mu_K(\omega) = 1\} .$$

(Ausführlichere Beschreibungen zur Kreditwürdigkeitsprüfung finden sich beispielsweise bei [Fahrmeir], Seite 334f.)

Eine etwas andere Idee wird im nachfolgenden Beispiel verfolgt.

Beispiel 1.1.4 (Zinssatz)

In Veröffentlichungen oder Zeitungsartikeln zur Kreditwürdigkeitsprüfung finden sich oft Formulierungen wie „Schwache sollen mehr zahlen“³ (Saarbrücker Zeitung vom 23.10.01).

¹ Dabei wird im Folgenden nicht zwischen Privatkunden, Unternehmen, Zentralstaaten und -banken und (anderen) Banken unterschieden und der Begriff Kunde in allen Fällen benutzt (für nähere Erläuterungen, siehe [IWK-Studie], Seite 013).

² Für eine genaue Ausfalldefinition siehe [Bundesbank2], Seite 52, Baseler Ausfalldefinition.

³ Streng genommen geht es in diesem Artikel nur um Kredite an Unternehmen, dies ist jedoch für das Beispiel nicht entscheidend.

Die Idee dabei ist es, höhere Risiken durch höhere Zinsen auszugleichen. Im oben genannten Zeitungsartikel zu Basel II wird formuliert „Unternehmen mit schwacher Bonität⁴ müssen höhere Zinsen zahlen“.⁵ Was sollen jedoch „höhere“, „mittlere“ oder „niedrige“ Zinsen sein? Ein „mittlerer“ Zinssatz für einen Kredit könnte zur Zeit z.B. zwischen 6% und 8% liegen. Auch in diesem Fall liegt zu einer Grundmenge

$$\Omega = \{\text{Menge der möglichen Zinssätze in \%}\} = \mathbb{R}$$

eine Abbildung μ_{mZ} vor:

$$\mu_{mZ} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$$

mit

$$\mu_{mZ}(x) := \begin{cases} 1 & : x \in [6, 8] \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

(die Menge der „mittleren“ Zinssätze werde mit mZ bezeichnet).

Festzuhalten ist, dass man jede Teilmenge A der Grundmenge Ω mit ihrer charakteristischen Funktion μ_A identifizieren kann und umgekehrt. Weiterhin sind sich A und der Graph der Abbildung μ_A eineindeutig zugeordnet. Es gilt also der folgende Satz.

Definition und Satz 1.1.5

Gegeben seien die Notationen und Voraussetzungen aus Definition 1.1.1.

.1 Die Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow \{0, 1\}^\Omega, \quad A \mapsto \mu_A$$

ist bijektiv.⁶ Zwischen A und μ_A besteht der Zusammenhang

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \mu_A(\omega) = 1\} .$$

⁴ Die Begriffe Bonität bzw. Kreditwürdigkeit werden in dieser Arbeit, wie auch in der Literatur, synonym verwendet.

⁵ Nähere Erläuterungen zu den, schon in der Einleitung erwähnten, neuen Richtlinien zur Eigenkapitalunterlegung von Krediten (Basel II) finden sich bei [Wolf].

⁶ Das Symbol $\{0, 1\}^\Omega$ bezeichnet die Menge aller Abbildungen von $\Omega \rightarrow \{0, 1\}$, also $\{0, 1\}^\Omega := \{f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}\}$.

.2 Die Abbildung

$$\phi : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow \Omega \times \{0, 1\}, \quad A \mapsto \{(\omega, \mu_A(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}$$

ist injektiv. Durch jede der Teilmengen

$$Z := \{(\omega, x) \mid \omega \in \Omega, x \in \{0, 1\}, (\omega, x) \neq (\omega', x') \Rightarrow \omega \neq \omega'\} \subseteq \Omega \times \{0, 1\}$$

ist eindeutig eine Teilmenge

$$\{\omega \in \Omega \mid (\omega, 1) \in Z\}$$

von Ω festgelegt. $\{(\omega, \mu_A(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}$ wird als **Graph** der Abbildung μ_A bezeichnet.

(vgl. [Steinmetz2003-1], Seite 1, Satz 1.1.1 und Seite 2, Folgerung 1.1.5)



In vielen Fällen ist jedoch die Beschränkung auf scharfe Mengen nicht gewünscht. Die scharfe Trennung in „gehört zur Menge“ bzw. „gehört nicht zur Menge“ erscheint oft zu drastisch und sehr willkürlich. So wurde in Beispiel 1.1.3 (Kreditwürdigkeitsprüfung) festgelegt, dass es nur die Alternativen „kreditwürdig“ oder „nicht kreditwürdig“ gibt. Es ist jedoch fragwürdig, ob durch diese Festlegung die ursprüngliche Modellierungsabsicht adäquat widerspiegelt wird. Im Unternehmensrating bzw. bei der Bonitätsbeurteilung von Unternehmen werden mehr als zwei mögliche Bewertungsalternativen festgelegt, beispielsweise Abstufungen von AAA über AA bis D bei der Ratingagentur Standard & Poor's (siehe [Wolf], Seite 16ff). Dabei dienen Ratingverfahren der Ermittlung des Kreditrisikos einzelner Kunden. Mithilfe unterschiedlicher Methoden werden den betreffenden Kunden Risikokennzahlen zugewiesen, die den Grad der Kreditwürdigkeit anzeigen (siehe [Bundesbank3], Seite 62). Der Bezug zu den Beispielen Kreditwürdigkeitsprüfung (Beispiel 1.1.3) und Zinssatz (Beispiel 1.1.4) ist damit hergestellt. Unternehmen, die eine schlechte Bonitätsbeurteilung erhalten, müssen zur Absicherung der höheren Risiken höhere Kreditzinsen zahlen (vgl. [Wolf], Seite 16ff). Wolf formuliert: „Die Kreditkonditionen der Unternehmen orientieren sich in Zukunft an deren Zugehörigkeit zu einer bestimmten

Risikoklasse (Bonitätsklasse)“ und „Die Ausfallwahrscheinlichkeiten . . . führen zu Zinszuschlägen, die genau mit den erwarteten Ausfällen der betreffenden Risikoklasse korrespondieren“ (siehe [Wolf], Seite 35).

Aber auch wenn mehr Abstufungen eingeführt werden, bleibt das grundsätzliche Problem, dass ein Unternehmen in genau eine Rating-Klasse eingestuft wird. Knappe Entscheidungen werden nicht widergespiegelt und eine Quantifizierung bzw. Abstufung innerhalb einer Klasse findet nicht statt.

Auch in Beispiel 1.1.4 (Zinssatz) erscheint es sehr willkürlich, warum ein Zinssatz von 6% ein „mittlerer“ Zinssatz sein soll, ein Zinssatz von 5,99% jedoch nicht. Ebenso ist ein Zinssatz von 4% genauso wie 5,99% nicht „mittel“ und es gibt keine Möglichkeit, den Abstand von der Grenze 6% zu quantifizieren.

Wünschenswert wäre in all diesen Fällen eine Flexibilisierung bzw. eine Abschwächung der scharfen Modellierung. Eine mögliche Art der Flexibilisierung erreicht man durch die von Zadeh entwickelte Theorie der Fuzzy-Mengen. Sein Ziel war es ein „. . . Gerüst zu entwerfen, das eine natürliche Möglichkeit zur Verfügung stellt, Probleme zu behandeln, in denen die Quelle von Unsicherheit die Abwesenheit von scharf definierten Kriterien ist“ (siehe [Zadeh], Seite 339, so zitiert in [Petry], Seite 6). Seine Idee bestand darin, nicht nur 0 und 1 als Funktionswerte der charakteristischen Funktion μ_A einer Menge A zuzulassen, sondern auch Werte zwischen 0 und 1. Somit gelangt man zur Definition einer Fuzzy-Menge.

Definition 1.1.6

Es seien $\Omega \neq \emptyset$ eine U-Menge und

$$\mu : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

eine Abbildung. Man bezeichnet

$$\tilde{A} := \{(\omega, \mu(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}$$

*als **Fuzzy-Menge (unscharfe Menge, F-Menge)** in Ω mit der **Zugehörigkeitsfunktion***

$$\mu_{\tilde{A}} := \mu .$$

$\mu_{\tilde{A}}(\omega)$ heißt der **Zugehörigkeitsgrad** von $\omega \in \Omega$ zur Fuzzy-Menge \tilde{A} . Weiterhin wird die Menge aller Fuzzy-Mengen in Ω mit $F\mathfrak{P}(\Omega)$ bezeichnet, man nennt sie **Fuzzy-Potenzmenge** von Ω . (siehe [Steinmetz2003-1], Seite 3, Definition 1.1.6, Definition 1.1.9)

◆

Bemerkung 1.1.7

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine U-Menge.

.1 Jede scharfe Menge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ mit der Indikatorfunktion

$$\mu_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

kann wegen $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$ als Fuzzy-Menge in Ω aufgefasst werden.

.2 Die Fuzzy-Potenzmenge $F\mathfrak{P}(\Omega)$ ist eine scharfe Menge.

(siehe [Steinmetz2003-1], Seite 3, Bemerkung 1.1.10)

◆

Eine mögliche flexiblere Modellierung des Begriffs „Kreditwürdigkeit“ in Beispiel 1.1.3 wäre also, im Gegensatz zur scharfen Modellierung, eine Fuzzy-Menge, $\mu_{\tilde{K}} : \Omega \rightarrow [0, 1]$, zu verwenden, wobei $\mu_{\tilde{K}}(\omega)$ den Grad der Kreditwürdigkeit des Kunden $\omega \in \Omega$ bezeichnet. Der Unterschied zwischen scharfen und unscharfen Mengen ist in den folgenden Abbildungen nochmals verdeutlicht. In Abbildung 1.1 symbolisiert die schwarze Ellipse die scharfe Menge $K \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und es ist deutlich zu erkennen, ob ein Element $\omega \in \Omega$ zu K gehört oder nicht, also ob $\omega \in K$ oder $\omega \notin K$ gilt.

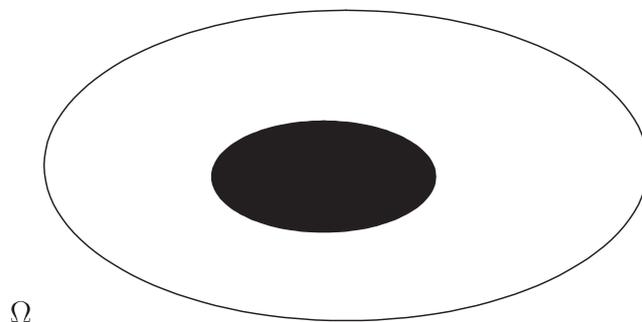


Abbildung 1.1: scharfe Menge $K \in \mathfrak{P}(\Omega)$

In Abbildung 1.2 ist die unscharfe Menge $\tilde{K} \in \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega)$ symbolisiert. In diesem Fall ist nicht immer genau erkennbar, ob ein Element $\omega \in \Omega$ zur unscharfen Menge \tilde{K} gehört oder nicht.

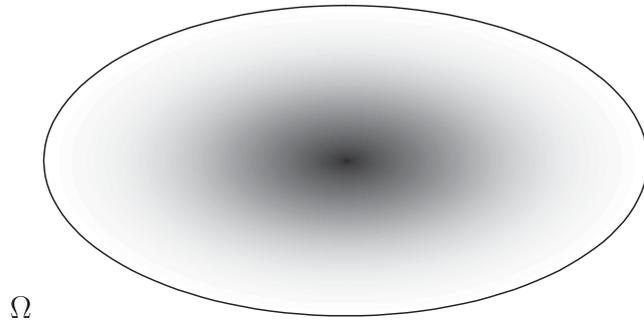


Abbildung 1.2: unscharfe Menge $\tilde{K} \in \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega)$

In Beispiel 1.1.4 wäre für den Begriff „mittlerer“ Zinssatz eine Fuzzy-Menge der Form

$$\mu_{\widetilde{mZ}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad \mu_{\widetilde{mZ}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 5,5}{0,5} & : 5,5 \leq x \leq 6 \\ 1 & : 6 \leq x \leq 8 \\ \frac{8,5 - x}{0,5} & : 8 \leq x \leq 8,5 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

denkbar (siehe Abbildung 1.3).

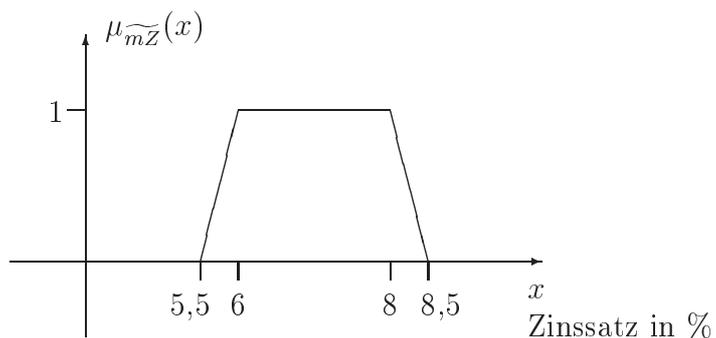


Abbildung 1.3: Fuzzy-Menge „mittlerer“ Zinssatz

Die Festlegung einer solchen Fuzzy-Menge ist natürlich ebenfalls sehr willkürlich, aber man hat durch die Modellierung mittels Fuzzy-Mengen die Möglichkeit, den Übergang zwischen

„gehört zur Menge“ und „gehört nicht zur Menge“ fließender zu gestalten. Darüber hinaus wurde die Überlegung, dass 5,99% eher ein „mittlerer“ Zinssatz ist als 5,6% durch die Festlegung $\mu_{\widetilde{mZ}}(5, 99) > \mu_{\widetilde{mZ}}(5, 6)$ berücksichtigt. Somit ist eine Quantifizierung möglich, die im scharfen Fall nicht (oder nur sehr schwer) möglich ist.

Im Folgenden werden einige Kenngrößen von Fuzzy-Mengen zusammengestellt.

Dabei sind insbesondere die Elemente von Ω von Bedeutung, die einen Zugehörigkeitsgrad $>$ bzw. $\geq \alpha \in [0, 1]$ haben. Sie ermöglichen eine sogenannte horizontale Darstellung von Fuzzy-Mengen.

Definition 1.1.8

Es seien $\Omega \neq \emptyset$ eine U-Menge und $\widetilde{A} \in \mathcal{F} \mathfrak{B}(\Omega)$ eine F-Menge mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\widetilde{A}}$. Für alle $\alpha \in [0, 1]$ heißt

.1

$$\widetilde{A}^{\geq \alpha} := \{\omega \in \Omega \mid \mu_{\widetilde{A}}(\omega) \geq \alpha\}$$

α -Schnitt,

.2

$$\widetilde{A}^{> \alpha} := \{\omega \in \Omega \mid \mu_{\widetilde{A}}(\omega) > \alpha\}$$

scharfer α -Schnitt (strenger α -Schnitt),

.3

$$\text{supp } \widetilde{A} := \{\omega \in \Omega \mid \mu_{\widetilde{A}}(\omega) > 0\}$$

Träger von \widetilde{A} .

\widetilde{A} heißt **normal**, wenn gilt

$$\exists \omega \in \Omega : \mu_{\widetilde{A}}(\omega) = 1 .$$

Die Menge aller normalen Fuzzy-Mengen in Ω wird mit $\mathcal{F}^{\text{no}}(\Omega)$ bezeichnet. (α -Schnitte werden in der Fuzzy-Mengen-Literatur auch als **schwache α -Schnitte** bezeichnet.) (siehe [Steinmetz2003-1], Seite 5f, Definition 1.1.11, Definition 1.1.12)



Bemerkung 1.1.9

$\tilde{A}^{\geq\alpha}$ und $\tilde{A}^{>\alpha}$ ($\alpha \in [0, 1]$) sind scharfe Mengen. ◆

Eine wichtige Aussage ist die Tatsache, dass bei Kenntnis aller α -Schnitte die Zugehörigkeitsfunktion einer Fuzzy-Menge festgelegt ist.

Satz 1.1.10

Es seien $\Omega \neq \emptyset$ eine U-Menge und $\tilde{A} \in \mathbf{F}\mathfrak{B}(\Omega)$ eine F-Menge mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\tilde{A}}$. Dann gelten die sogenannten **Darstellungsformeln**:

.1

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(\omega) &= \sup_{0 < \alpha < 1} \min\{\alpha, \mu_{\tilde{A}^{\geq\alpha}}(\omega)\} \\ &= \sup_{0 < \alpha < 1} \alpha \cdot \mu_{\tilde{A}^{\geq\alpha}}(\omega) \\ &= \sup\{\alpha \in]0, 1[\mid \omega \in \tilde{A}^{\geq\alpha}\}, \quad \forall \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(\omega) &= \sup_{0 < \alpha < 1} \min\{\alpha, \mu_{\tilde{A}^{>\alpha}}(\omega)\} \\ &= \sup_{0 < \alpha < 1} \alpha \cdot \mu_{\tilde{A}^{>\alpha}}(\omega) \\ &= \sup\{\alpha \in]0, 1[\mid \omega \in \tilde{A}^{>\alpha}\}, \quad \forall \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

dabei sei $\sup \emptyset := 0$. ⁷

(siehe [Steinmetz2003-1], Seite 6, Satz 1.1.14 und [Krätschmer2001-2], Seite 63, Satz 2.1.8) ◆

Beweis: siehe [Steinmetz2003-1], Seite 6 und [Krätschmer2001-2], Seite 63 ■

Es werden jedoch nicht alle α -Schnitte benötigt, um eine Fuzzy-Menge eindeutig zu charakterisieren, es genügen „fast“ alle α -Schnitte.

Satz 1.1.11

Es seien $A \subseteq]0, 1]$ eine in $[0, 1]$ dichte Teilmenge, $\Omega \neq \emptyset$ eine U-Menge und \tilde{A} eine F-Menge in Ω mit Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\tilde{A}}$. Dann gilt

$$\mu_{\tilde{A}}(\omega) = \sup\{\alpha \in A \mid \omega \in \tilde{A}^{\geq\alpha}\} = \sup\{\alpha \in A \mid \omega \in \tilde{A}^{>\alpha}\}, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

⁷ Diese Festlegung ist sinnvoll, da $\mu_{\tilde{A}} : \Omega \rightarrow [0, 1]$.

dabei sei $\sup \emptyset := 0$.⁸ (siehe [Krätschmer2001-1], Seite 3 oder [Krätschmer2001-2], Seite 63, Satz 2.1.8)



Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 63



In dieser Arbeit werden hauptsächlich Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k ($k \in \mathbb{N}$) betrachtet. Für diese Fuzzy-Mengen werden in der folgenden Definition noch einige Begriffe festgelegt.

Definition 1.1.12

Es sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Fuzzy-Menge in \mathbb{R}^k heißt

- .1 **konvex** genau dann, wenn ihre positiven α -Schnitte⁹ konvexe Teilmengen von \mathbb{R}^k sind,
- .2 **kompakt** genau dann, wenn ihre positiven α -Schnitte kompakte Teilmengen von \mathbb{R}^k sind,
- .3 **gleichmäßig beschränkt** genau dann, wenn ihr Träger eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^k ist.

Die Menge aller Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k wird mit $F \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ bezeichnet. Die Menge der konvexen Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k wird mit $F_{\text{co}}(\mathbb{R}^k)$, die der kompakten mit $F_{\text{c}}(\mathbb{R}^k)$ und die der gleichmäßig beschränkten mit $F^{\text{b}}(\mathbb{R}^k)$ bezeichnet. Mit $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ wird die Menge der normalen, konvexen und kompakten Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k bezeichnet. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 67, Definition 2.1.13)



Bemerkung 1.1.13

Im Folgenden wird bei der Verwendung des Symbols \mathbb{R}^k immer $k \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt.



⁸ vgl. Satz 1.1.10

⁹ d.h. $\alpha \in]0, 1]$

Die Menge \mathbb{R}^k kann man in $F \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ einbetten, indem man für $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ die Indikatorfunktion $1_{\{\underline{x}\}}$ von $\{\underline{x}\}$ als Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-Menge verwendet.

Definition 1.1.14

Die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow F \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$$

$$\Psi(\underline{x}) \mapsto \{(\underline{y}, 1_{\{\underline{x}\}}(\underline{y}) \mid \underline{y} \in \mathbb{R}^k\}$$

heißt **Standardeinbettung** von \mathbb{R}^k in $F \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$. Analog wird der Begriff *Standardeinbettung* auch für die Einbettung in $F_{\text{co}}(\mathbb{R}^k)$, $F^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$, $F_c(\mathbb{R}^k)$, $F^b(\mathbb{R}^k)$ und $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ verwendet.¹⁰ (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 255)



Im Folgenden werden spezielle Klassen von Fuzzy-Mengen in \mathbb{R} vorgestellt. Dazu wird zunächst der Begriff der Referenzfunktion benötigt.

Definition 1.1.15

Eine linksseitig stetige, monoton fallende Funktion

$$L : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$$

mit

.1 $L(0) = 1,$

.2 $L(x) < 1, \forall x > 0,$

.3 $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0$

heißt **Referenzfunktion**.¹¹ (siehe [Petry], Seite 7, Definition 2.5)



¹⁰ Der Nachweis, dass die durch $1_{\{\underline{x}\}}$ beschriebene Fuzzy-Menge in $F_{\text{co}}(\mathbb{R}^k)$, $F^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$, $F_c(\mathbb{R}^k)$, $F^b(\mathbb{R}^k)$ und $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ liegt, ist ohne Schwierigkeiten möglich.

¹¹ Referenzfunktionen werden in der Literatur auch allgemeiner definiert, siehe beispielsweise [Steinmetz2003-1], Seite 38f, Definition 1.6.12.

Beispiel 1.1.16 (Referenzfunktionen)

Die folgenden Funktionen sind Referenzfunktionen:

.1 $L_1 : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ mit

$$L_1(x) := 1_{\{0\}}(x) = \begin{cases} 1 & : x = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

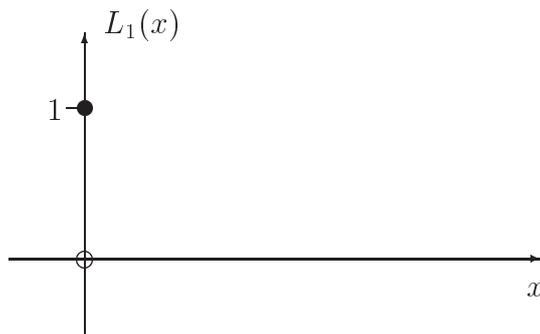


Abbildung 1.4: Referenzfunktion L_1

.2 $L_2 : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ mit

$$L_2(x) := \max\{0, 1 - x\} = \begin{cases} 1 - x & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

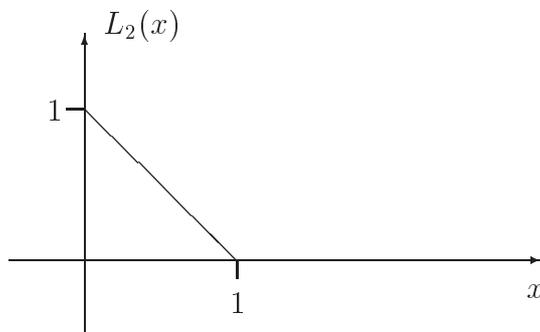


Abbildung 1.5: Referenzfunktion L_2

.3 $L_3 : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ mit $L_3(x) := e^{-x^2}$.

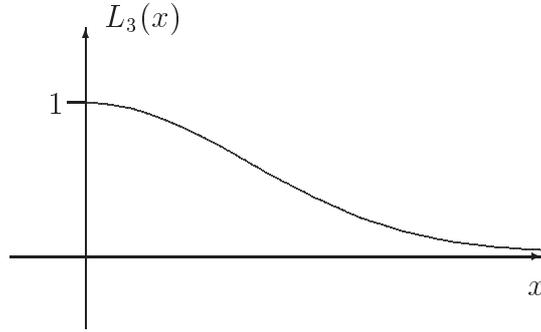


Abbildung 1.6: Referenzfunktion L_3

Referenzfunktionen sind nützliche Hilfsmittel zur Darstellung spezieller Fuzzy-Mengen, den sogenannten LR -Intervallen bzw. LR -Zahlen.

Definition 1.1.17

Eine Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in \mathcal{F}\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mit Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\tilde{A}}$ heißt

.1 **Fuzzy-Intervall vom LR -Typ (LR -Fuzzy-Intervall)** genau dann, wenn Referenzfunktionen $L, R : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ und $M_L, M_R, l, r \in \mathbb{R}$, $M_L \leq M_R$, $l > 0$, $r > 0$ existieren mit

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{M_L - x}{l}\right) & : x \leq M_L \\ 1 & : M_L \leq x \leq M_R \\ R\left(\frac{x - M_R}{r}\right) & : x \geq M_R \end{cases} ,$$

und man schreibt

$$\tilde{A} = (M_L, M_R, l, r)_{LR} .$$

.2 **Fuzzy-Zahl vom LR -Typ (LR -Fuzzy-Zahl)** genau dann, wenn Referenzfunktionen $L, R : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ und $M, l, r \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $r > 0$ existieren mit

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{M - x}{l}\right) & : x \leq M \\ 1 & : x = M \\ R\left(\frac{x - M}{r}\right) & : x \geq M \end{cases} ,$$

und man schreibt

$$\tilde{A} = (M, l, r)_{LR} .$$

- .3 Gilt $L = R$ und $l = r$, so spricht man von **symmetrischen LL -Intervallen** bzw. **symmetrischen LL -Zahlen**.

(vgl. [Steinmetz2003-1], Seite 38f, Definition 1.6.12, Definition 1.6.13)

◆

Man erhält eine weitere Klasse von Fuzzy-Mengen, die sogenannten trapezförmigen bzw. dreiecksförmigen Fuzzy-Mengen, wenn man L und R speziell als lineare Funktionen (z.B. $L = R = L_2$ aus Beispiel 1.1.16) wählt.

Definition 1.1.18

Eine Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in \mathbb{F} \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mit Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\tilde{A}}$ heißt

- .1 **Fuzzy-Intervall in Trapezgestalt (trapezförmige Fuzzy-Menge)** genau dann, wenn $M_L, M_R, l, r \in \mathbb{R}, M_L \leq M_R, l \geq 0, r \geq 0$ existieren mit

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - (M_L - l)}{l} & : M_L - l \leq x \leq M_L, l > 0 \\ 1 & : M_L \leq x \leq M_R \\ \frac{(M_R + r) - x}{r} & : M_R \leq x \leq M_R + r, r > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} ,$$

und man schreibt

$$\tilde{A} := (M_L, M_R, l, r)_{\Delta} .$$

- .2 **Fuzzy-Zahl in Dreiecksgestalt (dreiecksförmige Fuzzy-Menge)** genau dann, wenn $M, l, r \in \mathbb{R}, l \geq 0, r \geq 0$ existieren mit

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - (M - l)}{l} & : M - l \leq x \leq M, l > 0 \\ 1 & : x = M \\ \frac{(M + r) - x}{r} & : M \leq x \leq M + r, r > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

In einem solchen Fall soll abkürzend

$$\tilde{A} := (M, l, r)_\Delta$$

geschrieben werden.

- .3 Gilt $l = r$, so spricht man von **symmetrischen Trapezzahlen** bzw. **symmetrischen Dreieckszahlen**.

(vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 60, Definition 2.1.4)



Bemerkung 1.1.19

- .1 Die Bezeichnungen trapezförmige Fuzzy-Menge bzw. dreiecksförmige Fuzzy-Menge begründen sich durch die Gestalt des Graphen der Zugehörigkeitsfunktion für den Fall $l > 0$ und $r > 0$. In diesem Fall schließt der Graph der Zugehörigkeitsfunktion mit der x -Achse ein Trapez bzw. ein Dreieck ein.
- .2 Der Fall $r = 0$ und $l = 0$ wird mit in der Definition aufgeführt, um Intervalle und reelle Einpunktmengen als „entartete“ trapez- bzw. dreiecksförmige Fuzzy-Mengen darstellen zu können. So kann man das scharfe Intervall $[6, 8]$ schreiben als

$$(6, 8, 0, 0)_\Delta$$

oder mit $L := L_1$ aus Beispiel 1.1.16

$$(6, 8, 1, 1)_{L_1 L_1} .$$

Eine Einpunktmenge $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich darstellen als

$$(x, 0, 0)_\Delta$$

oder mit $L := L_1$ aus Beispiel 1.1.16

$$(x, 1, 1)_{L_1 L_1} .$$

- .3 Trapezförmige und dreiecksförmige Fuzzy-Mengen haben aufgrund ihrer angenehmen mathematischen Eigenschaften (siehe auch Kapitel 1.2, Satz 1.2.8) in der Anwendung große Bedeutung erlangt.



Beispiel 1.1.20

Die Fuzzy-Menge „mittlerer“ Zinssatz \widetilde{mZ} (siehe Abbildung 1.3) ist eine trapezförmige Fuzzy-Menge und es gilt

$$\widetilde{mZ} = \left(6, 8, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\Delta}.$$

\widetilde{mZ} ist auch eine (symmetrische) Fuzzy-Menge vom LL -Typ und es gilt

$$\widetilde{mZ} = \left(6, 8, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{L_2L_2},$$

mit $L := L_2$ aus Beispiel 1.1.16.

Die α -Schnitte von trapezförmigen Fuzzy-Mengen kann man ohne Schwierigkeiten bestimmen.

Beispiel 1.1.21 (α -Schnitte von trapezförmigen Fuzzy-Mengen)

Es sei $\widetilde{A} = (M_L, M_R, l, r)_{\Delta}$ eine trapezförmige Fuzzy-Menge. Dann gilt für $\alpha \in [0, 1]$:

$$\widetilde{A}^{\geq \alpha} = \begin{cases} \mathbb{R} & : \alpha = 0 \\ [M_L - (1 - \alpha)l, M_R + (1 - \alpha)r] & : \alpha > 0 \end{cases}$$

und

$$\widetilde{A}^{> \alpha} = \begin{cases} \emptyset & : \alpha = 1 \\]M_L - (1 - \alpha)l, M_R + (1 - \alpha)r[& : \alpha < 1 \end{cases}$$

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 62, Beispiel 2.1.7)

Beispiel 1.1.22

Aus Beispiel 1.1.21 folgt sofort, dass trapezförmige Fuzzy-Mengen normale, konvexe, kompakte und gleichmäßig beschränkte Fuzzy-Mengen in \mathbb{R} sind. Dies gilt insbesondere für die Fuzzy-Menge \widetilde{mZ} (siehe Abbildung 1.3).

1.2 Mathematische Strukturen auf Räumen von Fuzzy-Mengen

Im folgenden Abschnitt sollen mathematische Operationen wie Addition, Skalarmultiplikation und Metriken auf Räume von Fuzzy-Mengen übertragen werden. Ziel dabei ist es, im Spezialfall von scharfen Mengen bzw. bei Anwendung dieser Operationen auf Teilmengen von \mathbb{R}^k die dort bekannten Ergebnisse zu erhalten. In diesem Fall ist die Übertragung mathematischer Operationen auf Fuzzy-Mengen eine Verallgemeinerung der üblichen Operationen. Zunächst wird die in der Literatur bereits etablierte lineare Struktur auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ vorgestellt, die sogenannten Minkowski-Operationen.

Definition und Satz 1.2.1

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Durch

$$A \oplus B := \begin{cases} \emptyset & : A = \emptyset \text{ oder } B = \emptyset \\ \{\underline{x} + \underline{y} \mid \underline{x} \in A, \underline{y} \in B\} & : \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\lambda \odot A := \begin{cases} \emptyset & : A = \emptyset \\ \{\lambda \underline{x} \mid \underline{x} \in A\} & : \text{sonst} \end{cases}$$

werden Abbildungen $\oplus : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k) \times \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$, die **Minkowski-Addition** auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$, und $\lambda \odot : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$, die **Minkowski-Skalarmultiplikation** auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$, definiert. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 98, Satz und Definition 3.1.2 oder [Rockafellar/Wets], Seite 24)

◆

Eine Übertragung mathematischer Operationen auf Fuzzy-Mengen kann sich an diesen Operationen orientieren, indem man die α -Schnitte der Fuzzy-Mengen betrachtet.

1.2.1 Das Erweiterungsprinzip

Gesucht wird eine Erweiterung einer Abbildung

$$f : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \rightarrow \Omega \quad (n \in \mathbb{N})$$

auf Fuzzy-Mengen, also eine Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_1) \times \dots \times \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_n) \rightarrow \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega) .$$

Dies geschieht durch das Erweiterungsprinzip von Zadeh.

Definition und Satz 1.2.2 (Erweiterungsprinzip von Zadeh)

Es seien $\Omega_1 \neq \emptyset, \dots, \Omega_n \neq \emptyset$ ($n \in \mathbb{N}$) und $\Omega \neq \emptyset$ U-Mengen und

$$f : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \rightarrow \Omega$$

eine Abbildung. Dann ist zu F-Mengen

$$\tilde{A}_1 \in \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_1), \dots, \tilde{A}_n \in \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_n)$$

mit Zugehörigkeitsfunktionen

$$\mu_{\tilde{A}_1} : \Omega_1 \rightarrow [0, 1], \dots, \mu_{\tilde{A}_n} : \Omega_n \rightarrow [0, 1] ,$$

$$d.h. (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \in \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_1) \times \dots \times \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_n) ,$$

durch

$$\begin{aligned} \mu_{f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)}(\omega) &:= \sup_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in f^{-1}(\{\omega\})} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(\omega_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(\omega_n)\} \quad (\sup \emptyset := 0)^{12} \\ &= \sup_{\substack{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \\ f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega}} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(\omega_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(\omega_n)\} \end{aligned}$$

die Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)} : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

einer Fuzzy-Menge $f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \in \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega)$ und somit eine Abbildung

$$f : \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_1) \times \dots \times \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_n) \rightarrow \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega)$$

gegeben. Man sagt, $f : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \rightarrow \Omega$ sei nach dem **Erweiterungsprinzip von Zadeh** zu $f : \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_1) \times \dots \times \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega_n) \rightarrow \mathbb{F}\mathfrak{P}(\Omega)$ erweitert worden. (vgl. [Steinmetz2003-1], Seite 30, Satz und Definition 1.5.4 und Seite 33f, Satz und Definition 1.5.10)

¹² vgl. Satz 1.1.10



Im Folgenden werden noch einige Eigenschaften der erweiterten Abbildung festgehalten.

Satz 1.2.3

Gegeben seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition und Satz 1.2.2.

Dann gilt für $\alpha \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
 .1 \quad [f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)]^{>\alpha} &= \{f(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_1 \in \tilde{A}_1^{>\alpha}, \dots, \omega_n \in \tilde{A}_n^{>\alpha}\} \\
 &= f(\tilde{A}_1^{>\alpha} \times \dots \times \tilde{A}_n^{>\alpha}) \\
 &= f(\tilde{A}_1^{>\alpha}, \dots, \tilde{A}_n^{>\alpha}) \\
 .2 \quad [f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)]^{\geq\alpha} &\supseteq f(\tilde{A}_1^{\geq\alpha} \times \dots \times \tilde{A}_n^{\geq\alpha}) \\
 &= f(\tilde{A}_1^{\geq\alpha}, \dots, \tilde{A}_n^{\geq\alpha})
 \end{aligned}$$

(siehe [Steinmetz2003-1], Seite 33, Satz 1.5.11)



Beweis: siehe [Steinmetz2003-1], Seite 34f



Satz 1.2.4

Es seien $(\Omega, d), (\Omega_i, d_i)$ ($i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$) metrische Räume. \tilde{A}_i sei eine Fuzzy-Menge in Ω_i mit kompakten α -Schnitten für $i = 1, \dots, n$ und $\alpha \in]0, 1]$. Das Kartesische Produkt von $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ werde mit der Produkttopologie (siehe Anhang B, Definition B.2) bzgl. der durch die Metriken d_i induzierten Topologien (siehe Anhang B, Definition B.1) versehen. Es sei f eine bzgl. dieser Produkttopologie sowie der durch die Metrik d induzierten Topologie stetige Abbildung von $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ nach Ω . Dann gilt für $\alpha \in]0, 1]$:

$$[f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)]^{\geq\alpha} = f(\tilde{A}_1^{\geq\alpha} \times \dots \times \tilde{A}_n^{\geq\alpha}) = f(\tilde{A}_1^{\geq\alpha}, \dots, \tilde{A}_n^{\geq\alpha}).$$

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 102, Satz 1.3.5)



Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 102f



1.2.2 Addition und Skalarmultiplikation

In diesem Abschnitt werden speziell Addition und Skalarmultiplikation in \mathbb{R}^k mittels des Erweiterungsprinzips auf $F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ übertragen. Im Spezialfall von scharfen Mengen (d.h. Teilmengen von \mathbb{R}^k) erhält man, wie gewünscht, die in Definition 1.2.1 vorgestellten Minkowski-Operationen.

Zunächst wird noch die Fuzzy-Null eingeführt, die sich später als das neutrale Element der Addition erweisen wird.

Definition 1.2.5

Die Fuzzy-Menge $\underline{\mathbb{0}}$ mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\underline{\mathbb{0}}} : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1], \mu_{\underline{\mathbb{0}}}(\underline{x}) := 1_{\{\underline{\mathbb{0}}\}}(x) = \begin{cases} 1 & : \underline{x} = \underline{\mathbb{0}} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

heißt **Fuzzy-Null in \mathbb{R}^k** . Im Fall $k = 1$ wird statt $\underline{\mathbb{0}}$ auch $\tilde{0}$ geschrieben.

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 104, Definition 3.2.1)

◆

Definition und Satz 1.2.6

Es seien $\tilde{A}, \tilde{B} \in F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ Fuzzy-Mengen mit den Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\tilde{A}}$ bzw. $\mu_{\tilde{B}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann werden durch

$$\mu_{\tilde{A} \oplus_F \tilde{B}}(\underline{x}) := \sup_{\substack{\underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^k \\ \underline{y} + \underline{z} = \underline{x}}} \min\{\mu_{\tilde{A}}(\underline{y}), \mu_{\tilde{B}}(\underline{z})\}$$

und

$$\mu_{\lambda \odot_F \tilde{A}}(\underline{x}) := \sup_{\substack{\underline{y} \in \mathbb{R}^k \\ \lambda \underline{y} = \underline{x}}} \mu_{\tilde{A}}(\underline{y}) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(\frac{1}{\lambda} \underline{x}) & : \lambda \neq 0 \\ \sup_{\underline{x} \in \mathbb{R}^k} \mu_{\tilde{A}}(\underline{x}) \mu_{\underline{\mathbb{0}}}(\underline{x}) & : \lambda = 0 \end{cases}$$

Zugehörigkeitsfunktionen von Fuzzy-Mengen $\mu_{\tilde{A} \oplus_F \tilde{B}}$ bzw. $\mu_{\lambda \odot_F \tilde{A}}$ in \mathbb{R}^k definiert. Somit erhält man die Abbildungen

$$\oplus_F : F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k) \times F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k) \rightarrow F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k), (\tilde{A}, \tilde{B}) \mapsto \tilde{A} \oplus_F \tilde{B},$$

die **Addition auf $F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$** und

$$\lambda \odot_F : F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k) \rightarrow F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k), \tilde{A} \mapsto \lambda \odot_F \tilde{A},$$

die Skalarmultiplikation mit λ auf $F\mathfrak{F}(\mathbb{R}^k)$. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 104, Satz und Definition 3.2.2)

◆

Bemerkung 1.2.7

Ohne Schwierigkeiten lässt sich nachweisen, dass sich im Spezialfall von scharfen Mengen, d.h. $\tilde{A}, \tilde{B} \subseteq \mathbb{R}^k$, die Minkowski-Operationen aus Definition 1.2.1 ergeben.

Für die in Kapitel 1.2 vorgestellten Fuzzy-Mengen vom LR -Typ und natürlich insbesondere für trapezförmige Fuzzy-Mengen ergeben sich sehr einfache Rechenformeln.

Satz 1.2.8

Es seien $\tilde{A} = (A_L, A_R, l_A, r_A)_{LR}$ und $\tilde{B} = (B_L, B_R, l_B, r_B)_{LR}$ Fuzzy-Mengen vom LR -Typ. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{A} \oplus_F \tilde{B} &= (A_L + B_L, A_R + B_R, l_A + l_B, r_A + r_B)_{LR} \\ \lambda \odot_F \tilde{A} &= \begin{cases} (\lambda A_L, \lambda A_R, \lambda l_A, \lambda r_A)_{LR} & : \lambda > 0 \\ (\lambda A_R, \lambda A_L, -\lambda r_A, -\lambda l_A)_{RL} & : \lambda < 0 \\ \tilde{\underline{0}} & : \lambda = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und speziell für $\tilde{A} = (A_L, A_R, l_A, r_A)_{\Delta}$ und $\tilde{B} = (B_L, B_R, l_B, r_B)_{\Delta}$

$$\begin{aligned} \tilde{A} \oplus_F \tilde{B} &= (A_L + B_L, A_R + B_R, l_A + l_B, r_A + r_B)_{\Delta} \\ \lambda \odot_F \tilde{A} &= \begin{cases} (\lambda A_L, \lambda A_R, \lambda l_A, \lambda r_A)_{\Delta} & : \lambda > 0 \\ (\lambda A_R, \lambda A_L, -\lambda r_A, -\lambda l_A)_{\Delta} & : \lambda < 0 \\ \tilde{\underline{0}} & : \lambda = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 105 und [Petry], Seite 19, Satz 2.32)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 105 und [Petry], Seite 20ff

■

Im nachfolgenden Satz werden noch einige wichtige Eigenschaften der Addition und Skalarmultiplikation zusammengestellt.

Satz 1.2.9

Es bezeichne $\tilde{\underline{0}}$ die Fuzzy-Null in \mathbb{R}^k . Für Fuzzy-Mengen $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in F\mathfrak{F}(\mathbb{R}^k)$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

- .1 $\tilde{A} \oplus_F (\tilde{B} \oplus_F \tilde{C}) = (\tilde{A} \oplus_F \tilde{B}) \oplus_F \tilde{C}$,
- .2 $\tilde{A} \oplus_F \underline{\tilde{0}} = \underline{\tilde{0}} \oplus_F \tilde{A} = \tilde{A}$,
- .3 $\tilde{A} \oplus_F \tilde{B} = \tilde{B} \oplus_F \tilde{A}$,
- .4 $(\lambda\mu) \circ_F \tilde{A} = \lambda \circ_F (\mu \circ_F \tilde{A})$,
- .5 $\lambda \circ_F (\tilde{A} \oplus_F \tilde{B}) = (\lambda \circ_F \tilde{A}) \oplus_F (\lambda \circ_F \tilde{B})$,
- .6 $1 \circ_F \tilde{A} = \tilde{A}$,
- .7 es gilt nicht immer $(\lambda + \mu) \circ_F \tilde{A} = (\lambda \circ_F \tilde{A}) \oplus_F (\mu \circ_F \tilde{A})$,
- .8 $(\lambda + \mu) \circ_F \tilde{A} = (\lambda \circ_F \tilde{A}) \oplus_F (\mu \circ_F \tilde{A})$, falls \tilde{A} eine konvexe Fuzzy-Menge in \mathbb{R}^k ist und $\lambda\mu \geq 0$ gilt,
- .9 $\tilde{A} \oplus_F \tilde{B} \neq \underline{\tilde{0}}$, falls $\tilde{A}^{>\alpha}$ oder $\tilde{B}^{>\alpha}$ nicht einelementig für ein $\alpha \in [0, 1[$ ist.

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 107f, Satz 3.2.4)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 107

■

Bemerkung 1.2.10

Aus .7 und .9 des Satzes 1.2.9 folgt, dass $F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ keinen Vektorraum über \mathbb{R} bildet, da es i.A. kein additives Inverses zu einer Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in F\mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ gibt. Insbesondere gilt

$$\tilde{A} \oplus_F (-1 \circ_F \tilde{A}) \neq \underline{\tilde{0}}, \quad \text{falls } \tilde{A}^{>\alpha} \text{ nicht einelementig für ein } \alpha \in [0, 1[\text{ ist.}$$

(vgl. [Petry], Seite 27, Bemerkung 2.36.1)

◆

Im Folgenden wird hauptsächlich der Raum $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ (bzw. eine Teilmenge dieses Raums) verwendet. Auf diesem Raum sind die Abbildungen \oplus_F und \circ_F wohldefiniert, und die Eigenschaften aus Satz 1.2.9 bleiben erhalten.

Satz 1.2.11

Die Abbildungen

$$\oplus_F : F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \times F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \rightarrow F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k), \quad (\tilde{A}, \tilde{B}) \mapsto \tilde{A} \oplus_F \tilde{B}$$

$$\odot_F : F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \rightarrow F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k), \quad \tilde{A} \mapsto \lambda \odot_F \tilde{A} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

sind wohldefiniert und erfüllen die Eigenschaften .1-.9 aus Satz 1.2.9. Weiterhin gilt für $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in]0, 1]$

$$(\tilde{A} \oplus_F \tilde{B})^{\geq \alpha} = \tilde{A}^{\geq \alpha} \oplus \tilde{B}^{\geq \alpha}$$

$$(\lambda \odot_F \tilde{A})^{\geq \alpha} = \lambda \odot \tilde{A}^{\geq \alpha}$$

(vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 108, Satz 3.2.5 und Seite 110, Satz 3.2.7)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 110

■

Bemerkung 1.2.12

Die Aussagen aus Satz 1.2.11 gelten auch allgemeiner (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 108, Satz 3.2.5 und Seite 110, Satz 3.2.7).

◆

1.2.3 Metriken auf $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$

Ziel dieses Abschnitts ist die Vorstellung einer Metrik auf $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$, dem Raum aller normalen, konvexen und kompakten Fuzzy-Mengen in \mathbb{R}^k .¹³ Metriken auf Fuzzy-Mengen werden in der Literatur vielfältig diskutiert. Überblicke über die verschiedenen Metriken finden sich in [Diamond/Kloeden], Kapitel 7 oder in [Krätschmer2001-2], Kapitel 3.4 und Kapitel 3.6.

In dieser Arbeit wird nur eine Klasse von Metriken vorgestellt und eine bestimmte Metrik daraus verwendet. Eine Begründung für die Verwendung gerade dieser Metrik wird

¹³ Der Raum muss noch etwas eingeschränkt werden, siehe Definition 1.2.22.

an der entsprechenden Stelle gegeben (siehe Bemerkung 2.3.7). Auch hier wird wieder die Idee verfolgt, für scharfe Mengen bereits bekannte Metriken auf Fuzzy-Mengen zu übertragen, in dem man die α -Schnitte der Fuzzy-Mengen betrachtet. Zunächst erfolgt die Charakterisierung einer nichtleeren, konvexen und kompakten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ durch ihre Stützfunktion.

Definition 1.2.13

Es sei $A \neq \emptyset$ eine beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^k . Durch

$$s_A(\underline{x}) := \sup_{z \in A} \underline{x}'z, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k$$

wird eine Abbildung $s_A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die sogenannte **Stützfunktion** von A . (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 128, Satz und Definition 3.5.1)



Nachfolgend werden einige Eigenschaften von Stützfunktionen zusammengestellt.

Satz 1.2.14

Es seien $K, L \subseteq \mathbb{R}^k$ nichtleere, konvexe und kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^k und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Stützfunktionen von K und L

- .1 $s_K \neq s_L$, falls $K \neq L$,
- .2 $s_{K \oplus L} = s_K + s_L$,
- .3 $s_{\lambda \odot K} = \begin{cases} \lambda s_K & : \lambda \geq 0 \\ -\lambda s_{(-1) \odot K} & : \lambda < 0 \end{cases}$,
- .4 $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^k : \underline{x}'\underline{y} \leq s_K(\underline{y})\}$.

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 128f, Lemma 3.5.2)



Beweis: Für .2 bis .4 siehe [Rockafellar/Wets], Seite 317, Seite 494, .1 folgt aus .4



Eine weitere wichtige Eigenschaft der Stützfunktion einer nichtleeren, konvexen und kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^k ist, dass man nur ihre Einschränkung auf die Einheitssphäre zu kennen braucht, um die Stützfunktion auf \mathbb{R}^k zu rekonstruieren.

Lemma 1.2.15

Es bezeichne $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ die Menge der nichtleeren, kompakten und konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^k und S^{k-1} die Einheitssphäre bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^k . Zu $K, L \in \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ werden ihre Stützfunktionen durch s_K bzw. s_L gekennzeichnet. Sind K und L verschieden, so gilt das auch für die Einschränkungen $s_K|_{S^{k-1}}$ und $s_L|_{S^{k-1}}$ der Stützfunktionen auf S^{k-1} . Weiterhin gilt

$$s_K(\underline{x}) = \|\underline{x}\| s_K\left(\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}\right), \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}.$$

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 136, Lemma 3.6.4)

◆

Beweis: Für Teil 1 siehe [Krätschmer2001-2], Seite 126, Teil 2 folgt aus Lemma 1.2.14.3

■

Beispiel 1.2.16 (Beispiele für Stützfunktionen)

.1 Es sei $\underline{y} \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt $s_{\{\underline{y}\}}(\underline{x}) = \underline{x}'\underline{y}$, $\forall \underline{x} \in S^{k-1}$.

.2 Es sei $K \in \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}) = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$, $S^0 = \{1, -1\}$. Mit $K = [a_1, b_1]$ gilt

$$s_K(1) = \max K = b_1, \quad s_K(-1) = -\min K = -a_1.$$

(vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 138, [Körner 1997-1], Seite 8)

Im nächsten Schritt wird die Definition der Stützfunktion auf $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ übertragen, indem man die Stützfunktion für die jeweiligen α -Schnitte bestimmt. Die Eigenschaften aus Lemma 1.2.14 lassen sich direkt auf Stützfunktionen von Fuzzy-Mengen übertragen.

Definition und Satz 1.2.17

Es sei $\tilde{A} \in F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ eine Fuzzy-Menge. $s_{\tilde{A} \geq \alpha}$ bezeichne die Stützfunktion von $\tilde{A}^{\geq \alpha}$ für $\alpha \in]0, 1]$. Dann ist die Abbildung $s_{\tilde{A}} : [0, 1] \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$s_{\tilde{A}}(\alpha, \underline{x}) := \begin{cases} s_{\tilde{A} \geq \alpha}(\underline{x}) & : \alpha \in]0, 1] \\ 0 & : \alpha = 0 \end{cases},$$

wohldefiniert und heißt die **Stützfunktion von \tilde{A}** . (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 130, Satz und Definition 3.5.3)

◆

Satz 1.2.18

Es seien $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Stützfunktionen

.1 $s_{\tilde{A}} \neq s_{\tilde{B}}$, falls $\tilde{A} \neq \tilde{B}$,

.2 $s_{\tilde{A} \oplus_F \tilde{B}} = s_{\tilde{A}} + s_{\tilde{B}}$,

.3 $s_{\lambda \odot_F \tilde{A}} = \begin{cases} \lambda s_{\tilde{A}} & : \lambda \geq 0 \\ -\lambda s_{(-1) \odot_F \tilde{A}} & : \lambda < 0 \end{cases}$,

.4 $s_{\tilde{A}}(\cdot, \underline{x})$ ist eine monoton fallende Abbildung für $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$.

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 130, Satz 3.5.4)



Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 131, Anwendung von Lemma 1.2.14

**Satz 1.2.19**

Es sei $s_{\tilde{A}}$ die Stützfunktion einer Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$. Dann gilt

.1 $s_{\tilde{A}}(\alpha, \cdot)$ ist stetig für $\alpha \in [0, 1]$,

.2 $s_{\tilde{A}}(\cdot, \underline{x})$ ist linksseitig stetig für $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$.

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 133, Satz 3.5.6)



Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 133



Nach der Definition der Stützfunktion einer Fuzzy-Menge $\tilde{A} \in F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ wird eine Klasse von Metriken auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ vorgestellt und diese anschließend auf $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ übertragen. Verwendet wird dabei die Einschränkung der Stützfunktion auf die Einheitskugel.

Definition und Satz 1.2.20

Es seien S^{k-1} die Einheitssphäre bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^k und $\lambda^{S^{k-1}}$ das normierte Lebesgue-Borel-Maß auf S^{k-1} (siehe Anhang A, Definition und Satz A.2). Dann wird zu jeder reellen Zahl $p \geq 1$ durch

$$\delta_p(K, L) := \left(\int_{S^{k-1}} |s_K - s_L|^p d\lambda^{S^{k-1}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad K, L \in \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$$

eine Metrik auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$, der Menge der nichtleeren, kompakten und konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^k , definiert, die sogenannte L_p -Metrik. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 138, Satz und Definition 3.6.6)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 138

■

Beispiel 1.2.21

Im Fall $k = 1$ ist $S^0 = \{-1, 1\}$ und $\lambda^{S^0}(\{-1\}) = \lambda^{S^0}(\{1\}) = \frac{1}{2}$. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 137).

Nach der Definition einer Metrik auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ wird diese Metrik auf $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ übertragen. Dazu wird zunächst $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ in L_p -Räume eingebettet.

Definition und Satz 1.2.22

Es gelten die Bezeichnungen aus Definition und Satz 1.2.20.

Für $p \in [1, \infty[$ sei $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \subseteq F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ die Menge aller Fuzzy-Mengen in $F_{\text{coc}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$, deren Stützfunktionen, eingeschränkt auf $[0, 1] \times S^{k-1}$, p -fach $\lambda^1 \otimes \lambda^{S^{k-1}}$ -integrierbar sind. Dabei bezeichnet $\lambda^1 \otimes \lambda^{S^{k-1}}$ das Produktmaß aus dem Lebesgue-Borel-Maß λ^1 auf $[0, 1]$ und $\lambda^{S^{k-1}}$. Weiterhin sei $L_p([0, 1] \times S^{k-1})$ der L_p -Raum auf $[0, 1] \times S^{k-1}$ und $\langle f \rangle$ die Äquivalenzklasse aller $f \in L_p([0, 1] \times S^{k-1})$, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden (siehe Anhang B, Definition und Satz B.5). Die Abbildung

$$j_{F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)} : F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \rightarrow L_p([0, 1] \times S^{k-1}), \quad j_{F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)}(\tilde{A}) := \langle s_{\tilde{A}} \mid [0, 1] \times S^{k-1} \rangle$$

heißt die **Standardeinbettung von $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ in $L_p([0, 1] \times S^{k-1})$** und erfüllt die folgenden Eigenschaften

.1 $j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ ist injektiv,

.2 $j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)(\tilde{A} \oplus_F \tilde{B}) = j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)(\tilde{A}) + j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)(\tilde{B}), \quad \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k),$

.3

$$j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)(\lambda \odot_F \tilde{A}) = \begin{cases} \lambda j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)(\tilde{A}) & : \lambda \geq 0 \\ -\lambda j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)((-1) \odot_F \tilde{A}) & : \lambda < 0 \end{cases}, \quad \forall \tilde{A} \in F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k).$$

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 477, Satz und Definition H.3)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 477

■

Die Abbildungen \oplus_F und \odot_F sind auch im Raum $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ wohldefiniert.

Satz 1.2.23

Die Abbildungen

$$\oplus_F : F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \times F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \rightarrow F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k), \quad (\tilde{A}, \tilde{B}) \mapsto \tilde{A} \oplus_F \tilde{B}$$

$$\odot_F : F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \rightarrow F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k), \quad \tilde{A} \mapsto \lambda \odot_F \tilde{A} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

sind wohldefiniert und erfüllen die Eigenschaften .1-.9 aus Satz 1.2.9.

(vgl. [Krätschmer2003-1], Seite 6)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2003-1], Seite 6 bzw. [Krätschmer2001-2], Seite 110.

■

Als Metrik auf $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ wird nun die L_p -Norm der Einbettung verwendet.

Definition und Satz 1.2.24

Es sei $p \in [1, \infty[$ und $\|\cdot\|_p$ bezeichne die L_p -Norm im L_p -Raum $L_p([0, 1] \times S^{k-1})$ (siehe Anhang B, Definition und Satz B.5). Durch

$$\rho_p(\tilde{A}, \tilde{B}) := \|j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)(\tilde{A}) - j_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)(\tilde{B})\|_p, \quad \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$$

wird eine Metrik auf $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$, die sogenannte L_p -Metrik auf $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ definiert. Die von ρ_p erzeugte Topologie wird mit τ_{ρ_p} bezeichnet. (siehe [Krätschmer2002-2], Proposition and Definition 2.2 oder [Krätschmer2001-2], Seite 477)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2002-2], Seite 360

■

Die in Definition und Satz 1.2.24 definierte Metrik ist eine direkte Übertragung der L_p -Metrik auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ (siehe Definition und Satz 1.2.20) auf $F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$. Es wird nämlich über die δ_p -Abstände der α -Schnitte ($\alpha \in]0, 1[$) integriert. Zu $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ wird die Abbildung $\alpha \mapsto (\delta_p(\tilde{A}^{\geq \alpha}, \tilde{B}^{\geq \alpha}))^p$ bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes auf $[0, 1]$ integriert.

Lemma 1.2.25

Es gelten die Voraussetzungen aus Definition und Satz 1.2.24. Dann gilt

$$\rho_p(\tilde{A}, \tilde{B})^p = \int_{]0,1[} \delta_p(\tilde{A}^{\geq \alpha}, \tilde{B}^{\geq \alpha})^p d\alpha := \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{\beta}^1 \delta_p(\tilde{A}^{\geq \alpha}, \tilde{B}^{\geq \alpha})^p d\alpha$$

(vgl. [Krätschmer2002-2], Lemma 2.3 oder [Krätschmer2001-2], Seite 473, Satz und Definition H.1)

◆

Beweis:

Die Aussage folgt aus den Definitionen von ρ_p und δ_p .

■

Eine wichtige Eigenschaft dieser Metrik ist, dass $(F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k), \rho_p)$ vollständig und separabel ist.

Satz 1.2.26

$(F_{\text{cocp}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k), \rho_p)$ ist vollständig und separabel für $p \in [1, \infty[$ (siehe [Krätschmer2002-2], Theorem 3.2).

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2002-2], Section 5

■

In den folgenden Kapiteln wird der Spezialfall $p = 2, k = 1$ verwendet. In diesem Fall kann die Metrik wie folgt bestimmt werden.

Lemma 1.2.27

Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition und Satz 1.2.20 und 1.2.24. Im Spezialfall $p = 2, k = 1$ gilt mit

$$l_{\tilde{A}}(\alpha) := -s_{\tilde{A}}(\alpha, -1) = \begin{cases} \min \tilde{A}^{\geq \alpha} & : \alpha \in]0, 1] \\ 0 & : \alpha = 0 \end{cases}, \quad \tilde{A} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$$

und

$$r_{\tilde{A}}(\alpha) := s_{\tilde{A}}(\alpha, 1) = \begin{cases} \max \tilde{A}^{\geq \alpha} & : \alpha \in]0, 1] \\ 0 & : \alpha = 0 \end{cases}, \quad \tilde{A} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$$

(vgl. Definition der Randlinienfunktionen in Definition 2.1.5)

$$\begin{aligned} \rho_2(\tilde{A}, \tilde{B})^2 &:= \|j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{A}) - j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{B})\|_2^2 \\ &= \int_{[0,1] \times S^0} |s_{\tilde{A}} - s_{\tilde{B}}|^2 d\lambda^1 \otimes \lambda^{S^0} \\ &= \int_0^1 \int_{S^0} |s_{\tilde{A}}(\alpha, u) - s_{\tilde{B}}(\alpha, u)|^2 du d\alpha \\ &= \int_0^1 \rho_2(\tilde{A}^{\geq \alpha}, \tilde{B}^{\geq \alpha})^2 d\alpha = \int_{[0,1]} \delta_2(\tilde{A}^{\geq \alpha}, \tilde{B}^{\geq \alpha})^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 ((l_{\tilde{A}}(\alpha) - l_{\tilde{B}}(\alpha))^2 + (r_{\tilde{A}}(\alpha) - r_{\tilde{B}}(\alpha))^2) d\alpha. \end{aligned}$$

◆

Beweis:

Der Beweis folgt aus den Definitionen von $\rho_2, j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}, s_{\tilde{A}}, \lambda^1 \otimes \lambda^{S^0}$ und $l_{\tilde{A}}$ bzw. $r_{\tilde{A}}$.

■

Lemma 1.2.28

Es gelten die Voraussetzungen aus Definition und Satz 1.2.24. Dann gilt

$$\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad \rho_2(\lambda \circ_F \tilde{A}, \lambda \circ_F \tilde{B}) = |\lambda| \rho_2(\tilde{A}, \tilde{B}).$$

◆

Beweis:

Für $\lambda \geq 0$ folgt die Aussage aus .3 von Satz 1.2.18.

Für $\lambda < 0$ verwendet man ebenfalls .3 von Satz 1.2.18 und beachtet, dass

$$\forall \alpha \in]0, 1] : \quad (-1) \odot [\min \tilde{A}^{\geq \alpha}, \max \tilde{A}^{\geq \alpha}] = [-\max \tilde{A}^{\geq \alpha}, -\min \tilde{A}^{\geq \alpha}]$$

und damit

$$s_{(-1) \odot_F \tilde{A}}(\alpha, 1) = s_{\tilde{A}}(\alpha, -1)$$

bzw.

$$s_{(-1) \odot_F \tilde{A}}(\alpha, -1) = s_{\tilde{A}}(\alpha, 1)$$

gilt. (vgl. [Krätschmer2003-1], Seite 6)

■

Nachfolgend einige Beispiele für die ρ_2 -Metrik.

Beispiel 1.2.29 (Beispiele für ρ_2 -Metrik)

.1 Es sei $\underline{y}, \underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und Ψ die Standardabbildung von \mathbb{R}^k in $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$. Dann gilt $\rho_2(\Psi(\underline{x}), \Psi(\underline{y})) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$, dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^k .

.2 Es seien $[a, b], [c, d] \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\rho_2([a, b], [c, d])^2 = \frac{1}{2} ((a - c)^2 + (b - d)^2) .$$

.3 Es seien $\tilde{A} = [A, a, a]_{LL}$ und $\tilde{B} = [B, b, b]_{LL}$. Dann gilt

$$\rho_2(\tilde{A}, \tilde{B})^2 = (A - B)^2 + l(a - b)^2$$

mit

$$l = \int_0^1 (L^{-1}(\alpha))^2 d\alpha ; \quad L^{-1}(\alpha) := \begin{cases} \sup\{x \mid L(x) \geq \alpha\} & : \alpha \in]0, 1] \\ 0 & : \alpha = 0 \end{cases} .$$

(vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 141, [Körner 1997-1], Seite 17f)

Satz 1.2.30

Der Raum $(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}), \rho_2)$ ist bzgl. $\{\oplus_F, \lambda \odot_F \mid \lambda \geq 0\}$, $\{+, \lambda \cdot \mid \lambda \geq 0\}$ isometrisch isomorph zu einer abgeschlossenen und konvexen Teilmenge des Hilbertraums $L_2([0, 1] \times S^0)$ (siehe Anhang B, Definition und Satz B.5, Satz B.6), nämlich der Menge

$$\left\{ j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{A}) \mid \tilde{A} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}) \right\} .$$

◆

Beweis:

Isomorphie und Isometrie folgen aus den Eigenschaften von $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}$, die Abgeschlossenheit folgt aus Satz 1.2.26.

Zu zeigen bleibt nur noch die Konvexität: Wegen

$$(\lambda \odot_F \tilde{A}) \oplus_F ((1 - \lambda) \odot_F \tilde{B}) \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$$

(siehe Satz 1.2.23) gilt

$$\lambda s_{\tilde{A}} + (1 - \lambda) s_{\tilde{B}} = s_{(\lambda \odot_F \tilde{A}) \oplus_F ((1 - \lambda) \odot_F \tilde{B})} \in \{ j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{C}) \mid \tilde{C} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}) \} .$$

■

1.2.4 Addition, Skalarmultiplikation und Metrik auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$

In Kapitel 3 werden bei der Untersuchung des dort vorgestellten Regressionsmodells Addition, Skalarmultiplikation und eine Metrik auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ und $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ ($n, T \in \mathbb{N}$) benötigt. Zunächst wird eine Metrik auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ definiert. Dazu wird $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit der Produkttopologie bzgl. τ_{ρ_2} (siehe Anhang B, Definition B.2) versehen. Die Standardeinbettung $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}$ von $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ nach $L_2([0, 1] \times S^0)$ (siehe Anhang B, Definition und Satz B.5) wird ausgedehnt zur Abbildung

$$j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n} : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \rightarrow L_2([0, 1] \times S^0)^n, (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \mapsto (j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{A}_1), \dots, j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{A}_n)) .$$

Das n -fache kartesische Produkt $L_2([0, 1] \times S^0)^n$ wird, wie in der Funktionalanalysis üblich (siehe [Mathieu], Seite 219), zu einem Hilbertraum mit Norm

$$\| \cdot \|_{2,n} : L_2([0, 1] \times S^0)^n \rightarrow \mathbb{R}, (\langle f_1 \rangle, \dots, \langle f_n \rangle) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n \| \langle f_i \rangle \|_2^2} ,$$

die sogenannte **direkte Summe von** $(L_2([0, 1] \times S^0), \|\cdot\|_2)$. Damit erhält man über die Standardeinbettung $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}$ eine Metrik auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$.

Definition und Satz 1.2.31

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n} : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \rightarrow L_2([0, 1] \times S^0)^n, (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \mapsto (j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{A}_1), \dots, j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{A}_n))$$

ist injektiv und wird als **Standardeinbettung von** $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ **in** $L_2([0, 1] \times S^0)^n$ bezeichnet. Durch

$$\begin{aligned} \rho_{2,n} \left((\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n), (\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n) \right) &:= \|j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) - j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n)\|_{2,n} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_2(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i)^2} \end{aligned}$$

für $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ wird eine Metrik auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ definiert, die die Produkttopologie bzgl. τ_{ρ_2} induziert. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 262, Satz und Definition 5.2.1¹⁴)

◆

Beweis:

Die Behauptungen folgen aus den Eigenschaften von $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}$ und der Tatsache, dass ρ_2 eine Metrik auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ ist.

■

Bemerkung 1.2.32

Im Folgenden wird bei der Verwendung der Symbole $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ und $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ immer $n, T \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt.

◆

¹⁴ Dort allerdings für Fuzzy-Mengen mit beschränktem Träger definiert. Die Übertragung auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ ist problemlos.

Die lineare Struktur auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ läßt sich ohne Schwierigkeiten auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ übertragen.

Definition und Satz 1.2.33

.1 Die Abbildungen $\oplus_F^n : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \times F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit

$$\begin{aligned} \oplus_F^n((\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n), (\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n)) &:= (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \oplus_F^n (\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n) \\ &:= (\tilde{A}_1 \oplus_F \tilde{B}_1, \dots, \tilde{A}_n \oplus_F \tilde{B}_n) \end{aligned}$$

und $\lambda \odot_F^n : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \lambda \odot_F^n((\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)) &:= \lambda \odot_F^n(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \\ &:= (\lambda \odot_F \tilde{A}_1, \dots, \lambda \odot_F \tilde{A}_n) \end{aligned}$$

sind wohldefiniert und die Eigenschaften von \oplus_F und \odot_F aus Satz 1.2.9 lassen sich direkt auf \oplus_F^n und \odot_F^n übertragen. \oplus_F^n heißt die **Addition auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$** und \odot_F^n die **Skalarmultiplikation mit λ auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$** .

.2 Die Standardabbildung $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}$ von $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ in $L_2([0, 1] \times S^0)^n$ erfüllt die Eigenschaften:

(a) für $(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n), (\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n) \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ gilt

$$\begin{aligned} j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}((\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \oplus_F^n (\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n)) &= \\ j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}((\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)) + j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}((\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n)), \end{aligned}$$

(b) für $(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ und $\lambda \geq 0$ gilt

$$j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}(\lambda \odot_F^n(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)) = \lambda j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}((\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)).$$

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 263, Satz und Definition 5.2.2)

◆

Beweis:

Die Behauptungen folgen aus den Eigenschaften von \oplus_F , $\lambda \odot_F$ und $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}$ und der Definition von \oplus_F^n , $\lambda \odot_F^n$ und $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}$.

■

Kapitel 2

Fuzzy-Zufallsvariablen

In diesem Kapitel wird eine Möglichkeit vorgestellt stochastische und nichtstochastische Unschärfe zu verbinden. Wie bereits in der Einleitung erläutert, stellt die klassische mathematische Statistik bewährte Hilfsmittel bereit, stochastische Unschärfe (Unsicherheit) adäquat zu modellieren. Dies geschieht durch die Einführung des Zufallsvariablenbegriffs. Ein- oder mehrdimensionale Zufallsvariablen sind Abbildungen $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ eines Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, \mathcal{F}, P) in den \mathbb{R}^k , die sich durch eine sogenannte Messbarkeitsbedingung auszeichnen (siehe Definition 2.1.1).¹ Die in der Einleitung vorgestellten nichtstochastischen Unschärfetypen (physikalische Unschärfe und Teile der epistemischen Unschärfe) lassen sich durch Zufallsvariablen nicht adäquat modellieren und wurden deshalb in der klassischen Statistik kaum berücksichtigt, obwohl unzweifelhaft ist, dass sie auftreten (können).

Eine Möglichkeit, nichtstochastische Unschärfe in die Untersuchung einzubeziehen, sind die in Kapitel 1 vorgestellten Fuzzy-Mengen. Gesucht ist also ein Zufallsvariablenbegriff für Ergebnisse in Form von Fuzzy-Mengen und damit eine Erweiterung des klassischen Zufallsvariablenbegriffs, der es ermöglicht stochastische und nichtstochastische Unschärfe zu kombinieren. Verschiedene Fuzzy-Zufallsvariablen-Begriffe wurden erstmals von [Kwakernaak] und [Puri/Ralescu] vorgestellt. Eine Vereinheitlichung der verschiedenen Begriffe erfolgte durch Krätschmer (siehe [Krätschmer2001-1], [Krätschmer2001-2])

¹ Die benötigten Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie finden sich in jedem Lehrbuch zur Statistik, siehe z.B. [Bauer], [Steinmetz2003-1] oder [Steinmetz2003-3].

und [Krätschmer2003-1]), dessen Ansatz auch in dieser Arbeit Verwendung findet.

In Kapitel 2.1 wird eine Fuzzy-Zufallsvariable als messbare Abbildung von einer Grundmenge Ω in die Menge $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ definiert. Dazu benötigt man zunächst eine geeignete σ -Algebra in $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$.

In den Kapiteln 2.2 und 2.3 werden ein Erwartungswertbegriff und ein Varianzbegriff für Fuzzy-Zufallsvariablen eingeführt. Dabei orientiert man sich an Begriffen, die in der Literatur bereits etabliert sind, nämlich dem Aumann-Erwartungswert für zufällige kompakte Mengen (siehe Anhang A, Definition und Satz A.5) und dem Fréchet-Prinzip zur Definition eines Erwartungswerts und einer Varianz in einem metrischen Raum (Z, d) .

2.1 Definition von Fuzzy-Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt erfolgt die Übertragung des klassischen Zufallsvariablenbegriffs auf Fuzzy-Mengen. Zunächst die Definition einer klassischen (scharfen) Zufallsvariablen.

Definition und Satz 2.1.1

Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

mit

$$(\forall B \in \mathcal{B}_k) \quad (Y^{-1}B \in \mathcal{F}) \quad (\text{Forderung der Messbarkeit})$$

*heißt **k -dimensionale Zufallsvariable** über (Ω, \mathcal{F}, P) . Dabei bezeichnet \mathcal{B}_k die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R}^k . Durch das Bildmaß Q_Y von P unter Y ,*

$$(\forall B \in \mathcal{B}_k) \quad (Q_Y B := P Y^{-1}B) ,$$

*ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_Y : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k, Q_Y)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man bezeichnet Q_Y als (**Wahrscheinlichkeits-)**Verteilung der Zufallsvariablen Y . (siehe [Steinmetz2003-3], Seite 1, Satz und Definition 1.1.2 und [Bauer], Definition 3.2, Seite 15)*

◆

Erste Ansätze nichtstochastische Unschärfe in der Statistik zu etablieren sind die sogenannten zufälligen kompakten Mengen (siehe Anhang A, Definition A.3). In diesem Fall wird eine σ -Algebra auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$, der Menge der nichtleeren, kompakten und konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^k definiert und werden messbare Abbildungen

$$\check{Y} : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$$

betrachtet. Diese Abbildungen werden dann als zufällige kompakte Mengen bezeichnet (siehe Anhang A, Definition A.3). Um diesen Messbarkeitsbegriff auf Abbildungen

$$\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$$

zu übertragen, muss zunächst eine geeignete σ -Algebra auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ hergeleitet werden. Dazu werden in Analogie zum üblichen Vorgehen die α -Schnitte der Fuzzy-Mengen betrachtet, die für den Fall $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ konvex und kompakt sind, und die σ -Algebra von $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ wird auf den Fuzzy-Fall übertragen. Die entscheidende Idee dabei ist, nicht alle α -Schnitte ($\alpha \in]0, 1]$), sondern nur „fast“ alle α -Schnitte zu betrachten, nämlich $\alpha \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Diese α -Schnitte legen die Fuzzy-Menge eindeutig fest, siehe Satz 1.1.11. Dann wird die Topologie auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ (siehe Anhang A, Definition A.3 und Anhang B, Definition B.1) auf das abzählbare Produkt $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)^{]0, 1] \cap \mathbb{Q}}$ und schließlich auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ übertragen, die sogenannte Produkttopologie. Die σ -Algebra auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ wird dann durch diese Produkttopologie erzeugt (siehe Anhang A, Definition A.1 und Anhang B, Definition B.2).

Definition und Satz 2.1.2

Es bezeichne $\tau_{P\rho_2}$ die Produkttopologie auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)^{]0, 1] \cap \mathbb{Q}}$ bzgl. der ρ_2 Metrik. Weiterhin sei die Abbildung $\pi : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)^{]0, 1] \cap \mathbb{Q}}$ definiert durch $\pi(\tilde{A}) := (\tilde{A}^{\geq \alpha})_{\alpha \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}}$. Dann wird durch

$$\tau_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)} := \{ \pi^{-1}(G) \mid G \in \tau_{P\rho_2} \}$$

eine Topologie auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ definiert, die sogenannte **Produkttopologie auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$** . Die durch $\tau_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)}$ erzeugte σ -Algebra wird mit $\mathcal{B}_{\tau_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k))$ bezeichnet und es gilt

$$\mathcal{B}_{\tau_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)) = \mathcal{B}_{\tau_{\rho_2}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)) .$$

(vgl. [Krätschmer2003-1], Proposition and Definition 2, Theorem 1)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2003-1], Seite 10

■

Nach der Festlegung einer geeigneten σ -Algebra kann die Definition einer Fuzzy-Zufallsvariablen als messbare Abbildung von Ω nach $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ erfolgen.

Definition 2.1.3

Eine Abbildung $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ heißt **Fuzzy-Zufallsvariable** über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) genau dann, wenn sie \mathcal{F} - $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_2}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k))$ -messbar ist, d.h.

$$(\forall B \in \mathcal{B}_{\tau_{\rho_2}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k))) \quad (\tilde{Y}^{-1}B \in \mathcal{F}) .$$

Die **Verteilung** $Q_{\tilde{Y}}$ einer Fuzzy-Zufallsvariablen \tilde{Y} über (Ω, \mathcal{F}, P) wird als das Bildmaß von P unter der Abbildung \tilde{Y} definiert. (vgl. [Krätschmer2003-1], Definition 1)

◆

Die Definition einer Fuzzy-Zufallsvariablen in Definition 2.1.3 ist äquivalent zu der Definition einer Fuzzy-Zufallsvariablen von [Puri/Ralescu] und im Fall $k = 1$ zu der Definition von [Kwakernaak].

Definition und Satz 2.1.4

Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ heißt **Puri/Ralescu-Fuzzy-Zufallsvariable** über (Ω, \mathcal{F}, P) genau dann, wenn die α -Schnitt-Abbildungen

$$\tilde{Y}^{\geq \alpha} : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k), \quad \omega \mapsto \tilde{Y}(\omega)^{\geq \alpha}$$

für alle $\alpha \in]0, 1]$ zufällige kompakte Mengen sind (siehe Anhang A, Definition A.3). Es gilt: \tilde{Y} ist eine Fuzzy-Zufallsvariable genau dann, wenn \tilde{Y} eine Puri/Ralescu-Fuzzy-Zufallsvariable ist.

(vgl. [Krätschmer2001-1], Definition 4.2, Theorem 4.3 oder [Krätschmer2001-2], Seite 174, Definition 4.2.4, Seite 176, Hauptsatz 4.2.8)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2001-1] oder [Krätschmer2001-2], Seite 176f

■

Definition und Satz 2.1.5

Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ heißt **Kwakernaak-Fuzzy-Zufallsvariable** über (Ω, \mathcal{F}, P) genau dann, wenn die **Randlinienfunktionen**

$$l_{\tilde{Y}}^{\alpha} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \min \tilde{Y}(\omega)^{\geq \alpha}$$
$$r_{\tilde{Y}}^{\alpha} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \max \tilde{Y}(\omega)^{\geq \alpha}$$

reellwertige Zufallsvariablen über (Ω, \mathcal{F}, P) sind für alle $\alpha \in]0, 1]$. Es gilt: \tilde{Y} ist eine Fuzzy-Zufallsvariable genau dann, wenn \tilde{Y} eine Kwakernaak-Fuzzy-Zufallsvariable ist. (vgl. [Krätschmer2001-1], Definition 4.4, Proposition 4.5, [Krätschmer2001-2], Seite 173, Definition 4.2.2, Seite 176, Hauptsatz 4.2.8 oder [Kruse/Meyer], Seite 65 und Lemma 7.6)

◆

Beweis: siehe [Krätschmer2001-1] oder [Krätschmer2001-2], Seite 176f

■

Fuzzy-Zufallsvariablen verallgemeinern den Begriff von reellwertigen Zufallsvariablen, d.h. man kann reellwertige Zufallsvariablen als Fuzzy-Zufallsvariablen auffassen.

Beispiel 2.1.6

Es sei Y eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Zu $\omega \in \Omega$ bezeichne $1_{\{Y(\omega)\}}$ die Indikatorfunktion von $\{Y(\omega)\}$. Dann ist die Abbildung $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$, definiert durch

$$\tilde{Y}(\omega) := \{(x, 1_{\{Y(\omega)\}}(x)) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

eine Fuzzy-Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) . (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 177, Beispiel 4.2.9).

Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 177

■

Sind die Bildpunkte von Fuzzy-Zufallsvariablen Fuzzy-Mengen in Trapez-Gestalt, kann man deren spezielle Darstellung (vgl. Definition 1.1.18) ausnutzen, um auch für die Fuzzy-Zufallsvariablen eine suggestive Darstellungsart zu finden.

Beispiel 2.1.7

Es seien $Y_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Y_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Y_3 : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ und $Y_4 : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Dann ist die Abbildung $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$, definiert durch

$$\tilde{Y}(\omega) := [Y_1(\omega), Y_2(\omega), Y_3(\omega), Y_4(\omega)]_{\Delta},$$

eine Fuzzy-Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) . (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 178, Beispiel 4.2.10 oder [Petry], Seite 30f, Beispiel 3.5)

Beweis: vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 178 oder [Petry], Seite 31.

■

Wie in Abschnitt 1.2.4 erfolgt auch hier die Übertragung auf Fuzzy-Zufallsvariablen mit Werten in $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ und $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$.

Definition 2.1.8

Es bezeichne $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_2}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n)$ die n -fache Produkt- σ -Algebra von $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_2}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}))$. Eine Abbildung

$$\underline{\tilde{Y}} := (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)' : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \omega \mapsto (\tilde{Y}_1(\omega), \dots, \tilde{Y}_n(\omega))'$$

heißt $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ -wertige **Fuzzy-Zufallsvariable** über einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) genau dann, wenn die Abbildungen $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ jeweils Fuzzy-Zufallsvariablen über (Ω, \mathcal{F}, P) sind. Als **Verteilung** $Q_{\underline{\tilde{Y}}}$ einer $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ -wertigen Fuzzy-Zufallsvariablen $\underline{\tilde{Y}}$ über (Ω, \mathcal{F}, P) wird das Bildmaß von P unter der Abbildung $\underline{\tilde{Y}}$ definiert. (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 173, Definition 4.2.1)

◆

2.2 Der Aumann-Erwartungswert von Fuzzy-Zufallsvariablen

An dieser Stelle wird ein Erwartungswert für Fuzzy-Zufallsvariablen definiert. Da eine Abbildung $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ genau dann eine Fuzzy-Zufallsvariable ist, wenn die α -Schnitt-Abbildungen

$$\tilde{Y}^{\geq \alpha} : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k), \omega \mapsto \tilde{Y}(\omega)^{\geq \alpha}, \quad \alpha \in]0, 1]$$

$\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ -wertige zufällige kompakte Mengen sind (siehe Definition und Satz 2.1.4) wird der von Aumann eingeführte Integralbegriff für zufällige kompakte Mengen (siehe Anhang A, Satz und Definition A.5) auf Fuzzy-Zufallsvariablen übertragen.

Definition 2.2.1

Eine Fuzzy-Zufallsvariable $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) heißt **integrierbar** genau dann, wenn

$$\rho_2(\tilde{Y}, \underline{0})$$

P -integrierbar ist. (vgl. [Krätschmer2003-3], Theorem 6.2) ◆

Definition und Satz 2.2.2

Es sei $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ eine integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann existiert eine eindeutig bestimmte Fuzzy-Menge

$$\tilde{E}^{A\tilde{Y}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$$

mit

$$\forall \alpha \in]0, 1] : (\tilde{E}^{A\tilde{Y}})^{\geq \alpha} = E^A(\tilde{Y}^{\geq \alpha}).^2$$

$\tilde{E}^{A\tilde{Y}}$ heißt der **Aumann-Erwartungswert** von \tilde{Y} . (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 189ff oder [Krätschmer2003-3], Proposition and Definition 4.1) ◆

² Die Definition von E^A findet sich in Anhang A, Definition A.5.

Bemerkung 2.2.3

In [Krätschmer2003-3] werden verschiedene Integrierbarkeitsbegriffe für Fuzzy-Zufallsvariablen diskutiert. In Theorem 6.2 wird gezeigt, dass aus der Integrierbarkeit von \tilde{Y} die Existenz von $\tilde{E}^A \tilde{Y} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}^k)$ folgt. ◆

Die Eigenschaft der Linearität des Erwartungswerts bleibt auch für den Aumann-Erwartungswert von Fuzzy-Zufallsvariablen erhalten.

Satz 2.2.4

Es seien \tilde{Y} , \tilde{Y}_1 und \tilde{Y}_2 integrierbare Fuzzy-Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann gilt

.1 $\tilde{Y}_1 \oplus_F \tilde{Y}_2$ ist eine integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) mit

$$\tilde{E}^A(\tilde{Y}_1 \oplus_F \tilde{Y}_2) = \tilde{E}^A \tilde{Y}_1 \oplus_F \tilde{E}^A \tilde{Y}_2 ,$$

.2 $\lambda \odot_F \tilde{Y}$ ist eine integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) mit

$$\tilde{E}^A(\lambda \odot_F \tilde{Y}) = \lambda \odot_F \tilde{E}^A \tilde{Y} , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

(vgl. [Krätschmer2003-1], Proposition 5 oder [Krätschmer2001-2], Seite 191, Satz 4.3.5) ◆

Beweis:

Der Beweis folgt aus den Eigenschaften des Aumann-Erwartungswerts von zufälligen kompakten Mengen (siehe [Krätschmer2003-1], Seite 13 oder [Krätschmer2001-2], Seite 191). ■

Ist der Aumann-Erwartungswert einer Fuzzy-Zufallsvariablen $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ eine reelle Einpunktmenge $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$, so ist die Fuzzy-Zufallsvariable \tilde{Y} P-fast sicher eine reellwertige Zufallsvariable.

Beispiel 2.2.5

Es sei $1_{\{x\}}$ die Indikatorfunktion von $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$. Weiterhin sei \tilde{Y} eine integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit

$$\tilde{E}^A \tilde{Y} = \{(t, 1_{\{x\}}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine P -integrierbare reellwertige Zufallsvariable Y über (Ω, \mathcal{F}, P) mit

- .1 $\exists A \in \mathcal{F}, P A = 1, \quad \forall \omega \in A : \tilde{Y}(\omega) = \{(t, 1_{\{Y(\omega)\}}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- .2 $\tilde{E}^A \tilde{Y} = \{(t, 1_{\{E Y\}}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\} .$

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 193, Beispiel 4.3.8)

Beweis: siehe [Krätschmer2001-2], Seite 193

■

Der Aumann-Erwartungswert der Fuzzy-Zufallsvariablen aus Beispiel 2.1.7 ist ohne Schwierigkeiten zu bestimmen.

Beispiel 2.2.6

Es seien $Y_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, Y_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, Y_3 : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ und $Y_4 : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ P -integrierbare Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit

$$Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega .$$

Dann ist die Abbildung $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$, definiert durch

$$\tilde{Y}(\omega) := (Y_1(\omega), Y_2(\omega), Y_3(\omega), Y_4(\omega))_{\Delta} ,$$

eine P -integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) mit

$$\tilde{E}^A \tilde{Y} = (E Y_1, E Y_2, E Y_3, E Y_4)_{\Delta} .$$

(vgl. [Petry], Seite 33, Beispiel 3.10 oder [Krätschmer2001-2], Beispiel 4.3.10, Seite 196).

Beweis: vgl. [Petry], Seite 33 oder [Krätschmer2001-2], Seite 196

■

Zum Abschluss dieses Abschnittes erfolgt die Übertragung des Erwartungswertbegriffs auf $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ -wertige Fuzzy-Zufallsvariablen.

Definition 2.2.7

Eine $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ -wertige Fuzzy-Zufallsvariable $\underline{\tilde{Y}} := (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)'$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) heißt **integrierbar** genau dann, wenn $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ integrierbar sind.

Dann heißt

$$\tilde{E}^A \underline{\tilde{Y}} = \tilde{E}^A (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)' := (\tilde{E}^A \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{E}^A \tilde{Y}_n)'$$

Aumann-Erwartungswert von $\tilde{Y} := (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)'$. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 190, Definition 4.3.4)



2.3 Die Fréchet-Varianz von Fuzzy-Zufallsvariablen

Im folgenden Abschnitt wird ein Varianzbegriff für Fuzzy-Zufallsvariablen eingeführt. Der in der Literatur favorisierte Begriff beruht auf einer Arbeit von [Fréchet], der für Zufallsvariablen mit Werten in metrischen Räumen einen Erwartungswert- und einen Varianzbegriff formulierte. Grundlegende Idee ist die Verwendung der folgenden Eigenschaft von Erwartungswert und Varianz reellwertiger Zufallsvariablen. Ist Y eine 2-fach P-integrierbare reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , so ist der Erwartungswert EY die eindeutige Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{t \in \mathbb{R}} E(Y - t)^2 = E(Y - EY)^2$$

(siehe [Krätschmer2001-2], Seite 247, Lemma 4.9.1). Diese Eigenschaft wird auf Zufallsvariablen mit Werten in metrischen Räumen übertragen.

Definition 2.3.1

Es seien (Z, d) ein metrischer Raum mit induzierter Topologie τ_d (siehe Anhang B, Definition B.1) und $Y : \Omega \rightarrow Z$ eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , also eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}_{\tau_d}$ -messbare Abbildung (siehe Anhang A, Definition A.1). Weiterhin sei $d(Y, z)$ 2-fach P-integrierbar für alle $z \in Z$. Existiert ein z_0 in Z mit

$$E d(Y, z_0)^2 = \min_{z \in Z} E d(Y, z)^2 ,$$

so heißt $\min_{z \in Z} E d(Y, z)^2$ die **Fréchet-Varianz von Y** . (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 248, Definition 4.9.2)



Zunächst wird der Begriff der 2-fachen Integrierbarkeit auf Fuzzy-Zufallsvariablen übertragen.

Definition 2.3.2

Eine Fuzzy-Zufallsvariable $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) heißt **quadratisch integrierbar genau dann**, wenn

$$\rho_2(\tilde{Y}, \tilde{0})$$

2-fach P-integrierbar ist. (siehe [Krätschmer2003-2], Seite 7)

◆

Im Fall $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ -wertiger Fuzzy-Zufallsvariablen bedeutet Definition 2.3.1, dass eine Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{\tilde{A} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})} \rho_2(\tilde{Y}, \tilde{A})$$

bestimmt werden muss. Körner (siehe [Körner 1997-2], Theorem 1) konnte nachweisen, dass der Aumann-Erwartungswert $\tilde{E}^A Y$ die eindeutige Lösung dieses Minimierungsproblems ist.

Satz 2.3.3

Es sei $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ eine quadratisch integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann sind auch die Abbildungen

$$\rho_2(\tilde{Y}, \tilde{A}) \quad (\tilde{A} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}))$$

quadratisch integrierbar und der Aumann-Erwartungswert $\tilde{E}^A \tilde{Y}$ ist die eindeutig bestimmte Fuzzy-Menge in $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ mit

$$E \rho_2(\tilde{Y}, \tilde{E}^A \tilde{Y})^2 = \min_{\tilde{A} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})} E \rho_2(\tilde{Y}, \tilde{A})^2 .$$

(vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 249, Satz 4.9.3 oder [Körner 1997-2], Theorem 1)

◆

Beweis: siehe [Körner 1997-2], Seite 85

■

Aufgrund von Satz 2.3.3 erhält man die folgende Definition der Varianz einer Fuzzy-Zufallsvariablen.

Definition 2.3.4

Es sei $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ eine quadratisch integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann heißt

$$\widetilde{\text{Var}}^F \tilde{Y} := E \rho_2(\tilde{Y}, \tilde{E}^A \tilde{Y})^2$$

die **Fréchet-Varianz von \tilde{Y}** . (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 249, Definition 4.9.4)

◆

Die Fréchet-Varianz einer Fuzzy-Zufallsvariablen bewahrt bekannte Eigenschaften der Varianz reellwertiger Zufallsvariablen.

Satz 2.3.5

Es seien $\tilde{Y}, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ quadratisch integrierbare $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ -wertige Fuzzy-Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann gilt

.1 $\lambda \odot_F \tilde{Y}$ ist eine quadratisch integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) mit

$$\widetilde{\text{Var}}^F (\lambda \odot_F \tilde{Y}) = \lambda^2 \widetilde{\text{Var}}^F (\tilde{Y}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

.2 $\tilde{A} \oplus_F \tilde{Y}$ ist eine quadratisch integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) mit

$$\widetilde{\text{Var}}^F (\tilde{A} \oplus_F \tilde{Y}) = \widetilde{\text{Var}}^F (\tilde{Y}), \quad \forall \tilde{A} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}),$$

.3 $\tilde{Y}_1 \oplus_F \tilde{Y}_2$ ist eine quadratisch integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über (Ω, \mathcal{F}, P) mit

$$\widetilde{\text{Var}}^F (\tilde{Y}_1 \oplus_F \tilde{Y}_2) = \widetilde{\text{Var}}^F (\tilde{Y}_1) + \widetilde{\text{Var}}^F (\tilde{Y}_2), \quad \text{falls } \tilde{Y}_1 \text{ und } \tilde{Y}_2 \text{ unabhängig sind.}$$

(vgl. [Körner 1997-2], Theorem 2)

◆

Beweis: siehe [Körner 1997-2], Seite 86

■

Bemerkung 2.3.6

Der Begriff der Unabhängigkeit von Fuzzy-Zufallsvariablen muss nicht gesondert definiert werden, da der Unabhängigkeitsbegriff auch für allgemeine Zufallsvariablen $Y : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ definiert ist (siehe Anhang A, Satz A.6).

◆

Bemerkung 2.3.7

Zum Abschluss des Kapitels *Fuzzy-Zufallsvariablen* erfolgt noch eine Begründung für die Verwendung der ρ_2 -Metrik. Krätschmer gelang es die Fundamentalsätze der Statistik (Starkes Gesetz der Großen Zahlen, Zentraler Grenzwertsatz, Satz von Glivenko-Cantelli) auf Fuzzy-Zufallsvariablen zu übertragen (siehe [Krätschmer2001-2], Kapitel 4.5 oder [Krätschmer2002-1]). Die in dieser Arbeit verwendete ρ_2 -Metrik benötigt die geringsten Annahmen zum Nachweis dieser Sätze. Damit ergibt sich ein Grund für die Verwendung dieser Metrik (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 220, Bemerkung 4.5.6).



Kapitel 3

Ein lineares Fuzzy-Regressionsmodell

In der Ökonometrie wird bei der Verwendung von klassischen Regressionsmodellen angenommen, dass die beobachteten Daten scharf sind. Es ist jedoch unbestritten, dass diese Annahme oft zu idealistisch ist. „Ein Blick auf irgendwelche ökonomischen Daten lehrt, daß in fast jeder wirtschaftsstatistischen Reihe Meßfehler auftreten“ (siehe [Schönfeld], Band 2, Seite 106). Hinzu kommt, dass viele der in ökonomischen Fragestellungen verwendeten Begriffe, wie etwa „Kreditwürdigkeit“ oder „Erwerbstätigkeit“ (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 85f) vom Charakter her vage oder unscharf sind und es nicht immer sinnvoll, ist diese Tatsache zu vernachlässigen. Ausführliche Analysen der Fehlerursachen finden sich bei Schneeweiß und Mittag (siehe [Schneeweiß/Mittag], Einleitung). Ein Versuch, diese Probleme zu bewältigen, sind die sogenannten „Fehler in den Variablen-Modelle“ (siehe [Schneeweiß/Mittag], [Hübler], Kapitel 14 oder [Schönfeld], Band 2, Kapitel 11). Dort werden Messfehler bzw. die zugrunde liegende Unschärfe jedoch mit Zufallsvariablen modelliert. Eine Einbeziehung nichtstochastischer Unschärfe, wie beispielsweise die angesprochene Adäquationsproblematik, findet nicht statt. Das Verwenden von Daten in Form von Fuzzy-Mengen stellt eine Möglichkeit dar nichtstochastische Unschärfe bzw. Vagheit in Regressionsmodelle zu integrieren. Schon bald nach der Einführung der Fuzzy-Mengen durch Zadeh wurde versucht, diese neuen Methoden auf statistische und ökonometrische Fragestellungen anzuwenden. So kam es 1982 zur Vorstellung von Fuzzy-Regressionsmodellen durch [Tanaka et al.]. Seitdem wurden eine Vielzahl von Beiträgen zu diesem Themenkreis veröffentlicht, die in sehr verschiedene Richtungen gehen und un-

terschiedliche Fragestellungen bearbeiten (siehe [Tanaka et al.], [Savic/Pedrycz], [Viertl], [Diamond/Kloeden], [Kruse/Meyer]), [Krätschmer2001-2]), [Körner/Näther] und [Petry]). Ein Überblick über die unterschiedlichen Ansätze findet sich bei Petry (siehe [Petry], Kapitel 7 und Seite 99). Eine erste Frage, die sich stellt, ist, welche der in Regressionsmodellen beteiligten Variablen als fuzzy angenommen werden. In dieser Arbeit wird angenommen, dass die abhängigen Variablen und die Regressionsparameter fuzzy sind. Diese Modelle wurden auch von [Tanaka et al.], [Körner/Näther], [Petry], [Diamond] und [Diamond/Kloeden] untersucht.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein stochastisches Fuzzy-Regressionsmodell vorzustellen und damit die Einbeziehung stochastischer und nichtstochastischer Unschärfe in die Modellierung. Weiterhin soll eine Schätzmethode erarbeitet und auf statistische Eigenschaften untersucht werden. Daher sind die deterministischen Modelle und Methoden von [Tanaka et al.], [Diamond] und [Diamond/Kloeden] für diese Fragestellung nicht geeignet. Körner und Näther (siehe [Näther], [Körner 1997-1] und [Körner/Näther]) stellten erstmals Fuzzy-Regressionsmodelle vor, bei denen die abhängige Variable als Fuzzy-Zufallsvariable modelliert wurde und entwickelten Schätzmethoden für den unbekanntem (fuzzy) Parametervektor. Sie zeigten zunächst, dass die, mit Hilfe des Erweiterungsprinzips von Zadeh (siehe Definition und Satz 1.2.2) erweiterten, „optimalen“ klassischen Schätzer im Allgemeinen nicht ihre statistischen Eigenschaften beibehalten. Hier ging es insbesondere um Erwartungstreue und Effizienz, also die bekannte BLUE-Eigenschaft¹ des Kleinst-Quadrate-Schätzers in klassischen (scharfen) Regressionsmodellen (siehe Satz 4.1.4 oder [Steinmetz2002], Seite 189, Satz 10.3.3). Sie kamen daher zum Schluss, dass ein direkter Kleinst-Quadrate-Ansatz sinnvoller sei (siehe [Körner/Näther], Seite 109). Ein Nachweis statistischer Eigenschaften des verwendeten KQ-Schätzers unterblieb jedoch. Statistische Eigenschaften für seinen KQ-Schätzer konnte Petry nachweisen. Er zeigte die schwache Konsistenz seines Schätzers im Falle symmetrischer LL -Zahlen (siehe [Petry], Seite 77, Satz 6.16).

¹ **B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator, also bester, linearer, unverzerrter Schätzer

In dieser Arbeit wird das Modell von [Körner/Näther] betrachtet und damit ein stochastisches Fuzzy-Regressionsmodell mit unscharfen abhängigen Variablen und unscharfen Parametern, mit möglichst allgemeinen Fuzzy-Mengen. Zur Schätzung des unbekanntem Parametervektors wird ein KQ-Schätzer vorgeschlagen. Neben Existenz und Eindeutigkeit wird die starke Konsistenz des vorgestellten KQ-Schätzers nachgewiesen (siehe Kapitel 4 und 5). Auch Krätschmer (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 283, Hauptsatz 5.4.4) gelang dies. Er verwendete jedoch ein anderes Modell mit scharfen Parametern, unscharfen Regressoren und unscharfen Regressanden.

In Kapitel 3.1 wird zunächst das klassische lineare Regressionsmodell vorgestellt und eine formal äquivalente Darstellung von Regressionsmodellen angegeben. Diese äquivalente Darstellung von Regressionsmodellen wird in Kapitel 3.2 zur Definition des in dieser Arbeit untersuchten linearen Fuzzy-Regressionsmodells verwendet. Kapitel 3.3 dient der Übertragung klassischer Regressionsmodelle auf qualitative bzw. kategoriale abhängige Variablen und einer möglichen Anwendung des vorgestellten Fuzzy-Regressionsmodells als Verallgemeinerung dieser Modelle. Kapitel 3.4 beschäftigt sich mit dem fundamentalen Identifikationsproblem der Ökonometrie. Es wird gezeigt, dass die übliche Identifizierbarkeitsbedingung bei klassischen (scharfen) Regressionsmodellen, d.h. voller Spaltenrang der Regressionsmatrix X , nicht ausreicht und eine zusätzliche Forderung gestellt werden muss. In Kapitel 3.5 werden für den weiteren Verlauf der Arbeit nützliche Eigenschaften der Regressionsfunktion bereitgestellt.

3.1 Das klassische lineare Regressionsmodell

Zentraler Gegenstand der Ökonometrie ist die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen ökonomischen Variablen. Hängt beispielsweise der gesamtwirtschaftliche Konsum einer Volkswirtschaft allein vom verfügbaren Einkommen ab, wie die Keynes'sche Konsumhypothese unterstellt? Oder gibt es im Beispiel der Kreditwürdigkeitsprüfung (siehe Beispiel 1.1.3) einen signifikanten Einfluss der Höhe des Kredits auf die Einstufung eines Kunden als „kreditwürdig“? Eine Möglichkeit, solche Fragestellungen zu untersuchen, sind Regressionsmodelle. Dort wird die Abhängigkeit einer Variablen von einer oder

mehreren anderen Variablen untersucht. Im Beispiel der Kreditwürdigkeitsprüfung ist die sogenannte abhängige Variable die „Kreditwürdigkeit“ des Kunden, die von Variablen wie „Höhe des Kredits“, „Laufzeit des Kredits“, „Höhe des verfügbaren Einkommens“, den sogenannten unabhängigen Variablen abhängt (genauere Erläuterungen des Kreditwürdigkeitsbeispiels finden sich bei [Fahrmeir], Seite 334f). Fragestellungen sind dann beispielsweise, welche der betrachteten unabhängigen Variablen einen signifikanten Einfluss auf die abhängige Variable haben, wie dieser Einfluss aussieht oder ob es eventuell gar keine nachweisbaren Zusammenhänge gibt.

Eine wichtige Grundannahme ist dabei in vielen Fällen die Linearität der verwendeten Modelle. Viele nichtlineare Modelle in der Ökonometrie lassen sich durch geeignete Transformationen linearisieren oder sind im interessierenden bzw. relevanten Bereich zumindest näherungsweise linear.

Ein Standardbeispiel für lineare Regressionsmodelle ist die bereits erwähnte Keynes'sche Konsumhypothese (siehe [Schöfeld], Band 1, Seite 2ff). Hier wird unterstellt, dass der gesamtwirtschaftliche Konsum C einer Volkswirtschaft allein vom disponiblen Einkommen Z abhängt. Der einfachste lineare Erklärungsansatz hat dann die Form

$$C = \beta_0 + \beta_1 Z, \quad \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R},$$

dabei bezeichnet β_0 den einkommensunabhängigen Konsum („autonomer Konsum“) und β_1 die marginale Konsumneigung. Konfrontiert man dieses Modell jedoch mit empirischen Daten, d.h. man beobachtet Konsum und Einkommen zu verschiedenen Zeitpunkten t ² und erhält damit Daten (C_t, Z_t) ($t = 1, \dots, T, T \in \mathbb{N}$), so stellt sich heraus, dass der vermutete lineare Ansatz bei mehr als drei Beobachtungen i.A. nicht mehr einzuhalten ist. Erklärt werden kann die Diskrepanz zwischen dem linearen Modell und den empirischen Daten dadurch, dass zwar ein linearer Zusammenhang zwischen C und Z besteht, der aber überlappt wird durch eine Vielzahl anderer (beobachtbarer und unbeobachtbarer) Effekte („Störeffekte“), die einzeln nicht signifikant sind, aber in ihrer Gesamtheit einen Einfluss haben. Deshalb erweitert man das Modell um eine stochastische Komponente,

² In ökonomischen Untersuchungen werden Daten oft zu verschiedenen Zeitpunkten erhoben. Aus diesem Grund hat sich der Index t als Laufindex etabliert, auch wenn es sich nicht um Zeitpunkte handelt.

die diese Einflüsse als Zufallsvariable modelliert, und somit lässt sich der lineare Ansatz aufrecht erhalten. Eine wichtige Forderung an die sogenannte Störvariable ist, dass sie nur die „nicht systematischen“ Einflüsse aufnehmen soll. Damit gelangt man zur üblichen Definition (klassischer) linearer Regressionsmodelle.

Definition 3.1.1

Es seien $n, T \in \mathbb{N}$, $x_{ti} \in \mathbb{R}$ ($t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\}$) und Y_1, \dots, Y_T reellwertige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) .

$$\{Y_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

heißt **lineares Regressionsmodell (LRM)** genau dann, wenn ein unbekannter Vektor $\underline{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_n)' \in \mathbb{R}^n$ und unbeobachtbare Zufallsvariablen U_1, \dots, U_T existieren mit

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : Y_t = \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ti} + U_t = X'_{t\bullet} \underline{\beta} + U_t .$$

Y_t ($t = 1, \dots, T$) heißen die **abhängigen Variablen (Regressanden)**, x_{ti} ($t = 1, \dots, T$, $i = 1, \dots, n$) die **unabhängigen Variablen (Regressoren)**, $\underline{\beta}$ der **Regressionsparametervektor** und U_1, \dots, U_T die **Störvariablen (Störgrößen)**. Verwendet man die übliche Matrixschreibweise, d.h.

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix}, \underline{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_T \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & \cdots & x_{Tn} \end{pmatrix}, \underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

so wird das Modell geschrieben als

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{U} .$$

Die $(T \times n)$ -Matrix X wird als **Regressionsmatrix (Regressionsfunktion)** des Regressionsmodells bezeichnet. Liegen Realisationen \underline{y} und X vor, bezeichnet man (\underline{y}, X) als **Beobachtungswertmatrix**. Das Modell wird als **klassisch** bezeichnet, wenn die folgenden Annahmen erfüllt sind. Für jede Realisation $X \in \mathbb{R}^{T \times n}$ und jedes $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

A1 $E(\underline{U}) = \underline{0}$

$$A2 \quad E(\underline{U}\underline{U}') = \sigma^2 I \quad \text{mit } \sigma^2 > 0.^3$$

Für die beobachtete Realisation X gilt:

$$A3 \quad \text{rg } X = n.$$

Ist ein Spaltenvektor der Matrix X der Einsvektor, o.B.d.A. gelte $x_{t1} = 1$ ($t = 1, \dots, T$), so heißt das Modell **inhomogen**, andernfalls **homogen**. (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 46, Definition 1.4.1, [Steinmetz2002], Seite 178, Definition 10.1.2 bzw. [Steinmetz2003-2], Seite 33f, Definition 3.1.1)



Die folgende Darstellung linearer Regressionsmodelle ist äquivalent zur der in Definition 3.1.1 mit Annahme A1. In dieser Darstellung wird versucht ohne Störgrößen auszukommen. Es wird gefordert, dass

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \quad E Y_t = \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ti}$$

gilt. Durch diesen Ansatz wird der Aspekt, dass der Zusammenhang zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen nur „im Mittel“ gültig ist, stärker betont. Der folgende Satz besagt, dass die beiden Darstellungen äquivalent sind.

Satz 3.1.2

.1 Für jedes lineare Regressionsmodell mit $E U_t = 0$ ($t = 1, \dots, T$) bzw. $E \underline{U} = \underline{0}$ (d.h. mit A1 aus Definition 3.1.1) gilt

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \quad E Y_t = \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ti}$$

$$\text{bzw.} \quad E \underline{Y} = X \underline{\beta}.$$

.2 Es seien $n, T \in \mathbb{N}$, $x_{ti} \in \mathbb{R}$ ($t \in \{1, \dots, T\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) und Y_1, \dots, Y_T reellwertige Zufallsvariablen. Weiterhin existiere ein unbekannter Vektor

$$\underline{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_n)' \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit}$$

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \quad E Y_t = \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ti}.$$

³ Dabei bezeichnet I die $T \times T$ -Einheitsmatrix.

Dann wird durch

$$\{Y_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

ein lineares Regressionsmodell (LRM) definiert und es existieren Zufallsvariablen U_t mit $E U_t = 0$ ($t = 1, \dots, T$) bzw. $E \underline{U} = \underline{0}$ mit

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : Y_t = \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ti} + U_t .$$

(vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 47 bzw. [Steinmetz2002], Seite 180, Satz 10.1.3)

◆

Beweis:

zu .1:

siehe [Steinmetz2002], Seite 180

zu .2:

Sei $\underline{U} := \underline{Y} - E \underline{Y}$. Dann ist $\underline{Y} = X \underline{\beta} + \underline{U}$ ein LRM mit A1 gemäß Definition 3.1.1.

■

Bemerkung 3.1.3

Im Folgenden wird das Regressionsmodell aus Definition 3.1.1 auch als scharfes (bzw. klassisches) Regressionsmodell bezeichnet.

◆

Die Darstellung in Satz 3.1.2.2 wird zur Definition des in dieser Arbeit untersuchten Fuzzy-Regressionsmodells benutzt.

3.2 Das lineare Fuzzy-Regressionsmodell

In diesem Abschnitt wird das in der Arbeit untersuchte lineare Fuzzy-Regressionsmodell vorgestellt. Angenommen wird, dass die betrachtete abhängige Variable Y sich nicht durch eine scharfe Zufallsvariable adäquat modellieren lässt, da eine nichtstochastische Unschärfe (physikalische oder epistemische Unschärfe, siehe Einleitung) vorliegt. Im Beispiel der Kreditwürdigkeitsprüfung ist es sehr unbefriedigend als Bewertung nur „kreditwürdig“ oder „nicht kreditwürdig“ zuzulassen. Diese scharfe Trennung ist oft nicht

flexibel genug (vgl. Beispiel 1.1.3 und Seite 14f). Eine erste Aufweichung oder Flexibilisierung des Entscheidungsprozesses erfolgt bei der Unternehmensbewertung, also der Prüfung der Kreditwürdigkeit von Unternehmen, dadurch, dass mehr als zwei Ratingergebnisse möglich sind, z.B. AAA, AA, ..., D. Die Kreditwürdigkeit (Bonität) eines Unternehmens wird durch die unterschiedlichen Ratingkategorien beurteilt und danach ein „adäquater“ Zinssatz festgesetzt. In den Richtlinien zur Eigenkapitalunterlegung von Krediten (Basel II) ist vorgesehen, diese detaillierte Bewertung der Unternehmen (interne Bewertung durch die Bank, externe Bewertung durch Ratingagenturen, siehe [Wolf], Seite 15) dahingehend zu verwenden, um für verschieden „gut“ bewertete Unternehmen unterschiedlich hohe Eigenkapitalunterlegungen festzusetzen. Schlechter bewertete Unternehmen müssen dann die höheren Kreditrisiken (und damit die höhere benötigte Eigenkapitalunterlegung des Kredits) durch höhere Kreditzinsen bezahlen (gemäß dem Zitat „Schwache sollen mehr zahlen“ aus der Einleitung). Aber auch die Aufweichung durch verschiedene Ratingkategorien kann nicht immer befriedigen. Gerade bei knappen Entscheidungen für eine Ratingklasse wird durch die Verwendung scharfer Klassengrenzen eventuell eine Sicherheit vorgetäuscht, die das Datenmaterial nicht hergibt. Ein wünschenswerter Ansatz wäre es also, die abhängige Variable Y als Fuzzy-Zufallsvariable zu modellieren, um die Unschärfe (Vagheit) eines Begriffs wie „Kreditwürdigkeit“ in den Entscheidungsprozess zu integrieren. Zunächst könnte man versuchen ein lineares Regressionsmodell der Form

$$\tilde{E}^A \underline{\tilde{Y}} = X \underline{\beta}$$

zugrunde zu legen. Es wird also weiterhin angenommen, dass die unabhängigen Variablen scharf sind. Im Beispiel des Credit Scoring ist dies nicht unplausibel. Die unabhängigen Variablen wie etwa Kredithöhe, Kreditdauer oder speziell bei Unternehmen Eigenkapitalquote, Return on Investment, Cashflow (siehe [Wolf], Seite 86, Seite 103, Seite 124) sind in der Regel scharf bzw. es werden scharfe Daten erhoben. Der Ansatz $\tilde{E}^A \underline{\tilde{Y}} = X \underline{\beta}$ geht aber nicht weit genug und ist keine wirkliche Flexibilisierung, da die Zufallsvariable $\underline{\tilde{Y}}$ in $\tilde{E}^A \underline{\tilde{Y}} = X \underline{\beta}$ P-fast sicher scharf ist (siehe Beispiel 2.2.5). Um also eine „echte“ unscharfe abhängige Variable mit scharfen unabhängigen Variablen modellieren zu können, muss der unbekannte Parametervektor zwangsläufig fuzzy sein. Damit erhält man das folgende

lineare Fuzzy-Regressionsmodell.

Definition 3.2.1

Es seien $n, T \in \mathbb{N}$, $x_{ti} \in \mathbb{R}$ ($t \in \{1, \dots, T\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) und $\underline{\tilde{Y}} := (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T)'$ eine integrierbare $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ -wertige Fuzzy-Zufallsvariable.

$$\left\{ \tilde{Y}_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

heißt **lineares Fuzzy-Regressionsmodell mit fuzzy Parametern und fuzzy abhängigen Variablen (LFRM)** genau dann, wenn ein unbekannter Vektor

$$\underline{\tilde{\beta}} := (\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n)' \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$$

existiert mit

$$\begin{aligned} \forall t \in \{1, \dots, T\} : \tilde{E}^A \tilde{Y}_t &= (x_{t1} \odot_F \tilde{\beta}_1) \oplus_F \dots \oplus_F (x_{tn} \odot_F \tilde{\beta}_n) \\ &=: (\tilde{\beta}_1 \odot_F x_{t1}) \oplus_F \dots \oplus_F (\tilde{\beta}_n \odot_F x_{tn}) \\ &=: X'_{t\bullet} \odot_F \underline{\tilde{\beta}} \quad . \end{aligned}$$

\tilde{Y}_t ($t = 1, \dots, T$) heißen die **abhängigen Variablen (Regressanden)**, x_{ti} ($t = 1, \dots, T$, $i = 1, \dots, n$) die **unabhängigen Variablen (Regressoren)**, $\underline{\tilde{\beta}}$ der **Regressionsparametervektor** und die $(T \times n)$ -Matrix $X := (x_{ti})_{\substack{t=1, \dots, T \\ i=1, \dots, n}}$

$$\begin{aligned} X(\cdot) : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n &\rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T \\ \underline{\tilde{\beta}} &\mapsto X(\underline{\tilde{\beta}}) := (X'_{1\bullet} \odot_F \underline{\tilde{\beta}}, \dots, X'_{T\bullet} \odot_F \underline{\tilde{\beta}})' \end{aligned}$$

die **Regressionsfunktion (Regressionsmatrix)** des Fuzzy-Regressionsmodells. Verwendet man die Matrixschreibweise lautet das Modell

$$\tilde{E}^A \underline{\tilde{Y}} = X(\underline{\tilde{\beta}}) \quad .$$

Liegen Realisationen $\underline{\tilde{y}}$ und X vor, bezeichnet man $(\underline{\tilde{y}}, X)$ als **Beobachtungswertmatrix**. ◆

Bemerkung 3.2.2

Im Folgenden bezeichne $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ die Standard-Einbettung von \mathbb{R} in $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$, d.h. $\Psi(x)$ besitze die Indikatorfunktion von $1_{\{x\}}$ von $\{x\}$ als Zugehörigkeitsfunktion (siehe Definition 1.1.14).

.1 Es seien $x_{ti} \in \mathbb{R}$ ($t \in \{1, \dots, T\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) und $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_T$ integrierbare Fuzzy-Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $\tilde{E}^A \tilde{U}_t = \tilde{0}$ ($t = 1, \dots, T$). Dann wird durch

$$\tilde{Y}_t := ((\tilde{\beta}_1 \odot_F x_{t1}) \oplus_F \dots \oplus_F (\tilde{\beta}_n \odot_F x_{tn})) \oplus_F \tilde{U}_t$$

ein LFRM

$$\{\tilde{Y}_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

definiert. Damit scheint

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \tilde{Y}_t := ((\tilde{\beta}_1 \odot_F x_{t1}) \oplus_F \dots \oplus_F (\tilde{\beta}_n \odot_F x_{tn})) \oplus_F \tilde{U}_t$$

eine andere plausible Möglichkeit zu sein, LFRM zu modellieren.

Analog zu Krätschmer (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 255f) gilt aber auch hier, dass in diesem Fall P-fast sicher ein Regressionsmodell der Form

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \tilde{Y}_t := ((\tilde{\beta}_1 \odot_F x_{t1}) \oplus_F \dots \oplus_F (\tilde{\beta}_n \odot_F x_{tn})) \oplus_F \Psi \circ U_t$$

vorliegt, wobei U_1, \dots, U_T P-integrierbare reellwertige Zufallsvariablen über (Ω, \mathcal{F}, P) mit $E U_t = 0$ ($t = 1, \dots, T$) bezeichnen. Damit würde sich die Unschärfe der abhängigen Variablen nur durch die Unschärfe der Regressionsparameter erklären. Ein solch enger Zusammenhang wird aber möglicherweise als zu unflexibel empfunden, sodass bei der Definition eine allgemeinere Form gewählt wurde.

.2 Es sei

$$\{Y_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

ein lineares Regressionsmodell (siehe Definition 3.1.1) mit $E U_t = 0$ ($t = 1, \dots, T$).

Dann ist

$$\{\Psi \circ Y_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

ein LFRM mit Parameterrestriktion $\underline{\tilde{\beta}} \in \mathbb{R}^n$. LFRM stellen somit eine Verallgemeinerung der bekannten scharfen Regressionsmodelle dar.

◆

3.3 Logit-Modelle

In diesem Abschnitt geht es darum, das in Kapitel 3.1 vorgestellte klassische Regressionsmodell auf qualitative bzw. kategoriale abhängige Variablen zu übertragen, wie beispielsweise die Variable „Kreditwürdigkeit“ aus Beispiel 1.1.3. Weiterhin wird eine mögliche Anwendung von Fuzzy-Regressionsmodellen mit unscharfen abhängigen Variablen als Erweiterung klassischer Regressionsmodelle mit qualitativen abhängigen Variablen vorgestellt.

Zunächst wird jedoch das klassische Regressionsmodell auf den Fall qualitativer abhängiger Variablen übertragen. Solche Modelle sind die in der Literatur behandelten Logit- bzw. Probitmodelle und allgemeiner die kategorialen Regressionsmodelle. Im einfachsten Fall liegt die abhängige Variable als binäre (dichotome, 0-1) Variable vor. Im Beispiel der Kreditwürdigkeitsprüfung ist das Ziel herauszufinden, ob (potentielle) Kunden kreditwürdig sind oder nicht.⁴ Angenommen, es werden T ($T \in \mathbb{N}$) Kunden in die Untersuchung einbezogen und die abhängige Variable „Kreditwürdigkeit“ wird als binäre Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) modelliert, also

$$Y_t : \Omega \rightarrow \{0, 1\}, \quad Y_t(\omega) := \begin{cases} 1 & : \text{Kunde } t \text{ kreditwürdig} \\ 0 & : \text{Kunde } t \text{ nicht kreditwürdig} \end{cases} \quad (t = 1, \dots, T).$$

Ein erster Versuch ist, das lineare Modell aus Definition 3.1.2 anzusetzen:

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \quad Y_t = X_{t\bullet}' \underline{\beta} + U_t, \quad E U_t = 0.$$

Da die Zufallsvariable Y_t eine 0-1-Variable ist, gilt außerdem $Y_t \sim B(1, p_t)$ mit unbekanntem $p_t \in [0, 1]$ ($t = 1, \dots, T$). Also folgt

$$E Y_t = P\{Y_t = 1\} = p_t = X_{t\bullet}' \underline{\beta}.$$

Als Erwartungswert der abhängigen Variablen ergibt sich also die Wahrscheinlichkeit, dass Y_t den Wert 1 annimmt. Daraus resultiert jedoch ein Problem, weil $X_{t\bullet}' \underline{\beta}$ i.A. nicht auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkt ist.

⁴ Diese sehr einschränkende Klassifizierung wird im weiteren Verlauf des Abschnitts abgeschwächt, wie auch schon in Kapitel 1 erläutert.

Da p_t eine Wahrscheinlichkeit darstellt, muss also $X'_{t\bullet}\underline{\beta}$ auf das Intervall $[0, 1]$ eingeschränkt werden. Um dies zu erreichen, wird entweder $X'_{t\bullet}\underline{\beta}$ oder p_t entsprechend transformiert und somit ein nichtlineares Modell benutzt. Dazu können prinzipiell alle Funktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ (zur Transformation von $X'_{t\bullet}\underline{\beta}$) verwendet werden. Eine Möglichkeit ist die logistische Verteilung, die zu den sogenannten Logit-Modellen führt.⁵

Definition und Satz 3.3.1

Die Zufallsvariable Y genügt der **logistischen Verteilung**, wenn für ihre Verteilungsfunktion gilt

$$F_Y(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin ist $EY = 0$ und für die Umkehrfunktion gilt

$$G(t) := F_Y^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t}{1-t}\right), \quad t \in]0, 1[.$$

(vgl. [Judge et al.], Seite 787 oder [Fahrmeir], Seite 219f)



Damit erhält man die folgende Definition von Logit-Modellen.

Definition 3.3.2

Es seien $n, T \in \mathbb{N}$, $x_{ti} \in \mathbb{R}$ ($t \in \{1, \dots, T\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) und Y_1, \dots, Y_T beobachtbare Zufallsvariablen mit den Trägerpunkten 0 und 1. Weiterhin bezeichne

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

die Verteilungsfunktion der logistischen Verteilung.

$$\{Y_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

heißt **Logit-Modell** genau dann, wenn ein unbekannter Vektor $\underline{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_n)' \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : EY_t = F\left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_{ti}\right) = F(X'_{t\bullet}\underline{\beta}).$$

(vgl. [Judge et al.], Seite 790 oder [Fahrmeir], Seite 218)



⁵ Andere Möglichkeiten finden sich bei [Cramer], Seite 14f oder [Fahrmeir], Seite 219f. Insbesondere führt die Verwendung der Normalverteilung zu den sogenannten Probit-Modellen.

Bemerkung 3.3.3

Das Logit-Modell schreibt man auch oft mit der Umkehrfunktion

$$G(t) := F_Y^{-1}(t) = \ln \left(\frac{t}{1-t} \right), \quad t \in]0, 1[,$$

in der Form

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \ln \frac{p_t}{1-p_t} = X'_{t\bullet} \underline{\beta} .$$

(vgl. [Fahrmeir], Seite 218ff)



In der Literatur existieren unterschiedliche Ansätze zur Schätzung des unbekanntem Parametervektors $\underline{\beta}$ in Logit-Modellen. Die gebräuchlichste Methode ist die Maximum-Likelihood-Schätzung (siehe [Cramer], Seite 18ff oder [Judge et al.], Seite 791ff). Diese Methode lässt sich jedoch nicht ohne weiteres auf Fuzzy-Regressionsmodelle übertragen, da über die Verteilung von Fuzzy-Zufallsvariablen noch sehr wenig bekannt ist. Daher wird diese Methode an dieser Stelle nicht vorgestellt. Eine andere Methode, Schätzungen für $\underline{\beta}$ zu erhalten, ist die Methode der Kleinsten Quadrate, die auch auf Fuzzy-Regressionsmodelle übertragbar ist (siehe Kapitel 4.1 und 4.2). Um diese Methode anwenden zu können, muss das Logit-Modell modifiziert werden. Die abhängigen Variablen im Logit-Modell sind die p_t ($t = 1, \dots, T$), die natürlich unbekannt sind. Treten jedoch die Beobachtungen der abhängigen Variablen mehrfach auf (Faustregel mindestens 5), kann man die p_t durch die jeweiligen relativen Häufigkeiten der 1 schätzen (siehe [Fahrmeir], Seite 218). Man erhält dann das folgende Modell.

Bemerkung 3.3.4

Gegeben seien für jedes $X'_{t\bullet}$ N_t Beobachtungen von Y_t (Y_t binär), etwa

$$y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(N_t)}, \quad t = 1, \dots, T .$$

Eine Schätzung der abhängigen Variablen p_t ist

$$\hat{p}_t = \frac{1}{N_t} \sum_{j=1}^{N_t} y_t^{(j)}, \quad t = 1, \dots, T .$$

Man erhält dann als Regressionsansatz

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \quad E \ln \frac{\hat{p}_t}{1 - \hat{p}_t} = X'_{t\bullet} \underline{\beta}.$$

(vgl. [Fahrmeir] Seite 218)



Bemerkung 3.3.5

- .1 Der in Bemerkung 3.3.4 angegebene Regressionsansatz gilt jedoch nur approximativ (siehe [Judge et al.], Seite 790). Er resultiert aus der Tatsache, dass die relative Häufigkeit \hat{p}_t unter bestimmten Voraussetzungen eine erwartungstreue und (stark) konsistente Schätzung für p_t ist (siehe [Judge et al.], Seite 789). [Zellner/Lee] benutzen eine Taylor-Entwicklung von $\ln \frac{p_t}{1 - p_t}$, um aus dem ursprünglichen Logit-Modell das Modell in Bemerkung 3.3.4 zu entwickeln.
- .2 Verwendet man die Maximum-Likelihood-Methode zur Schätzung von $\underline{\beta}$, benötigt man nicht den (approximativen) Regressionsansatz aus Bemerkung 3.3.4. Man erhält (ausgehend von Definition 3.3.2) ein nichtlineares System von Gleichungen zur Bestimmung des ML-Schätzwerts. Dieses nichtlineare System läßt sich nicht explizit lösen und man muss ein Näherungsverfahren verwenden (siehe [Fahrmeir], Seite 269f oder [Cramer], Seite 19f).
- .3 Die Verwendung von Logit-Modellen (oder auch Probit-Modellen) erscheint nach den bisherigen Ausführungen sehr willkürlich. Man kann sich diese Modelle jedoch aus der mikroökonomischen Konsumtheorie („Nutzenmaximierung“) herleiten und somit plausibel machen (siehe [Judge et al.], Seite 786f).



Der Ansatz in Bemerkung 3.3.4 ist nur dann sinnvoll, wenn für jedes $X'_{t\bullet}$ mehrere Beobachtungen vorliegen. Sind die X -Variablen diskret und liegen zu jeder Merkmalskombination genügend Beobachtungen vor, kann das Modell aus Bemerkung 3.3.4 angesetzt werden. $t = 1, \dots, T$ bezeichnet in diesem Fall die verschiedenen Merkmalskombinationen. Bei stetigen X -Variablen kann es, und wird in der Praxis wohl auch immer, vorkommen, dass für jedes $X'_{t\bullet}$ nur eine Beobachtung vorliegt und somit der Ansatz nicht mehr sinnvoll ist. Als

Ausweg werden Klassen mit „ähnlichen“ Kunden gebildet oder die stetigen Variablen werden in Klassen (Kategorien) unterteilt. Dann wird für jede Klasse die relative Häufigkeit \hat{p}_t geschätzt.⁶ Es wird also die binäre abhängige Variable „Kreditwürdigkeit“ (siehe Abbildung 3.1, schwarz entspricht „kreditwürdig“ und damit $Y_t(\omega) = 1$, weiß entspricht „nicht kreditwürdig“ und damit $Y_t(\omega) = 0$) durch Schätzungen der relativen Häufigkeit ersetzt und somit erfolgt eine Klasseneinteilung, die durch die verschiedenen Graustufen in Abbildung 3.2 symbolisiert wird.

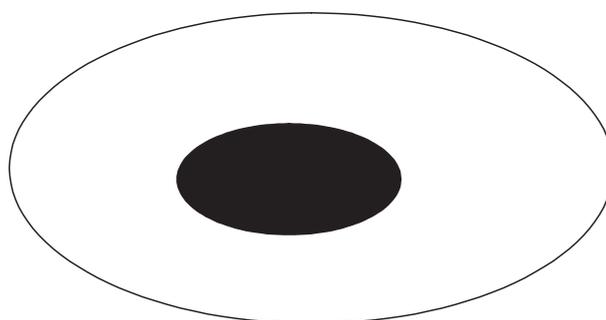


Abbildung 3.1: binäre Variable „Kreditwürdigkeit“

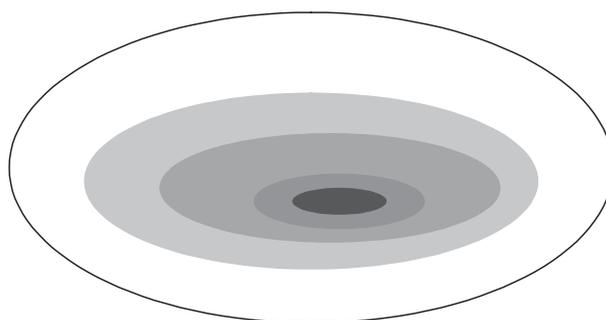


Abbildung 3.2: Klasseneinteilung mittels der relativen Häufigkeiten

⁶ Das Problem, dass man dabei unter Umständen 0 oder 1 als Schätzung für p_t erhält, wird in der Literatur nur am Rande erwähnt. Computerprogramme rechnen in einem solchen Fall mit $\frac{1}{R}$, wobei mit R die Anzahl der Kategorien der abhängigen Variablen bezeichnet wird, siehe [Fahrmeir], Seite 226.

Bemerkung 3.3.6

In diesem Abschnitt wurden nur Logit-Modelle für binäre abhängige Variablen konstruiert. Eine Übertragung für den Fall mehrerer Kategorien bei der abhängigen Variablen ist jedoch problemlos möglich (siehe [Fahrmeir], Seite 221ff). Auch dort wird bei Anwendung der KQ-Methode für jede einzelne Kategorie die relative Häufigkeit als abhängige Variable verwendet.



Zum Abschluss dieses Abschnitts wird eine mögliche Anwendung des in Kapitel 3.2. vorgestellten linearen Fuzzy-Regressionsmodell als Verallgemeinerung kategorialer Regressionsmodelle diskutiert. Modelliert man eine Variable wie „Kreditwürdigkeit“ als Fuzzy-Zufallsvariable, kann man das Problem der Klasseneinteilung bei der unabhängigen Variablen umgehen sowie das Problem der Kategorienanzahl bei der abhängigen Variablen vermeiden. Damit ergibt sich ein wesentlich flexiblerer Modellansatz.

Betrachtet man die Konstruktion der abhängigen Variablen in Bemerkung 3.3.4, so erfordert diese Konstruktion, im Falle stetiger unabhängiger Variablen, eine Klasseneinteilung. Diese Klasseneinteilung ist oft nicht vorgegeben und damit willkürlich. Man wird sich in irgendeiner Weise bemühen „ähnliche“ Kunden in eine Klasse einzuteilen. Fraglich bleibt dabei die Anzahl der Klassen. Hinzu kommt, dass die Kategorienanzahl der abhängigen Variablen keineswegs in natürlicher Weise vorgegeben ist und der Konkretisierung bedarf, so verwenden beispielsweise die Ratingagenturen Standard & Poor's und Moody's unterschiedliche Kategorisierungen beim Unternehmensrating. Konstruiert man die abhängige Variable „Kreditwürdigkeit“ jedoch als Zufallsvariable

$$\tilde{Y}_t : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) (siehe Abbildung 3.3, die kontinuierliche Aufhellung von schwarz nach weiß veranschaulicht die kontinuierliche Abnahme der „Kreditwürdigkeit“) und interpretiert $\tilde{Y}_t(\omega)$ als Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kunde t kreditwürdig ist, erreicht man zunächst, dass keine feste Kategorienanzahl zur Modellierung der abhängigen Variablen festgelegt werden muss.

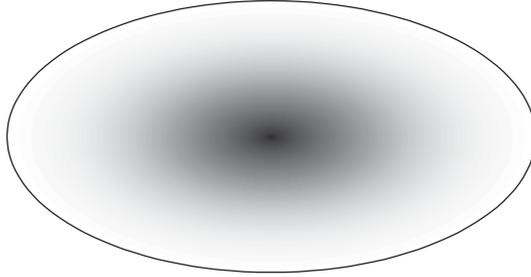


Abbildung 3.3: Fuzzy-Menge „Kreditwürdigkeit“

Die Forderung jedoch, eine exakte Wahrscheinlichkeit von beispielsweise genau 3% oder 4% angeben zu können erscheint mitunter schwierig. Darüber hinaus muss es nicht unbedingt sinnvoll sein, den Kunden in genau eine „Wahrscheinlichkeitsklasse“ einzuordnen. Denkbar wäre auch die Einordnung in mehrere Klassen, mit eventuell unterschiedlichen Zugehörigkeitsgraden. In Abbildung 3.3 ist es beispielsweise schwierig, eine exakte „Graustufe“ festzulegen.

Modelliert man die abhängige Variable jedoch als unscharfe Zufallsvariable, d.h.

$$\tilde{Y}_t : \Omega \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}),$$

und interpretiert $\mu_{\tilde{Y}_t(\omega)}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) als „unscharfe“ Wahrscheinlichkeit⁷ dafür, dass Kunde t kreditwürdig ist bzw. als Zugehörigkeitsgrad des Kunden t zur Klasse der Personen, die mit Wahrscheinlichkeit $x\%$ kreditwürdig sind, braucht man keine feste Klassenanzahl vorzugeben und man muss den Kunden auch nicht in genau eine Klasse einordnen. Damit kann man auch Formulierungen, wie z.B. Kunde t ist mit „ungefähr 50%“ Wahrscheinlichkeit kreditwürdig oder Kunde t ist mit Wahrscheinlichkeit „zwischen 50% und 60%“ kreditwürdig in die Modellierung einbeziehen. So werden beispielsweise Arbeiten unternommen, um „Bandbreiten von Ausfallwahrscheinlichkeiten . . . als Basis für die Zuordnung zu einzelnen Gewichtungsklassen⁸“ zu ermitteln (siehe [Bundesbank1], Seite 18).

⁷ Der Begriff unscharfer Wahrscheinlichkeiten wird in [Höhle] formalisiert, siehe auch [Yager] oder [Dubois/Prade], Seite 143f.

⁸ Gewichtungsklassen sind dabei Klassen von Kunden mit gleicher Bonität, die einen bestimmten Risikozuschlag zahlen müssen, siehe [Bundesbank1], Seite 20.

Damit erhält man als „Fuzzy-Logit-Modell“ das Modell

$$\forall t \in \{1, \dots, T\} : \quad \widetilde{E}^A G(\widetilde{Y}_t) = X_{t \bullet}' \widetilde{\underline{\beta}} \quad ^9$$

und damit ein Regressionsmodell wie in Definition 3.2.1 ($G :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ist dabei die in Definition und Satz 3.3.1 definierte Funktion und $G(\widetilde{Y}_t)$ wird mittels des Erweiterungsprinzips, siehe Definition und Satz 1.2.2 gebildet).

In diesem Modell wird die abhängige Variable als Wahrscheinlichkeit dafür interpretiert, dass Kunde t kreditwürdig ist. Diese Interpretation wird auch von Wolf verwendet (siehe [Wolf], Seite 39). Dort wird für jede Ratingklasse eine Ausfallwahrscheinlichkeit festgelegt und daraus eine Risikoprämie berechnet, also ein höherer oder niedrigerer Zinssatz für den jeweiligen Kredit. Wolf verwendet jedoch scharfe Klasseneinteilungen und scharfe Wahrscheinlichkeiten. Da auch im Fuzzy-Modell scharfe Einteilungen möglich sind, kann das vorgestellte Fuzzy-Logit-Modell als Verallgemeinerung kategorialer Regressionsmodelle angesehen werden. Problematisch ist dabei die Festlegung der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\widetilde{Y}_t(\omega)}$ für den Kunden t . Eine Möglichkeit ist die Festlegung durch einen Kreditexperten. Dadurch entsteht wiederum eine Willkür, die jedoch auch im scharfen Fall vorkommt. Der zuständige Kreditsachbearbeiter kann die „Einstufung korrigieren, falls ihm Informationen vorliegen, die vom modellgestützten Ratingsystem nicht oder nur unzureichend berücksichtigt werden“ (siehe [Bundesbank3], Seite 63). Zudem ist die Modellierung einer Variablen immer mit einer gewissen Willkür verbunden.

Bemerkung 3.3.7

In Abschnitt 3.2 und in den folgenden Kapiteln wird bei den Fuzzy-Regressionsmodellen auf die durchgeführte Transformation $G :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ verzichtet, um die Darstellung möglichst übersichtlich zu halten. Dies ist jedoch ohne Schwierigkeiten möglich, da als neue abhängige Variable $G(\widetilde{Y}_t)$ verwendet werden kann.



⁹ mit der Einschränkung $\text{supp } \widetilde{Y}_t(\omega) \subseteq]0, 1[$, wegen der Transformation F bzw. G in Definition 3.3.2

3.4 Die Identifizierbarkeit des Regressionsparametervektors im LFRM

In diesem Abschnitt wird das Identifikationsproblem der Ökonometrie diskutiert. Dieses Problem entsteht, wenn für eine Zufallsvariable mit parametrischer Verteilungsannahme (siehe Definition 3.4.1 oder [Steinmetz2003-3], Seite 17, Vereinbarung 2.3.4) zwei oder mehr verschiedene Parameter zur gleichen Verteilung der Zufallsvariablen führen. Diese Parameter sind somit empirisch nicht zu unterscheiden und es gibt keine Möglichkeit auf den „wahren“ Parameter zurückzuschließen (vgl. [Krätschmer2003-2], Seite 11). In einem solchen Fall sind die Parameter nicht „identifizierbar“. Bei linearen Regressionsmodellen bedeutet dies, dass zwei (oder mehr) verschiedene Parametervektoren dieselbe Verteilung der abhängigen Variablen \underline{Y} bzw. $\tilde{\underline{Y}}$ induzieren. In klassischen linearen Regressionsmodellen (siehe Definition 3.1.1) ist dies durch die Annahmen A1 ($E\underline{U} = \underline{0}$) und A3 ($\text{rg } X = n$) ausgeschlossen (siehe [Steinmetz2003-2], Seite 36, Satz 3.2.6) (bzw. bei Definition über $E\underline{Y}$, siehe Satz 3.1.2, genügt A3). In diesem Abschnitt geht es darum, das Identifikationsproblem für das LFRM zu untersuchen und Bedingungen für die Identifizierbarkeit des Parametervektors in LFRM herzuleiten. Zunächst jedoch sollen die Verteilungsannahme genauer spezifiziert und der Begriff der Parametrisierung definiert werden. Zu einer Verteilungsannahme W , also einer Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen über $\mathcal{B}_{\tau_{p^2}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T)$, verwendet man als Parametrisierung eine Abbildung

$$\Gamma : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathfrak{P}(W) \setminus \{\emptyset\}.$$

Diese Abbildung soll W ganz ausschöpfen, d.h.

$$\bigcup_{\tilde{\underline{\beta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n} \Gamma(\tilde{\underline{\beta}}) = W .$$

Weiterhin soll zu jedem $\tilde{\underline{\beta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ ein $P \in W$ existieren mit $\tilde{E}_P^A \tilde{\underline{Y}} = X(\tilde{\underline{\beta}})$ und umgekehrt zu jedem $P \in W$ ein $\tilde{\underline{\beta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit $\tilde{E}_P^A \tilde{\underline{Y}} = X(\tilde{\underline{\beta}})$. Eine, eventuell einelementige Teilmenge, von W wird also durch einen Parameter $\tilde{\underline{\beta}}$ „charakterisiert“. Somit gelangt man zur folgenden Definition.

Definition 3.4.1

Es sei

$$\left\{ \tilde{Y}_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

ein LFRM mit Regressionsfunktion X . Eine Menge W von Wahrscheinlichkeitsverteilungen über $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_2}}(\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T)$ wird als **Verteilungsannahme** für die Verteilung von $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T)'$ bezeichnet, falls eine Abbildung

$$\Gamma : \mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \rightarrow \mathfrak{P}(W) \setminus \{\emptyset\}$$

existiert mit

$$\bigcup_{\tilde{\beta} \in \mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n} \Gamma(\tilde{\beta}) = W$$

und

$$P \in \Gamma(\tilde{\beta}) \iff \tilde{E}_P^A \tilde{Y} = X(\tilde{\beta}),$$

für alle $\tilde{\beta} \in \mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ und $P \in W$. $\tilde{E}_P^A \tilde{Y}$ bezeichnet dabei den Aumann-Erwartungswert von $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T)'$, wenn P die Verteilung von \tilde{Y} ist. Die Abbildung Γ heißt **Parametrisierung** von W mit **Verteilungsparameter** $\tilde{\beta}$. (vgl. [Krätschmer2003-2], Definition 2.2)

◆

Nach Festlegung der Verteilungsannahme wird jetzt der Begriff der Identifizierbarkeit eingeführt. Dies bedeutet, dass verschiedene Parametervektoren $\tilde{\beta}$ nicht zur selben Verteilung der abhängigen Variablen \tilde{Y} führen sollen.

Definition 3.4.2

Es sei

$$\left\{ \tilde{Y}_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

ein LFRM mit Regressionsfunktion X und W bezeichne die Verteilungsannahme zu $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T)'$ mit Verteilungsparameter $\tilde{\beta}$ und Parametrisierung Γ .

Dann heißt $\tilde{\beta}$ **identifizierbar**, falls $\Gamma(\tilde{\gamma}) \cap \Gamma(\tilde{\eta}) = \emptyset$ für alle $\tilde{\gamma} \neq \tilde{\eta} \in \mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$. (siehe [Krätschmer2003-2], Definition 2.3)

◆

Krätschmer (siehe [Krätschmer2003-2], Proposition 2.4 oder [Krätschmer2001-2], Seite 260, Satz 5.1.2) zeigte, dass in seinem Modell die Injektivität der Regressionsfunktion eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Identifizierbarkeit des Parametervektors ist. Diese Aussage gilt auch hier und auch für klassische lineare Regressionsmodelle.

Satz 3.4.3

Es sei

$$\left\{ \tilde{Y}_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

ein LFRM mit Regressionsfunktion X und W bezeichne die Verteilungsannahme zu $\underline{\tilde{Y}} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T)'$ mit Verteilungsparameter $\underline{\tilde{\beta}}$ und Parametrisierung Γ . Dann ist $\underline{\tilde{\beta}}$ identifizierbar genau dann, wenn X injektiv ist.



Beweis:

„ \implies “ $\underline{\tilde{\beta}}$ sei identifizierbar. Seien außerdem $\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit $\underline{\tilde{\gamma}} \neq \underline{\tilde{\eta}}$. $\Gamma(\underline{\tilde{\gamma}})$ und $\Gamma(\underline{\tilde{\eta}})$ sind nach Voraussetzung nichtleer und für $P \in W$ gilt:

$$P \in \Gamma(\underline{\tilde{\gamma}}) \iff \tilde{E}_P^A \underline{\tilde{Y}} = X(\underline{\tilde{\gamma}}),$$

$$P \in \Gamma(\underline{\tilde{\eta}}) \iff \tilde{E}_P^A \underline{\tilde{Y}} = X(\underline{\tilde{\eta}}).$$

Da $\underline{\tilde{\beta}}$ identifizierbar ist, sind $\Gamma(\underline{\tilde{\gamma}})$ und $\Gamma(\underline{\tilde{\eta}})$ disjunkt, also $X(\underline{\tilde{\gamma}}) \neq X(\underline{\tilde{\eta}})$ und damit ist X injektiv.

„ \impliedby “ X sei injektiv. Weiterhin seien $\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit $\underline{\tilde{\gamma}} \neq \underline{\tilde{\eta}}$ und $P_{\underline{\tilde{\gamma}}} \in \Gamma(\underline{\tilde{\gamma}})$. Dann folgt aus der Injektivität von X

$$\tilde{E}_{P_{\underline{\tilde{\gamma}}}}^A \underline{\tilde{Y}} = X(\underline{\tilde{\gamma}}) \neq X(\underline{\tilde{\eta}}),$$

d.h. $P_{\underline{\tilde{\gamma}}} \notin \Gamma(\underline{\tilde{\eta}})$, also $\Gamma(\underline{\tilde{\gamma}}) \cap \Gamma(\underline{\tilde{\eta}}) = \emptyset$.



In scharfen linearen Regressionsmodellen ist die Injektivität von X äquivalent dazu, dass X vollen Spaltenrang hat, also $\text{rg } X = n$ (siehe [Steinmetz2003-2], Seite 36, Satz 3.2.6).

In LFRM ist dies nicht mehr richtig. Petry (siehe [Petry], Seite 70) gibt ein Gegenbeispiel für symmetrische Dreieckszahlen an. Aber auch bei Intervallen stimmt die Aussage nicht mehr.

Beispiel 3.4.4

.1 Gegeben seien

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \underline{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}, \underline{\tilde{\eta}} = \begin{pmatrix} [-1, 3] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\text{rg } X = 2$ und $\underline{\tilde{\gamma}} \neq \underline{\tilde{\eta}}$, aber

$$X(\underline{\tilde{\gamma}}) = X(\underline{\tilde{\eta}}) = \begin{pmatrix} [-2, 4] \\ [-2, 4] \end{pmatrix}$$

und damit ist X nicht injektiv.

.2 Gegeben seien

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \underline{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} (2, 2, 2)_\Delta \\ (0, 1, 1)_\Delta \end{pmatrix}, \underline{\tilde{\eta}} = \begin{pmatrix} (2, 1, 1)_\Delta \\ (0, 2, 2)_\Delta \end{pmatrix}.$$
¹⁰

Dann gilt $\text{rg } X = 2$ und $\underline{\tilde{\gamma}} \neq \underline{\tilde{\eta}}$, aber

$$X(\underline{\tilde{\gamma}}) = X(\underline{\tilde{\eta}}) = \begin{pmatrix} (2, 3, 3)_\Delta \\ (2, 3, 3)_\Delta \end{pmatrix}$$

und damit ist X ebenfalls nicht injektiv. (vgl. [Petry], Seite 70, Beispiel 6.8)

Petry (siehe [Petry], Seite 71, Satz 6.10) zeigte auch, dass in seinem Fall eine zusätzliche Forderung an X gestellt werden muss, damit X injektiv ist (bzw. äquivalent $\underline{\tilde{\beta}}$ identifizierbar ist). Dies gilt auch im allgemeineren Fall, wenn Parametervektoren aus $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ betrachtet werden.

Satz 3.4.5

.1 Es sei $X = (x_{ti})_{\substack{t=1, \dots, T \\ i=1, \dots, n}}$ die $(T \times n)$ -Regressionsmatrix aus Definition 3.2.1. Die

$(T \times n)$ -Matrizen $M = (m_{ti})_{\substack{t=1, \dots, T \\ i=1, \dots, n}}$ und $N = (n_{ti})_{\substack{t=1, \dots, T \\ i=1, \dots, n}}$ seien definiert durch

$$m_{ti} := \begin{cases} x_{ti} & : x_{ti} \geq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \quad n_{ti} := \begin{cases} x_{ti} & : x_{ti} \leq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \quad t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n.$$

¹⁰ Zur Definition von Fuzzy-Zahlen in Dreiecksgestalt siehe Definition 1.1.18.

Für die $(2T \times 2n)$ -Matrix S mit $S := \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$ gilt:

$S'S$ ist genau dann regulär, wenn

$$\operatorname{rg} X = \operatorname{rg} |X| = n.$$

Dabei bezeichnet S' die transponierte Matrix zu S und $|X| := (|x_{ti}|)_{\substack{t=1,\dots,T \\ i=1,\dots,n}}$.

.2 Die Abbildung

$$\begin{aligned} X : F_{\operatorname{coc2}}^{\operatorname{no}}(\mathbb{R})^n &\rightarrow F_{\operatorname{coc2}}^{\operatorname{no}}(\mathbb{R})^T \\ \underline{\tilde{\beta}} &\mapsto X(\underline{\tilde{\beta}}) \end{aligned}$$

in Definition 3.2.1 ist genau dann injektiv, wenn

$$\operatorname{rg} X = \operatorname{rg} |X| = n,$$

wobei $|X| := (|x_{ti}|)_{\substack{t=1,\dots,T \\ i=1,\dots,n}}$.

◆

Beweis:

Zu .1:

Zunächst gilt

$$X = M + N, |X| = M - N, S' = \begin{pmatrix} M' & N' \\ N' & M' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S'S = \begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{M} = M'M + N'N$, $\tilde{N} = M'N + N'M$ und $\tilde{M} + \tilde{N} = X'X$, $\tilde{M} - \tilde{N} = |X'| |X|$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} S'S \text{ ist regulär} &\iff \tilde{M} - \tilde{N} \text{ und } \tilde{M} + \tilde{N} \text{ sind beide regulär} \\ &\iff |X'| |X| \text{ und } X'X \text{ sind beide regulär} \\ &\iff \operatorname{rg}(|X'| |X|) = n \text{ und } \operatorname{rg}(X'X) = n \\ &\iff \operatorname{rg} |X| = n \text{ und } \operatorname{rg} X = n \quad (*). \end{aligned}$$

(vgl. [Friedmann et al.], Theorem 1) und .1 ist gezeigt.

Zu .2:

Es sei $\underline{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n)' \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ und damit $\tilde{\gamma}_i \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, n$).

Es gilt

$$\forall \alpha \in]0, 1]: \quad \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha} = [l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha), r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha)],$$

mit

$$l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) := \min \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha}, \quad r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) := \max \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha} \quad (i = 1, \dots, n, \alpha \in]0, 1])$$

(vgl. Definition der Randlinienfunktionen, Definition 2.1.5)

Weiterhin sei

$$\underline{\gamma}(\alpha) := (l_{\tilde{\gamma}_1}(\alpha), \dots, l_{\tilde{\gamma}_n}(\alpha), r_{\tilde{\gamma}_1}(\alpha), \dots, r_{\tilde{\gamma}_n}(\alpha))' \quad (\alpha \in]0, 1]) .$$

$\underline{\eta}(\alpha)$ mit $\underline{\eta} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ sei analog definiert.

Die $(T \times n)$ -Matrizen $M = (m_{ti})_{\substack{t=1, \dots, T \\ i=1, \dots, n}}$, $N = (n_{ti})_{\substack{t=1, \dots, T \\ i=1, \dots, n}}$ und die Matrix S seien definiert wie in .1. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_{ti} \odot \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha} &= (m_{ti} + n_{ti}) \odot \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha} \quad 11 \\ &= \begin{cases} m_{ti} \odot \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha} & : x_{ti} \geq 0 \\ n_{ti} \odot \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha} & : x_{ti} < 0 \end{cases} \\ &= (m_{ti} \odot \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha}) \oplus (n_{ti} \odot \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha}) \\ &= [m_{ti} l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) + n_{ti} r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha), m_{ti} r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) + n_{ti} l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha)] \quad (\alpha \in]0, 1]) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} ((x_{t1} \odot_F \tilde{\gamma}_1) \oplus_F \dots \oplus_F (x_{tn} \odot_F \tilde{\gamma}_n))^{\geq \alpha} &= (x_{t1} \odot \tilde{\gamma}_1^{\geq \alpha}) \oplus \dots \oplus (x_{tn} \odot \tilde{\gamma}_n^{\geq \alpha}) \quad (\alpha \in]0, 1]) \quad 12 \\ &= [a, b] \end{aligned}$$

mit

$$a := \sum_{i=1}^n (m_{ti} l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) + n_{ti} r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha)), \quad b := \sum_{i=1}^n (m_{ti} r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) + n_{ti} l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha)) \quad (\alpha \in]0, 1]).$$

¹¹ siehe Definition der Minkowski-Operationen in Definition und Satz 1.2.1

¹² Anwendung von Satz 1.2.4 auf $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n x_{ti} a_i$

Also

$$X(\underline{\tilde{\gamma}}) = X(\underline{\tilde{\eta}}) \iff \forall \alpha \in]0, 1] \quad S\underline{\tilde{\gamma}}(\alpha) = S\underline{\tilde{\eta}}(\alpha) \quad (*)$$

Nun zum Beweis von .2 des Satzes.

„ \Leftarrow “

Sei $\text{rg } X = \text{rg } |X| = n$, also $S'S$ regulär (mit .1).

$$\begin{aligned} X(\underline{\tilde{\gamma}}) = X(\underline{\tilde{\eta}}) &\implies \forall \alpha \in]0, 1] \quad S\underline{\tilde{\gamma}}(\alpha) = S\underline{\tilde{\eta}}(\alpha) \\ &\implies \forall \alpha \in]0, 1] \quad S'S\underline{\tilde{\gamma}}(\alpha) = S'S\underline{\tilde{\eta}}(\alpha) \\ &\implies \forall \alpha \in]0, 1] \quad \underline{\tilde{\gamma}}(\alpha) = \underline{\tilde{\eta}}(\alpha) \\ &\implies \underline{\tilde{\gamma}} = \underline{\tilde{\eta}} \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung X injektiv.

„ \implies “

Die Abbildung

$$\begin{aligned} X : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n &\rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T \\ \underline{\tilde{\beta}} &\mapsto X(\underline{\tilde{\beta}}) \end{aligned}$$

sei injektiv.

Gezeigt wird zunächst $\text{rg } S = 2n$.

Es sei

$$S \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (u_i, z_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n)$$

$$\text{und } a_i := u_i, c_i := 0, b_i := \begin{cases} z_i & : u_i \leq z_i \\ u_i & : u_i > z_i \end{cases}, d_i := \begin{cases} 0 & : u_i \leq z_i \\ u_i - z_i & : u_i > z_i \end{cases},$$

$$\tilde{\gamma}_i \hat{=} [a_i, b_i]^{13}, \tilde{\eta}_i \hat{=} [c_i, d_i], (i = 1, \dots, n).$$

¹³ d.h. $\tilde{\gamma}_i$ bezeichnet die durch $[a_i, b_i]$ definierte Fuzzy-Menge in \mathbb{R}

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \underline{0} = S \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} &\iff S \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \\
 &\iff X \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_n \end{pmatrix} \quad (\text{siehe } (*)) \\
 &\implies \forall i = 1, \dots, n \quad \tilde{\gamma}_i = \tilde{\eta}_i \quad (X \text{ injektiv}) \\
 &\implies \forall i = 1, \dots, n \quad a_i = c_i, b_i = d_i \\
 &\implies \forall i = 1, \dots, n \quad u_i = 0, z_i = 0
 \end{aligned}$$

Also gilt: $\text{rg } S = 2n \implies S'S \text{ regulär} \implies \text{rg } X = \text{rg } |X| = n$ (mit .1).

■

Also ist X injektiv genau dann, wenn $\text{rg } X = n$ und $\text{rg } |X| = n$ gilt. Die Injektivität von X ist jedoch äquivalent mit der Identifizierbarkeit von $\underline{\tilde{\beta}}$.

Damit lässt sich die Überprüfung der Identifizierbarkeit des Parametervektors $\underline{\tilde{\beta}}$ auf die Untersuchung der Ränge von X und $|X|$ zurückführen. Im Folgenden werden nur solche Modelle betrachtet, bei denen $\underline{\tilde{\beta}}$ identifizierbar ist, also $\text{rg } X = \text{rg } |X| = n$ gilt.

3.5 Eigenschaften der Regressionsfunktion im LFRM

In den nächsten beiden Sätzen werden für die folgenden Abschnitte notwendige Eigenschaften der Regressionsfunktion X im LFRM angegeben. Die Abbildung X ist linear und Lipschitz-stetig. Ist X injektiv, so existiert ihre Umkehrabbildung X^- , die ebenfalls linear und Lipschitz-stetig ist.

Satz 3.5.1

.1 Die Abbildung (Regressionsfunktion)

$$\begin{aligned} X : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n &\rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T \\ \underline{\tilde{\beta}} &\mapsto X(\underline{\tilde{\beta}}), \end{aligned}$$

in Definition 3.2.1 ist linear, d.h.

$$X \left((\lambda \odot_F^n \underline{\tilde{\gamma}}) \oplus_F^n (\mu \odot_F^n \underline{\tilde{\eta}}) \right) = (\lambda \odot_F^T X(\underline{\tilde{\gamma}})) \oplus_F^T (\mu \odot_F^T X(\underline{\tilde{\eta}})),$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n .$$

.2 Es sei $\text{rg } X = \text{rg } |X| = n$ (X ist also injektiv). $X^- : X(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n) \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ bezeichne die Abbildung mit

$$X^-(X(\underline{\tilde{\gamma}})) = \underline{\tilde{\gamma}}, \forall \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n .$$

Dann ist X^- linear, d.h.

$$X^- \left((\lambda \odot_F^T \underline{\tilde{\vartheta}}) \oplus_F^T (\mu \odot_F^T \underline{\tilde{\zeta}}) \right) = (\lambda \odot_F^n X^-(\underline{\tilde{\vartheta}})) \oplus_F^n (\mu \odot_F^n X^-(\underline{\tilde{\zeta}})),$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \underline{\tilde{\vartheta}}, \underline{\tilde{\zeta}} \in X(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n) .$$

◆

Beweis:

Zu .1:

Benutzt man die Identitäten aus Satz 1.2.9, die Definition von \odot_F^n und \oplus_F^n und die Definition von X ist die Aussage leicht nachzuweisen.

Zu .2:

Folgt direkt aus der Linearität und Injektivität von X :

Es seien $\underline{\tilde{\nu}}, \underline{\tilde{\nu}} \in X(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n)$. Dann existieren eindeutig bestimmte $\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit $X(\underline{\tilde{\gamma}}) = \underline{\tilde{\nu}}, X(\underline{\tilde{\eta}}) = \underline{\tilde{\nu}}$ und es gilt

$$\begin{aligned} X^- \left((\lambda \odot_F^T \underline{\tilde{\nu}}) \oplus_F^T (\mu \odot_F^T \underline{\tilde{\nu}}) \right) &= X^- \left((\lambda \odot_F^T X(\underline{\tilde{\gamma}})) \oplus_F^T (\mu \odot_F^T X(\underline{\tilde{\eta}})) \right) \\ &= X^- \left(X \left((\lambda \odot_F^n \underline{\tilde{\gamma}}) \oplus_F^n (\mu \odot_F^n \underline{\tilde{\eta}}) \right) \right) \\ &= (\lambda \odot_F^n \underline{\tilde{\gamma}}) \oplus_F^n (\mu \odot_F^n \underline{\tilde{\eta}}) \\ &= (\lambda \odot_F^n X^-(\underline{\tilde{\nu}})) \oplus_F^n (\mu \odot_F^n X^-(\underline{\tilde{\nu}})) \end{aligned}$$

■

Satz 3.5.2

- .1 Jede Regressionsfunktion $X : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ in einem LFRM ist Lipschitz-stetig bzgl. $\rho_{2,T}$ und $\rho_{2,n}$, d.h. es existiert $L \in]0, \infty[$ mit

$$\rho_{2,T}(X(\underline{\tilde{\gamma}}), X(\underline{\tilde{\eta}})) \leq L \rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}}), \quad \forall \underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$$

und minimaler Lipschitz-Konstante

$$\|X\| := \sup \left\{ \rho_{2,T}(X(\underline{\tilde{\gamma}}), X(\underline{\tilde{\eta}})) \mid \underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}}) = 1 \right\} \in]0; \infty[.$$

Es gilt sogar $\|X\| \in]0, \infty[$, falls X nichtkonstant ist.

- .2 Es sei $X : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ eine injektive Regressionsfunktion in einem LFRM, d.h. $\text{rg } X = \text{rg } |X| = n$ und

$$X^- : X(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n) \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$$

bezeichne die Abbildung aus Satz 3.5.1.2. Dann ist X^- Lipschitz-stetig bzgl. $\rho_{2,T}$ und $\rho_{2,n}$, d.h. es existiert $L \in]0, \infty[$ mit

$$\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}}) \leq L \rho_{2,T}(X(\underline{\tilde{\gamma}}), X(\underline{\tilde{\eta}})), \quad \forall \underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$$

und minimaler Lipschitz-Konstante

$$\|X^-\| := \sup \left\{ \rho_{2,n}(X^-(\underline{\tilde{\nu}}), X^-(\underline{\tilde{\nu}})) \mid \underline{\tilde{\nu}}, \underline{\tilde{\nu}} \in X(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n), \rho_{2,T}(\underline{\tilde{\nu}}, \underline{\tilde{\nu}}) = 1 \right\} \in]0; \infty[.$$

◆

Beweis:

zu 1:

Es seien $\underline{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n)' \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ und $\underline{\tilde{\eta}} = (\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_n)' \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$.

$$\begin{aligned}
\rho_{2,T}(X(\underline{\tilde{\gamma}}), X(\underline{\tilde{\eta}}))^2 &= \sum_{t=1}^T \rho_2((X(\underline{\tilde{\gamma}}))_t, (X(\underline{\tilde{\eta}}))_t)^2 \\
&= \sum_{t=1}^T \int_0^1 \int_{S^0} |s_{(X(\underline{\tilde{\gamma}}))_t}(\alpha, u) - s_{(X(\underline{\tilde{\eta}}))_t}(\alpha, u)|^2 du d\alpha \\
&= \sum_{t=1}^T \int_0^1 \int_{S^0} |s_{\sum_{i=1}^n x_{ti} \odot_F \tilde{\gamma}_i}(\alpha, u) - s_{\sum_{i=1}^n x_{ti} \odot_F \tilde{\eta}_i}(\alpha, u)|^2 du d\alpha \quad {}^{14} \\
&= \sum_{t=1}^T \int_0^1 \int_{S^0} \left| \sum_{i=1}^n s_{x_{ti} \odot_F \tilde{\gamma}_i}(\alpha, u) - \sum_{i=1}^n s_{x_{ti} \odot_F \tilde{\eta}_i}(\alpha, u) \right|^2 du d\alpha \\
&= \sum_{t=1}^T \int_0^1 \int_{S^0} \left| \sum_{i=1}^n (s_{x_{ti} \odot_F \tilde{\gamma}_i}(\alpha, u) - s_{x_{ti} \odot_F \tilde{\eta}_i}(\alpha, u)) \right|^2 du d\alpha \\
&\leq \sum_{t=1}^T \int_0^1 \int_{S^0} \left| \sum_{i=1}^n |x_{ti}| |s_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha, u) - s_{\tilde{\eta}_i}(\alpha, u)| \right|^2 du d\alpha
\end{aligned}$$

(Dreiecksungleichung und vgl. Lemma 1.2.28 mit Beweis)

$$\leq \sum_{t=1}^T \int_0^1 \int_{S^0} \sum_{i=1}^n |x_{ti}|^2 \sum_{j=1}^n |(s_{\tilde{\gamma}_j}(\alpha, u) - s_{\tilde{\eta}_j}(\alpha, u))|^2 du d\alpha$$

(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n |x_{ti}|^2 \sum_{j=1}^n \int_0^1 \int_{S^0} |(s_{\tilde{\gamma}_j}(\alpha, u) - s_{\tilde{\eta}_j}(\alpha, u))|^2 du d\alpha \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T |x_{ti}|^2}_{:=L} \sum_{j=1}^n \rho_2(\tilde{\gamma}_j, \tilde{\eta}_j)^2 \\
&= L \rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}})^2
\end{aligned}$$

Damit ist X Lipschitz-stetig und $\|X\| \in [0, \infty[$.

¹⁴ $\sum_{i=1}^n x_{ti} \odot_F \tilde{\gamma}_i := (x_{t1} \odot_F \tilde{\gamma}_1) \oplus_F \dots \oplus_F (x_{tn} \odot_F \tilde{\gamma}_n)$

Zu zeigen bleibt, dass $\|X\|$ die minimale Lipschitz-Konstante ist. Für $\underline{\tilde{\gamma}} \neq \underline{\tilde{\eta}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{2,T}(X(\underline{\tilde{\gamma}}), X(\underline{\tilde{\eta}}))}{\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}})} &= \rho_{2,T} \left(\frac{1}{\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}})} \odot_F^T X(\underline{\tilde{\gamma}}), \frac{1}{\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}})} \odot_F^T X(\underline{\tilde{\eta}}) \right) \\ &= \rho_{2,T} \left(X \left(\frac{1}{\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}})} \odot_F^n \underline{\tilde{\gamma}} \right), X \left(\frac{1}{\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}})} \odot_F^n \underline{\tilde{\eta}} \right) \right) \\ &\leq \|X\|, \end{aligned}$$

und daher ist $\|X\|$ eine Lipschitz-Konstante.

Für $\varepsilon > 0$ existieren (gemäß der Definition von $\|X\|$) $\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit $\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}}) = 1$ und

$$\rho_{2,T}(X(\underline{\tilde{\gamma}}), X(\underline{\tilde{\eta}})) > \|X\| - \varepsilon = (\|X\| - \varepsilon) \rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}}).$$

Also ist $\|X\| - \varepsilon$ keine Lipschitz-Konstante und $\|X\|$ ist somit die kleinste Lipschitz-Konstante.

Ist X nichtkonstant, so existieren $\underline{\tilde{\gamma}} \neq \underline{\tilde{\eta}}$ mit $X(\underline{\tilde{\gamma}}) \neq X(\underline{\tilde{\eta}})$, $\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$. Weiterhin gilt

$$0 < \rho_{2,T}(X(\underline{\tilde{\gamma}}), X(\underline{\tilde{\eta}})) \leq \|X\| \rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}}) = 0, \text{ falls } \|X\| = 0,$$

und daraus ergibt sich ein Widerspruch. Also gilt $\|X\| \in]0, \infty[$, falls X nichtkonstant ist.

Zu .2:

Es seien $\underline{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n)' \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ und $\underline{\tilde{\eta}} = (\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_n)' \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$. Die Matrizen S , M , N seien definiert wie in Satz 3.4.5.2. Weiterhin sei

$$l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) := \min \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha}, r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) := \max \tilde{\gamma}_i^{\geq \alpha} \quad (i = 1, \dots, n, \alpha \in]0, 1]) ,$$

$$\underline{\tilde{\gamma}}^{\geq \alpha} := \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^{\geq \alpha} \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_n^{\geq \alpha} \end{pmatrix} \quad (\alpha \in]0, 1]) ,$$

$l_{\tilde{\gamma}_i}(0) = r_{\tilde{\gamma}_i}(0) := 0$ und

$$\underline{\tilde{\gamma}}(\alpha) := \begin{pmatrix} l_{\tilde{\gamma}_1}(\alpha) \\ \vdots \\ l_{\tilde{\gamma}_n}(\alpha) \end{pmatrix}, r_{\underline{\tilde{\gamma}}}(\alpha) := \begin{pmatrix} r_{\tilde{\gamma}_1}(\alpha) \\ \vdots \\ r_{\tilde{\gamma}_n}(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\alpha \in [0, 1]).$$

Es gilt

$$\rho_2([l_1, r_1], [l_2, r_2])^2 = \frac{1}{2} \rho_{2,2} \left(\begin{pmatrix} l_1 \\ r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \right)^2, \quad \forall l_1, l_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, l_1 \leq r_1, l_2 \leq r_2 \quad ^{15}$$

(siehe Beispiel 1.2.29.1 und .2). Außerdem sei

$$\sum_{i=1}^n x_i \odot [l_i, r_i] := (x_1 \odot [l_1, r_1]) \oplus \dots \oplus (x_n \odot [l_n, r_n]) \quad x_i, l_i, r_i \in \mathbb{R}, l_i \leq r_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

und

$$X'_{t\bullet} \odot \underline{\tilde{\gamma}}^{\geq \alpha} := (x_{t1} \odot \tilde{\gamma}_1^{\geq \alpha}) \oplus \dots \oplus (x_{tn} \odot \tilde{\gamma}_n^{\geq \alpha}) \quad (t = 1, \dots, T, \alpha \in [0, 1]) .$$

$$\begin{aligned} \rho_{2,n}(\underline{\tilde{\gamma}}, \underline{\tilde{\eta}})^2 &= \sum_{i=1}^n \rho_2(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\eta}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{1}{2} \rho_{2,2} \left(\begin{pmatrix} l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) \\ r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_{\tilde{\eta}_i}(\alpha) \\ r_{\tilde{\eta}_i}(\alpha) \end{pmatrix} \right)^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_{2,2n} \left(\begin{pmatrix} l_{\tilde{\gamma}_1}(\alpha) \\ \vdots \\ l_{\tilde{\gamma}_n}(\alpha) \\ r_{\tilde{\gamma}_1}(\alpha) \\ \vdots \\ r_{\tilde{\gamma}_n}(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_{\tilde{\eta}_1}(\alpha) \\ \vdots \\ l_{\tilde{\eta}_n}(\alpha) \\ r_{\tilde{\eta}_1}(\alpha) \\ \vdots \\ r_{\tilde{\eta}_n}(\alpha) \end{pmatrix} \right)^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_{2,2n} \left((S'S)^{-1} S'S \begin{pmatrix} l_{\underline{\tilde{\gamma}}}(\alpha) \\ r_{\underline{\tilde{\gamma}}}(\alpha) \end{pmatrix}, (S'S)^{-1} S'S \begin{pmatrix} l_{\underline{\tilde{\eta}}}(\alpha) \\ r_{\underline{\tilde{\eta}}}(\alpha) \end{pmatrix} \right)^2 d\alpha \\ &\leq \frac{1}{2} \underbrace{\|(S'S)^{-1} S'\|}_{:=L} \int_0^1 \rho_{2,2T} \left(S \begin{pmatrix} l_{\underline{\tilde{\gamma}}}(\alpha) \\ r_{\underline{\tilde{\gamma}}}(\alpha) \end{pmatrix}, S \begin{pmatrix} l_{\underline{\tilde{\eta}}}(\alpha) \\ r_{\underline{\tilde{\eta}}}(\alpha) \end{pmatrix} \right)^2 d\alpha \\ &\quad (\|(S'S)^{-1} S'\| := \sup\{(S'S)^{-1} S' \underline{a} \mid \underline{a} \in \mathbb{R}^T, \|\underline{a}\|_T = 1\}) \end{aligned}$$

¹⁵ Für $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ entspricht $\rho_{2,n}(\underline{a}, \underline{b})$ dem euklidischen Abstand $\|\underline{a} - \underline{b}\|_n$.
Im Beweis sei $\rho_{2,n}(\underline{a}, \underline{b})^2 := (\rho_{2,n}(\underline{a}, \underline{b}))^2$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}L \int_0^1 \rho_{2,2T} \left(\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\tilde{\gamma}}(\alpha) \\ r_{\tilde{\gamma}}(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\tilde{\eta}}(\alpha) \\ r_{\tilde{\eta}}(\alpha) \end{pmatrix} \right)^2 d\alpha \\
&= \frac{1}{2}L \sum_{t=1}^T \int_0^1 \rho_{2,2} \left(\begin{pmatrix} (Ml_{\tilde{\gamma}}(\alpha) + Nr_{\tilde{\gamma}}(\alpha))_t \\ (Nl_{\tilde{\gamma}}(\alpha) + Mr_{\tilde{\gamma}}(\alpha))_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (Ml_{\tilde{\eta}}(\alpha) + Nr_{\tilde{\eta}}(\alpha))_t \\ (Nl_{\tilde{\eta}}(\alpha) + Mr_{\tilde{\eta}}(\alpha))_t \end{pmatrix} \right)^2 d\alpha \\
&= L \sum_{t=1}^T \int_0^1 \rho_2 \left([M'_{t\bullet} l_{\tilde{\gamma}}(\alpha) + N'_{t\bullet} r_{\tilde{\gamma}}(\alpha), N'_{t\bullet} l_{\tilde{\gamma}}(\alpha) + M'_{t\bullet} r_{\tilde{\gamma}}(\alpha)], \right. \\
&\quad \left. [M'_{t\bullet} l_{\tilde{\eta}}(\alpha) + N'_{t\bullet} r_{\tilde{\eta}}(\alpha), N'_{t\bullet} l_{\tilde{\eta}}(\alpha) + M'_{t\bullet} r_{\tilde{\eta}}(\alpha)] \right)^2 d\alpha \\
&\quad (M'_{t\bullet} l_{\tilde{\gamma}}(\alpha) := \sum_{i=1}^n m_{ti} l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha), N'_{t\bullet} r_{\tilde{\gamma}}(\alpha) := \sum_{i=1}^n n_{ti} r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha), \text{ usw.}) \\
&= L \sum_{t=1}^T \int_0^1 \rho_2 \left(\sum_{i=1}^n x_{ti} \odot [l_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha), r_{\tilde{\gamma}_i}(\alpha)], \sum_{i=1}^n x_{ti} \odot [l_{\tilde{\eta}_i}(\alpha), r_{\tilde{\eta}_i}(\alpha)] \right)^2 d\alpha \\
&= L \sum_{t=1}^T \int_0^1 \rho_2 (X'_{t\bullet} \odot \tilde{\gamma}^{\geq \alpha}, X'_{t\bullet} \odot \tilde{\eta}^{\geq \alpha})^2 d\alpha \\
&= L \rho_{2,T}(X(\tilde{\gamma}), X(\tilde{\eta}))^2
\end{aligned}$$

Die anderen Aussagen werden analog zu .1 bewiesen. ■

Kapitel 4

Die Kleinst-Quadrate-Schätzung

In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, den unbekanntem Parametervektor $\underline{\tilde{\beta}}$ in einem LFRM

$$\left\{ \tilde{Y}_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

mit injektiver Regressionsfunktion X , auf Basis einer Beobachtung

$$\underline{\tilde{y}} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_T)' \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$$

zu schätzen. Die Methode ist eine Verallgemeinerung der Kleinst-Quadrate-Schätzung (KQ-Schätzung) in scharfen Regressionsmodellen.

Zunächst wird dazu in Kapitel 4.1 die KQ-Methode für scharfe Regressionsmodelle vorgestellt, und es werden Güteeigenschaften des KQ-Schätzers angegeben. Die KQ-Methode zeichnet sich durch ihre geometrischen und stochastischen Eigenschaften aus. In klassischen Regressionsmodellen ist der KQ-Schätzer BLUE (Satz von Gauß-Markov, Satz 4.1.4), also bester (effizienter) Schätzer in der Klasse aller linearen, erwartungstreuen Schätzer.

In Kapitel 4.2 wird zunächst versucht den klassischen KQ-Schätzer mittels des Erweiterungsprinzips von Zadeh auf LFRM zu erweitern. Es zeigt sich jedoch, wie auch schon von Körner und Näther (siehe [Körner/Näther], Seite 106ff) und Petry (siehe [Petry], Seite 73ff) festgestellt, dass der erweiterte KQ-Schätzer i.A. weder seine stochastischen noch seine geometrischen Eigenschaften beibehält (siehe Beispiel 4.2.2 und Satz 4.2.3). Deshalb

wird in dieser Arbeit ein direkter Kleinst-Quadrate-Ansatz verfolgt. Der KQ-Schätzwert im LFRM wird definiert als die eindeutige Lösung eines Minimierungsproblems und es wird nachgewiesen, dass dadurch tatsächlich eine Schätzung, also eine messbare Abbildung definiert wird.

4.1 Die Kleinst-Quadrate-Schätzung im LRM

Im Folgenden wird das in der Ökonometrie übliche Verfahren vorgestellt, in klassischen Regressionsmodellen zu einer Schätzung $\hat{\beta}$ des unbekanntem Parametervektors zu gelangen. Die zugrunde liegende Idee ist dabei zunächst geometrischen Ursprungs. Man gibt sich ein Kriterium vor, dass die Abweichung der Beobachtungen \underline{y} von den „geschätzten“ Werten $\hat{\underline{y}} := X\hat{\beta}$ misst und bestimmt denjenigen Parametervektor $\hat{\beta}$, als „Schätzung“¹ für den unbekanntem Parametervektor β , der diese Abweichung minimiert.

Definition 4.1.1

Gegeben sei das lineare Regressionsmodell

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{U}$$

mit der Beobachtungswertmatrix (\underline{y}, X) . Eine Lösung $\hat{\underline{\beta}}(\underline{y}) \in \mathbb{R}^n$ des Minimierungsproblems

$$\min_{\gamma \in \mathbb{R}^n} (\underline{y} - X\underline{\gamma})'(\underline{y} - X\underline{\gamma}) \quad (4.1)$$

bezeichnet man als **Kleinst-Quadrate-Lösung (KQ-Lösung)**. Zu $\hat{\underline{\beta}}(\underline{y})$ heißt

$$\hat{\underline{u}} := \underline{y} - X\hat{\underline{\beta}}(\underline{y})$$

der Vektor der **KQ-Residuen**. (vgl. [Steinmetz2003-2], Seite 35, Definition 3.2.1 oder [Steinmetz2002], Seite 181, Definition 10.2.1)



Zunächst bleibt festzuhalten, dass das Minimierungsproblem (4.1) in Definition 4.1.1 eindeutig lösbar ist, falls $\text{rg } X = n$ gilt. Die Lösung erhält man durch Lösung eines linearen Gleichungssystems.

¹ Das Wort Schätzung steht hier (noch) in Anführungszeichen, da dieser Ansatz ohne Statistik und Zufallsvariablen möglich ist und somit keine Schätzung im statistischen Sinne durchgeführt wird.

Definition und Satz 4.1.2

Gegeben seien das lineare Regressionsmodell

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{U}$$

und die Beobachtungswertmatrix (\underline{y}, X) mit $\text{rg } X = n$. Dann ist das Minimierungsproblem (4.1) in Definition 4.1.1 eindeutig lösbar und die KQ-Lösung $\hat{\underline{\beta}}(\underline{y})$ ist Lösung der sogenannten **Normalgleichungen**

$$X'X\hat{\underline{\beta}} = X'\underline{y}$$

und es gilt

$$\hat{\underline{\beta}}(\underline{y}) = (X'X)^{-1}X'\underline{y}.$$

In diesem Fall wird die Abbildung

$$\hat{\underline{B}} : \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}^n, \underline{y} \mapsto \hat{\underline{\beta}}(\underline{y}) = (X'X)^{-1}X'\underline{y}$$

als **Kleinst-Quadrate-Schätzfunktion** (**KQ-Schätzfunktion**, **Kleinst-Quadrate-Schätzer**, **KQ-Schätzer**) bezeichnet und $\hat{\underline{\beta}}(\underline{y})$ als **KQ-Schätzwert**.

$$\hat{\underline{y}} := X\hat{\underline{\beta}}(\underline{y})$$

heißt der nach der **KQ-Methode geschätzte \underline{y} -Vektor** (vgl. [Steinmetz2003-1], Seite 181, Definition 10.2.1, Satz 10.2.2)



Beweis: siehe [Schönfeld], Band 1, Seite 30ff



Bemerkung 4.1.3

.1 Auch die Abbildung $\hat{\underline{B}}(\underline{Y}) := \hat{\underline{B}} \circ \underline{Y}$ wird als KQ-Schätzfunktion (KQ-Schätzer) bezeichnet.

.2 Geometrisch bedeutet die Berechnung von $\hat{\underline{\beta}}$, denjenigen Parametervektor zu bestimmen, der die Summe der quadrierten Residuen $\sum_{t=1}^T u_t^2 = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2$ minimiert.

.3 Die Festlegung auf die quadratische Abweichung ist dabei zunächst willkürlich, legitimiert sich aber durch „vernünftige“ statistische Eigenschaften des so bestimmten Schätzers (siehe Satz 4.1.4, Satz von Gauß-Markov). ◆

Im folgenden Satz werden wichtige Eigenschaften des KQ-Schätzers angegeben.

Satz 4.1.4 (Gauß-Markov)

Gegeben seien das lineare Regressionsmodell

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{U}$$

und die Beobachtungswertmatrix (\underline{y}, X) mit

$$\text{rg } X = n, \quad E\underline{U} = \underline{0}, \quad \Sigma_{\underline{U}\underline{U}'} = \sigma^2 I .$$

Dann ist der KQ-Schätzer

$$\hat{\underline{B}}(\underline{Y}) := (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$$

bester in \underline{Y} linearer erwartungstreuer Schätzer für $\underline{\beta}$ (engl. Abkürzung BLUE für Best Linear Unbiased Estimator). (siehe [Steinmetz2002], Seite 189, Satz 10.3.3) ◆

Beweis: siehe [Schöfeld], Band 1, Seite 62 ■

Auf eine weitere Eigenschaft des KQ-Schätzers, nämlich die starke Konsistenz, wird in Kapitel 5 eingegangen (siehe Satz 5.1.1).

4.2 Die Kleinst-Quadrate-Schätzung im LFRM

In diesem Abschnitt wird ein Schätzverfahren zur Schätzung des unbekanntem Parametervektors $\tilde{\underline{\beta}}$ im LFRM entwickelt. Dazu wird zunächst der klassische KQ-Schätzer aus Kapitel 4.1 mit Hilfe des Erweiterungsprinzips von Zadeh auf den Fuzzy-Fall übertragen. Dies führt jedoch zu unbrauchbaren Ergebnissen. Es werden weder die geometrischen

(siehe [Petry], Seite 73) noch die statistischen (siehe Satz 4.2.3) Eigenschaften erhalten. Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit ein direkter Kleinst-Quadrate-Ansatz verfolgt, wobei die Erwartungstreue auch im KQ-Fall noch offen ist.

Zunächst werden jedoch das Beispiel von Petry und die Untersuchungen von Körner und Näther diskutiert.

Beispiel 4.2.1

Gegeben sei das LFRM

$$\tilde{E}^A \tilde{Y} = X(\tilde{\beta})$$

mit Beobachtungswertmatrix (\tilde{y}, X) und $\text{rg } X = n$. Wendet man das Erweiterungsprinzip von Zadeh auf den KQ-Schätzer aus Definition und Satz 4.1.2 an, so ergibt sich die Schätzfunktion $\hat{\underline{B}} = (\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_n)'$ und der unscharfe Schätzwert $\hat{\underline{\beta}}(\tilde{y}) = (\hat{\beta}_1(\tilde{y}), \dots, \hat{\beta}_n(\tilde{y}))'$ mit

$$\begin{aligned} \hat{B}_i : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T &\rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}) \\ \tilde{y} &\mapsto \hat{B}_i(\tilde{y}) = \hat{\beta}_i(\tilde{y}) \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

mit Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\hat{\beta}_i(\tilde{y})}(z) = \sup_{\underline{y} \in \mathbb{R}^T : z = \underline{e}'_i (X'X)^{-1} X' \underline{y}} \min \{ \mu_{\tilde{y}_1}(y_1), \dots, \mu_{\tilde{y}_T}(y_T) \},^2$$

d.h.

$$\hat{\underline{\beta}} = Z(\tilde{y}) \quad \text{mit } Z := (X'X)^{-1} X'.$$

Dabei sei

$$Z(\tilde{y}) := (Z'_{1\bullet} \odot_F \tilde{y}, \dots, Z'_{T\bullet} \odot_F \tilde{y})'$$

(vgl. Definition von $X(\tilde{\beta})$ in Definition 3.2.1).

Die Wohldefiniertheit der Abbildung Z bzw. $\hat{\underline{B}}$ folgt aus der Anwendung des Erweiterungsprinzips (siehe Satz 1.2.2) auf die Abbildungen

$$Z_t : \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{y} \mapsto Z'_{t\bullet} \underline{y} \quad (t = 1, \dots, T).$$

Die Messbarkeit folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit der Abbildung Z (vgl. Satz 3.5.2). (siehe [Petry], Seite 73, Beispiel 6.12)

² Dabei bezeichnet \underline{e}_i den i -ten Einheitsvektor.

Beispiel 4.2.2

Im Folgenden sei $n = 2$. Liegen im scharfen Fall die Beobachtungen auf einer Geraden

$$y = \beta_1 + \beta_2 x ,$$

so liefert der KQ-Schätzer als Schätzwert gerade β_1 und β_2 (siehe [Petry], Seite 73). Diese wünschenswerte geometrische Eigenschaft hat der erweiterte KQ-Schätzer aus Beispiel 4.2.1 jedoch nicht. Hierzu ein Beispiel mit symmetrischen Fuzzy-Dreieckszahlen und ein Beispiel mit Intervallen.

.1 Es sei $T = 2$ und die Beobachtungen

$$(x_{11}, x_{21}, \tilde{y}_1) = (1, 1, (2, 2, 2)_\Delta) \quad \text{und} \quad (x_{21}, x_{22}, \tilde{y}_2) = (1, 2, (3, 3, 3)_\Delta)$$

gegeben. Dann ergibt sich als erweiterter KQ-Schätzwert

$$Z(\underline{\tilde{y}}) = (X'X)^{-1}X'(\underline{\tilde{y}}) = \begin{pmatrix} \hat{\tilde{\beta}}_1 \\ \hat{\tilde{\beta}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 7, 7)_\Delta \\ (1, 5, 5)_\Delta \end{pmatrix} ,$$

obwohl die Beobachtungen auf einer „Fuzzy-Geraden“

$$\tilde{y} = (1, 1, 1)_\Delta \oplus_F ((1, 1, 1)_\Delta \odot_F x)^3$$

liegen (siehe [Petry], Seite 74).

.2 Es sei $T = 2$ und die Beobachtungen

$$(x_{11}, x_{21}, \tilde{y}_1) = (1, 1, [0, 2]) \quad \text{und} \quad (x_{21}, x_{22}, \tilde{y}_2) = (1, 2, [0, 3])$$

gegeben. Dann ergibt sich als erweiterter KQ-Schätzwert

$$\begin{pmatrix} \hat{\tilde{\beta}}_1 \\ \hat{\tilde{\beta}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3, 4] \\ [-2, 3] \end{pmatrix} ,$$

obwohl die Beobachtungen auf einer „Fuzzy-Geraden“

$$\tilde{y} = [0, 1] \oplus_F ([0, 1] \odot_F x) = [0, 1] \oplus ([0, 1] \odot x)$$

liegen.

³ Dabei sei $\tilde{A} \odot_F x := x \odot_F \tilde{A}$, $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{A} \in F\mathfrak{F}(\mathbb{R}^k)$, vgl. Definition und Satz 1.2.6.

An diesen Beispielen erkennt man, dass die geometrischen Eigenschaften des klassischen KQ-Schätzers i.A. nicht erhalten bleiben. Liegen die gegebenen Daten auf einer „Fuzzy-Geraden“

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 \oplus_F (\tilde{\beta}_2 \odot_F x) ,$$

so werden mittels des erweiterten KQ-Schätzers aus Beispiel 4.2.1 $\tilde{\beta}_1$ und $\tilde{\beta}_2$ i.A. nicht errechnet. Diese wünschenswerte Eigenschaft des klassischen KQ-Schätzers geht also verloren.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass i.A. auch die Erwartungstreue des KQ-Schätzers nicht erhalten bleibt und somit auch keine BLUE-Eigenschaften zu erwarten sind. Dazu der Satz von Körner und Näther.

Satz 4.2.3

Für das LFRM

$$\tilde{E}^A \tilde{Y} = X(\tilde{\beta})$$

gibt es i.A. keinen linearen erwartungstreuen Schätzer der Form $\hat{\tilde{B}} = C(\tilde{Y})$ ⁴ mit einer $(T \times n)$ -Matrix C , d.h. es existieren $X = (x_{ti})_{\substack{t=1, \dots, T \\ i=1, \dots, n}}$ derart, dass $\tilde{E}^A C(\tilde{Y}) \neq X(\tilde{\beta})$ für $\tilde{\beta} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$. (vgl. [Körner/Näther], Proposition 2)



Beweis: siehe [Körner/Näther], Seite 107



Der in Beispiel 4.2.1 vorgestellte Schätzer kann damit, da er linear in \tilde{y} bzw. \tilde{Y} ist, i.A. nicht erwartungstreu sein.

Näther (siehe [Näther], Abschnitt 5) schlägt daher eine abgeschwächte Form von Erwartungstreue vor, um eine „abgeschwächte“ BLUE-Theorie zu entwickeln, allerdings nur im Falle symmetrischer Dreieckszahlen. Körner (siehe [Körner 1997-1], Seite 64f) geht zum Nachweis statistischer Eigenschaften (BLUE-Eigenschaften) zu einem anderen Modell über, der Bezug zum ursprünglichen Modell ist jedoch fraglich (siehe auch [Körner/Näther], Seite 107ff).

⁴ vgl. Definition von $X(\tilde{\beta})$ in Definition 3.2.1, Wohldefiniertheit und Messbarkeit folgen mit denselben Argumenten wie in Beispiel 4.2.1

Da in dieser Arbeit das in Definition 3.2.1 vorgestellte Regressionsmodell untersucht werden soll, werden diese Ansätze nicht weiter verfolgt. Ziel bleibt der Vorschlag eines Schätzers für einen möglichst allgemeinen Fall, d.h. möglichst allgemeine Fuzzy-Mengen bei abhängiger Variable und Parametervektor, und der Nachweis stochastischer Eigenschaften dieses Schätzers. Vorgestellt wird ein Schätzer als Lösung eines Minimierungsproblems, analog zu Definition 4.1.1, wodurch die gewünschten geometrischen Eigenschaften trivialerweise erfüllt sind. Auch Körner und Näther stellen fest, dass „... ein direkter KQ-Ansatz ... sinnvoller erscheint“ (siehe [Körner/Näther], Seite 109f). Körner entwickelte explizite Rechenformeln für den Fall von LR -Zahlen (siehe [Körner/Näther], Abschnitt 5.2, Theorem 2 oder [Körner 1997-1], Seite 69ff). Ein Nachweis statistischer Eigenschaften unterbleibt dort jedoch.

Zunächst erfolgt die Definition des in dieser Arbeit untersuchten Schätzers.

Definition 4.2.4

Es sei

$$\left\{ \tilde{Y}_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

ein LFRM (siehe Definition 3.2.1) mit injektiver Regressionsfunktion X .

- .1 Zu einer Realisation $\underline{\tilde{y}} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_T)' \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ von $\underline{\tilde{Y}} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T)'$ heißt der Vektor $\underline{\hat{\beta}}(\underline{\tilde{y}})$ genau dann eine **Lösung nach der Methode der Kleinsten-Quadrate**, wenn

$$\rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\hat{\beta}}(\underline{\tilde{y}}))) = \min \{ \rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\tilde{\gamma}})) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \} \quad (4.2)$$

gilt.

- .2 Eine Abbildung

$$\underline{\hat{B}} : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$$

heißt genau dann **Kleinst-Quadrate-Schätzfunktion (KQ-Schätzfunktion, Kleinst-Quadrate-Schätzer, KQ-Schätzer) für $\underline{\tilde{\beta}}$** , wenn für jede Realisation $\underline{\tilde{y}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$, der Wert $\underline{\hat{B}}(\underline{\tilde{y}})$ eine Lösung nach der Methode der Kleinsten-Quadrate ist und $\underline{\hat{B}}$ eine $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_{2,T}}} (F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T)$ - $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_{2,n}}} (F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n)$ -messbare Abbildung ist.

- .3 Zu einer Realisation $\tilde{y} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ wird der Vektor $\widehat{\tilde{\beta}}(\tilde{y})$ ein **Kleinst-Quadrate-Schätzwert für $\tilde{\beta}$** genannt, falls eine Kleinst-Quadrate-Schätzfunktion $\widehat{\tilde{B}}$ für $\tilde{\beta}$ existiert mit $\widehat{\tilde{\beta}}(\tilde{y}) = \widehat{\tilde{B}}(\tilde{y})$. ◆

Bemerkung 4.2.5

Auch die Abbildung $\widehat{\tilde{B}}(\tilde{Y}) := \widehat{\tilde{B}} \circ \tilde{Y}$ wird als Kleinst-Quadrate-Schätzer bezeichnet. ◆

Im nächsten Satz wird festgehalten, dass das Minimierungsproblem (4.2) in Definition 4.2.4.1 eine eindeutige Lösung besitzt.

Satz 4.2.6

Es gelten die Notationen und Voraussetzungen aus Definition 4.2.4. Dann ist das Minimierungsproblem (4.2) in Definition 4.2.4.1 eindeutig lösbar. ◆

Beweis:

- .1 Es sei $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}$ die Standard-Einbettung von $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ in $L_2([0, 1] \times S^0)^T$. Aufgrund der Eigenschaften von $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}$, der Konvexität von

$$\left\{ j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{A}) \mid \tilde{A} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}) \right\} \quad (\text{siehe Satz 1.2.30})$$

und der Linearität von X ist es leicht zu sehen, dass

$$\left\{ j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T} \circ X(\tilde{\gamma}) \mid \tilde{\gamma} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \right\}$$

eine konvexe Teilmenge von $L_2([0, 1] \times S^0)^T$ ist.

- .2 Da $(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}), \rho_2)$ vollständig ist, gilt dies auch für $(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \rho_{2,n})$. Aus Satz 3.5.2.2 folgt

$$\begin{aligned} \|j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}(X(\tilde{\gamma})) - j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}(X(\tilde{\eta}))\|_{2,T} &= \rho_{2,T}(X(\tilde{\gamma}), X(\tilde{\eta})) \\ &\geq \frac{\rho_{2,n}(\tilde{\gamma}, \tilde{\eta})}{\|X^{-}\|}, \quad \forall \tilde{\gamma}, \tilde{\eta} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \quad (*) \end{aligned}$$

wobei $\|X^-\|$ die minimale Lipschitz-Konstante von X^- , der Umkehrabbildung von X , bezeichnet.

Es sei $\langle f_k \rangle_k$ ($k \in \mathbb{N}$) eine konvergente Folge in

$$\{j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T} \circ X(\underline{\tilde{\gamma}}) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n\}.$$

Aufgrund der Injektivität von $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}$ und X existieren eindeutig bestimmte

$(\underline{\tilde{\eta}}_k)_k \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit

$$\langle f_k \rangle = j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T} \circ X(\underline{\tilde{\eta}}_k).$$

(Dabei bezeichnet $\underline{\tilde{\eta}}_k$ das k -te Folgenglied und nicht die k -te Koordinate des Vektors $\underline{\tilde{\eta}}$.) Wegen $(*)$ ist $\underline{\tilde{\eta}}_k$ eine Cauchyfolge in $(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \rho_{2,n})$, die einen Grenzwert in $(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \rho_{2,n})$, bezeichnet mit $\underline{\tilde{\eta}}^* \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$, besitzt. Aus

$$\begin{aligned} \|\langle f_k \rangle - j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T} \circ X(\underline{\tilde{\eta}}^*)\|_{2,T} &= \|j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T} \circ X(\underline{\tilde{\eta}}_k) - j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T} \circ X(\underline{\tilde{\eta}}^*)\|_{2,T} \\ &\leq \|X\| \|j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}(\underline{\tilde{\eta}}_k) - j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n}(\underline{\tilde{\eta}}^*)\|_{2,n} \\ &\quad (\text{Satz 3.5.2.1}) \end{aligned}$$

folgt, dass der Grenzwert von $\langle f_k \rangle_k$ in

$$\{j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T} \circ X(\underline{\tilde{\gamma}}) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n\}$$

liegt, diese Menge also eine abgeschlossene Teilmenge von $L_2([0, 1] \times S^0)^T$ ist.

Mit .1 und .2 ist

$$\{j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}(X(\underline{\tilde{\gamma}})) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n\}$$

also eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge des Hilbert-Raums $L_2([0, 1] \times S^0)^T$. Wegen Satz B.4 (siehe Anhang B) existiert also ein eindeutiges

$$\langle f \rangle \in \{j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T} \circ X(\underline{\tilde{\gamma}}) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n\},$$

dass das Minimierungsproblem

$$\|\langle g \rangle - \langle f \rangle\|_{2,T} \longrightarrow \min, \quad g := j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}(\underline{\tilde{y}}), \quad \underline{\tilde{y}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$$

löst. Aufgrund der Injektivität von X und $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}$ und da $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}$ isometrisch bzgl. $\rho_{2,T}$ und $\|\cdot\|_{2,T}$ ist, ist der Satz gezeigt. ■

Körner und Näther (siehe [Körner/Näther], Seite 112) benutzen dieses Resultat ebenfalls, ohne aber zu erwähnen, dass die Eigenschaften von X und X^- sowie die Eigenschaften von $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}$ zum Beweis benötigt werden.

Im nächsten Schritt wird die Existenz einer Kleinst-Quadrate-Schätzfunktion, also die Existenz einer messbaren Abbildung, nachgewiesen und gezeigt, dass die Kleinst-Quadrate-Lösung tatsächlich einen Schätzwert für den unbekannt Parametervektor $\underline{\beta}$ darstellt.

Satz 4.2.7

Gegeben seien die Notationen und Voraussetzungen aus Definition 4.2.4. Dann existiert genau eine messbare Abbildung

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{B}} : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T &\rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \\ \widehat{\underline{B}}(\underline{\tilde{y}}) &\mapsto \underline{\widehat{\beta}}(\underline{\tilde{y}}) \end{aligned}$$

mit

$$\rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\widehat{\beta}}(\underline{\tilde{y}}))) = \min \{ \rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\tilde{\gamma}})) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \} ,$$

d.h. $\underline{\widehat{\beta}}(\underline{\tilde{y}})$ ist ein Kleinst-Quadrate-Schätzwert für $\underline{\beta}$ und $\widehat{\underline{B}}$ ist eine Kleinst-Quadrate-Schätzfunktion für $\underline{\beta}$. ◆

Beweis:

- .1 Die Wohldefiniiertheit der Abbildung $\widehat{\underline{B}}$ folgt direkt aus Satz 4.2.6.
- .2 Zu zeigen bleibt die Messbarkeit von $\widehat{\underline{B}}$: Dazu wird das Measurable Selection Theorem (MST) (siehe Anhang A, Satz A.7) benutzt. Es sei

$$\begin{aligned} f : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T \times F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{\tilde{y}}, \underline{\tilde{\gamma}}) &\mapsto -\rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\tilde{\gamma}})) . \end{aligned}$$

Zunächst werden die Voraussetzungen des MST überprüft.

- $(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \tau_{\rho_{2,n}})$ ist ein polnischer Raum (siehe Anhang B, Definition B.3), da $(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R}), \tau_{\rho_2})$ vollständig metrisierbar und separabel ist (siehe Satz 1.2.26 oder [Krätschmer2002-2], Theorem 3.2) und damit ebenso $(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \tau_{\rho_{2,n}})$.
- $\forall \underline{\tilde{y}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T \quad \exists \underline{\tilde{\beta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ mit

$$\begin{aligned}
f(\underline{\tilde{y}}, \underline{\tilde{\beta}}) &= -\rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\tilde{\beta}})) \\
&= -\min \{ \rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\tilde{\gamma}})) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \} \\
&= \sup \{ -\rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\tilde{\gamma}})) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \} \\
&=: \bar{f}(\underline{\tilde{y}}, F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n)
\end{aligned}$$

- Es sei f die Abbildung

$$\begin{aligned}
f : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T \times F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\underline{\tilde{y}}, \underline{\tilde{\gamma}}) &\mapsto -\rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\tilde{\gamma}})) .
\end{aligned}$$

Dann ist die Abbildung

$$f(\cdot, \underline{\tilde{\gamma}}) = -\rho_{2,T}(\cdot, X(\underline{\tilde{\gamma}}))$$

stetig bzgl. $\tau_{\rho_{2,T}}$ und damit $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_{2,T}}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T)$ - \mathcal{B} messbar.⁵

Die Abbildung

$$f(\underline{\tilde{y}}, \cdot) = -\rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, \cdot) \circ X$$

ist stetig bzgl. $\tau_{2,n}$ (siehe Satz 3.5.2.1).

Also kann man das MST anwenden.

Damit existiert eine $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_{2,T}}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T)$ - $\mathcal{B}_{\tau_{\rho_{2,n}}}(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n)$ -messbare Abbildung

$$\begin{aligned}
\Phi : F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T &\rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \quad \text{mit} \\
-\rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, \Phi(\underline{\tilde{y}})) = f(\underline{\tilde{y}}, \Phi(\underline{\tilde{y}})) &= \bar{f}(\underline{\tilde{y}}, F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n) \\
&= \sup \{ f(\underline{\tilde{y}}, \underline{\tilde{\gamma}}) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \} \\
&= -\min \{ \rho_{2,T}(\underline{\tilde{y}}, X(\underline{\tilde{\gamma}})) \mid \underline{\tilde{\gamma}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n \} .
\end{aligned}$$

⁵ \mathcal{B} bezeichnet die Borel- σ -Algebra über \mathbb{R} .

Da das Minimierungsproblem (4.2) in Definition 4.2.4.1 eindeutig lösbar ist, gilt

$$\Phi(\underline{\tilde{y}}) = \underline{\tilde{B}}(\underline{\tilde{y}}) = \underline{\tilde{\beta}}(\underline{\tilde{y}})$$

und der Satz ist bewiesen. ■

Der Nachweis statistischer Eigenschaften des vorgestellten KQ-Schätzers erfolgt im nächsten Kapitel.

Kapitel 5

Die starke Konsistenz des Kleinst-Quadrate-Schätzers

In diesem Abschnitt wird eine statistische Absicherung des in Kapitel 4 vorgestellten Kleinst-Quadrate-Schätzers im LFRM vorgenommen. Grundgedanke dabei ist, dass der Schätzer unter „optimalen“ Bedingungen „gute“ Ergebnisse liefern soll. Gezeigt wird die starke Konsistenz des KQ-Schätzers, also die P-fast sichere Konvergenz der Folge von KQ-Schätzfunktionen gegen den unbekanntem Parametervektor $\tilde{\beta}$. (Starke) Konsistenz ist eine asymptotische Eigenschaft, das bedeutet, dass beliebig große Beobachtungsumfänge betrachtet werden (also $T \rightarrow \infty$). Eine wünschenswerte Eigenschaft eines Schätzers ist dann, dass in einem solchen Fall der Schätzer beliebig „gut“ bzw. beliebig „genau“ sein soll. Schätzer, die diese Eigenschaft nicht haben, sind wenig sinnvoll. Deshalb wird im Falle von (starker) Konsistenz auch von einer „minimalen“ statistischen Absicherung gesprochen (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 277). Petry (siehe [Petry], Seite 77, Satz 6.16) zeigte in seiner Arbeit die schwache Konsistenz (siehe Anhang A, Definition A.10) des KQ-Schätzers in seinem Modell, d.h. für den Fall symmetrischer LL -Zahlen.

In Kapitel 5.1. wird zunächst der Fall scharfer Regressionsmodelle untersucht und werden Voraussetzungen angegeben, unter denen der scharfe KQ-Schätzer stark konsistent ist. In Kapitel 5.2 werden diese Voraussetzungen auf den Fuzzy-Fall übertragen und wird die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LFRM nachgewiesen.

5.1 Die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LRM

In diesem Abschnitt werden hinreichende Bedingungen angegeben, die die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LRM sichern. Ein sehr allgemeines Ergebnis findet sich bei [Lai et al.] (siehe Anhang A, Satz A.8). Leider lässt sich mit den dort vorgestellten Bedingungen die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LFRM nicht nachweisen. Im folgenden Lemma werden Bedingungen angegeben, die übertragbar auf LFRM sind.

Lemma 5.1.1

- .1 Es bezeichnen $\|\cdot\|_n$, $\|\cdot\|_T$ die euklidischen Normen auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^T . Weiterhin sei $x_{ti} \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) derart, dass die $(T \times n)$ -Matrix $X_T = (x_{ti})_{\substack{t=1, \dots, T \\ i=1, \dots, n}}$ für eine beliebige natürliche Zahl T ab einem $T_0 \in \mathbb{N}$ vollen Spaltenrang besitze. Es sei

$$X_T(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^T, \quad \underline{a} \mapsto X_T \underline{a}$$

die zu X_T gehörige lineare Abbildung und für $T > T_0$ bezeichne

$$X_T^- : X_T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die Abbildung mit

$$X_T^-(X_T(\underline{a})) = \underline{a}, \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Ist $((T_0 + T)\|X_T^-\|_T^2)$ mit

$$\|X_T^-\| := \sup \{ \|X_T^-(\underline{b}) - X_T^-(\underline{c})\|_n \mid \underline{b}, \underline{c} \in X_T(\mathbb{R}^n), \|\underline{b} - \underline{c}\|_T = 1 \} \quad (T > T_0)$$

ein beschränkte Folge in \mathbb{R} , so ist die Regressionsbedingung (R) in Satz A.8 (siehe Anhang A) erfüllt.

- .2 Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in .1 und es sei

$$\|X_T\| := \sup \{ \|X_T \underline{a}\|_T \mid \underline{a} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{a}\|_n = 1 \}.$$

Existiert eine positiv definite Matrix $n \times n$ -Matrix M mit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X_T' X_T = M,$$

wobei der Grenzwert komponentenweise berechnet wird, so sind

$$\left(\frac{1}{T} \|X_T\|^2 \right)_T, \quad (T_0 + T)\|X_T^-\|_T^2$$

beschränkte Folgen in \mathbb{R} .

.3 Ist $(U_t)_t$ eine Folge unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $E U_t = 0$ ($t \in \mathbb{N}$), deren entsprechende Folge $\text{Var}(U_t)_t$ ihrer Varianzen beschränkt ist, so existiert zu jeder Folge $(c_t)_t$ reeller Zahlen mit $\sum_{t=1}^{\infty} c_t^2 < \infty$ ein $A \in \mathcal{F}$, $P A = 1$, sodass

$$\sum_{t=1}^{\infty} c_t U_t(\omega)$$

eine konvergente Reihe für $\omega \in A$ ist und damit ist Bedingung (S) aus Satz A.8 (siehe Anhang A) erfüllt.

(vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 278ff, Lemma 5.4.2, Lemma 5.4.3)

◆

Beweis:

zu .1 und .2:

siehe [Krätschmer2001-2], Seite 278ff

zu .3:

Es gilt:

- $E c_t U_t = 0 \quad (t \in \mathbb{N}),$
- $\sum_{t=1}^{\infty} E(c_t U_t)^2 < \infty .$

Die P-fast sichere Konvergenz von $\sum_{t=1}^{\infty} c_t U_t$ folgt dann aus einem Kriterium für die fast sichere Konvergenz unendlicher Reihen (siehe Anhang A, Satz A.9).

■

Bemerkung 5.1.2

Die Annahme, dass eine positiv definite Matrix $n \times n$ -Matrix M existiert mit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X_T' X_T = M ,$$

ist eine in der ökonomischen Literatur übliche Bedingung zum Nachweis der schwachen Konsistenz von KQ-Schätzfunktionen (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 279).

◆

Der folgende Satz stellt Bedingungen zusammen, aus denen die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LRM folgt und die sich auf LFRM übertragen lassen.

Satz 5.1.3

Es sei $(Y_t)_t$ eine Folge stochastisch unabhängiger 2-fach P-integrierbarer reellwertiger Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Varianz $\text{Var} Y_t$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Für $T > T_0$ ($T_0 \in \mathbb{N}$) sei

$$\{Y_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

ein LRM mit Regressionsparametervektor $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^n$ und $E U_t = 0$ ($t \in \mathbb{N}$). Für die Regressionsmatrix X_T gelte $\text{rg } X_T = n$ für alle $T > T_0$. Weiterhin sei

$$\|X_T\| := \sup \{ \|X_T \underline{a}\|_T \mid \underline{a} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{a}\|_n = 1 \}$$

und

$$\|X_T^-\| := \sup \{ \|X_T^-(\underline{b}) - X_T^-(\underline{c})\|_n \mid \underline{b}, \underline{c} \in X_T(\mathbb{R}^n), \|\underline{b} - \underline{c}\|_T = 1 \} \quad (T > T_0).$$

Sind

$$(\text{Var } Y_t)_t, \quad ((T_0 + T)\|X_T^-\|^2)_T, \quad \left(\frac{\|X_T\|^2}{T} \right)_T$$

beschränkte Folgen in \mathbb{R} , so existiert zu jeder Folge $(\widehat{B}(Y_1, \dots, Y_{T_0+T}))_T$ von Kleinst-Quadrat-Schätzfunktionen für $\underline{\beta}$ ein $A \in \mathcal{F}$, $P A = 1$ mit

$$\forall \underline{\beta} \in \mathbb{R}^n, \forall \omega \in A : \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{B}(\widetilde{Y}_1(\omega), \dots, \widetilde{Y}_T(\omega)) = \underline{\beta}.$$



Beweis:

Folgt sofort mit Anwendung von Satz A.8 (siehe Anhang A) und Lemma 5.1.1.



5.2 Die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LFRM

In diesem Abschnitt wird die starke Konsistenz des KQ-Schätzers im LFRM, also die P-fast sichere Konvergenz einer Folge von KQ-Schätzfunktionen gegen den unbekanntem Parametervektor $\underline{\tilde{\beta}}$ nachgewiesen. Dabei werden die Bedingungen aus Satz 5.1.3 auf LFRM übertragen.

Satz 5.2.1

Es sei $(\tilde{Y}_t)_t$ eine Folge stochastisch unabhängiger quadratisch-integrierbarer $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ -wertiger Fuzzy-Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Fréchet Varianz $\widetilde{\text{Var}}^F \tilde{Y}_t$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Für $T > T_0$ ($T_0 \in \mathbb{N}$) sei

$$\left\{ \tilde{Y}_t, x_{ti} \mid t \in \{1, \dots, T\}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

ein LFRM mit Regressionsparametervektor $\underline{\tilde{\beta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$, injektiver Regressionsfunktion X_T und der Abbildung

$$X_T^- : X_T(F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n) \rightarrow F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$$

aus Satz 3.5.1.2. $\|X_T\|$ und $\|X_T^-\|$ bezeichnen die minimalen Lipschitz-Konstanten von X_T und X_T^- . Sind

$$(\widetilde{\text{Var}}^F \tilde{Y}_t)_t, \quad ((T_0 + T)\|X_T^-\|^2)_T, \quad \left(\frac{\|X_T\|^2}{T} \right)_T$$

beschränkte Folgen in \mathbb{R} , so existiert zu jeder Folge $(\widehat{\underline{B}}(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{T_0+T}))_T$ von Kleinst-Quadrate-Schätzfunktionen für $\underline{\tilde{\beta}}$ ein $A \in \mathcal{F}$, $P A = 1$ mit

$$\forall \underline{\tilde{\beta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n, \forall \omega \in A : \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\underline{B}}(\tilde{Y}_1(\omega), \dots, \tilde{Y}_T(\omega)) = \underline{\tilde{\beta}}.$$

◆

Beweis:

Es sei $\underline{\tilde{\beta}} \in F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ der wahre Parametervektor und $(\widehat{\underline{B}}(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{T_0+T}))_T$ eine Folge von Kleinst-Quadrate-Schätzern für $\underline{\tilde{\beta}}$. Es bezeichne $j_{F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}$ die Standardeinbettung von $F_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T$ in $L_2([0, 1] \times S^0)^T$ und $(\cdot | \cdot)_{2,T}$ das Standardskalarprodukt auf $L_2([0, 1] \times S^0)^T$, welches die Norm $\|\cdot\|_{2,T}$ induziert (vgl. [Mathieu], Seite 219).

Mit $\tilde{\underline{Y}}_T := (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T)'$, $\omega \in \Omega$, $\tilde{\underline{\gamma}} \in \mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^n$ gilt

$$\frac{1}{T} \rho_{2,T}(\tilde{\underline{Y}}_T(\omega), X_T(\tilde{\underline{\gamma}}))^2 = \frac{1}{T} \rho_{2,T}(\tilde{\underline{Y}}_T(\omega), X_T(\tilde{\underline{\beta}}))^2 + S_T(\omega) + \frac{1}{T} \rho_{2,T}(X_T(\tilde{\underline{\beta}}), X_T(\tilde{\underline{\gamma}}))^2,$$

wobei

$$S_T(\omega) = \frac{2}{T} \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}(\tilde{\underline{Y}}_T(\omega)) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}(X_T(\tilde{\underline{\beta}})) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}(X_T(\tilde{\underline{\beta}})) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})^T}(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})) \right)_{2,T}.$$

Gezeigt wird zunächst:

Falls $\rho_{2,n}(\tilde{\underline{\beta}}, \tilde{\underline{\gamma}}) \geq \delta$ ($\delta > 0$), dann existiert ein $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P} A = 1$, so dass für alle $\omega \in A$ ein $T_1 > T_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\frac{1}{T} \rho_{2,T}(\tilde{\underline{Y}}_T(\omega), X_T(\tilde{\underline{\gamma}}))^2 \geq \frac{1}{T} \rho_{2,T}(\tilde{\underline{Y}}_T(\omega), X_T(\tilde{\underline{\beta}}))^2 \quad \text{für } T > T_1.$$

.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \rho_{2,T}(X_T(\tilde{\underline{\beta}}), X_T(\tilde{\underline{\gamma}}))^2 &\geq \frac{1}{T} \frac{1}{\|X_T\|^2} \rho_{2,n}(\tilde{\underline{\beta}}, \tilde{\underline{\gamma}})^2 \quad (\text{Satz 3.5.2.2, } T > T_0) \\ &\geq \frac{\rho_{2,n}(\tilde{\underline{\beta}}, \tilde{\underline{\gamma}})^2}{c} \quad \left(c := \max \left\{ \sup_{\substack{T \in \mathbb{N} \\ T > T_0}} T \|X_T\|^2, \sup_{\substack{T \in \mathbb{N} \\ T > T_0}} \frac{\|X_T\|^2}{T} \right\} \right) \end{aligned}$$

.2 Gezeigt wird:

$$\exists A \in \mathcal{F}, \mathbb{P} A = 1, \forall \omega \in A : \lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\omega) = 0.$$

Es bezeichne $(\cdot \mid \cdot)_2$ das Standardskalarprodukt in $L_2([0, 1] \times S^0)$ (siehe Anhang B, Definition und Satz B.5, Satz B.6). Die Folge

$$\left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{Y}_t) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\beta}})_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})_t) \right)_2$$

erfüllt das starke Gesetz der großen Zahlen in der Version von Hoffman-Jorgensen (siehe Anhang A, Satz A.11) mit

$$r = 1, q = 2, \gamma = \sigma^2 c \rho_{2,n}(\tilde{\underline{\beta}}, \tilde{\underline{\gamma}})^2, s_t = \frac{1}{t} \quad (t \in \mathbb{N})$$

und

$$u_t := \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{Y}_t) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X(\tilde{\underline{\beta}})_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X(\tilde{\underline{\gamma}})_t) \right)_2.$$

Dies wird zunächst überprüft. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(\tilde{\underline{Y}}_T) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(\tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{\underline{Y}}_T) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(X_T(\tilde{\underline{\beta}})) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})) \right)_{2,T} \right|^2 \\
&= \mathbb{E} \left| \left(\sum_{t=1}^T \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{Y}_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{Y}_t) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\beta}})_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})_t) \right)_2 \right) \right|^2 \\
&= \text{Var} \sum_{t=1}^T \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{Y}_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{Y}_t) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\beta}})_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})_t) \right)_2 \\
&\quad (\text{mit Satz A.12, siehe Anhang A}) \\
&= \sum_{t=1}^T \text{Var} \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})} \tilde{Y}_t - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})} \tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{Y}_t \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\beta}})_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})_t) \right)_2 \\
&= \sum_{t=1}^T \mathbb{E} \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{Y}_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{Y}_t) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\beta}})_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})_t) \right)_2^2 \\
&\leq \sum_{t=1}^T \mathbb{E} \left(\rho_2(\tilde{Y}_t, \tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{Y}_t)^2 \rho_2(X_T(\tilde{\underline{\beta}})_t, X_T(\tilde{\underline{\gamma}})_t)^2 \right) \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung}) \\
&= \sum_{t=1}^T \widetilde{\text{Var}}^F \tilde{Y}_t \rho_2(X_T(\tilde{\underline{\beta}})_t, X_T(\tilde{\underline{\gamma}})_t)^2 \\
&\leq \sigma^2 \|X_T\|^2 \rho_{2,n}(\tilde{\underline{\beta}}, \tilde{\underline{\gamma}})^2 \quad (\sigma^2 := \sup_{t \in \mathbb{N}} \widetilde{\text{Var}}^F \tilde{Y}_t, \text{ Satz 3.5.2}) \\
&\leq T \sigma^2 c \rho_{2,n}(\tilde{\underline{\beta}}, \tilde{\underline{\gamma}})^2 \leq \gamma T \sum_{t=1}^T \frac{1}{t} \quad (c \text{ definiert in .1})
\end{aligned}$$

Damit kann man also das stake Gesetz der großen Zahlen von Hoffman-Jorgensen anwenden. Aus

$$\begin{aligned}
& \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(\tilde{\underline{Y}}_T(\omega)) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(\tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{\underline{Y}}_T) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(X_T(\tilde{\underline{\beta}})) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})) \right)_{2,T} \\
&:= \sum_{t=1}^T \left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{Y}_t(\omega)) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(\tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{Y}_t) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\beta}})_t) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})_t) \right)_2
\end{aligned}$$

folgt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\left(j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(\tilde{\underline{Y}}_T(\omega)) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(\tilde{\mathbb{E}}^A \tilde{\underline{Y}}_T) \mid j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(X_T(\tilde{\underline{\beta}})) - j_{\mathbb{F}_{\text{coc2}}^{\text{no}}(\mathbb{R})}^T(X_T(\tilde{\underline{\gamma}})) \right)_{2,T}}{T} = 0$$

$$\iff \lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\omega) = 0 .$$

Angenommen $\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\beta}}, \underline{\tilde{\gamma}}) \geq \delta$ ($\delta > 0$). Sei $A \in \mathcal{F}$, $P A = 1$, mit $\forall \omega \in A$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\omega) = 0 .$$

Sei $\omega \in A$ fest. Wegen $\lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\omega) = 0$, $\exists T_1 > T_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$S_T(\omega) > -\frac{\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\beta}}, \underline{\tilde{\gamma}})^2}{c} ,$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \rho_{2,T}(\underline{\tilde{Y}}_T(\omega), X_T(\underline{\tilde{\gamma}}))^2 &= \frac{1}{T} \rho_{2,T}(\underline{\tilde{Y}}_T(\omega), X_T(\underline{\tilde{\beta}}))^2 + S_T(\omega) + \frac{1}{T} \rho_{2,T}(X_T(\underline{\tilde{\beta}}), X_T(\underline{\tilde{\gamma}}))^2 \\ &> \frac{1}{T} \rho_{2,T}(\underline{\tilde{Y}}_T(\omega), X_T(\underline{\tilde{\beta}}))^2 - \frac{\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\beta}}, \underline{\tilde{\gamma}})^2}{c} + \frac{\rho_{2,n}(\underline{\tilde{\beta}}, \underline{\tilde{\gamma}})^2}{c} \\ &= \frac{1}{T} \rho_{2,T}(\underline{\tilde{Y}}_T(\omega), X_T(\underline{\tilde{\beta}}))^2 . \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{1}{T} \rho_{2,T}(\underline{\tilde{Y}}_T(\omega), X_T(\widehat{\underline{B}}(\underline{\tilde{Y}}_T(\omega))))^2 \leq \frac{1}{T} \rho_{2,T}(\underline{\tilde{Y}}_T(\omega), X_T(\underline{\tilde{\beta}}))^2 \quad (\text{Definition von } \widehat{\underline{B}})$$

folgt dann aber

$$\rho_{2,n} \left(\underline{\tilde{\beta}}, \widehat{\underline{B}}(\underline{\tilde{Y}}_T(\omega)) \right) < \delta .$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Mit Satz 5.2.1 wurde somit eine statistische Absicherung der in Kapitel 4 vorgeschlagenen Schätzmethode erreicht.

Kapitel 6

Fazit und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die Vorstellung eines linearen Fuzzy-Regressionsmodells, die Herleitung eines Schätzverfahrens und die statistische Absicherung des Schätzverfahrens.

Dazu wurden in den ersten beiden Kapiteln die benötigten Grundlagen bereitgestellt. In Kapitel 1 erfolgte die Definition von Fuzzy-Mengen als Verallgemeinerung klassischer Mengen. Fuzzy-Mengen bieten die Möglichkeit nichtstochastische Unschärfe, die in der klassischen Statistik weitgehend vernachlässigt wurde, in die Modellbildung mit einzu beziehen. In Kapitel 2 wurde durch die Definition von Fuzzy-Zufallsvariablen nichtstochastische Unschärfe und stochastische Unschärfe kombiniert. Wichtige Kenngrößen von Zufallsvariablen, nämlich Erwartungswert und Varianz, wurden auf den Fall von Fuzzy-Zufallsvariablen übertragen.

In Kapitel 3 wurde das in der Arbeit untersuchte Fuzzy-Regressionmodell vorgestellt. Dabei war zunächst die Frage zu klären, welche der beteiligten Größen als fuzzy angenommen wurden. Am Beispiel „Kreditwürdigkeit“ wurde erläutert, dass eine scharfe Modellierung der abhängigen Variablen nicht immer adäquat ist. Somit wurde die abhängige Variable als fuzzy angenommen. Gleichzeitig wurde die abhängige Variable als Zufallsvariable modelliert. Dies diente zum einen dazu, die Tatsache zu modellieren, dass der vermutete lineare Zusammenhang nur „im Mittel“ gültig ist. Zum anderen war nur so eine statistische Absicherung des vorgeschlagenen Schätzverfahrens möglich. Im vorgestellten Modell wurde weiterhin angenommen, dass die unabhängigen Variablen als scharf anzuse-

hen sind. Bei der Kreditwürdigkeitsprüfung ist dies nicht unplausibel, da zumeist scharfe Daten abgefragt werden. Nimmt man jedoch an, dass die abhängige Variable eine „echte“ Fuzzy-Zufallsvariable ist und die unabhängigen Variablen scharf sind, so folgt daraus zwangsläufig, dass die unbekanntes Regressionsparameter fuzzy sein müssen. Somit ergab sich ein lineares Fuzzy-Regressionsmodell mit fuzzy abhängigen Variablen und fuzzy Parametern. Ein wichtiges Ergebnis war die Herleitung von Bedingungen, die die Identifizierbarkeit des Parametervektors im vorgestellten linearen Fuzzy-Regressionsmodell gewährleisten.

Kapitel 4 diente der Vorstellung eines Schätzverfahrens zur Schätzung des unbekanntes Parametervektors. Idee war dabei die Verwendung eines Kleinst-Quadrate-Ansatzes. Mittels der in Kapitel 1 vorgestellten Metrik wurde ein Minimierungsproblem aufgestellt. Wesentliche Ergebnisse des Kapitels waren, dass das Minimierungsproblem eindeutig lösbar ist und dass durch die Lösung des Minimierungsproblems eine Schätzfunktion für den unbekanntes fuzzy Parametervektor definiert wird. Der so definierte Schätzer wurde dann als Kleinst-Quadrate-Schätzer bezeichnet.

In Kapitel 5 wurde dann eine statistische Absicherung des in Kapitel 4 vorgestellten Kleinst-Quadrate-Schätzers vorgenommen. Es wurde gezeigt, dass der KQ-Schätzer unter „optimalen“ Bedingungen beliebig „gute“ Ergebnisse liefert. Nachgewiesen wurde die starke Konsistenz, also die P-fast sichere Konvergenz der Folge von KQ-Schätzfunktionen gegen den unbekanntes wahren Parametervektor.

Somit wurde in der Arbeit ein Regressionsmodell vorgestellt, das im Vergleich zu klassischen scharfen Regressionsmodellen eine flexiblere Modellierung zulässt. Ebenso wurde eine statistische Absicherung der vorgestellten Schätzmethode vorgenommen.

Allerdings ergeben sich auch Probleme und Schwierigkeiten, die im Folgenden erläutert werden und weiterer Untersuchungen bedürfen.

Hauptproblem bei der Anwendung von Fuzzy-Methoden ist die Interpretation der verwendeten Fuzzy-Mengen und die Ermittlung der Zugehörigkeitsfunktion. So gibt es zur Zeit noch keine allgemein anerkannte Interpretation eines Zugehörigkeitsgrads und somit ist auch die Festlegung der Zugehörigkeitsfunktion ungeklärt. Darin liegt also eine gewisse Willkür. Im Beispiel der Kreditwürdigkeitsprüfung wurde die abhängige Varia-

ble $\tilde{Y}_t(\omega)$ als unscharfe Wahrscheinlichkeit dafür interpretiert, dass Kunde t kreditwürdig ist. Problematisch ist in diesem Fall die Festlegung dieser Wahrscheinlichkeit. Lässt man beispielsweise einen Experten diese Wahrscheinlichkeit festlegen, so gibt man diesem Experten eine sehr große Freiheit und die Festlegung ist unter Umständen sehr subjektiv. Auch die Festlegung durch mehrere Experten ändert nichts an einer gewissen Willkür. Notwendig sind also allgemein anerkannte und vor allem nachvollziehbare Festlegungen der Zugehörigkeitsgrade. Das Vertrauen auf Expertenmeinungen kommt jedoch auch im scharfen Fall vor. So kann der Kreditspezialist die Krediteinstufung korrigieren, falls ihm Informationen vorliegen, die vom modellgestützten Ratingsystem nicht oder nur unzureichend berücksichtigt werden (siehe [Bundesbank3], Seite 63). Darüber hinaus liegt auch im scharfen Fall bei der Modellierung der verschiedenen Variablen eine gewisse Willkür vor. Eine allgemein anerkannte „richtige“ Modellierung wird es in den meisten Fällen nicht geben.

Eng mit diesem Problemkreis verbunden ist die Interpretation bzw. der Umgang mit dem unscharfen Ergebnis bei einer Kreditwürdigkeitsentscheidung. Gefordert ist nämlich im Endeffekt eine scharfe Entscheidung für einen Zinssatz oder ähnliches. Dazu müssen geeignete Defuzzifikationsalgorithmen, d.h. wie aus einem unscharfen Ergebnis ein scharfes Ergebnis entsteht, untersucht werden (siehe [Kahlert/Frank], Seite 89ff oder [Kruse/Meyer], Seite 173). Dies kann aber nur für den speziellen Anwendungsfall sinnvoll untersucht werden und ist deshalb nicht Thema dieser Arbeit. Eventuell kann ein sehr „unscharfes“, sehr „ungenaueres“ Ergebnis als Warnsignal dafür gedeutet werden, dass genauere Untersuchungen vorgenommen werden müssen.

Eine weitere Schwierigkeit ist, dass für das Minimierungsproblem in Kapitel 4 keine explizite Lösung angegeben werden konnte. Explizite Lösungen existieren nur in Spezialfällen. Inwieweit diese Spezialfälle für die Praxis ausreichen oder ob gute Näherungsverfahren zur Lösung des Minimierungsproblems entwickelt werden können, sollte Gegenstand weiterer Forschungen sein.

In Kapitel 5 konnten nur asymptotische Eigenschaften nachgewiesen werden. Der Nachweis von statistischen Eigenschaften bei endlichen Stichprobenumfängen, wie beispielsweise Erwartungstreue, unterblieb. Auch dies ist ein interessanter Ansatzpunkt für weitere

Forschungen. Zusätzlich zu den Ergebnissen in Kapitel 5, wäre eine Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit der Folge von KQ-Schätzfunktionen wünschenswert, wie von Krätschmer (siehe [Krätschmer2001-2], Kapitel 5.5) in seinem Modell vorgenommen. Krätschmer (siehe [Krätschmer2001-2], Kapitel 6.4) gelang es auch die Grenzverteilung seines KQ-Schätzers zu bestimmen. Dieses Ergebnis benötigt man zur Entwicklung von statistischen Tests. Deshalb wäre auch die Bestimmung der Grenzverteilung des in dieser Arbeit vorgestellten KQ-Schätzers notwendig, um somit auf Basis dieser Grenzverteilung asymptotische Tests zu entwickeln.

Anhang A

Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition A.1

Es sei (Z, τ) ein topologischer Raum. Dann heißt die durch τ erzeugte σ -Algebra $\mathcal{B}_\tau(Z)$ in Z die **Borel- σ -Algebra von (Z, τ)** . Jede Menge $B \in \mathcal{B}_\tau(Z)$ wird **Borel-Teilmenge von Z** (bzgl. τ) genannt. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 432, Definition E.1.1)

◆

Definition und Satz A.2

Die Einheitssphäre S^{k-1} bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^k sei versehen mit der Teilraumtopologie $\tau_{S^{k-1}}$ bzgl. der Standardtopologie auf \mathbb{R}^k . Mit $\mathcal{B}(S^{k-1})$ werde die Borel- σ -Algebra in S^{k-1} bezeichnet, die durch $\tau_{S^{k-1}}$ erzeugt wird (siehe Definition A.1). Weiterhin werde das Lebesgue-Borel-Maß auf \mathbb{R}^k durch $\lambda^{\mathbb{R}^k}$ und die Gamma-Funktion durch Γ gekennzeichnet. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{B}(S^{k-1}) \rightarrow \mathcal{B}_k$$

mit

$$\Phi(A) := \begin{cases} \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \odot A & : A \neq \emptyset \\ \emptyset & : A = \emptyset \end{cases}, \quad \forall A \in \mathcal{B}(S^{k-1})$$

wohldefiniert, und durch

$$\lambda^{S^{k-1}} : \mathcal{B}(S^{k-1}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \frac{k\Gamma(\frac{k}{2})}{2\pi^{\frac{k}{2}}} \lambda^{\mathbb{R}^k}(\Phi(A))$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben, das sogenannte **normierte Lebesgue-Borel-Maß** auf S^{k-1} . (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 137, Satz und Definition 3.6.5)

◆

Definition A.3

Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Hausdorff-Metrik d_H auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ sei definiert durch

$$d_H(K, L) := \max \left\{ \sup_{\underline{x} \in K} \inf_{\underline{y} \in L} \|\underline{x} - \underline{y}\|, \sup_{\underline{y} \in L} \inf_{\underline{x} \in K} \|\underline{y} - \underline{x}\| \right\},$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^k bezeichnet. Eine Abbildung $\check{Y} : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ heißt **$\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ -wertige zufällige kompakte Menge über (Ω, \mathcal{F}, P)** , wenn \check{Y} \mathcal{F} - $\mathcal{B}_{\tau_{d_H}}(\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k))$ messbar ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{B}_{\tau_{d_H}}(\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k))$ die von d_H erzeugte Borel- σ -Algebra auf $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$. Als **Verteilung** $Q_{\check{Y}}$ einer zufälligen kompakten Menge \check{Y} über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) wird das Bildmaß von P unter \check{Y} definiert. (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 159f, Definition 4.1.2)

◆

Definition A.4

Es sei \check{Y} eine $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ -wertige zufällige kompakte Menge über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Eine \mathbb{R}^k -wertige Zufallsvariable Y über (Ω, \mathcal{F}, P) heißt **messbarer Selektor von \check{Y}** , falls

$$\forall \omega \in \Omega : Y(\omega) \in \check{Y}(\omega).$$

Ist ein messbarer Selektor von \check{Y} P -integrierbar, so wird er **integrierbarer Selektor von \check{Y}** genannt. (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 164, Definition 4.1.7)

◆

Definition und Satz A.5

Es seien \check{Y} eine integrierbare beschränkte $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ -wertige zufällige kompakte Menge über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und $E^A \check{Y}$ sei die Menge, die alle Erwartungswertvektoren EY aller integrierbaren Selektoren Y von \check{Y} enthält. Dann gilt

$$E^A \check{Y} \in \mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k).$$

$E^A \check{Y}$ heißt der **Aumann-Erwartungswert** von \check{Y} . Dabei heißt eine $\mathcal{K}_{\text{co}}^+(\mathbb{R}^k)$ -wertige zufällige kompakte Menge \check{Y} über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) **integrierbar beschränkt** genau dann, wenn eine P -integrierbare reellwertige Abbildung g auf Ω existiert mit

$$\forall \omega \in \Omega : d_H(\check{Y}(\omega), \{\underline{0}\}) \leq g(\omega) .$$

(siehe [Krättschmer2001-2], Seite 165, Definition 4.1.9 und Seite 166, Satz und Definition 4.1.10)

◆

Definition A.6

Eine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ von Zufallsvariablen (deren Wertebereiche von i abhängig sein können) über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) heißt **unabhängig**, wenn die Familie der von ihnen erzeugten σ -Algebren unabhängig ist. (siehe [Bauer], Seite 48, Definition 7.1)

◆

Satz A.7 (Measurable Selection Theorem)

Es seien (Y, τ) ein polnischer Raum (siehe Anhang B, Definition B.3), (X, \mathcal{F}) ein Messraum und

$f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x, y) & \text{ ist } \mathcal{F}\text{-}\mathcal{B}\text{-messbar für alle } y \in Y , \\ y \mapsto f(x, y) & \text{ ist stetig auf } Y \text{ für alle } x \in X . \end{aligned}$$

Dann existiert eine $\mathcal{F}\text{-}\mathcal{B}_\tau^1$ -messbare Abbildung $\Psi : X \rightarrow Y$ mit

$$f(x, \Psi(x)) = \bar{f}(x, Y), \quad \forall x \in X ,$$

falls für jedes $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert mit

$$f(x, y) = \bar{f}(x, Y) := \sup\{f(x, y) \mid y \in Y\} .$$

(siehe [Pfanzagl], Theorem 6.7.22)

◆

¹ siehe Definition A.1

Satz A.8

Es seien $x_{ti} \in \mathbb{R} (t \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N})$ und $(Y_t)_t, (U_t)_t$ Folgen reellwertiger Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , sodass

$$Y_t = \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ti} + U_t \quad (t = 1, \dots, T)$$

ein LRM bezeichne mit $E U_t = 0 (t \in \mathbb{N})$, dessen Regressionsmatrix X_T vollen Spaltenrang für alle natürlichen Zahlen T ab einem $T_0 \in \mathbb{N}$ besitze. Weiterhin gelte:

(R) $\lim_{T \rightarrow \infty} d_{ii}^T = 0$, wobei d_{ii}^T das i -te Hauptdiagonalelement von $(X_T' X_T)^{-1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnet.

(S) Zu jeder Folge reeller Zahlen $(c_t)_t$ mit $\sum_{t=1}^{\infty} c_t^2 < \infty$ existiere ein $B \in \mathcal{F}$, $P B = 1$, sodass $\sum_{t=1}^{\infty} c_t U_t(\omega)$ eine konvergente Reihe für $\omega \in B$ ist.

Dann existiert ein $A \in \mathcal{F}$, $P A = 1$, sodass für jede Folge $\widehat{B}(Y_1(\omega), \dots, Y_{T_0+T}(\omega))_T$ von KQ-Schätzfunktionen für $\underline{\beta}$ folgt

$$\forall \underline{\beta} \in \mathbb{R}^n, \forall \omega \in A : \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{B}(Y_1(\omega), \dots, Y_T(\omega))_T = \underline{\beta} .$$

(siehe [Lai et al.], Theorem1 oder [Krätschmer2001-2], Seite 278, Satz 5.4.1)

◆

Satz A.9

Eine Folge $(U_t)_t$ unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen genüge den Bedingungen

$$E U_t = 0 (t \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad \sum_{t=1}^{\infty} E(U_t)^2 < \infty .$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{t=1}^{\infty} U_t$ fast sicher. (siehe [Bauer], Seite 111, Korollar 14.3)

Definition A.10

Es seien $W = \{Q_{\vartheta} \mid \vartheta \in \Theta\}$ eine parametrische Verteilungsannahme zu einer Zufallsvariable Y und $\gamma : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Die Menge aller Stichprobenrealisationen (x_1, \dots, x_n) einer Stichprobe (X_1, \dots, X_n) zu Y wird als Stichprobenraum \mathfrak{X} bezeichnet.

Eine Folge $(\delta_n)_n$ mit $\delta_n : \mathfrak{X} \rightarrow \gamma(\Theta)$ von Schätzfunktionen heißt **schwach konsistente Folge von Schätzfunktionen** für $\gamma(\vartheta)$, wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\delta_n - \gamma(\vartheta)| \geq \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \vartheta \in \Theta$$

und man schreibt

$$p\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \gamma(\vartheta), \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

(vgl. [Steinmetz2003-3], Seite 25, Definition 3.3.3 und Seite 17, dort allerdings mit Konsistenz bezeichnet). ♦

Satz A.11

Es seien q eine positive reelle Zahl, $(Y_n)_n$ eine Folge unabhängiger q -fach P -integrierbarer reellwertiger Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und $(u_n)_n$ sei eine Folge reeller Zahlen. Weiterhin existieren nichtnegative Zahlen γ, s_n ($n \in \mathbb{N}$) und $r \in [0, q]$ mit

$$E \left| \sum_{t=1}^n (Y_t - u_t) \right|^q \leq \gamma n^r \sum_{t=1}^n s_t \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} t^{r-q} s_t < \infty.$$

Dann existiert ein $A \in \mathcal{F}$, $P A = 1$ mit

$$\forall \omega \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t(\omega) - u_t) = 0.$$

(siehe [Hoffman-Jorgensen], 4.10 oder [Krätschmer2001-2], Seite 425f, Satz D.6.2) ♦

Satz A.12

Es bezeichne $\tilde{0}$ die Fuzzy-Null in \mathbb{R} , $j_{\text{coc}_2}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ die Standard-Einbettung von $F_{\text{coc}_2}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ in $L_2([0, 1] \times S^0)$ und $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow F_{\text{coc}_2}^{\text{no}}(\mathbb{R})$ eine quadratisch integrierbare Fuzzy-Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann gilt

$$\forall \langle f \rangle \in L_2([0, 1] \times S^0) : E \left(j_{\text{coc}_2}^{\text{no}}(\mathbb{R}) \circ \tilde{Y} \mid \langle f \rangle \right)_2 = \left(j_{\text{coc}_2}^{\text{no}}(\mathbb{R})(\tilde{E}^A \tilde{Y}) \mid \langle f \rangle \right)_2,$$

wobei $(\cdot \mid \cdot)_2$ das euklidische Skalarprodukt auf $L_2([0, 1] \times S^0)$ bezeichne, welches die Norm $\|\cdot\|_2$ induziert. (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 197, Satz 4.3.11) ♦

Anhang B

Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis und der Topologie

Definition B.1

Es sei (Z, d) ein metrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$, $z \in Z$ bezeichne

$$U_\varepsilon^d(z) := \{z' \in Z \mid d(z, z') < \varepsilon\}$$

den offenen Ball um z mit Radius ε bzgl. d . Die Topologie τ_d mit der Menge

$$\{U_\varepsilon^d(z) \mid \varepsilon > 0, z \in Z\}$$

als Basis heißt die durch d induzierte Topologie. (vgl. [Krätschmer2001-2], Seite 352, Definition A.2.2)



Definition B.2

Es sei $(Z_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen Z_i mit nichtleerer Indexmenge I . Zu $i \in I$ sei eine Topologie τ_i auf Z_i definiert und π_i bezeichne die Projektion des Kartesischen Produktes $\prod_{i \in I} Z_i$ auf den Faktor Z_i . Die Topologie $\tau_{\prod_{i \in I} Z_i}$ auf $\prod_{i \in I} Z_i$ mit Subbasis

$$\{\pi_i^{-1}(G_i) \mid i \in I, G_i \in \tau_i\}$$

wird die **Produkttopologie** bzgl. $(\tau_i)_{i \in I}$ genannt. $(\prod_{i \in I} Z_i, \tau_{\prod_{i \in I} Z_i})$ heißt der **topologische Produktraum** von $((Z_i, \tau_i))_{i \in I}$. Stimmen alle topologischen Räume (Z_i, τ_i) mit

einem topologischen Raum (Z, τ) überein, so wird mit $Z^I := \prod_{i \in I} Z_i$ der topologische Produktraum bezeichnet und von τ_{Z^I} als der **Produkttopologie** bzgl. τ gesprochen. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 361, Definition A.4.1 oder [Engelking], Seite 77)

◆

Definition B.3

Ein topologischer Raum (Z, τ) heißt **Polnischer Raum** genau dann, wenn er separabel und vollständig metrisierbar ist. (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 354, Definition A.2.10)

◆

Satz B.4

Seien $(H, \|\cdot\|)$ ein Hilbert-Raum mit der durch $\|\cdot\|$ induzierten Topologie $\tau_{\|\cdot\|}$ und K eine nichtleere, bzgl. $\tau_{\|\cdot\|}$ abgeschlossene, konvexe Teilmenge von H . Dann existiert zu $x \in H$ genau ein $k \in K$ mit

$$\|x - k\| = \min_{y \in K} \|x - y\|.$$

(siehe [Berberian], Theorem 42.3 oder [Krätschmer2001-2], Seite 386, Satz C.2.5)

◆

Definition und Satz B.5

Für $1 \leq p < \infty$ sei $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ die Menge aller reellwertigen, p -fach ν -integrierbaren Abbildungen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ mit $0 < \nu(\Omega) < \infty$. Durch

$$f \sim g :\iff \exists N \in \mathcal{F}, \nu(N) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N : f(\omega) = g(\omega)$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ definiert mit den Äquivalenzklassen

$$\langle f \rangle := \{g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \mid f \sim g\}$$

für $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Die Menge

$$L_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu) := \{\langle f \rangle \mid f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)\}$$

heißt der L_p -**Raum** über $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Durch

$$\langle f \rangle + \langle g \rangle := \langle f + g \rangle$$

und

$$\lambda \langle f \rangle := \langle \lambda f \rangle$$

werden eine Addition und Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ auf $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ definiert, die $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ zu einem \mathbb{R} -Vektorraum machen. Weiterhin ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_p : L_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f \rangle \mapsto \left(\int_{\Omega} |f|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}}$$

wohldefiniert und erfüllt die Eigenschaften einer Norm. Sie heißt die L_p -**Norm** auf $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ (siehe [Krätschmer2001-2], Seite 390, Satz und Definition C.4.6)

◆

Satz B.6

$(L_2(\Omega, \mathcal{F}, \nu), \|\cdot\|_2)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(\langle f \rangle | \langle g \rangle)_2 := \int_{\Omega} fg d\nu ,$$

welches $\|\cdot\|_2$ induziert. (siehe [Berberian], Seite 164 oder [Krätschmer2001-2], Seite 391, Satz C.4.9)

◆

Literaturverzeichnis

- [Altrock] ALTROCK C.V., *Fuzzy-Logic, Band 1 Technologie*, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1995.
- [Aumann] AUMANN R.J., *Integrals of Set-Valued Functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 12, 1965, Seite 1-12.
- [Bagus] BAGUS T., *Wissensbasierte Bonitätsanalyse im Firmenkundengeschäft der Kreditinstitute*, Verlag Peter Lang GmbH, Frankfurt am Main, 1992.
- [Bauer] BAUER H., *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 4. Auflage, 1991.
- [Berberian] BERBERIAN S.K., *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer, New York et al., 1974.
- [Biewer] BIEWER B., *Fuzzy-Methoden*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [Bundesbank1] OHNE VERFASSEN, *Die neue Baseler Eigenkapitalvereinbarung (Basel II)*, Deutsche Bundesbank Monatsbericht April 2001, Seite 15-44, <http://www.bundesbank.de> (21.01.2004).
- [Bundesbank2] OHNE VERFASSEN, *Neue Mindestanforderung an das Kreditgeschäft*, Deutsche Bundesbank Monatsbericht Januar 2003, Seite 45-58, <http://www.bundesbank.de> (21.01.2004).

- [Bundesbank3] OHNE VERFASSER, *Validierungsansätze für interne Ratingsysteme*, Deutsche Bundesbank Monatsbericht September 2003, Seite 61-74, <http://www.bundesbank.de> (21.01.2004).
- [Cantor] CANTOR G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Olms, Hildesheim, 1962.
- [Cramer] CRAMER J.S., *The Logit Model: An Introduction For Economists*, Edward Arnold, London, New York, 1991 .
- [Diamond] DIAMOND P., *Least Squares And Maximum Likelihood Regression For Fuzzy Linear Models*, in: J. Kacprzyk, M. Medrizzi (eds.), *Fuzzy Regression Analysis*, Omnitech, Warsaw and Physica-Verlag, Heidelberg, 1992, Seite 137-151.
- [Diamond/Kloeden] DIAMOND P., KLOEDEN P., *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*, World Scientific, Singapore et al., 1994.
- [Dubois/Prade] DUBOIS D., PRADE H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York et al., 1980.
- [Engelking] ENGELKING R., *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.
- [Fahrmeir] FAHRMEIER L., HAMERLE A., (EDS.), *Multivariate statistische Verfahren*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1984.
- [Fréchet] FRÉCHET M., *Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié*, Annales de L'Institut Henri Poincaré, Volume X, Paris, 1984, Seite 215-310.
- [Friedmann et al.] FRIEDMANN M., MING M., KANDEL A., *Fuzzy linear systems*, *Fuzzy Sets and Systems*, 96, 1998, Seite 201-209.
- [Höhle] HÖHLE U., *Maße auf unscharfen Mengen*, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 36, 1976, Seite 179-188.

- [Hoffman-Jorgensen] HOFFMANN-JORGENSEN J., *Probability With A View Towards Statistics Vol. I*, Chapman and Hall, New York, London, 1994.
- [Hübler] HÜBLER O., *Ökonometrie*, Gustav Fischer Verlag, Stuttgart, New York, 1989.
- [IWK-Studie] GROMER S., EVERLING O., *Rating als Herausforderung für Mittelstand und Banken, Basel II und seine Auswirkungen*, IWK-Studie 02 / 2001, München, 2001.
- [Judge et al.] JUDGE G.G., CARTER HILL R., GRIFFITHS W.E., LÜTKEPOHL H., LEE T., *Introduction to the theory and practice of econometrics*, Second edition, John Wiley & Sons, New York et al., 1988.
- [Kahlert/Frank] KAHLERT J., FRANK H., *Fuzzy Logik und Fuzzy Control*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1994.
- [Körner 1997-1] KÖRNER R., *Linear Models with Random Fuzzy Variables*, Dissertation an der Fakultät Mathematik und Informatik der Technischen Universität Bergakademie Freiberg, 1997.
- [Körner 1997-2] KÖRNER R., *On the variance of fuzzy random variables*, Fuzzy Sets and Systems, 92, 1997, Seite 83-93.
- [Körner/Näther] KÖRNER R., NÄTHER W., *Linear regression with random fuzzy variables: extended classical estimates, best linear estimates, least squares estimates*, Information Sciences 109, 1998, Seite 95-118.
- [Krätschmer2001-1] KRÄTSCHMER V., *A unified approach to fuzzy-random variables*, Fuzzy Sets and Systems, 123, 2001, Seite 1-9.
- [Krätschmer2001-2] KRÄTSCHMER V., *Induktive Statistik auf Basis unscharfer Meßkonzepte am Beispiel linearer Regressionsmodelle*, Habilitationsschrift an der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2001.

- [Krätschmer2002-1] KRÄTSCHMER V., *Limit theorems for fuzzy-random variables*, Fuzzy Sets and Systems, 126, 2002, Seite 253-263.
- [Krätschmer2002-2] KRÄTSCHMER V., *Some complete metrics on spaces of fuzzy subsets*, Fuzzy Sets and Systems, 130, 2002, Seite 357-365.
- [Krätschmer2003-1] KRÄTSCHMER V., *Probability theory in fuzzy sample spaces*, erscheint in Metrika.
- [Krätschmer2003-2] KRÄTSCHMER V., *Least Squares estimation in linear regression models with vague concepts*, eingereicht bei Fuzzy Sets and Systems.
- [Krätschmer2003-3] KRÄTSCHMER V., *Integrals of random fuzzy sets*, eingereicht bei TEST.
- [Kruse/Meyer] KRUSE R., MEYER K.D., *Statistics with Vague Data*, Reidel, Dordrecht et al., 1987.
- [Kwakernaak] KWAKERNAAK H., *Fuzzy Random Variables I*, Information Sciences, Volume 15, 1978, Seite 1-29.
- [Lai et al.] LAI T.L., ROBBINS H., WEI C.Z., *Strong Consistency of Least Squares Estimates in Multiple Regression II*, Journal of Multivariate Analysis 9, Seite 343-361.
- [Mathieu] MATHIEU M., *Funktionalanalysis*, Spektrum, Heidelberg, Berlin, 1998.
- [Näther] NÄTHER W., *Linear statistical inference for Random Fuzzy Data*, Statistics 29, 1997, Seite 221-240.
- [Nietsch et al.] NIETSCH T., RAUTENSTRAUCH C., REHFELDT M., ROSEMAN M., TUROWSKI K., *Ansätze für die Verbesserung von PPS-Systemen durch Fuzzy-Logik*, Arbeitsberichte des Instituts für Wirtschaftsinformatik der Westfälischen Wilhelms-Universität

- Münster, Arbeitsbericht Nr. 23, 1993, <http://www.wi.uni-muenster.de/inst/arbber/> (21.01.2004).
- [Petry] PETRY N., *Lineare Fuzzy-Regression*, Dissertation an der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1998.
- [Pfanzagl] PFANZAGL J., *Parametric Statistical Theory*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994.
- [Puri/Ralescu] PURI M.L., RALESCU D., *Fuzzy Random Variables*, Journal of Mathematical Analysis Applications, Volume 114, 1986, Seite 409-422.
- [Rockafellar/Wets] ROCKAFELLAR R.T., WETS J.B., *Varititional Analysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [Rommelfanger1993] ROMMELFANGER H., *Fuzzy-Logik basierte Verarbeitung von Expertenregeln*, OR Spektrum, Band 15, Heft 1, 1993, Seite 31-42.
- [Rommelfanger1994] ROMMELFANGER H., *Fuzzy-Decision Support-Systeme; Entscheiden bei Unschärfe*, Springer, Berlin et al., 1994.
- [Savic/Pedrycz] SAVIC D.A., PEDRYCZ W., *Fuzzy linear regression models: construction and evaluation*, in: J. Kacprzyk, M. Medrizzi (eds.), *Fuzzy Regression Analysis*, Omnitech, Warsaw and Physica-Verlag, Heidelberg, 1992, Seite 91-100.
- [Schöpfung] SCHÖNFELD P., *Methoden der Ökonometrie Band 1 und Band 2*, Verlag Franz Vahlen GmbH, Berlin und Frankfurt a.M., 1969.
- [Schneeweiß/Mittag] SCHNEEWEISS H., MITTAG H.J., *Lineare Modelle mit fehlerbehafteten Daten*, Physica-Verlag, Heidelberg, Wien, 1986.
- [Steinmetz2002] STEINMETZ V., *Kompaktskript zu den Vorlesungen Grundzüge der Statistik A und B*, Universität des Saarlandes, Saarbrücken,

- WS 2002/2003, <http://www.uni-saarland.de/fak1/fr12/steinmetz/> (21.01.2004).
- [Steinmetz2003-1] STEINMETZ V., *Kompaktskript zur Vorlesung Fuzzy-Methoden*, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, WS 2003/2004, <http://www.uni-saarland.de/fak1/fr12/steinmetz/> (21.01.2004).
- [Steinmetz2003-2] STEINMETZ V., *Kompaktskript zur Vorlesung Statistische Analyseverfahren*, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, SS 2003, <http://www.uni-saarland.de/fak1/fr12/steinmetz/> (21.01.2004).
- [Steinmetz2003-3] STEINMETZ V., *Kompaktskript zur Vorlesung Schließende Statistik*, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, WS 2003/2004, <http://www.uni-saarland.de/fak1/fr12/steinmetz/> (21.01.2004).
- [Tanaka et al.] TANAKA H., UEGIMA S., ASAI K., *Linear regression analysis with fuzzy model*, IEEE Trans. Systems Man Cybernet 12, 1982, Seite 903-907.
- [Yager] YAGER R.R., *A note on Probabilities of Fuzzy Events*, Information Sciences 18, 1979, Seite 113-129.
- [Viertl] VIERTL R., *Statistical Methods for Non-Precise DATA*, CRC Press, New York et al., 1996.
- [Wolf] WOLF J., *Basel II, Kreditrating als Chance*, Metropolitan Verlag, Berlin, Regensburg, 2003.
- [Zadeh] ZADEH L.A., *Fuzzy Sets*, Information and Control, Volume 8, 1965, Seite 338-353.
- [Zellner/Lee] ZELLNER A., LEE T.H., *Joint estimation of relationships involving discrete random variables*, Econometrica 33, 1965, Seite 382-394.