

Schnelle Finite-Elemente-Verfahren für verschiedene Klassen magneto-quasistatischer Probleme

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Ingenieurwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät II
- Physik und Mechatronik -
der Universität des Saarlandes

von

Daniel Klis

Saarbrücken

2015

Tag des Kolloquiums: 29.02.2016

Dekan: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Georg Frey

Mitglieder des
Prüfungsausschusses: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Michael Möller
Univ.-Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Rolf Pelster
Prof. Dr. rer. nat. Sebastian Schöps

Akademischer Mitarbeiter: Dr. rer. nat. Andreas Leschhorn

Danksagungen

An erster Stelle bedanke ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger für die interessante Themenstellung und die Übernahme der Betreuung. Seine zahlreichen fachlichen Anregungen, seine ansteckende Begeisterung für die elektromagnetische Feldsimulation und der Freiraum bei der Bearbeitung des Themas waren für mich nie selbstverständlich. Darüber hinaus gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. rer. nat. Rolf Pelster sowie Herrn Prof. Dr. rer. nat. Sebastian Schöps für das Interesse an meiner Arbeit und die Begutachtung.

Außerdem möchte ich mich bei allen aktuellen und ehemaligen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Theoretische Elektrotechnik für ihre außerordentliche Hilfsbereitschaft in fachlichen Dingen und das überaus angenehme Arbeitsklima bedanken. Besonders hervorzuheben sind PD Dr.-Ing. habil. Ortwin Farle und Dr.-Ing. Martin Jochum, ohne deren Unterstützung die Arbeit nicht in dieser Form zustande gekommen wäre.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern Ralf und Iris Klis und meiner Schwester Laura Klis, die mich in meinem Promotionsvorhaben stets ermutigt und unterstützt haben. Schließlich möchte ich meiner Freundin Jasmin Mayer von ganzem Herzen danken; sie hat mich nicht nur moralisch unterstützt, sondern auch das sprachliche Lektorat der Arbeit übernommen.

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden effiziente Verfahren zur Finite-Elemente-Simulation parametrischer Wirbelstromprobleme vorgestellt. Grundlegend für die präsentierten Algorithmen ist die projektionsbasierte Modellordnungsreduktion.

Als Analyseverfahren wird die $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung gewählt. Eine Kombination mit Homogenisierungstechniken ermöglicht die Modellierung von Litzendraht durch äquivalente Materialien. Diese werden auf mikroskopischer Ebene errechnet und sind vom makroskopischen Problem entkoppelt.

Zur Erfüllung von Synthesaufgaben wie der Berechnung von Antwortflächen dienen parametrische Verfahren. Können die Geometrieparameter über topologieerhaltende Netzverzerrung abgebildet werden, wird der Einsatz von Matrixinterpolation zur Rekonstruktion einer affinen Parametrierung und Verwendung einer parameterabhängigen Projektionsbasis vorgeschlagen. Zur Modellierung von Starrkörperbewegungen wird ein reduziertes Modell einer gekoppelten Finite-Elemente-Randelement-Formulierung hergeleitet.

Die Arbeit wird abgerundet durch zwei Ansätze nichtlinearer Ordnungsreduktion, welche in der Lage sind, Sättigungseffekte in magnetischen Materialien zu berücksichtigen. Während ein Ansatz auf Kernel-Methoden aus dem Bereich des statistischen Lernens basiert, arbeitet die zweite Methode mit algebraischen Umformungen, um Reduktionstechniken für affine Systeme nutzen zu können.

Abstract

The subject of this thesis is the efficient finite-element simulation of parametric eddy current problems. To this aim, projection-based model-order reduction methods are employed.

The $\mathbf{AV}\text{-}\mathbf{A}$ formulation is chosen as analysis tool. A combination with homogenization techniques allows for the modeling of litz wire by means of equivalent materials. These are calculated on a microscopic level and are decoupled from the macroscopic problem.

Synthesis tasks are tackled by parametric methods. If the geometrical parameters can be treated with topology-preserving mesh morphing algorithms, it is suggested to employ matrix interpolation to reconstruct an affine parametrization, and to use a parameter-dependent projection basis. To deal with rigid body movements, a reduced-order model of a coupled finite-element boundary-element formulation is presented.

The thesis is completed by two approaches to nonlinear order reduction that are capable of modeling saturation effects in magnetic materials. The first approach draws from kernel methods which stem from the area of statistical learning. In contrast, the second approach uses algebraic transformations to rewrite the model in a form suitable for reduction techniques for affine systems.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Maxwell-Gleichungen und quasistationäre Näherung	5
2.2	Die Methode der finiten Elemente	7
2.2.1	Skalare Ansatzfunktionen	8
2.2.2	Rotationskonforme Ansatzfunktionen	8
2.2.3	Divergenzkonforme Ansatzfunktionen	9
2.3	Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Modelle	10
2.3.1	Einpunktverfahren	12
2.3.2	Mehrpunktverfahren	15
2.3.3	Effizienz der reduzierten Modelle	17
3	Numerische Berechnung quasistationärer Magnetfelder	19
3.1	Dreidimensionale Wirbelstromprobleme	20
3.1.1	Randwertproblem und schwache Form	21
3.1.2	Finite-Elemente-Formulierung	24
3.2	Modellierung aktiver Leiterstrukturen	28
3.2.1	Stromanregung für Strukturen ohne Wirbelströme	28

3.2.2	Spannungsanregung für Strukturen ohne Wirbelströme	33
3.2.3	Stromanregung für Strukturen mit Wirbelströmen	34
3.2.4	Spannungsanregung für Strukturen mit Wirbelströmen	38
3.2.5	Impedanzformulierung	38
3.3	Schnelle Frequenzgangberechnungen quasistationärer Magnetfelder .	39
3.4	Numerische Ergebnisse	41
3.5	Fazit	44
4	Numerische Charakterisierung von Litzendrähten mittels Homogenisierung	45
4.1	Zweidimensionale planare Probleme	47
4.2	Das Zellenproblem	48
4.2.1	Schwache Form und FE-Gleichungssystem	51
4.2.2	Periodische Randbedingungen	52
4.3	Extraktion der makroskopischen Materialparameter	52
4.3.1	Proximityeffekt	53
4.3.2	Skineffekt	55
4.4	Das makroskopische FE-Modell	55
4.5	Schnelle Frequenzgangberechnungen für Spulen mit Litzendrähten .	57
4.6	Numerische Ergebnisse	60
4.7	Fazit	66
5	Modellordnungsreduktion für Wirbelstromprobleme variabler Geometrie	67
5.1	Rekonstruktion einer affinen Parametrierung	68
5.2	Ordnungsreduktion mit parameterabhängigen Unterräumen	70
5.3	Anwendung auf Wirbelstromprobleme	71
5.4	Numerische Ergebnisse	72
5.5	Fazit	78

6	Ordnungsreduktion für Modelle mit Starrkörperbewegungen	79
6.1	Kopplung der FE-Methode und der Randelementmethode	81
6.1.1	FE-Formulierung	86
6.1.2	Erstellung der BE-Matrizen	87
6.1.3	Eichung des FE-BE-Systems	94
6.2	Parametrisches FE-BE-Modell	97
6.3	Rahmenwerk zur Rekonstruktion einer affinen Parametrierung	99
6.3.1	Methode der empirischen Interpolation	100
6.3.2	Anwendung auf parametrische FE-BE-Systeme	102
6.4	Parametrische Ordnungsreduktion	105
6.5	Numerische Ergebnisse	106
6.6	Fazit	111
7	Schnelle Berechnung nichtlinearer Wirbelstromprobleme	115
7.1	Nichtlinearitäten bei Wirbelstromproblemen	117
7.1.1	Finite-Elemente-Formulierung	118
7.2	Proper Orthogonal Decomposition	119
7.3	Ordnungsreduktion unter Verwendung von Kernel-Methoden	120
7.3.1	ν -Support-Vector-Regression	120
7.3.2	Anwendung auf Wirbelstromprobleme	122
7.3.3	Numerische Ergebnisse	124
7.4	Ordnungsreduktion unter Verwendung quadratisch-bilinearer Systeme	131
7.4.1	Eine QBDA-Formulierung für das Wirbelstromproblem	131
7.4.2	Ein adaptives Verfahren	134
7.4.3	Bestimmung der Projektionsmatrix	135

7.4.4	Effiziente Residuenberechnung	136
7.4.5	Implementierung von Tensorprodukten	137
7.4.6	Numerische Ergebnisse	138
7.5	Fazit	141
8	Zusammenfassung	143
	Abbildungsverzeichnis	147
	Tabellenverzeichnis	151
	Eigene Publikationen	153
	Literaturverzeichnis	155

Kapitel 1

Einleitung

Numerische Simulationsverfahren auf der Ebene der elektromagnetischen Felder sind ein etablierter Bestandteil des Entwicklungsprozesses elektronischer Bauteile, weil kaum ein modernes Bauelement aufgrund seiner Komplexität noch eine analytische Beschreibung zulässt. Die Simulationen dienen dazu, zeit- und kostenintensive Versuche zu minimieren, und unterstützen Entwickler sowohl bei Analyse- als auch bei Syntheseaufgaben. Zur Charakterisierung induktiv dominierter Bauteile bei niedrigen Frequenzen ist die quasistationäre Näherung der Maxwellgleichungen, auch Wirbelstromformulierung genannt, eine zweckmäßige Vereinfachung. Sie dient zur Modellierung von elektrischen Maschinen, Transformatoren und Spulen, die in Schaltnetzteilen, induktiven Kochfeldern oder bei der kontaktlosen Energieübertragung zum Einsatz kommen.

Die computergestützten Simulationsverfahren lassen sich nach Art der zugrunde liegenden Gleichungen in Differenzialgleichungs- und Integralgleichungsverfahren einteilen. Letztere beruhen auf einer Diskretisierung der Quellen der elektromagnetischen Felder und deren Fundamentallösungen [BTW84], [CK13]. Oftmals müssen daher nur Oberflächen diskretisiert werden; die Felder können über die Fundamentallösungen im gesamten Raum rekonstruiert werden. Die Behandlung inhomogener oder nichtlinearer Materialien ist allerdings problematisch. Integralgleichungsverfahren führen auf voll besetzte, lineare Gleichungssysteme, weshalb die Systemmatrizen für Modelle mit einer hohen Anzahl an Unbekannten nicht explizit gebildet werden können. Der Einsatz spezieller Verfahren, welche die Wirkung von Matrix-Vektor-Produkten effizient realisieren, ist in diesem Fall unumgänglich. Hier sind die *Fast Multipole Method* [Rok85], die *Adaptive Cross Approximation* [Beb00] und hierarchische Matrizen [Hac99] zu nennen.

Differenzialgleichungsverfahren diskretisieren die elektromagnetischen Felder im Volumen und können daher prinzipbedingt nur auf beschränkten Gebieten arbeiten. Folglich muss das asymptotische Verhalten der Felder näherungsweise berücksichtigt werden über Ansätze wie absorbierende oder asymptotische Randbedingungen

[CK97]. Wichtige Vertreter der Differenzialgleichungsverfahren sind die Methode der finiten Differenzen [Yee66], [TH05], die finite Integrationstechnik [Wei96] und die Methode der finiten Elemente (FE) [SF08]. Die FE-Methode sticht dabei durch ihre Vielseitigkeit hervor: Wegen der Verwendung unstrukturierter Netze können komplizierte Geometrien sowie inhomogene und nichtlineare Materialien leicht einbezogen werden; zusätzlich sind Verfahren höherer Ordnung einfach zu konstruieren. Im Gegensatz zu Integralgleichungsverfahren ergeben sich hier schwach besetzte Gleichungssysteme. Um die Vorteile von Integral- sowie Differenzialgleichungsverfahren zu nutzen, können diese miteinander gekoppelt werden, beispielsweise durch die *finite-element boundary-element method* (dt. FE-Randelementmethode, FE-BE-Methode) [BTW84].

Induktive Bauelemente verwenden zur Senkung der Wirbelstromverluste häufig Litzendraht, der aus vielen gegeneinander isolierten und miteinander verseilten Einzeldrähten besteht. Aufgrund dieser komplexen Mikrostruktur ist dessen Berücksichtigung in Computermodellen nicht oder nur unter hohem Aufwand möglich. Zur Abhilfe wurden Homogenisierungsverfahren vorgeschlagen mit dem Ziel, die Drahtstruktur durch einen homogenen Körper mit künstlichen Materialeigenschaften zu ersetzen, welcher auf makroskopischer Ebene näherungsweise das gleiche Verhalten wie die tatsächliche Mikrostruktur zeigt [Bos94], [Sul01], [GD05].

Die in dieser Arbeit auftretenden Probleme werden aus den genannten Gründen mit der FE- oder der FE-BE-Methode behandelt. Die resultierenden Gleichungssysteme besitzen oftmals einige Hunderttausend bis zu mehreren Millionen an Unbekannten. Zu ihrer Lösung stehen leistungsfähige direkte [SG11] und iterative Verfahren [HFDE03], [SPLL12] zur Verfügung. Damit können die Modelle für eine fixe Geometrie auf einem modernen Desktoprechner in vertretbarem Zeitaufwand ausgewertet werden. Im Rahmen einer Produktentwicklung muss allerdings üblicherweise eine Reihe von Designparametern oder verschiedenen geometrischen Konfigurationen berücksichtigt werden. Bei der Charakterisierung der entsprechenden parametrischen Modelle über einen weiten Parameterbereich oder bei Synthesaufgaben wie Designoptimierung fallen eine Vielzahl an Modellauswertungen an, was in einem übermäßig hohen Rechenaufwand resultiert. Eine vielversprechende Alternative bieten Methoden der Modellordnungsreduktion (MOR). Ihr Ziel ist es, die Übertragungsfunktion der zugrunde liegenden Modelle in einem gewissen Gültigkeitsbereich durch ein schnell zu lösendes reduziertes Modell (ROM) zu ersetzen. Bei der projektionsbasierten MOR geschieht dies durch Projektion der Ausgangsgleichungen in einen geeigneten niedrigdimensionalen Unterraum. Dadurch kann nicht nur die Lösung des Originalmodells rekonstruiert werden, sondern es können auch oftmals wichtige Systemeigenschaften bewahrt werden [FBDE11].

Einen Spezialfall parametrischer Systeme stellt die affine Parametrierung dar, wie sie beispielsweise bei FE-Modellen von Bauteilen mit variabler Betriebsfrequenz oder variablen Materialeigenschaften vorkommt [BSFDE14]. Wichtige Vertreter der projektionsbasierten MOR für diese Klasse von Systemen sind Einpunktverfahren [SLL03],

[FDE10], Mehrpunktverfahren [SLL02], [dlRRM09] und auf Singulärwertzerlegung (SVD) basierende Verfahren [KV02], [PS05]. Bei den genannten Publikationen handelt es sich um Gesamtbereichsverfahren, welche einen einzigen, für alle Parameterwerte gültigen Unterraum erzeugen. Sie sind sehr effizient für eine geringe Anzahl von Parametern, führen aber für eine große Anzahl an Parametern auf verhältnismäßig hochdimensionale und dementsprechend ineffiziente reduzierte Modelle. Daher wurden für Systeme mit vielen Parametern Teilbereichsverfahren vorgeschlagen [AF08], [LE09], [B5], die bei vergleichbarer Genauigkeit eine deutlich geringere Dimension besitzen.

Auf nicht-affine parametrische Systeme, wie sie beispielsweise bei der Simulation von Bauteilen mit veränderlicher Geometrie vorkommen, ist projektionsbasierte MOR nicht ohne Weiteres effizient anwendbar. Tatsächlich ist der erste Schritt eines MOR-Prozesses für nicht-affine Systeme üblicherweise, durch Interpolation oder Approximation das Problem auf die Ordnungsreduktion affiner Modelle zurückzuführen. Als Beispiel ist [DEF09] zu nennen, worin geometrische Parameter über topologieerhaltende FE-Netzverzerrung und Interpolation der resultierenden Matrizen einbezogen werden. Auch nichtlineare Systeme weisen im Allgemeinen keine affine Struktur auf. Etablierte nichtlineare MOR-Verfahren erzeugen ein affines Modell durch Approximation [RW03], [PAOS03], [GMNP07] oder Umformulierung der Gleichungen [Gu09].

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind auf MOR beruhende effiziente Verfahren für verschiedene Klassen parametrischer Wirbelstromprobleme. Als notwendige Grundlagen führt Kapitel 2 die quasistationären Maxwellgleichungen ein und gibt einen Überblick über die FE-Methode und MOR-Verfahren für affine Systeme. Bis einschließlich Kapitel 6 werden Modelle mit mit linearen, zeitinvarianten Materialeigenschaften betrachtet, weshalb sich eine Beschreibung im Frequenzbereich anbietet. In Kapitel 3 wird eine FE-Wirbelstrom-Formulierung vorgestellt, welche in dreidimensionalen Gebieten stromführende Strukturen mit oder ohne Berücksichtigung von Wirbelströmen modellieren kann. Als Anregung kann sowohl eine Klemmenspannung als auch ein Klemmenstrom vorgegeben werden. Die Modelle beruhen auf einer fixen geometrischen Konfiguration und sind in der Frequenz polynomiell parametrisiert. Zur effizienten Auswertung wird ein Frequenzbereichsverfahren basierend auf bekannten MOR-Methoden angegeben.

In Kapitel 4 wird ein neues Homogenisierungsverfahren zur Berücksichtigung von Litzendrähten in FE-Modellen vorgestellt, um in einem weiteren Schritt ein schnelles Frequenzbereichsverfahren für Bauteile mit Litzendrähten herzuleiten. Es basiert auf den MOR-Methoden aus Kapitel 3.

Kapitel 5 präsentiert ein parametrisches MOR-Verfahren für Modelle mit affinen und nicht-affinen Parametern. Als Erweiterung des Teilbereichsverfahrens aus [Bur14] und [B5] können neben nicht-affinen Systemmatrizen auch nicht-affine Eingangs- und Ausgangsfunktionale behandelt werden. Geometrische Parameter werden dabei über topologieerhaltende Netzverzerrung abgebildet. Als konkrete Anwendung wird die Simulation von Spulen mit Litzendrähten und variablem Aufbau vorgestellt.

Werden Modelle mit Starrkörperbewegungen als Parametern betrachtet, ist Netzverzerrung nur bedingt zur Modellierung geeignet. Daher wird in Kapitel 6 ein FE-BE-Modell hergeleitet, das ebenfalls die Homogenisierung aus Kapitel 4 beinhaltet und beliebige Starrkörperbewegungen zulässt. Eine neue Eichung ermöglicht die direkte Faktorisierung der symmetrischen Kopplung nach [Ost02]. Um ein effizientes MOR-Verfahren zu konstruieren, wird im Gegensatz zu bisherigen FE-BE-MOR-Kombinationen [ARFL08] die nicht-affine Parametrierung der BE-Matrizen mithilfe der Methode der empirischen Interpolation (EI) affin genähert [BMNP04], wodurch sich unter anderem Vorteile bei der Fehlerquantifizierung und der Effizienz ergeben. Alle vorgestellten Algorithmen wurden in Computerprogrammen umgesetzt und mit numerischen Beispielen aus dem Bereich der kontaktlosen Energieübertragung hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit untersucht.

Kapitel 7 behandelt nichtlineare Wirbelstromprobleme mit Sättigungseffekten im Zeitbereich. Aufbauend auf einer geeigneten FE-Formulierung werden zwei Ansätze zur nichtlinearen MOR gegeben. Das erste Verfahren beruht auf Kernel-Methoden zur Approximation der Nichtlinearität [PAOS03], während das zweite Verfahren die Gleichungen zu einem quadratisch-bilinearen System umformt [Gu09], sodass ohne Approximationsschritt ein effizientes ROM erstellt werden kann. Die Qualität beider Ansätze wird anhand numerischer Beispiele bewertet.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden verschiedene mathematische Grundlagen vorgestellt, welche zur Konstruktion der numerischen Methoden dieser Arbeit benötigt werden. Abschnitt 2.1 führt die quasistationären Maxwell-Gleichungen als die den Diskretisierungsverfahren zugrunde liegenden Differenzialgleichungen ein. Abschnitt 2.2 legt die Grundzüge der FE-Methode dar. Im Speziellen werden Ansatzfunktionen zur Diskretisierung verschiedener Klassen von Vektorfeldern eingeführt. Schließlich werden in Abschnitt 2.3 zwei Verfahren zur Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Systeme präsentiert. Diese dienen als Grundbaustein zur Konstruktion schneller FE-Löser, welche den Kern der Arbeit bilden.

2.1 Maxwell-Gleichungen und quasistationäre Näherung

Der klassische Elektromagnetismus wird beschrieben durch die Maxwell-Gleichungen [Str10, Kapitel 1]. Sie lauten

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + \mathcal{J}, \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}, \quad (2.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \rho, \quad (2.1c)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0. \quad (2.1d)$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{H}$ die magnetisch Erregung, $\mathcal{D}$ die elektrische Flussdichte, $\mathcal{J}$ die elektrische Stromdichte, $\mathcal{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathcal{B}$ die magnetische Flussdichte und ρ die Raumladungsdichte. Die Felder werden zueinander in Beziehung gesetzt

durch Konstitutivgleichungen, welche die makroskopischen Eigenschaften von Materie modellieren. Es gilt

$$\mathcal{B} = \underline{\underline{\mu}} \mathcal{H} = \mu_0 \underline{\underline{\mu}}_r \mathcal{H}, \quad (2.2a)$$

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\epsilon}} \mathcal{E} = \epsilon_0 \underline{\underline{\epsilon}}_r \mathcal{E}, \quad (2.2b)$$

$$\mathcal{J} = \underline{\underline{\sigma}} \mathcal{E}. \quad (2.2c)$$

Darin ist $\underline{\underline{\mu}}$ der magnetische Permeabilitätstensor, welcher als Produkt der Vakuumpermeabilität μ_0 und des relativen magnetischen Permeabilitätstensors $\underline{\underline{\mu}}_r$ geschrieben werden kann. In gleicher Weise kann der elektrische Permittivitätstensor $\underline{\underline{\epsilon}}$ als Produkt der Vakuumpermittivität ϵ_0 und des relativen elektrischen Permittivitätstensors $\underline{\underline{\epsilon}}_r$ wiedergegeben werden. Die Variable $\underline{\underline{\sigma}}$ steht für den elektrischen Leitfähigkeitstensor. Gleichung (2.2a) wird oft auch mit Reluktivitäten formuliert: Die Größe $\underline{\underline{\nu}} = \underline{\underline{\mu}}^{-1}$ bezeichnet den Reluktivitätstensor, $\nu_0 = \mu_0^{-1}$ die Vakuumreluktivität und $\underline{\underline{\nu}}_r = \underline{\underline{\mu}}_r^{-1}$ den relativen Reluktivitätstensor.

In dieser Arbeit wird ein wichtiger Spezialfall der Maxwell-Gleichungen behandelt, die sogenannten Wirbelstromprobleme oder quasistationären Magnetfeldprobleme [RV10, Kapitel 1]. Diese beruhen auf zwei Annahmen:

1. Die elektromagnetische Wellenlänge λ ist viel größer als die charakteristische Länge L der betrachteten Strukturen,

$$\lambda \gg L, \quad (2.3)$$

sodass keine Wellenphänomene auftreten.

2. Verschiebungsströme sind vernachlässigbar gegenüber Leitungsströmen,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} \right| \ll |\mathcal{J}|, \quad (2.4)$$

sodass die elektrische Flussdichte in (2.1a) vernachlässigt werden kann.

Als Konsequenz ist (2.1c) von den restlichen Gleichungen entkoppelt; es gelten die quasistationären Maxwell-Gleichungen

$$\text{rot } \mathcal{H} = \mathcal{J}, \quad (2.5a)$$

$$\text{rot } \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}, \quad (2.5b)$$

$$\text{div } \mathcal{B} = 0. \quad (2.5c)$$

Zusätzlich werden in der vorliegenden Arbeit nur reziproke magnetische Materialien und hinsichtlich der elektrischen Leitfähigkeit isotrope Materialien betrachtet. In diesem Fall ist der Permeabilitätstensor eine symmetrisch positiv definite Größe und die

Differenzialdarstellung des ohmschen Gesetzes (2.2c) kann mit einer skalarwertigen Leitfähigkeit formuliert werden. Die Konstitutivgleichungen für das Wirbelstromproblem lauten

$$\mathbf{B} = \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} \mathbf{H} = \mu_0 \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}_r}} \mathbf{H} \quad \text{mit } \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^T \text{ und } \mathbf{x}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{mit } \sigma \geq 0. \quad (2.6b)$$

Weiterhin folgt durch Bilden der Divergenz von (2.9a) die quasistationäre Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (2.7)$$

Diese kann physikalisch so interpretiert werden, dass keine Raumladungen akkumuliert werden können, sondern Ströme immer quellenfrei sind.

Außer in Kapitel 7 werden in dieser Arbeit lineare, zeitinvariante Materialien vorausgesetzt. Damit können die Maxwell-Gleichungen in den Frequenzbereich transformiert werden, wodurch Zeitableitungen nach

$$\frac{\partial}{\partial t} \circ \bullet j\omega \quad (2.8)$$

mit der imaginären Einheit $j^2 = -1$ und der Kreisfrequenz ω algebraisiert werden. Aus (2.5) folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.9a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad (2.9b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.9c)$$

mit den Phasoren für die magnetische Erregung, die elektrische Stromdichte, die elektrische Feldstärke und die magnetische Flussdichte $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$. Die Konstitutivgleichungen sind nach wie vor durch (2.6) gegeben. Ferner gilt (2.7) mit dem Phasor $\mathbf{J}$.

2.2 Die Methode der finiten Elemente

Die FE-Methode ist ein Verfahren zur numerischen Lösung partieller Differenzialgleichungen (DGL) [SF08], [Mon08]. Knapp lautet das prinzipielle Vorgehen:

- Bestimmung einer schwachen Form der zugrunde liegenden DGL.
- Definition eines FE-Netzes, das die Geometrie des Feldgebietes Ω mittels einfacher geometrischer Elemente, der finiten Elemente, approximiert.

- Wahl eines endlich-dimensionalen Funktionenraums für die gesuchte Größe $\mathbf{x}$, wodurch die schwache Form der DGL als Gleichungssystem darstellbar wird. Die Wahl erfolgt über die Festlegung von FE-Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_i$ als Basis, sodass

$$\mathbf{x} = \sum_i [\mathbf{x}]_i \mathbf{w}_i \quad (2.10)$$

mit dem FE-Lösungsvektor $\mathbf{x}$. Die Schreibweise $[\cdot]_i$ bezeichnet den entsprechenden Eintrag eines Vektors und $[\cdot]_{ij}$ einen Matrixeintrag. Konkret sind die Ansatzfunktionen auf finiten Elementen definierte stückweise Polynome, sodass sich dünne besetzte Gleichungssysteme mit leicht zu bestimmenden Koeffizienten ergeben.

Im Rahmen dieser Arbeit werden geradlinige Tetraeder als finite Elemente verwendet. Die mit den Maxwell-Gleichungen verknüpften Funktionenräume implizieren verschiedene Klassen von Ansatzfunktionen, auf welche folgend eingegangen wird. Details zu den Funktionenräumen sind in [Mon08, Kapitel 3] und [BC01] nachzulesen.

2.2.1 Skalare Ansatzfunktionen

Skalare Ansatzfunktionen sind geeignet zur Diskretisierung stetiger Skalarfelder aus dem Raum $\mathcal{H}^1$. Hierzu zählt beispielsweise das elektrische Skalarpotenzial. Die Ansatzfunktionen bilden eine Basis eines finit-dimensionalen Teilraums

$$\mathcal{V}^{h,p} \subset \mathcal{H}^1, \quad (2.11)$$

wobei p den Polynomgrad der Ansatzfunktionen beschreibt. In dieser Arbeit werden hierarchische Funktionen nach [Ing06] verwendet, für welche eine Zerlegung

$$\mathcal{V}^{h,p} = \begin{cases} \bar{\mathcal{V}}^{h,1}, & p = 1, \\ \mathcal{V}^{h,p-1} \oplus \bar{\mathcal{V}}^{h,p}, & p > 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

existiert. Aufgrund der Assoziierung skalarer Ansatzfunktionen erster Ordnung mit den Knoten des FE-Netzes werden diese auch Knotenelemente genannt.

2.2.2 Rotationskonforme Ansatzfunktionen

Rotationskonforme Ansatzfunktionen (engl. *edge elements*) sind geeignet zur Diskretisierung von Vektorfeldern aus $\mathcal{H}(\text{rot})$ wie beispielsweise des magnetischen Vektorpotenzials. Konkret bilden sie die Basis eines finit-dimensionalen Raumes

$$\mathcal{W}^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}). \quad (2.13)$$

Die verwendeten Funktionen nach [Ing06] erlauben eine Zerlegung

$$\mathcal{W}^{h,p} = \begin{cases} \bar{\mathcal{W}}^{h,1}, & p = 1, \\ \mathcal{W}^{h,p-1} \oplus \bar{\mathcal{W}}^{h,p} \oplus \text{grad } \bar{\mathcal{V}}^{h,p}, & p > 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

wobei $\bar{\mathcal{W}}^{h,p}$ für $p > 1$ nur Funktionen mit nicht verschwindender Rotation umfasst. Es ist zu erkennen, dass für $p > 1$ die Gradienten der skalaren Ansatzfunktionen explizit in $\mathcal{W}^{h,p}$ enthalten sind, für $p = 1$ gilt

$$\{\text{grad } \bar{\mathcal{V}}^{h,1}\} = \{\bar{\mathcal{W}}^{h,1}\} \mathbf{G} \quad (2.15)$$

mit dem diskreten Gradientenoperator [ZC06, S. 51]:

$$[\mathbf{G}]_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{Kante } i \text{ zeigt auf Knoten } j, \\ -1, & \text{Kante } i \text{ zeigt von Knoten } j \text{ weg,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Um die Notation übersichtlich zu halten, soll $\mathbf{G}$ auch für $p > 1$ den diskreten Gradientenoperator bezeichnen, welcher analog auf $\mathcal{W}^{h,p}$ wirkt und explizite Gradienten der skalaren Ansatzfunktionen liefert. Er entsteht aus (2.16) durch Anhängen entsprechender Einheitsmatrizen [Joc14].

Zur Diskretisierung rotationskonformer Vektorfelder auf Oberflächen von Volumina im Rahmen der Randelementmethode in Kapitel 6 werden Ansatzfunktionen aus

$$\mathcal{W}_{2D}^{h,p} \subset \mathcal{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}) \quad (2.17)$$

benötigt. So wie ein Element des $\mathcal{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot})$ aus $\mathcal{H}(\text{rot})$ durch Bildung der Tangentialspur hervorgeht [BC01], werden die Elemente des $\mathcal{W}_{2D}^{h,p}$ gewählt zu

$$\mathcal{W}_{2D}^{h,p}(\Gamma) = \{\mathbf{w}_{2D} \mid \mathbf{w}_{2D} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{w}|_{\Gamma} \times \hat{\mathbf{n}}) \text{ mit } \mathbf{w} \in \mathcal{W}^{h,p}\} \quad (2.18)$$

für eine Oberfläche Γ mit Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$.

2.2.3 Divergenzkonforme Ansatzfunktionen

Diese Ansatzfunktionen werden zur Diskretisierung von Elementen des $\mathcal{H}(\text{div})$ wie beispielsweise der magnetischen Flussdichte verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur Ansatzfunktionen für divergenzkonforme Vektorfelder auf Oberflächen von Körpern benötigt, nämlich zur Diskretisierung der Oberflächenstromdichte in Kapitel 6. Nach [ZC06, S. 23] wird der Ansatzraum $\mathcal{D}_{2D}^{h,p}$ für eine Oberfläche mit Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ konstruiert mittels

$$\{\mathcal{D}_{2D}^{h,p}\} = \hat{\mathbf{n}} \times \{\mathcal{W}_{2D}^{h,p}\}. \quad (2.19)$$

Mit (2.14) und (2.18) ergibt sich eine zu rotationskonformen Ansatzfunktionen analoge Darstellung

$$\mathcal{D}_{2D}^{h,p} = \begin{cases} \bar{\mathcal{D}}_{2D}^{h,1}, & p = 1, \\ \mathcal{D}_{2D}^{h,p-1} \oplus \bar{\mathcal{D}}_{2D}^{h,p} \oplus \text{rot } \hat{\mathbf{n}} \bar{\mathcal{V}}^{h,p}, & p > 1, \end{cases} \quad (2.20)$$

wobei $\bar{\mathcal{D}}_{2D}^{h,p}$ für $p > 1$ nur Funktionen mit nicht verschwindender Divergenz enthält. Es ist zu erkennen, dass für $p > 1$ die Rotationen der skalaren Ansatzfunktionen in Normalenrichtung explizit in $\mathcal{D}_{2D}^{h,p}$ einbegriffen sind. Für $p = 1$ entsprechen die divergenzkonformen Ansatzfunktionen bis auf Skalierungen den Rao-Wilton-Glisson-Ansatzfunktionen [RWG82]. Im Sinne einer Loop-Star-Zerlegung [Vec99] können divergenzfreie Loop-Funktionen konstruiert werden,

$$\{\text{rot } \hat{\mathbf{n}} \bar{\mathcal{V}}^{h,1}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{2D}^{h,1}\} \mathbf{L}, \quad (2.21)$$

mit der Zyklenmatrix

$$[\mathbf{L}]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Kante } i \text{ zeigt von Knoten } j \text{ weg,} \\ -1, & \text{Kante } i \text{ zeigt zu Knoten } j \text{ hin,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.22)$$

Um die Notation übersichtlich zu halten, wird auch für $p > 1$ die Matrix, welche $\mathcal{D}_{2D}^{h,p}$ auf divergenzfreie Ansatzfunktionen abbildet, mit $\mathbf{L}$ bezeichnet. Sie entsteht aus (2.22) und 1-Einträgen so, dass die expliziten Rotationen der skalaren Ansatzfunktionen in Normalenrichtung ausgewählt werden. Dadurch wird der Ansatzraum $\mathcal{D}_{2D}^{h,p,0}$ für oberflächendivergenzfreie Vektorfelder konstruiert,

$$\mathcal{D}_{2D}^{h,p,0} \subset \mathcal{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma} 0) \quad \text{mit} \quad \{\mathcal{D}_{2D}^{h,p,0}\} = \{\mathcal{D}_{2D}^{h,p}\} \mathbf{L}. \quad (2.23)$$

2.3 Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Modelle

Die Auswertung der in dieser Arbeit betrachteten FE-Modelle erfordert die Lösung von Gleichungssystemen einer hohen Dimension N . In dem Fall, dass die Modelle für eine Vielzahl parametrischer Konfigurationen ausgewertet werden müssen, bietet sich die Verwendung projektionsbasierter Modellordnungsreduktion an. Diese Klasse von Verfahren projiziert das ursprüngliche FE-Modell, im Folgenden Ausgangs- oder volles Modell genannt, in einen geeigneten Unterraum niedriger Dimension $n \ll N$. Geeignet bedeutet dabei, dass die Systemantwort in dem Unterraum die Systemantwort des Ausgangsmodells approximiert. Das so entstandene ROM lässt sich in der Regel um Größenordnungen schneller auswerten als das volle Modell. Ein großer Vorteil der Ordnungsreduktion ist, dass die Dimension des Unterraums nur von der

Komplexität des zugrunde liegenden physikalischen Modells abhängt, nicht aber von der Feinheit der Diskretisierung, die sich in N widerspiegelt.

Projektionsbasierte MOR-Verfahren für lineare, affin parametrisierte Systeme lassen sich grob in zwei Klassen unterteilen: Einpunktverfahren arbeiten an einem Entwicklungspunkt im Parameterraum und bewahren dort eine Übereinstimmung der Übertragungsfunktion bzw. -matrix des Ausgangsmodells und deren Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung mit der des ROMs. Aus diesem Grund werden solche Verfahren als momentenabgleichend bezeichnet. Der Momentenabgleich wurde bei frühen Varianten explizit durchgeführt [PR90], moderne Algorithmen gleichen implizit über Krylov-Unterraumverfahren ab [SLL03], [BS05]. Einpunktverfahren sind besonders attraktiv in Kombination mit direkten Lösern, da in jedem Schritt des Algorithmus außer Matrix-Vektor-Multiplikationen die Wirkung der inversen Systemmatrix im Entwicklungspunkt benötigt wird. Steht eine Faktorisierung der Systemmatrix zur Verfügung, beschränkt sich der numerische Aufwand auf Vor- und Ruckeinsetzen [Far07].

Mehrpunktverfahren arbeiten im Gegensatz dazu mit einer Menge an Entwicklungspunkten [GGvD96], [SLL02]. Es existieren Ansätze, welche an jedem Entwicklungspunkt einen Momentenabgleich höherer Ordnung erreichen, aber Mehrpunktverfahren niedrigster Ordnung, bei denen nur die Übertragungsfunktion selbst an den Entwicklungspunkten übereinstimmt, zeichnen sich durch eine große numerische Robustheit aus [Gri97]. Oftmals wird hierfür der Begriff *Reduced Basis Method* (RBM, dt. Methode der reduzierten Basis) gebraucht [PR06], [dlRRM09]. Diese Verfahren eignen sich gut in Kombination mit adaptiven Prozessen, welche basierend auf einem Fehlerindikator neue Entwicklungspunkte für das ROM wählen, bis eine vorgegebene Fehlertoleranz eingehalten wird [SLL02], [SFDE09]. Bei der Verwendung von direkten Lösern ist der Aufwand zur ROM-Generierung bei Mehrpunktverfahren höher, weil für jeden Entwicklungspunkt eine Faktorisierung der Systemmatrix benötigt wird. Dafür weisen die reduzierten Modelle bei vorgegebener Genauigkeit eine niedrigere Dimension auf als Einpunkt-ROMs.

Bevor die eigentlichen MOR-Verfahren eingeführt werden, muss der Begriff der affinen Parametrisierung geklärt werden.

Definition 2.1 (Affin parametrisierte Sesquilinearform, siehe [PR06, Kapitel 1.2.5]). *Eine vom Parameter $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$ abhängige Sesquilinearform $A(\mathbf{p})(u, v)$ wird als affin parametrisiert bezeichnet, wenn sie sich darstellen lässt als*

$$A(\mathbf{p})(u, v) = \sum_{i=1}^M \theta_i(\mathbf{p}) A_i(u, v) \quad (2.24)$$

mit skalarwertigen Funktionen $\theta_i(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{C}$ und parameterunabhängigen Sesquilinearformen $A_i(u, v)$. Formel (2.24) gilt analog für Linearformen.

Definition 2.2 (Affin parametrisierte Matrix, siehe [Som15]). *Eine vom Parameter $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$ abhängige Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ wird als affin parametrisiert bezeichnet, wenn sie sich darstellen lässt als*

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^M \theta_i(\mathbf{p}) \mathbf{A}_i \quad (2.25)$$

mit skalarwertigen Funktionen $\theta_i(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{C}$ und parameterunabhängigen Matrizen $\mathbf{A}_i$. Ist die Matrix aus der Diskretisierung einer Sesquilinearform hervorgegangen, so soll sowohl M als auch die Komplexität zum Auswerten der $\theta_i(\mathbf{p})$ unabhängig von N sein. Formel (2.25) gilt analog für Vektoren.

Bemerkung. Prinzipiell kann jede Matrix als Summe (2.25) geschrieben werden. Wenn sie jedoch aus der Diskretisierung einer nicht-affinen Sesquilinearform resultiert, so ist die in Definition 2.2 geforderte Unabhängigkeit der Darstellung von N verletzt.

2.3.1 Einpunktverfahren

Für momentenabgleichende Einpunktverfahren (EP-Verfahren) ist eine polynomielle Modellparametrierung Voraussetzung, welche einen Spezialfall der affinen Parametrierung darstellt. Das Vorgehen wird erläutert anhand eines in s polynomiell parametrisierten MIMO-Systems (engl. *multiple-input multiple-output*) nach

$$\left(\sum_{i=0}^{M_i} s^i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(s) = \left(\sum_{k=0}^{M_k} s^k \mathbf{B}_k \right) \mathbf{u}(s), \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{y}(s) = \left(\sum_{l=0}^{M_l} s^l \mathbf{C}_l \right) \mathbf{x}(s) \quad (2.26b)$$

mit $\mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{N \times r}$, $\mathbf{C}_l \in \mathbb{C}^{r \times N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ und $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^r$. Die Übertragungsfunktion $\mathbf{H}(s)$ des Systems ist definiert durch

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{u}(s). \quad (2.27)$$

Die Koeffizienten der Entwicklung von $\mathbf{H}(s)$ in eine Taylor-Reihe um den Punkt s_0 ,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i \mathbf{H}(s)}{ds^i} \right|_{s=s_0} (s - s_0)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{M}_i(s_0) (s - s_0)^i \end{aligned} \quad (2.28)$$

werden als Momente $\mathbf{M}_i(s_0)$ bezeichnet.

Definition 2.3 (Polynomiell ROM). *Ein projektionsbasiertes reduziertes Modell des Ausgangsmodells (2.26) ist gegeben durch*

$$\left(\sum_{i=0}^{M_i} s^i \tilde{\mathbf{A}}_i \right) \tilde{\mathbf{x}}(s) = \left(\sum_{k=0}^{M_k} s^k \tilde{\mathbf{B}}_k \right) \mathbf{u}(s), \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{y}(s) = \left(\sum_{l=0}^{M_l} s^l \tilde{\mathbf{C}}_l \right) \tilde{\mathbf{x}}(s) \quad (2.29b)$$

mit den reduzierten Größen

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{W}^H \mathbf{A}_i \mathbf{V}, \quad (2.30a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k = \mathbf{W}^H \mathbf{B}_k, \quad (2.30b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_l = \mathbf{C}_l \mathbf{V} \quad (2.30c)$$

und den Projektionsmatrizen $\mathbf{W}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times n}$, $n \ll N$.

Die Schreibweise $(\cdot)^H$ steht für die komplex konjugierte, transponierte Größe. Aus der Projektion folgt, dass sich der Lösungsvektor des vollen Modells näherungsweise rekonstruieren lässt mittels

$$\mathbf{x}(s) \approx \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(s). \quad (2.31)$$

Definition 2.4 (Einpunktverfahren). *Ein Einpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren konstruiert ein reduziertes Modell nach Definition 2.3 durch Wahl der Projektionsmatrizen derart, dass*

$$\text{span} \left\{ \bigcup_{i=0}^q \mathbf{X}_i \mid \mathbf{X}_i := \mathbf{A}_0^{-1} \left(\mathbf{B}_i - \sum_{m=1}^{\min(M_i, i-1)} \mathbf{A}_m \mathbf{X}_{i-m} \right) \right\} \subseteq \text{span } \mathbf{V}, \quad (2.32)$$

$$\text{span} \left\{ \bigcup_{i=0}^q \mathbf{Z}_i \mid \mathbf{Z}_i := \mathbf{A}_0^{-H} \left(\mathbf{C}_i^H - \sum_{m=1}^{\min(M_i, i-1)} \mathbf{A}_m^H \mathbf{Z}_{i-m} \right) \right\} \subseteq \text{span } \mathbf{W}. \quad (2.33)$$

Die Zahl q wird als Ordnung des Verfahrens bezeichnet.

Satz 2.1. *Ein mittels eines EP-Verfahrens nach Definition 2.4 konstruiertes reduziertes Modell stimmt in den Momenten $\mathbf{M}_i(0)$, $i \in \{0, \dots, 2q+1\}$ mit dem Ausgangsmodell (2.26) überein. Wird in dem zugrunde liegenden System die Variablensubstitution*

$$s \mapsto s - s_0 \quad (2.34)$$

durchgeführt, stimmt das ROM in den Momenten $\mathbf{M}_i(s_0)$, $i \in \{0, \dots, 2q+1\}$ um den Entwicklungspunkt s_0 mit dem Ausgangsmodell überein.

Beweis. Siehe [Far07]. □

Die tatsächliche, numerisch robuste Konstruktion der Projektionsmatrizen ist in der Literatur beschrieben [Far07], [FDE10]. Es ist zu beachten, dass auch im Falle schwach besetzter Ausgangsmatrizen $\mathbf{A}_i$ die reduzierten Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}_i$ voll sind.

Für Systeme mit Durchgriff können nach Definition 2.4 ebenfalls reduzierte Modelle erstellt werden, indem dieser unverändert im ROM übernommen wird. Dadurch geht er nicht in die Konstruktion der Projektionsmatrizen ein. Außerdem ist die Zahl der Systemein- und Ausgänge r üblicherweise klein gegenüber N , wodurch der Durchgriff vom numerischen Aufwand her nicht ins Gewicht fällt.

Als für Wirbelstromprobleme wichtigen Spezialfall von (2.26) wird ein Originalmodell

$$\left(\sum_{i=0}^{M_i} s^i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(s) = \mathbf{B} \mathbf{u}(s), \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s) \mathbf{x}(s) + \mathbf{D}(s) \mathbf{u}(s) \quad (2.35b)$$

mit komplex-symmetrischen Matrizen $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^T$ betrachtet, für das die Zeilen von $\mathbf{C}$ durch Skalierung der Spalten von $\mathbf{B}$ hervorgehen. Dabei soll entweder

$$[\mathbf{C}]_{(l,:)} = s c_l [\mathbf{B}]_{(:,l)}^T \quad \text{mit } c_l \in \mathbb{C} \quad (2.36a)$$

oder

$$[\mathbf{C}]_{(l,:)} = [\mathbf{B}]_{(:,l)}^T \quad (2.36b)$$

gelten.

Lemma 2.2. *Ein mittels eines EP-Verfahrens nach Definition 2.4 konstruiertes reduziertes Modell für das System (2.35) mit dem Entwicklungspunkt s_0 ist momentenabgleichend für $\mathbf{M}_i(s_0)$, $i \in \{0, \dots, 2q+1\}$ für die Wahl $\mathbf{W} = \overline{\mathbf{V}}$ mit der komplexen Konjugation $\overline{(\cdot)}$.*

Beweis. Wie bereits erwähnt, hat $\mathbf{D}$ keinen Einfluss auf den Momentenabgleich. Werden die Projektionsmatrizen nach Definition 2.4 gewählt, gilt aufgrund der Voraussetzungen (2.36) die Gleichheit

$$\text{span } \mathbf{V} = \overline{\text{span } \mathbf{W}}. \quad (2.37)$$

Nach [Far07, Lemma 6.27] ist es ausreichend, aus (2.35) konstruierbare SISO-Systeme (engl. *single-input single-output*) zu betrachten. Die Momente eines solchen Teilsystems, das aus Spalte k von $\mathbf{B}$ und Zeile l von $\mathbf{C}$ gebildet wird,

$$\left(\sum_{i=0}^{M_i} s^i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(s) = \mathbf{b} \mathbf{u}(s), \quad (2.38a)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{c}(s) \mathbf{x}(s), \quad (2.38b)$$

seien im Fall (2.36b) mit $\hat{m}_i$ bezeichnet; hier gilt Satz 2.1. Im Fall (2.36a) führt Ableiten von (2.38b) und Vergleich mit $\hat{m}_i$ auf die Momente m_i nach

$$m_0 = 0, \quad (2.39a)$$

$$m_i = c_l \hat{m}_{i-1} \quad \text{für } i > 0. \quad (2.39b)$$

Damit gilt Satz 2.1 für $i \in \{1, \dots, 2q + 2\}$. $\square$

2.3.2 Mehrpunktverfahren

Diese Verfahrensklasse wird erläutert für ein im Sinne von Definition 2.2 in einem Parametervektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$ affines MIMO-System

$$\left(\sum_{i=0}^{M_i} \theta_i(\mathbf{p}) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(\mathbf{p}) = \left(\sum_{k=0}^{M_k} \vartheta_k(\mathbf{p}) \mathbf{B}_k \right) \mathbf{u}(\mathbf{p}), \quad (2.40a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \left(\sum_{l=0}^{M_l} \varsigma_l(\mathbf{p}) \mathbf{C}_l \right) \mathbf{x}(\mathbf{p}) \quad (2.40b)$$

mit $\mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{C}^{N \times r}$, $\mathbf{C}_l \in \mathbb{C}^{r \times N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ und $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^r$. Systeme nach (2.40) werden als affine Ausgangs- oder Originalmodelle bezeichnet.

Im Gegensatz zu EP-Verfahren wählen Mehrpunktverfahren (MP-Verfahren) eine Menge an Entwicklungspunkten

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_S\}, \quad (2.41)$$

an denen Momente des reduzierten Modells mit denen des Ausgangsmodells abgeglichen werden. Bei der numerisch robusten RBM werden Mehrpunktverfahren niedrigster Ordnung betrachtet, welche nur die Momente

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{p}) \quad \text{mit } \mathbf{p} \in \mathcal{S} \quad (2.42)$$

abgleichen. Zur Definition der Momente im Mehrparameterfall siehe beispielsweise [Far07, Definition 6.1].

Definition 2.5 (Affines ROM). *Ein projektionsbasiertes reduziertes Modell von (2.40) ist gegeben durch*

$$\left(\sum_{i=0}^{M_i} \theta_i(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{A}}_i \right) \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) = \left(\sum_{k=0}^{M_k} \vartheta_k(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{B}}_k \right) \mathbf{u}(\mathbf{p}), \quad (2.43a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \left(\sum_{l=0}^{M_l} \varsigma_l(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{C}}_l \right) \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) \quad (2.43b)$$

mit den reduzierten Größen

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{W}^H \mathbf{A}_i \mathbf{V}, \quad (2.44a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k = \mathbf{W}^H \mathbf{B}_k, \quad (2.44b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_l \mathbf{V} \quad (2.44c)$$

und den Projektionsmatrizen $\mathbf{W}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times n}, n \ll N$.

Definition 2.6 (Mehrpunktverfahren). *Ein Mehrpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren niedrigster Ordnung konstruiert ein reduziertes Modell nach Definition 2.5 durch Wahl der Projektionsmatrizen derart, dass*

$$\text{span} \left\{ \mathbf{X}(\mathbf{p}) := \left(\sum_{i=0}^{M_i} \theta_i(\mathbf{p}) \mathbf{A}_i \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{M_k} \vartheta_k(\mathbf{p}) \mathbf{B}_k \right) \middle| \mathbf{p} \in \mathcal{P} \right\} \subseteq \text{span } \mathbf{V}, \quad (2.45)$$

$$\text{span} \left\{ \mathbf{Z}(\mathbf{p}) := \left(\sum_{i=0}^{M_i} \theta_i(\mathbf{p}) \mathbf{A}_i \right)^{-H} \left(\sum_{l=0}^{M_l} \varsigma_l(\mathbf{p}) \mathbf{C}_l \right) \middle| \mathbf{p} \in \mathcal{P} \right\} \subseteq \text{span } \mathbf{W}. \quad (2.46)$$

Satz 2.3. *Ein mittels eines MP-Verfahrens nach Definition 2.6 konstruiertes reduziertes Modell stimmt in den Momenten $\mathbf{M}_0(\mathbf{p})$ für $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ mit dem Ausgangsmodell (2.40) überein.*

Beweis. Da die Momente auch im affinen Fall über eine Taylor-Entwicklung analog (2.28) gegeben sind, entsprechen die Momente nullter Ordnung der Übertragungsfunktion des Systems

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0(\mathbf{p}) &= \left(\sum_{l=0}^{M_l} \varsigma_l(\mathbf{p}) \mathbf{C}_l \right) \left(\sum_{i=0}^{M_i} \theta_i(\mathbf{p}) \mathbf{A}_i \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{M_k} \vartheta_k(\mathbf{p}) \mathbf{B}_k \right) \\ &= \left(\sum_{l=0}^{M_l} \varsigma_l(\mathbf{p}) \mathbf{C}_l \right) \mathbf{X}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Die Wahl der Basis $\mathbf{V}$ erlaubt eine Darstellung mittels einer reduzierten Matrix $\tilde{\mathbf{X}}$, sodass

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{p}) \quad \text{für } \mathbf{p} \in \mathcal{S}, \quad (2.48)$$

was mit der Wahl (2.44c) den Beweis komplettiert. $\square$

Ein Nachteil dieser Verfahren ist, dass beim Einsatz direkter Löser für jeden Entwicklungspunkt die Faktorisierung einer Matrix der Dimension N nötig ist, weshalb die Berechnungszeit zur Generierung eines reduzierten Modells tendenziell höher ist als

bei Einpunktverfahren. Allerdings ist für das Verfahren niedrigster Ordnung nach Definition 2.6 keine Kenntnis der Ableitungen der affinen Funktionen nötig, was breitere Anwendungsmöglichkeiten als für Einpunktverfahren eröffnet. Dies ist vor allem im Hinblick auf die in Kapitel 5 und 6 behandelten parametrischen Modelle von großem Vorteil.

Ähnlich wie bei EP-Verfahren kann durch Einsatz von Galerkin-Projektion, das heißt $\mathbf{W} = \mathbf{V}$, oder durch transponierte Projektion wie für (2.35) mittels $\mathbf{W} = \bar{\mathbf{V}}$ der Aufwand zur expliziten Konstruktion von $\mathbf{W}$ nach Definition 2.6 gespart werden. Satz 2.3 behält weiterhin Gültigkeit, solange die reduzierten Systemmatrizen regulär sind.

2.3.3 Effizienz der reduzierten Modelle

Auch wenn eine Lösung der ROM-Gleichungen deutlich schneller berechnet ist als eine Lösung des entsprechenden Ausgangsmodells, soll anhand der numerischen Komplexität des gesamten MOR-Prozesses für diese Arbeit ein genauer Begriff der Effizienz definiert werden. Denn die Einschränkung auf affine Modelle (2.40) ist keine prinzipielle Voraussetzung, um Mehrpunktverfahren ähnlich Definition 2.6 anwenden zu können, aber entscheidend wie die Effizienz.

Insbesondere im nichtlinearen Kontext wurden Verfahren für nicht-affine Systeme

$$\mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \mathbf{b}(\mathbf{p}), \quad (2.49)$$

die mit reduzierten Modellen der Form

$$\mathbf{W}^H \mathbf{A}(\mathbf{p}) \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) = \mathbf{W}^H \mathbf{b}(\mathbf{p}) \quad (2.50)$$

arbeiten, publiziert [SL04], [SI13]. Die erzielten Zeitgewinne fallen dabei viel niedriger aus als für affine Modelle, teilweise ist der MOR-Prozess sogar teurer als das Lösen des Ausgangsmodells.

Entscheidend für die Effizienz ist, dass bei bekannter Projektionsmatrix die reduzierten Matrizen (2.30) oder (2.44) nur einmalig berechnet werden. Danach müssen zur Auswertung der ROMs lediglich die n -dimensionalen Systeme (2.29) oder (2.43) assembliert und gelöst werden, wohingegen im Fall (2.50) die Assemblierung der vollen Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ sowie der Projektionsschritt für jeden Parameterwert durchzuführen sind. Diese Eigenschaft affiner Systeme wird oftmals für eine *offline-online-Zerlegung* [PR06, Kapitel 3.3] ausgenutzt. Der offline-Schritt umfasst Operationen mit N -dimensionalen Größen des Ausgangsmodells wie gegebenenfalls die Generierung eines affinen Ausgangsmodells, die Erstellung der Projektionsmatrizen und den Projektionsschritt. Im online-Schritt erfolgt die Auswertung des Modells für alle Parameterwerte, es wird nur noch mit reduzierten Größen gearbeitet. Auch wenn nicht

immer eine strikte offline-online-Zerlegung durchführbar ist, wie beispielsweise für Algorithmus 7.2 aus Kapitel 7, ist eine Unabhängigkeit zwischen ROM-Generierung und -Auswertung die Grundlage für ein effizientes Verfahren.

Definition 2.7 (Effizientes ROM). *Ein reduziertes Modell wird als effizient bezeichnet, wenn zur Auswertung für P parametrischen Konfigurationen außer einer von P unabhängigen Anzahl an Operationen der Komplexität des vollen Modells N nur Operationen mit reduzierten Größen der Dimension n nötig sind.*

Lemma 2.4. *Affine und polynomielle reduzierte Modelle der Form (2.43) bzw. (2.29) basierend auf affinen Größen nach Definition 2.2 sind effizient im Sinne von Definition 2.7. Damit ist garantiert, dass asymptotisch für viele Modellauswertungen eine Zeitersparnis erreicht wird.*

Kapitel 3

Numerische Berechnung quasistationärer Magnetfelder mit der Methode der finiten Elemente

Die FE-Methode ist aufgrund ihrer Vielseitigkeit ein häufig eingesetztes Simulationswerkzeug für quasistationäre Magnetfelder: Es können komplexe Geometrien sowie inhomogene und nichtlineare Materialien berücksichtigt werden. Daher sind im Laufe der Zeit eine Vielzahl unterschiedlicher FE-Formulierungen entwickelt worden. Die ersten Veröffentlichungen behandelten nur das magnetostatische Problem in zwei Dimensionen (2D) [SC70], später folgte eine Erweiterung auf quasistationäre Magnetfelder [SH72] in 2D. Von Interesse für die vorliegende Arbeit sind Formulierungen, welche allgemeine, dreidimensionale (3D) Wirbelstromprobleme behandeln. Die ersten Arbeiten hierzu sind in den frühen 1980er-Jahren entstanden und unterscheiden sich in den Feldgrößen, welche diskretisiert werden. Zu nennen sind Formulierungen in $\mathbf{H}$ [BV82], in $\mathbf{E}$ [May83] und im magnetischen Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ [Mor82]. Zusätzlich existieren Formulierungen in einem Stromdichte-Vektorpotenzial und magnetischen Skalarpotenzial ($\mathbf{T}\Psi$) [Car77], [RE83] sowie im magnetischen Vektorpotenzial und elektrischen Skalarpotenzial ($\mathbf{AV}$) [BHST82].

Unterschiede in den Formulierungen betreffen nicht nur topologische Einschränkungen hinsichtlich der Geometrie, sondern auch den Aufwand zur Realisierung strom- bzw. spannungsangeregter Leiterstrukturen [UNW⁺92], [BBPW00], [BPBT04]. Um möglichst alle Problemstellungen abdecken zu können, existieren Kopplungen der unterschiedlichen Formulierungen in vielen Kombinationen, siehe hierzu die Übersichtsartikel [BPR95] und [Bír99].

In dieser Arbeit wird eine $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung verwendet, welche in leitenden Bereichen mit dem magnetischen Vektorpotenzial und dem elektrischen Skalarpotenzial sowie in nichtleitenden Bereichen nur mit dem magnetischen Vektorpotenzial arbeitet. Diese Formulierung bietet den Vorteil, dass das Vektorpotenzial auf dem

gesamten Feldgebiet definiert ist und keine Kopplung verschiedener Formulierungen oder Gebiete nötig ist. Zusätzlich ist die Behandlung nicht einfach zusammenhängender Leiter, wie beispielsweise ringförmiger Leiter zur Modellierung von Spulen, im Gegensatz zur $\mathbf{T}\Psi$ -Methode unkompliziert. Des Weiteren kann eine Vielzahl an Ansteuerungsmöglichkeiten für Leiter realisiert werden [Rod83], [LR88], [DHL99], [HS05].

Die Formulierung selbst ist Gegenstand von Abschnitt 3.1, während die Anregung detailliert in Abschnitt 3.2 behandelt wird. Schließlich wird in Abschnitt 3.3 ein schnelles Frequenzbereichsverfahren für Wirbelstromprobleme basierend auf MOR nach Abschnitt 2.3 vorgestellt. Numerische Beispiele demonstrieren die Leistungsfähigkeit der präsentierten Methoden.

3.1 Dreidimensionale Wirbelstromprobleme

Zunächst soll aus den quasistationären Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich (2.9) die $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung als Ausgangs-DGL für die FE-Methode hergeleitet werden.

Wird die magnetische Flussdichte über ein magnetisches Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ ausgedrückt, sodass

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (3.1)$$

dann ist die Divergenzfreiheit der Flussdichte (2.9c) per Konstruktion erfüllt. Ströme werden in zwei Anteile aufgespalten

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_{\text{imp}}, \quad (3.2)$$

wobei $\mathbf{J}_{\text{imp}}$ eingeprägte Ströme (engl. *imprinted currents*) bezeichnet, die zur Anregung dienen, und $\mathbf{J}_e$ Wirbelströme (engl. *eddy currents*) als Reaktionsströme. Die Wirbelströme gehorchen dem ohmschen Gesetz (2.6b). Einsetzen von (3.1) in (2.9b) ergibt

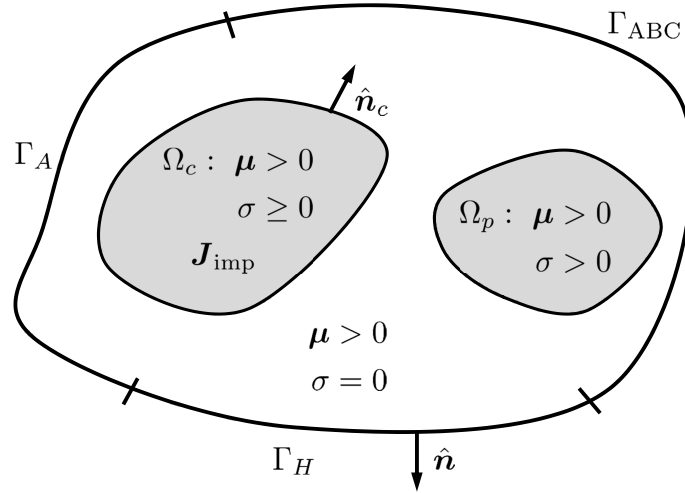
$$\text{rot } (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0. \quad (3.3)$$

Aus der Tatsache, dass Gradienten in einfach zusammenhängenden Gebieten den Nullraum des Rotationsoperators bilden, lässt sich ein elektrisches Skalarpotenzial

$$\text{grad } \varphi := -(\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) \quad (3.4)$$

eingeführen. Damit lautet die elektrische Feldstärke als Ausdruck der Potenziale

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \text{grad } \varphi. \quad (3.5)$$

Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des Feldgebiets Ω .

Mit (3.1) und (2.6a) lautet das ampèresche Gesetz

$$\operatorname{rot} \underline{\underline{\mu}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_{\text{imp}}. \quad (3.6)$$

Zusammenfassen von (2.6b), (3.5) und (3.6) führt auf die gesuchte DGL

$$\operatorname{rot} \underline{\underline{\mu}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} + j\omega\sigma \mathbf{A} + \sigma \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{J}_{\text{imp}}. \quad (3.7)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2.7) wird mit (2.6b) und (3.5) zu

$$\operatorname{div} (j\omega\sigma \mathbf{A} + \sigma \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{imp}}, \quad (3.8)$$

alternativ folgt sie direkt durch Divergenzbildung von (3.7). Trotz der linearen Abhängigkeit von (3.7) und (3.8) wird im Hinblick auf folgende Diskretisierung und Eichung die $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung in der Literatur häufig notiert als

$$\operatorname{rot} \underline{\underline{\mu}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} + j\omega\sigma \mathbf{A} + \sigma \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{J}_{\text{imp}} \quad \text{für } \sigma > 0, \quad (3.9a)$$

$$\operatorname{div} (j\omega\sigma \mathbf{A} + \sigma \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{imp}} \quad \text{für } \sigma > 0, \quad (3.9b)$$

$$\operatorname{rot} \underline{\underline{\mu}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}_{\text{imp}} \quad \text{für } \sigma = 0. \quad (3.9c)$$

3.1.1 Randwertproblem und schwache Form

Betrachtet wird ein einfach zusammenhängendes Feldgebiet Ω , welches schematisch in Abbildung 3.1 dargestellt ist. In ihm enthalten sind Gebiete $\Omega_p \subset \Omega$, die passive Leiter mit $\sigma > 0$ modellieren, und Gebiete $\Omega_c \subset \Omega$, welche angeregte Leiterstrukturen modellieren. Daher sind eingeprägte Ströme nur in Ω_c erlaubt, eine nähere

Erläuterung findet in Abschnitt 3.2 statt. Ferner wird vorausgesetzt, dass leitfähige Gebiete sich nicht bis zum Rand von Ω erstrecken, weil dieser Fall in den betrachteten Beispielen nicht auftritt. Es handelt sich nicht um eine prinzipielle Einschränkung der $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung, würde aber eine gesonderte Betrachtung der Randbedingungen und Anregungen erfordern. Der Rand $\partial\Omega$ mit nach außen zeigendem Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ zerfällt in die disjunkten Teiltränder Γ_A , Γ_H und Γ_{ABC} .

Das zu (3.9) gehörige Randwertproblem (RWP) lautet

$$\operatorname{rot} \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} + j\omega\sigma\mathbf{A} + \sigma \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{J}_{\text{imp}} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.10a)$$

$$\operatorname{div} (j\omega\sigma\mathbf{A} + \sigma \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{imp}} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.10b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_A, \quad (3.10c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_0 \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (3.10d)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{e}}_r) \quad \text{auf } \Gamma_{ABC}, \quad (3.10e)$$

wobei (3.10b) aus (3.10a) durch Divergenzbildung folgt. Die Randbedingung auf dem Dirichletrand Γ_A entspricht einer verschwindenden Normalkomponente der magnetischen Flussdichte

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{div} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) = 0 \quad (3.11)$$

und erzwingt daher, dass die Flusslinien der Flussdichte Γ_A nicht überqueren können. Ist $\Gamma_A = \partial\Omega$, müssen sich wegen (2.9c) alle Flusslinien in Ω schließen. Es gibt keine direkte physikalische Entsprechung zu dieser Randbedingung, sie kann aber zum Modellieren von Symmetrien verwendet werden. Die Randbedingung auf dem Neumannrand Γ_H entspricht physikalisch der Vorgabe einer Flächenstromdichte, die einen entsprechenden Sprung $\mathbf{H}_0$ in der Tangentialkomponente von $\mathbf{H}$ verursacht. Die Robinrandbedingung auf Γ_{ABC} (engl. *asymptotic boundary condition*, ABC) berücksichtigt näherungsweise den Übergang zum freien Raum, daher soll $\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}(\Gamma_{ABC}) = \mu_0$ gelten. Die Randbedingung basiert auf dem Wilcox-Expansionstheorem [Wil56], einer Reihendarstellung des Feldes in Kugelkoordinaten mit Radius r und Einheitsvektor in radialer Richtung $\hat{\mathbf{e}}_r$. Wird diese nach dem ersten Glied abgebrochen, folgt die ABC erster Ordnung [BSLM91], [CK97].

Da das RWP (3.10) im Allgemeinen keine klassische Lösung besitzt, wird mithilfe des Verfahrens der gewichteten Residuen [Jin10, Kapitel 9] eine schwache Formulierung hergeleitet. Sie lautet: Finde $\mathbf{A} \in \mathcal{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega_c \cup \Omega_p)$, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{\mu_0^{-1}}{r} \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \mathbf{A} \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \operatorname{grad} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_H} \mathbf{H}_s \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$j\omega \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \sigma \mathbf{A} \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \sigma \operatorname{grad} \varphi \, d\Omega = - \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega, \quad (3.12b)$$

für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{H}(\text{rot}, \Omega)$ und $v \in \mathcal{H}^1(\Omega_c \cup \Omega_p)$.

Beweis. Zunächst wird (3.10a) mit Funktionen $\mathbf{w} \in \mathcal{H}(\text{rot}, \Omega)$ getestet, was auf

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \text{rot} \underline{\underline{\mu}}^{-1} \text{rot} \mathbf{A} \, d\Omega + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \mathbf{A} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \text{grad} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega \quad (3.13)$$

führt. Mit der Vektoridentität

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot} \mathbf{v} \quad (3.14)$$

und dem gaußschen Integralsatz angewandt auf den ersten Term folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{w} \cdot \underline{\underline{\mu}}^{-1} \text{rot} \mathbf{A} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\mu}}^{-1} \text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \mathbf{A} \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \text{grad} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aufspalten des Randintegrals in die Γ_A , Γ_H und Γ_{ABC} zugeordneten Teilränder und Einsetzen von (3.10c) und (3.10d) führt auf

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{w} \cdot \underline{\underline{\mu}}^{-1} \text{rot} \mathbf{A} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\text{ABC}}} \mu_0^{-1} \text{rot} \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \mathbf{A} \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \text{grad} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_H} \mathbf{H}_s \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Zuletzt wird in der ABC (3.10e) die Näherung $\hat{\mathbf{n}} \approx \hat{\mathbf{e}}_r$ verwendet,

$$\text{rot} \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{r} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}}), \quad (3.17)$$

wodurch im Diskreten nur noch dem Rand Γ_{ABC} zugeordnete Ansatzfunktionen in das Integral mit eingehen.

Gleichung (3.10b) verschwindet in isolierenden Bereichen mit $\sigma = 0$. Daher wird sie mit Funktionen $v \in \mathcal{H}^1(\Omega_c \cup \Omega_p)$ getestet,

$$j\omega \int_{\Omega} v \text{div} \sigma \mathbf{A} \, d\Omega + \int_{\Omega} v \text{div} \sigma \text{grad} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} v \text{div} \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega. \quad (3.18)$$

Ausnutzen der Vektoridentität

$$\text{div}(\mathbf{u}\mathbf{v}) = u \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} u \quad (3.19)$$

ergibt

$$-j\omega \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \sigma \mathbf{A} \, d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \sigma \operatorname{grad} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega. \quad (3.20)$$

Randintegrale liefern keinen Beitrag zu (3.20), wenn keine leitfähigen Gebiete angrenzend an $\partial\Omega$ zugelassen sind. $\square$

3.1.2 Finite-Elemente-Formulierung

Auf die FE-Methode wurde knapp in Abschnitt 2.2 eingegangen, ausführliche Beschreibungen und Anwendungen auf Wirbelstromprobleme finden sich in der Literatur [SF96], [ZC06] und [RV10]. Zur Diskretisierung der schwachen $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung (3.12) werden das Vektorpotenzial und das Skalarpotenzial dargestellt als

$$\mathbf{A} = \sum_k [\mathbf{x}_A]_k \mathbf{w}_k \quad \text{mit } \mathbf{w}_k \in \mathcal{W}^{h,p}, \quad (3.21)$$

$$\varphi = \sum_k [\mathbf{x}_V]_k v_k \quad \text{mit } v_k \in \mathcal{V}^{h,p}. \quad (3.22)$$

Im Sinne eines Bubnov-Galerkin-Ansatzes [SF08, Kapitel 2] werden die Testfunktionen gleich den Ansatzfunktionen gewählt, also ebenfalls aus $\mathcal{W}^{h,p}$ bzw. $\mathcal{V}^{h,p}$, was auf symmetrische FE-Matrizen führt. Generell werden in dieser Arbeit symmetrische Formulierungen angestrebt, denn zum einen kann die Symmetrie zur effizienten Speicherung und Lösung der Gleichungssysteme ausgenutzt werden [TB97, Kapitel 23]. Zum anderen ermöglichen oder vereinfachen symmetrische Formulierungen den Beweis wichtiger Systemeigenschaften wie beispielsweise Passivität [vdS06], [FBDE11], [Far13].

Aus (3.12) folgt das FE-Gleichungssystem

$$(\mathbf{S}^u + j\omega \mathbf{T}^u + \mathbf{Z}^u) \mathbf{x}_A + \mathbf{M}_{AV}^u \mathbf{x}_V = \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_H, \quad (3.23a)$$

$$j\omega \mathbf{M}_{VA}^u \mathbf{x}_A + \mathbf{M}_{VV} \mathbf{x}_v = \mathbf{b}_V, \quad (3.23b)$$

mit

$$[\mathbf{S}^u]_{ij} = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w}_i \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{w}_j \, d\Omega, \quad (3.24a)$$

$$[\mathbf{T}^u]_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \sigma \mathbf{w}_j \, d\Omega, \quad (3.24b)$$

$$[\mathbf{Z}^u]_{ij} = \int_{\Gamma_{\text{ABC}}} \frac{\mu_0^{-1}}{r} \mathbf{w}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{w}_j \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma, \quad (3.24c)$$

$$[\mathbf{M}_{AV}^u]_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \sigma \operatorname{grad} v_j \, d\Omega, \quad (3.24d)$$

$$[\mathbf{M}_{VA}^u]_{ij} = \int_{\Omega} \text{grad } v_i \cdot \sigma \mathbf{w}_j \, d\Omega, \quad (3.24e)$$

$$[\mathbf{M}_{VV}]_{ij} = \int_{\Omega} \text{grad } v_i \cdot \sigma \text{grad } v_j \, d\Omega, \quad (3.24f)$$

$$[\mathbf{b}_A]_i = \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega, \quad (3.24g)$$

$$[\mathbf{b}_H]_i = \int_{\Gamma_H} \mathbf{H}_s \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w}_i \, d\Gamma, \quad (3.24h)$$

$$[\mathbf{b}_V]_i = - \int_{\Omega} v_i \, \text{div } \mathbf{J}_{\text{imp}} \, d\Omega, \quad (3.24i)$$

Das Superskript u steht dabei für ungeeichte Formulierung, denn das Gleichungssystem (3.23) ist konsistent, aber singular. Die Singularität kann wie folgt charakterisiert werden: In leitfähigen Bereichen geht (3.10b) aus (3.10a) durch Divergenzbildung hervor, was sich auf die schwache Form überträgt. In nichtleitenden Bereichen ist (3.12a) wegen des nichttrivialen Nullraums des Rotationsoperators für alle Gradientenfelder erfüllt. Damit besteht der Nullraum von (3.23) aus Funktionen

$$\mathbf{A} = \text{grad } v \quad \text{mit } v \in \mathcal{V}^{h,p}(\Omega). \quad (3.25)$$

Im Hinblick auf effiziente Generierung reduzierter Modelle wird jedoch eine direkte Lösung der Gleichungen angestrebt. Dieses Ziel kann mithilfe der im nächsten Abschnitt vorgestellten Baumeichung erreicht werden.

Baumeichung

So wie im Kontinuierlichen die Quellen $\text{div } \mathbf{A}$ im Rahmen einer Eichung vorgegeben werden können, existieren im Diskreten verschiedene Eichungen, um aus (3.23) ein reguläres Gleichungssystem mit derselben physikalischen Lösung abzuleiten. In [Mor90] und [RV10] wird mit Penalty-Termen gearbeitet, die jedoch zum einen einen Einfluss auf die numerischen Eigenschaften der Gleichungen haben, und zum anderen nicht zu einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten führen. Auch eine diskrete Coulomb-Eichung über Lagrange-Multiplikatoren [Rod83], [DEPL00] eliminiert keine Unbekannten, sondern führt zusätzliche Ansatzfunktionen aus $\mathcal{V}^{h,p}$ für die Multiplikatoren ein. Daher wird in dieser Arbeit eine Nullbaumeichung nach [AR88], [AR90] durchgeführt. Letztere basiert auf einer Eliminierung reiner Gradientenfelder (3.25) aus den Test- und Ansatzfunktionen aus $\mathcal{W}^{h,p}$ in dem Sinne, dass mit den verbleibenden Funktionen nur noch Felder mit nicht verschwindender Rotation dargestellt werden können. Durch die diskrete Sequenzeigenschaft (2.15) ist die Eichung einfach zu realisieren.

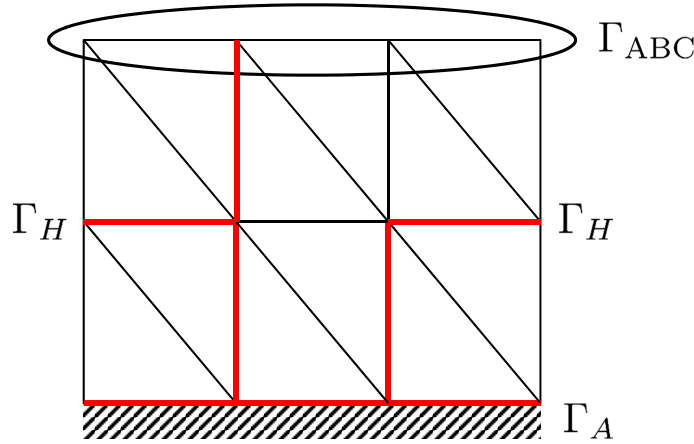


Abbildung 3.2: FE-Netz mit Baumkanten in rot. Das Modell besitzt Dirichlet-Randbedingungen am unteren Rand, asymptotische Randbedingungen am oberen Rand und Neumann-Randbedingungen an den Seiten.

An der Zerlegung (2.14) der Ansatzfunktionenräume ist zu erkennen, dass reine Gradienten höherer Ordnung $p > 1$ explizit durch Entfernen der entsprechenden Funktionen aus den Gleichungen ausgeschlossen werden können. Die Gradienten für $p = 1$ lassen sich über (2.15) darstellen; diese Gleichung besitzt keine Lösung mehr, wenn ein *Spannbaum* in das FE-Netz gelegt wird und alle mit Baumkanten assoziierten Ansatzfunktionen eliminiert werden [AR88].

Definition 3.1 (Baum, nach [Bos98, Definition 5.1]). *Ein Baum ist eine Menge $\mathcal{S}$ von Kanten des FE-Netzes, sodass die Menge aller aus ihnen zu bildenden Ketten $K(\mathcal{S})$ keinen Zyklus außer dem Null-Zyklus enthält.*

Definition 3.2 (Spannbaum, nach [Bos98, Definition 5.2]). *Ein Baum ist ein Spannbaum, wenn es keinen strikt größeren Baum gibt, der ersteren enthält.*

In dieser Arbeit wird der Kruskal-Algorithmus zur Konstruktion eines minimalen Spannbaums verwendet [CLRS01, Kapitel 23]. Soweit nicht anders angegeben, ist im Folgenden immer ein Spannbaum gemeint, wenn das Wort Baum verwendet wird. Insgesamt besteht die Eichung also nur aus der Elimination bestimmter Ansatzfunktionen.

Die Auswirkungen der Randbedingungen von (3.10) auf die Konstruktion des Baums müssen gesondert betrachtet werden, da dieser Fall in [AR90] nicht behandelt wurde. Die Dirichlet-Randbedingungen (3.10c) sind erfüllt, wenn die Freiheitsgrade aller zu Γ_A gehöriger Kanten durch Zuordnung zum Baum entfernt werden. Damit dieser mit dem restlichen FE-Netz kompatibel ist, werden alle Knoten auf dem Dirichletrand zu einem Superknoten zusammengefasst, also als ein einziger Knoten betrachtet, sodass nur eine Baumkante mit Γ_A verbunden ist. Der Rand Γ_H bedarf keiner gesonderten Behandlung. Auf dem Robinrand gilt Gleichung (3.17), deren Herleitung implizit auf einer Coulomb-Eichung basiert [BSLM91], weshalb das Vektorpotenzial

auf Γ_{ABC} nicht baumgeeicht werden darf. Dies wird erreicht durch Zusammenfassen der Knoten auf dem Robinrand zu einem Superknoten, ohne dem Baum Kanten hinzuzufügen. Auch in diesem Fall ist nur eine Baumkante aus dem Feldgebiet mit Γ_{ABC} verbunden. Zusätzlich sind die expliziten Gradienten höherer Ordnung $\text{grad } \mathcal{V}^{h,p}(\Gamma_{ABC})$ mit zu berücksichtigen. Insgesamt ist der Baum für ein schematisches zweidimensionales FE-Netz in Abbildung 3.2 dargestellt.

Was das Skalarpotenzial φ betrifft, so gehen nur dessen Gradienten in (3.23) ein, weshalb die Wahl

$$\varphi = \text{const.} \quad (3.26)$$

im Nullraum von (3.23) liegt. Konstante Funktionen können nicht mehr dargestellt werden, wenn für jeden zusammenhängenden Teil von $\Omega_c \cup \Omega_p$ eine einem Knoten zugeordnete Unbekannte gestrichen wird.

Für das nullbaumgeeichte FE-Gleichungssystem schreiben wir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} + j\omega\mathbf{T} + j\omega\mathbf{Z} & \mathbf{M}_{AV} \\ j\omega\mathbf{M}_{VA} & \mathbf{M}_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_H \\ \mathbf{b}_V \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

wobei alle Matrizen über die in (3.24) definierten Matrizen durch Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten entstehen. Die Systemmatrix von (3.27) ist regulär und somit mit direkten, auf Matrixfaktorisierung basierenden Verfahren lösbar. Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}$ ist komplex-symmetrisch und hat vollen Rang, für reelles μ ist $\mathbf{S}$ sogar symmetrisch positiv definit. Die Steifigkeitsmatrix des Skalarpotenzials $\mathbf{M}_{VV}$ ist symmetrisch positiv definit, die Massenmatrix $\mathbf{T}$ und ABC-Matrix $\mathbf{Z}$ sind symmetrisch positiv semidefinit, weiterhin ist

$$\mathbf{M}_{AV} = \mathbf{M}_{VA}^T. \quad (3.28)$$

Symmetrisierung

Wie zu Beginn von Abschnitt 3.1.2 bereits angesprochen, wird eine symmetrische Systemmatrix angestrebt, was in (3.27) nicht der Fall ist. Falls $\omega = 0$, weist das System jedoch eine Block-Dreieckstruktur auf und kann in einem zweistufigen Prozess über die Faktorisierung der symmetrischen Diagonalblöcke gelöst werden. Falls $\omega > 0$, wird nach [CKPD82] die Variablensubstitution

$$V := \frac{1}{j\omega}\varphi \quad (3.29)$$

vorgenommen, was auf das komplex-symmetrische Gleichungssystem

$$(\mathbf{A}_0 + j\omega\mathbf{A}_1)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_H \\ \mathbf{b}_V \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.31a)$$

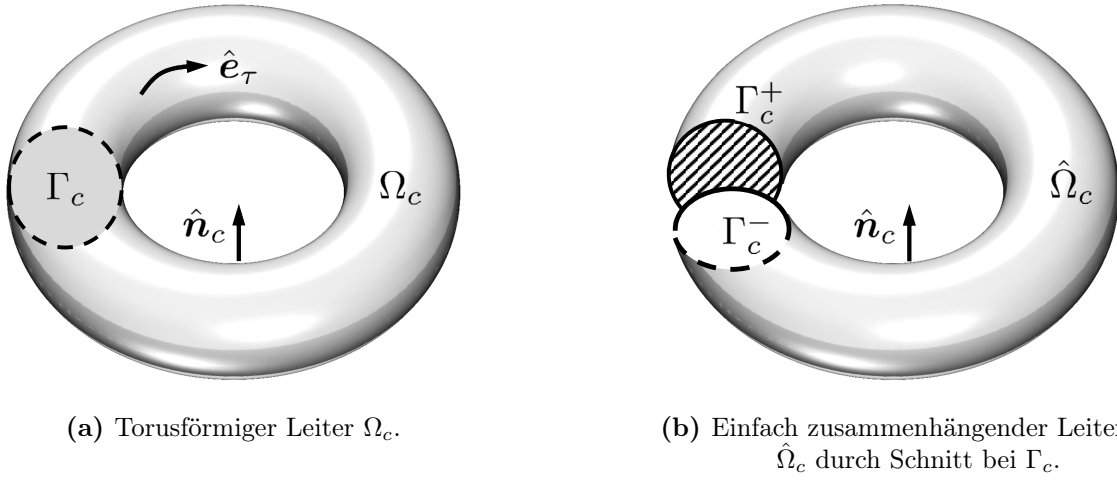


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung eines angeregten Leiters Ω_c .

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T} + \mathbf{Z} & \mathbf{M}_{AV} \\ \mathbf{M}_{VA} & \mathbf{M}_{VV} \end{bmatrix}, \quad (3.31b)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} \quad (3.31c)$$

führt.

3.2 Modellierung aktiver Leiterstrukturen

Bislang wurden keine Aussagen über den eingepprägten Strom $\mathbf{J}_{\text{imp}}$ getroffen, und darüber, wie aktive Leiterstrukturen durch Vorgabe einer Klemmenspannung oder eines Klemmenstroms angeregt werden können. Als Systemausgang soll im Fall der Stromanregung die Klemmenspannung dienen und umgekehrt. Zur Erläuterung dient beispielhaft der in Abbildung 3.3(a) dargestellte Leiter Ω_c mit Querschnittsfläche Γ_c und nach außen zeigendem Normalenvektor $\hat{n}_c$. Die Richtung des Stromflusses sei mit $\hat{e}_\tau$ bezeichnet. Aufgrund der Divergenzfreiheit der Stromdichte (2.7) dürfen Leiter keine Klemmenflächen im Feldgebiet Ω besitzen, sondern es können nur Leiter mit Klemmenflächen auf dem Rand $\partial\Omega$ oder in sich geschlossene Leiter modelliert werden. Nach den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1.1 wird nur der Fall geschlossener Leiter betrachtet.

3.2.1 Stromanregung für Strukturen ohne Wirbelströme

In manchen Fällen ist es nicht nötig oder nicht erwünscht, Wirbelströme in angeregten Leitern zu berücksichtigen. Dazu zählen

- Massive Leiter, bei denen die Eindringtiefe der Felder wesentlich größer als der Querschnitt ist, und die Stromdichte damit in sehr guter Näherung der stationären Stromdichte entspricht.
- Komplizierte Leitungsstrukturen mit vernachlässigbaren Wirbelströmen und makroskopisch näherungsweise homogener Stromdichte (in der Literatur meist als *stranded conductor* bezeichnet).

In beiden Fällen wird in den Leitern eine eingeprägte Stromdichte $\mathbf{J}_{\text{imp}}$ vorgegeben, gleichzeitig wird die elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 0$ gesetzt. Dadurch entspricht die Stromdichte im Leiter für alle Frequenzen der vorgegebenen Stromdichte, allerdings erzeugt der Leiter ohne zusätzliche Maßnahmen keinerlei ohmsche Verluste. Zur Abhilfe wird eine Serienimpedanz Z_c eingeführt, der beispielsweise im Fall niedriger Frequenzen der Gleichstromwiderstand zugewiesen werden kann.

Für die eingeprägte Stromdichte werden im Folgenden drei verschiedene Berechnungsarten vorgestellt.

Stromdichte-Vektorpotenzial

Gegeben ist ein Leiter Ω_c nach Abbildung 3.3(a) mit elektrischer Leitfähigkeit σ_{imp} . Wird $\mathbf{J}_{\text{imp}}$ errechnet über ein Stromdichte-Vektorpotenzial $\mathbf{T}$, sodass

$$\text{rot } \mathbf{T} = \mathbf{J}_{\text{imp}}, \quad (3.32)$$

dann ist die Kontinuitätsgleichung (2.7) in starker Form erfüllt. Dieses Vorgehen findet beispielsweise in [BPR⁺93], [LLEAA96] und [ZC06] Anwendung. Mit (2.6b) und der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes im stationären Fall

$$\text{rot } \mathbf{E}_{\text{imp}} = 0 \quad (3.33)$$

folgt die Differenzialgleichung zur Bestimmung von $\mathbf{T}$ zu

$$\text{rot } \sigma_{\text{imp}}^{-1} \text{rot } \mathbf{T} = 0 \quad \text{in } \Omega_c. \quad (3.34)$$

Um Randbedingungen für (3.34) zu erhalten, wird ausgenutzt, dass aus (3.32) und (2.9a) die Gleichheit der Wirbel folgt,

$$\text{rot } \mathbf{T} = \text{rot } \mathbf{H}. \quad (3.35)$$

Dies motiviert, nach [BP07] einen Linien-Einheitsstrom entlang eines geschlossenen Kantenzuges des FE-Netzes innerhalb von Ω_c zu definieren, welcher ein durch das Gesetz von Biot-Savart [Str10, S. 232] zu errechnendes Quellfeld $\mathbf{H}_s$ hervorruft. Es soll gelten

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}_s \quad \text{auf } \partial\Omega_c. \quad (3.36)$$

Die effiziente numerische Auswertung des Gesetzes von Biot-Savart ist in [HH02] beschrieben. Das Stromdichte-Vektorpotenzial wird mit rotationskonformen Ansatzfunktionen approximiert

$$\mathbf{T} = \sum_k [\mathbf{t}]_k \mathbf{w}_k \quad \text{mit } \mathbf{w}_k \in \mathcal{W}^{h,p}(\Omega_c). \quad (3.37)$$

Ein Galerkin-Ansatz führt auf das FE-Gleichungssystem zu dessen Bestimmung

$$\mathbf{S}_\sigma \mathbf{t} = 0, \quad (3.38)$$

$$[\mathbf{t}]_k \text{ bekannt} \quad \text{für } [\mathbf{t}]_k \text{ mit } \partial\Omega_c \text{ assoziiert}, \quad (3.39)$$

mit

$$[\mathbf{S}_\sigma]_{ij} = \int_{\Omega_c} \text{rot } \mathbf{w}_i \cdot \sigma_{\text{imp}}^{-1} \text{rot } \mathbf{w}_j \, d\Omega. \quad (3.40)$$

Analog zu (3.23) ist (3.38) singulär aufgrund des nichttrivialen Nullraums des Rotationsoperators, aber konsistent. Eine Baumeichung ist möglich, wird aber im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt, weil es sich nur um ein Hilfsproblem handelt. Stattdessen wird der iterative BICG-Löser [TB97, Kapitel 39] von MATLAB verwendet.

Es bleibt, die Koeffizienten der Ansatzfunktionen $[\mathbf{t}]_k$ zu bestimmen, welche mit dem Rand des Leiters $\partial\Omega_c$ assoziiert sind. Rotationskonforme Ansatzfunktionen erster Ordnung besitzen eine Kantenspannung von

$$\int_{\text{Kante } i} \mathbf{w}_k^{p=1} \cdot d\mathbf{s} = \delta_{ik} \quad (3.41)$$

mit dem Kronecker-Delta δ_{ik} . Daher lassen sich diese Koeffizienten bestimmen durch das Integral

$$[\mathbf{t}]_k^{p=1} = \int_{\text{Kante } k} \mathbf{H}_s \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.42)$$

Die Ansatzfunktionen höherer Ordnung besitzen keine solche geometrische Interpretation mehr, weswegen vorgeschlagen wird, die restlichen Koeffizienten durch $\mathbb{L}^2$ -Projektion von $\mathbf{H}_s$ auf $\mathcal{W}_{2D}^{h,p}(\partial\Omega_c)$ zu bestimmen. Dazu ist das Gleichungssystem

$$\mathbf{T}_T^{q>1} \mathbf{t}^{p>1} = \mathbf{h} - \mathbf{T}_T^{q=1} \mathbf{t}^{p=1} \quad (3.43)$$

zu lösen mit

$$[\mathbf{T}_T^q]_{ij} = \int_{\partial\Omega_c} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{w}_i^{p>1} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{w}_j^{p=q} \, d\Gamma, \quad (3.44)$$

$$[\mathbf{h}]_i = \int_{\partial\Omega_c} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{w}_i^{p>1} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{H}_s \, d\Gamma. \quad (3.45)$$

Der Gleichstromwiderstand des Leiters lässt sich über die ohmsche Verlustleistung berechnen mittels

$$R_{DC}^T = \frac{P}{I^2} \stackrel{I=1}{=} \int_{\Omega_c} \mathbf{J}_{\text{imp}} \cdot \mathbf{E}_{\text{imp}} d\Omega = \int_{\Omega_c} \text{rot } \mathbf{T} \cdot \sigma_{\text{imp}}^{-1} \text{rot } \mathbf{T} d\Omega = \mathbf{t}^T \mathbf{S}_\sigma \mathbf{t}. \quad (3.46)$$

Es sei erwähnt, dass bei auf Differenzialgeometrie basierenden Simulationsverfahren $\mathbf{T}$ als ein Element des dualen Komplexes auch auf diesem diskretisiert wird [Ton01]. Konventionelle FE-Formulierungen arbeiten hingegen mit nur einem Netz, was einer Diskretisierung aller Größen auf dem primalen Komplex entspricht. Dieses Vorgehen lässt sich dennoch motivieren, denn erstens kann das FE-Netz im differenzialgeometrischen Kontext als nicht-konforme Diskretisierung des dualen Komplexes aufgefasst werden [BG06]. Zweitens ist das Integral (3.24g) mit der Wahl der Ansatzfunktionen (3.37) und der Sequenzeigenschaft der Ansatzfunktionenräume [Bos98, S. 134] im Sinne eines $\mathbb{L}^2$ -Skalarprodukts wohldefiniert. Die Konsistenz der FE-Formulierung (3.23) liegt in (3.32) begründet und ist in [ZC06, Kapitel 3] gezeigt.

Elektrisches Skalarpotenzial

Ausgangspunkt ist ebenfalls ein massiver Leiter Ω_c nach Abbildung 3.3(a) mit elektrischer Leitfähigkeit σ_{imp} . Das ohmsche Gesetz (2.6b) und die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes im statischen Fall

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \text{für } \omega = 0 \quad (3.47)$$

motivieren die Bestimmung der Stromdichte über ein elektrisches Skalarpotenzial ϕ zu

$$\mathbf{J}_{\text{imp}} = -\sigma_{\text{imp}} \text{grad } \phi, \quad (3.48)$$

siehe beispielsweise [IH06]. Im Gegensatz zum Stromdichte-Vektorpotenzial ist ϕ ein Element des primalen Komplexes [Ton01], der im Diskreten dem bereits vorhandenen FE-Netz entspricht. Über (3.48) können keine Ströme in Leitern dargestellt werden, deren erste Betti-Zahl ungleich Null ist, weil zur Darstellung rotationsfreier Funktionen (3.47) in Ω_c außer Gradienten Elemente der ersten Homologiegruppe nötig wären [Bos98, Kapitel 5]. Daher wird der Leiter entlang einer Querschnittsfläche Γ_c aufgetrennt, sodass ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\hat{\Omega}_c$ mit Kontaktflächen Γ_c^+ und Γ_c^- entsteht, siehe Abbildung 3.3(b). Zur Bestimmung dieser Schnittfläche existieren automatische Algorithmen [DST10]. Die DGL zur Bestimmung des Skalarpotenzials folgt aus (2.7) zu

$$-\text{div } \sigma_{\text{imp}} \text{grad } \phi = 0 \quad \text{in } \hat{\Omega}_c. \quad (3.49)$$

Approximation des Skalarpotenzials mit skalaren Ansatzfunktionen

$$\phi = \sum_k [\mathbf{f}]_k v_k \quad \text{mit } v_k \in \mathcal{V}^{h,p}(\hat{\Omega}_c) \quad (3.50)$$

und Galerkin-Testen führt auf ein FE-Problem

$$\mathbf{S}_\phi \mathbf{f} = 0, \quad (3.51a)$$

$$\phi = 1 \quad \text{auf } \Gamma_c^+, \quad (3.51b)$$

$$\phi = 0 \quad \text{auf } \Gamma_c^-, \quad (3.51c)$$

mit

$$[\mathbf{S}_\phi]_{ij} = \int_{\hat{\Omega}_c} \text{grad } v_i \cdot \sigma_{\text{imp}} \text{grad } v_j \, d\Omega. \quad (3.52)$$

Die Randbedingungen entsprechen der Anregung mit einer Einheitsspannung. Mit (3.51a) ist ϕ schwach divergenzfrei in $\hat{\Omega}_c$, aber nicht notwendigerweise schwach divergenzfrei in Ω_c , denn durch das Auftrennen des Leiters ist im Allgemeinen

$$\int_{\Omega_c} \text{grad } v \cdot \sigma_{\text{imp}} \text{grad } \phi \, d\Omega \neq 0 \quad \text{für } v \in \mathcal{V}^{h,p}(\Omega_c) \text{ und } v|_{\Gamma_c} \neq 0. \quad (3.53)$$

Numerische Experimente in Abschnitt 3.4 zeigen keinen großen Einfluss dieses Umstands.

Der Gleichstromwiderstand des Leiters folgt über die ohmsche Verlustleistung zu

$$\left(R_{DC}^\phi\right)^{-1} = \frac{P}{U^2} \stackrel{U \equiv 1}{=} \int_{\Omega_c} \text{grad } \phi \cdot \sigma \text{grad } \phi \, d\Omega = \mathbf{f}^T \mathbf{S}_\phi \mathbf{f}. \quad (3.54)$$

Homogene Stromdichte

Die Geometrie mancher physikalischer Leiteranordnungen, z. B. die von Spulen mit sehr vielen Windungen oder Drähten mit einer komplexen Mikrostruktur wie die in Kapitel 4 behandelten Litzendrähte, kann nicht oder nur unter sehr hohem Aufwand modelliert werden. Ist die mikroskopische Stromverteilung nicht von Interesse, kann eine homogene, mittlere Stromdichte vorgegeben werden [LR88]. In diesem Fall repräsentiert Ω_c die gesamte Leiteranordnung, beispielsweise das Wicklungsfenster einer Spule, was eine deutliche Vereinfachung zur tatsächlichen Geometrie darstellt. Für eine Spule mit Klemmenstrom I , N_w Windungen, einer Querschnittsfläche Γ_w und Stromrichtung $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ gilt

$$\mathbf{J}_{\text{imp}} = I \frac{N_w}{\Gamma_w} \hat{\mathbf{e}}_\tau. \quad (3.55)$$

Im Gegensatz zur Berechnung der Stromdichte für massive Leiter muss $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ analytisch vorgegeben werden.

Systembeschreibung

Mit bekannter Stromdichte als Systemeingang von (3.30) wird außerdem ein Ausdruck für die resultierende Klemmenspannung U benötigt. Leistungsbetrachtungen führen auf die in [LR88], [HS05] angegebene Formel

$$U = j\omega \int_{\Omega_c} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{imp}} d\Omega + Z_c I \quad (3.56)$$

mit der Stromdichte eines Einheitsstroms $\hat{\mathbf{J}}_{\text{imp}}$.

Gegeben seien n_C stromgesteuerte Leiter ohne Wirbelströme Ω_c^i mit Serienimpedanzen Z_c^i , indiziert durch $i \in \{1, \dots, n_C\}$. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden erlauben die Berechnung der Stromdichten von Klemmenströmen I^i nach

$$\mathbf{J}_{\text{imp}}^i = \hat{\mathbf{J}}_{\text{imp}}^i I^i. \quad (3.57)$$

Angelehnt an (3.24g) und (3.56) werden Vektoren

$$[\mathbf{b}_A^i]_k = \int_{\Omega_c^i} \mathbf{w}_k \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{imp}}^i d\Omega \quad (3.58)$$

definiert. Gleichung (3.24i) entfällt für diese Art der Anregung wegen $\sigma = 0$ in Ω_c^i . Damit lautet das gesuchte FE-Gleichungssystem

$$(\mathbf{A}_0 + j\omega \mathbf{A}_1) \mathbf{x} = \mathbf{B}_C \mathbf{i}_C, \quad (3.59a)$$

$$\mathbf{u}_C = j\omega \mathbf{B}_C^T \mathbf{x} + \mathbf{Z}_C \mathbf{i}_C, \quad (3.59b)$$

mit den Matrizen nach (3.31) und

$$\mathbf{B}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^1 & \dots & \mathbf{b}_A^{n_C} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.60a)$$

$$\mathbf{i}_C = [I^1 \quad \dots \quad I^{n_C}]^T, \quad (3.60b)$$

$$\mathbf{u}_C = [U^1 \quad \dots \quad U^{n_C}]^T, \quad (3.60c)$$

$$\mathbf{Z}_C = \text{diag} [Z_c^1 \quad \dots \quad Z_c^{n_C}]. \quad (3.60d)$$

3.2.2 Spannungsanregung für Strukturen ohne Wirbelströme

Das Vorgehen für die Spannungsanregung verläuft im Wesentlichen analog zu Abschnitt 3.2.1 und wird daher nur knapp erläutert. Betrachtet werden n_V spannungsgesteuerte Leiter Ω_c^i mit $i \in \{1, \dots, n_V\}$ mit den gleichen Konventionen für Ströme,

Spannungen, Serienimpedanzen und (3.58) wie in Abschnitt 3.2.1. Die Spannung kann vorgegeben werden, indem (3.56) für jeden Leiter als zusätzliche Gleichung mit unbekannten Strömen in das Modell aufgenommen wird. Die FE-Gleichungen lauten

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 + j\omega \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_V \\ j\omega \mathbf{B}_V^T & \mathbf{Z}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{i}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_V \end{bmatrix} \mathbf{u}_V, \quad (3.61a)$$

$$\mathbf{i}_V = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{i}_V \end{bmatrix}, \quad (3.61b)$$

mit den Matrizen nach Abschnitt 3.1.2, der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_V \in \mathbb{R}^{n_V \times n_V}$ und

$$\mathbf{B}_V = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^1 & \dots & \mathbf{b}_A^{n_V} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.62a)$$

$$\mathbf{i}_V = [I^1 \quad \dots \quad I^{n_V}]^T, \quad (3.62b)$$

$$\mathbf{u}_V = [U^1 \quad \dots \quad U^{n_V}]^T, \quad (3.62c)$$

$$\mathbf{Z}_V = \text{diag} [Z_c^1 \quad \dots \quad Z_c^{n_V}]. \quad (3.62d)$$

Es ist zu erkennen, dass die Systemmatrix in (3.61) nicht symmetrisch ist, doch analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.1.2 hilft auch hier eine Skalierung nach [LR88]. Eine Formulierung in den negativen Ladungen

$$\mathbf{q}_V = -(j\omega)^{-1} \mathbf{i}_V \quad (3.63)$$

führt auf das symmetrische Gleichungssystem

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_V \\ \mathbf{B}_V^T & -\mathbf{Z}_V \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_V \end{bmatrix} \mathbf{u}_V, \quad (3.64a)$$

$$\mathbf{i}_V = -j\omega \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q}_V \end{bmatrix}. \quad (3.64b)$$

3.2.3 Stromanregung für Strukturen mit Wirbelströmen

Zur Realisierung stromgesteuerter Leiter mit Wirbelströmen existieren verschiedene Ansätze: Das Aufstellen von Strom-Bilanzgleichungen über Γ_c resultiert in unsymmetrischen Formulierungen [KJP⁺04]. Die in dieser Arbeit favorisierte symmetrische Methode basiert auf einer Idee aus [DHL99], worin ein Quellen-Skalarpotenzial eingeführt wird, das einen Sprung über dem Querschnitt Γ_c aufweist. Mathematisch detailliertere Erläuterungen sind [HS05] zu entnehmen. In bisherigen Publikationen kommt dem üblichen Skalarpotenzial φ aus (3.4) die Rolle des konstanten Quellen-Skalarpotenzials zu. Damit entspricht die Formulierung im Leiter aber der $\mathbf{A}^*$ -Formulierung, welche sowohl beim iterativen als auch beim direkten Lösen schlechtere numerische Eigenschaften aufweist [FNO96], [Bír99]. Es wird daher vorgeschlagen, zusätzlich zu φ bzw. V ein Quellen-Skalarpotenzial einzuführen.

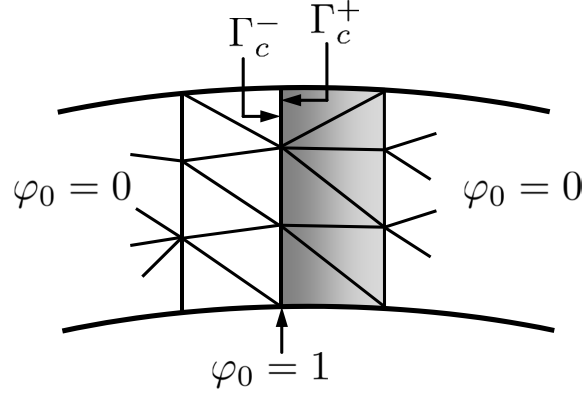


Abbildung 3.4: Quellen-Skalarpotenzial φ_0 auf schematischem FE-Netz eines Leiters.

Werden im massiven Leiter Ω_c nach Abbildung 3.3(a) Wirbelströme zugelassen mittels positiver Leitfähigkeit $\sigma > 0$, ist die Vorgabe von $\mathbf{J}_{\text{imp}}$ für eine Stromanregung nicht zielführend, denn zusätzlich zu dem eingepprägten Strom stellen sich diesem entgegenwirkende Wirbelströme ein, sodass der tatsächliche Klemmenstrom unbekannt ist. Alternativ wird ein Quellen-Skalarpotenzial φ_0 eingeführt mit

$$\mathbf{J}_{\text{imp}} = \sigma \mathbf{E}_{\text{imp}} = -\sigma \text{grad } \varphi_0, \quad (3.65)$$

dem die Rolle einer Klemmenspannung zukommt. Für stetige Skalarfelder v verschwindet die Spannung

$$U = \oint_c \text{grad } v \cdot d\hat{\mathbf{e}}_\tau = 0, \quad (3.66)$$

weil der Weg c entlang der Stromrichtung $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ in Ω_c geschlossen ist. Aus diesem Grund wird φ_0 nach Abbildung 3.4 so definiert, dass es einen Sprung in einer Querschnittsfläche Γ_c des Leiters aufweist,

$$\varphi_0|_{\Gamma_c^-} = 0, \quad (3.67)$$

$$\varphi_0|_{\Gamma_c^+} = 1. \quad (3.68)$$

Daraus ergibt sich eine eingepprägte Spannung von

$$U = \oint_c \text{grad } \varphi_0 \cdot d\hat{\mathbf{e}}_\tau = 1. \quad (3.69)$$

Im Hinblick auf eine einfache Implementierung und dünn besetzte FE-Matrizen wird nach [DHL99] nur den Ansatzfunktionen von φ_0 , die mit Knoten auf Γ_c^+ assoziiert sind, der Wert Eins zugewiesen. Für den Klemmenstrom gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_c} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = - \int_{\Omega_c} \mathbf{J} \cdot \text{grad } \varphi_0 d\Omega \\ &= \int_{\Omega_c} j\omega\sigma \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi_0 + j\omega \text{grad } V \cdot \sigma \text{grad } \varphi_0 + \text{grad } \varphi_0 \cdot \sigma \text{grad } \varphi_0 d\Omega. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Eine Betrachtung der Scheinleistung S mit

$$S = UI^* = \int_{\Omega} j\omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* d\Omega = \varphi_0|_{\Gamma_c^+} I^*, \quad (3.71)$$

motiviert die Interpretation der Festlegung (3.65) mit (3.68) als Anregung mit einer Einheitsspannung.

Beweis. Die komplex konjugierte Gesamtscheinleistung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{\Omega} -j\omega \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} -j\omega \operatorname{rot} \mathbf{A}^* \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} + (j\omega \mathbf{A}^* + j\omega \operatorname{grad} V^* + \operatorname{grad} \varphi_0^*) \\ &\quad \cdot \sigma (-j\omega \mathbf{A} - j\omega \operatorname{grad} V - \operatorname{grad} \varphi_0) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} -j\omega (\operatorname{rot} \mathbf{A}^* \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} + j\omega \mathbf{A}^* \cdot \sigma (\mathbf{A} + \operatorname{grad} V) - \mathbf{A}^* \cdot \operatorname{grad} \varphi_0) \\ &\quad - j\omega \operatorname{grad} V^* \cdot \sigma (j\omega \mathbf{A} + j\omega \operatorname{grad} V + \operatorname{grad} \varphi_0) \\ &\quad - \operatorname{grad} \varphi_0^* \cdot \sigma (j\omega \mathbf{A} + j\omega \operatorname{grad} V + \operatorname{grad} \varphi_0) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Einsetzen von (3.12a) und (3.12b) führt auf

$$S^* = \int_{\Omega} -\operatorname{grad} \varphi_0^* \cdot \sigma (j\omega \mathbf{A} + j\omega \operatorname{grad} V + \operatorname{grad} \varphi_0) d\Omega \stackrel{(3.70)}{=} \varphi_0^*|_{\Gamma_c^+} I. \quad (3.73)$$

□

Damit lautet ein FE-Gleichungssystem mit einem stromgesteuerten Leiter

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} + j\omega \mathbf{T} + j\omega \mathbf{Z} & j\omega \mathbf{M}_{AV} & -\mathbf{b}_A \\ j\omega \mathbf{M}_{VA} & j\omega \mathbf{M}_{VV} & -\mathbf{b}_V \\ -j\omega \mathbf{b}_A^T & -j\omega \mathbf{b}_V^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I, \quad (3.74a)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \\ U \end{bmatrix}, \quad (3.74b)$$

mit den in (3.24) eingeführten Größen und

$$[\mathbf{b}_A]_i = - \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i \cdot \operatorname{grad} \varphi_0 d\Omega, \quad (3.75a)$$

$$[\mathbf{b}_V]_i = - \int_{\Omega_c} v_i \operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{imp}} d\Omega = - \int_{\Omega_c} \operatorname{grad} v_i \cdot \sigma \operatorname{grad} \varphi_0 d\Omega, \quad (3.75b)$$

$$d = \int_{\Omega_c} \operatorname{grad} \varphi_0 \cdot \sigma \operatorname{grad} \varphi_0 d\Omega. \quad (3.75c)$$

In aller Regel ist eine Formulierung für eine Spule mit mehreren in Serie geschalteten Windungen $i \in \{1, \dots, n_w\}$ gewünscht, sodass die Klemmenströme gleich sind und die Klemmenspannung sich als Summe aller Teil-Klemmenspannungen U_w^i ergibt. Unter Verwendung von (3.31) lauten die gesuchten Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 + j\omega \mathbf{A}_1 & \hat{\mathbf{B}}_{CS} \\ j\omega \hat{\mathbf{B}}_{CS}^T & \hat{\mathbf{D}}_{CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{n_w} \end{bmatrix} I, \quad (3.76a)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n_w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_w \end{bmatrix}, \quad (3.76b)$$

mit

$$\hat{\mathbf{B}}_{CS} = - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^1 & \dots & \mathbf{b}_A^{n_w} \\ \mathbf{b}_V^1 & \dots & \mathbf{b}_V^{n_w} \end{bmatrix}, \quad (3.77a)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{CS} = \text{diag} [d^1 \quad \dots \quad d^{n_w}], \quad (3.77b)$$

$$\mathbf{u}_w = [U^1 \quad \dots \quad U^{n_w}]^T, \quad (3.77c)$$

$$\mathbf{1}_{n_w} = [1 \quad \dots \quad 1]^T \in \mathbb{R}^{n_w}. \quad (3.77d)$$

Analog zu den bisher betrachteten Anregungsfällen werden n_{CS} Spulen mit je n_w^i seriell geschalteten Windungen betrachtet. Gleichzeitig wird durch das Umskalieren des Quellen-Skalarpotenzials

$$V_0 = (j\omega)^{-1} \varphi_0 \quad (3.78)$$

eine Symmetrisierung des Gleichungssystems erreicht. Zusammenfassend lautet das FE-Gleichungssystem

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{CS} \\ \mathbf{B}_{CS}^T & \mathbf{D}_{CS} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_{w,CS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{CS} \end{bmatrix} \mathbf{i}_{CS}, \quad (3.79a)$$

$$\mathbf{u}_{CS} = j\omega \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{CS}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_{w,CS} \end{bmatrix}, \quad (3.79b)$$

mit

$$\mathbf{B}_{CS} = [\hat{\mathbf{B}}_{CS}^1 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{B}}_{CS}^{n_{CS}}], \quad (3.80a)$$

$$\mathbf{D}_{CS} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{CS}^1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \hat{\mathbf{D}}_{CS}^{n_{CS}} \end{bmatrix}, \quad (3.80b)$$

$$\mathbf{u}_{w,CS} = (j\omega)^{-1} [\mathbf{u}_w^{1,T} \quad \dots \quad \mathbf{u}_w^{n_{CS},T}]^T, \quad (3.80c)$$

$$\mathbf{1}_{CS} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_w^1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \mathbf{1}_{n_w^{n_{CS}}} \end{bmatrix}. \quad (3.80d)$$

3.2.4 Spannungsanregung für Strukturen mit Wirbelströmen

Zuletzt werden angeregte Leiter mit Wirbelströmen betrachtet, bei denen eine Klemmenspannung vorgegeben wird. Betrachtungen ähnlich zum vorangehenden Abschnitt ergeben für n_{VS} Spulen mit je n_w^i in Serie geschalteten Leitern

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{VS} & 0 \\ \mathbf{B}_{VS}^T & \mathbf{D}_{VS} & \mathbf{1}_{VS} \\ 0 & \mathbf{1}_{VS}^T & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_{w,VS} \\ \mathbf{q}_{VS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}_{VS} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{VS}, \quad (3.81a)$$

$$\mathbf{i}_{VS} = -j\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I}_{VS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_{w,VS} \\ \mathbf{q}_{VS} \end{bmatrix}, \quad (3.81b)$$

mit den Definitionen von $\mathbf{B}_{VS}$, $\mathbf{D}_{VS}$, $\mathbf{1}_{VS}$ und $\mathbf{u}_{w,VS}$ analog zu (3.80), der $\sum_i n_w^i$ -dimensionalen Einheitsmatrix $\mathbf{I}_{VS}$ und

$$\mathbf{q}_{VS} = -(j\omega)^{-1} [I^1 \ \dots \ I^{n_{VS}}]^T. \quad (3.82)$$

3.2.5 Impedanzformulierung

Die in diesem Kapitel vorgestellten vier Anregungsarten können problemlos in einer einzigen Simulation miteinander kombiniert werden, inklusive der Neumann-Randbedingungen in Form von $\mathbf{b}_H$. Da diese Formulierung keine prinzipiell neue Erkenntnis bringt, wird auf die sehr unübersichtliche Darstellung verzichtet. Nur ein wichtiger Spezialfall, die sogenannte Impedanzformulierung, die als Systemausgang die Impedanzmatrix liefert, wird präsentiert. Die Impedanzmatrix $\mathbf{Z}$ eines Mehrleitersystems, mit Klemmenspannungen und -strömen in Vektoren $\mathbf{u}$ bzw. $\mathbf{i}$ zusammengefasst, ist definiert durch

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{i}, \quad (3.83)$$

siehe [Poz98, S. 192]. Sie ist eine wichtige Kenngröße bei der Charakterisierung linearer Niederfrequenzprobleme. Weitere Kenngrößen sind die Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}$ und die Widerstandsmatrix $\mathbf{R}$, gegeben durch

$$\mathbf{L} = (j\omega)^{-1} \text{Im } \mathbf{Z}, \quad (3.84)$$

$$\mathbf{R} = \text{Re } \mathbf{Z}, \quad (3.85)$$

sowie die induktiven Kopplungsfaktoren nach [Pau90, S. 257],

$$k_{ij} = \frac{[\mathbf{L}]_{ij}}{\sqrt{[\mathbf{L}]_{ii}[\mathbf{L}]_{jj}}}. \quad (3.86)$$

Wie aus (3.83) ersichtlich, wird die Impedanzformulierung erhalten durch Kombination stromgesteuerter Spulen nach den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.3 und Wahl kanonischer Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_i = [0 \dots \underbrace{1}_{\text{Eintrag } i} \dots 0] \quad (3.87)$$

als Systemeingang. Inhomogene Neumann-Randbedingungen müssen aufgrund der Linearität der Gleichungen nicht berücksichtigt werden. Es ergibt sich unter Zusammenfassen der FE-Gleichungen und der Netzwerkgleichungen

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{CS} \\ \mathbf{B}_{CS}^T & \mathbf{D}_{CS} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_{w,CS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_C & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{CS} \end{bmatrix} \mathbf{e}_i, \quad (3.88a)$$

$$[\mathbf{Z}]_{(:,i)} = j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{B}_C^T & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{CS}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_{w,CS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i, \quad (3.88b)$$

mit den in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.3 definierten Größen.

3.3 Schnelle Frequenzgangsberechnungen quasistationärer Magnetfelder

Mithilfe der in diesem Kapitel vorgestellten Methoden ist eine Charakterisierung elektromagnetischer Strukturen unter quasistationären Verhältnissen im Frequenzbereich möglich. Die Auswertung der Modelle erfordert pro Frequenzpunkt die Lösung eines hochdimensionalen, schwach besetzten Gleichungssystems. Auch wenn einzelne Auswertungen mit vertretbarem numerischen Aufwand verbunden sind, ist die Berechnung breitbandiger Frequenzgänge um ein Vielfaches zeitaufwendiger.

Wie in Abschnitt 2.3 dargelegt, können die hohen numerischen Kosten durch Anwendung von MOR verringert werden. FE-Formulierungen basierend auf den vier Anregungsarten und deren Kombinationen weisen die Struktur (2.40), genauer (2.35) auf, sodass die in Abschnitt 2.3 präsentierten MOR-Verfahren eingesetzt werden können. Generell wird vorgeschlagen, die Projektion nur auf die FE-Gleichungen anzuwenden und nicht auf zusätzliche Netzwerkgleichungen, wie sie beispielsweise in (3.88) vorhanden sind. So bleiben im Sinne einer strukturerhaltenden Ordnungsreduktion [Fre04] die (skalierten) Ströme und Spannungen zugeordneten Unbekannten mit ihren physikalischen Bedeutungen im reduzierten Modell erhalten. Die Dimension des ROMs wird dadurch nur marginal erhöht, weil die Anzahl der Leiter stets viel kleiner als N ist.

Am Beispiel der Impedanzformulierung (3.88) werden die Gleichungen ausformuliert. Ein reduziertes Modell ist gegeben durch

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 & \tilde{\mathbf{B}}_{CS} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{CS}^T & \mathbf{D}_{CS} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_{w,CS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_C & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{CS} \end{bmatrix} \mathbf{e}_i, \quad (3.89a)$$

$$[\mathbf{Z}]_{(:,i)} = j\omega \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_C^T & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{CS}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_{w,CS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \quad (3.89b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{V}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V}, \quad (3.90a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{V}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{V}, \quad (3.90b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{CS} = \mathbf{V}^T \mathbf{B}_{CS}, \quad (3.90c)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_C = \mathbf{V}^T \mathbf{B}_C. \quad (3.90d)$$

Die Projektionsmatrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times n}$ mit $n \ll N$ kann dabei durch ein EP-Verfahren nach Definition 2.4 oder ein MP-Verfahren nach Definition 2.6 bestimmt werden. Wie bereits in den Grundlagen angesprochen, sind die reduzierten Matrizen (3.90) im Gegensatz zu den Matrizen des vollen Modells (3.88) voll besetzt, aber von kleiner Dimension, sodass die Lösung von (3.89) um Größenordnungen schneller berechnet ist als die Lösung des Ausgangsmodells. Für den Fall, dass ein Einpunktverfahren verwendet wird, gilt Lemma 2.2 zum Momentenabgleich. Das ROM ist effizient im Sinne von Definition 2.7.

Ein Punkt, der bisher nicht diskutiert wurde, betrifft die Genauigkeit des ROMs. Diese kann bei EP-Verfahren über die Ordnung des Momentenabgleichs q und bei MP-Verfahren über die Anzahl der Entwicklungspunkte beeinflusst werden. Beide schlagen sich in der ROM-Dimension nieder. Da a priori nicht bekannt ist, wie groß das ROM für eine gegebene Genauigkeit sein muss, kommen oft auf Fehlerschätzern oder -indikatoren beruhende adaptive Verfahren zum Einsatz [PR06], [SFDE09]. Ein leicht zu berechnender Fehlerindikator ist die Norm des relativen Residuums r bezüglich des vollen Modells [dlRRM09], die für (3.89) wie folgt lautet:

$$r = \frac{\left\| \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{CS} \\ \mathbf{B}_{CS}^T & \mathbf{D}_{CS} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_{w,CS} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_C & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{CS} \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \right\|_2}{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{B}_C & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{CS} \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \right\|_2}. \quad (3.91)$$

Von Vorteil an diesem Indikator ist die Möglichkeit, ihn ausschließlich über Größen des reduzierten Modells zu berechnen [KFK⁺11], sodass auch adaptive Verfahren effizient im Sinne von Definition 2.7 sind. In der vorliegenden Arbeit wird für MP-Verfahren Algorithmus 3.1 angewandt. Es handelt sich um ein Greedy-Verfahren, welches in der Praxis für nicht-resonante Strukturen exponentielle Konvergenz aufweist [KFK⁺11].

Algorithmus 3.1 Adaptives Mehrpunktverfahren mit Greedy-Strategie

Eingabe: Ausgangsmodell Σ , Parametermenge $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^P$, Fehlerschranke ϵ **Ausgabe:** Reduziertes Modell $\tilde{\Sigma}$ **begin**Löse $\Sigma(\mathbf{p}_1)$ nach $\mathbf{x}$ Initialisiere Projektionsmatrix $\mathbf{V} = \text{QR}(\mathbf{x})$ **repeat** Berechne ROM $\tilde{\Sigma}$ mittels $\mathbf{V}$ **for** $i=1 \dots P$ **do** Löse $\tilde{\Sigma}(\mathbf{p}_i)$ nach $\tilde{\mathbf{x}}_i$ Berechne relatives Residuum r_i bezüglich $\Sigma(\mathbf{p}_i)$ **end for** Parameter mit maximalem Fehler $m = \arg \max_i r_i$ **if** $r_m > \epsilon$ **then** Löse $\Sigma(\mathbf{p}_m)$ nach $\mathbf{x}$ Aktualisiere Projektionsmatrix $\mathbf{V} \leftarrow \text{QR}([\mathbf{V} \mathbf{x}])$ **end if****until** $r_m \leq \epsilon$ **end**

3.4 Numerische Ergebnisse

Die Simulation aller präsentierten numerischen Beispiele basiert auf Prototyp-Implementierungen in der Software MathWorks MATLAB. Version R2011b kommt auf einem Intel Core i5-4670K zum Einsatz und Version R2014a auf einem Intel Core i7-2600K.

Stromführender Torus

Zum Vergleich der drei in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Arten zur Berechnung der eingepprägten Stromdichte wird ein stromführender Torus nach Abbildung 3.5 betrachtet. Er befindet sich zentriert in einer Box von 10 mm Kantenlänge mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Die Materialeigenschaften entsprechen denen des Vakuums. In Tabelle 3.1 sind jeweils die Induktivität L sowie der Gleichstromwiderstand R für verschiedene Ordnungen p der Ansatzfunktionen dargestellt. Die eingepprägte Stromdichte wird über das Stromdichte-Vektorpotenzial $\mathbf{T}$ oder das elektrische Skalarpotenzial ϕ berechnet oder mittels $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ analytisch vorgegeben. Sowohl Berechnung über $\mathbf{T}$ als auch über ϕ liefert ab $p = 2$ Werte für R und L , welche einen relativen Unterschied u von weniger als 0.3% aufweisen,

$$u = |x^{\mathbf{T}} - x^\phi| / |x^{\mathbf{T}}| \quad \text{mit } x \in \{R, L\}. \quad (3.92)$$

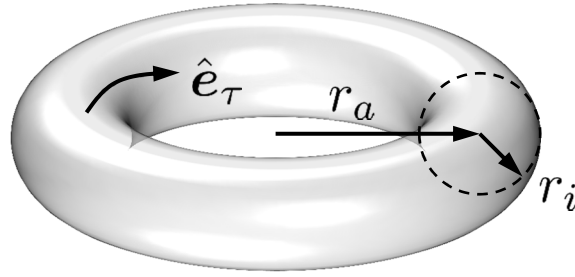


Abbildung 3.5: Stromführender Torus mit Radien $r_a = 3$ mm und $r_i = 1$ mm.

p	Anzahl der Unbekannten	$\mathbf{J}_{\text{imp}}$ über	R in $m\Omega$	L in nH
1	25.051	$\mathbf{T}$	0,60654	4,2942
		ϕ	0,60033	4,2624
		analyt.	0,58284	3,9931
2	129.965	$\mathbf{T}$	0,60549	4,5227
		ϕ	0,60407	4,5214
		analyt.	0,58284	4,2153
3	369.557	$\mathbf{T}$	0,60444	4,5302
		ϕ	0,60412	4,5295
		analyt.	0,58284	4,2218

Tabelle 3.1: Simulationsergebnisse für stromführenden Torus.

Beide Methoden sind daher gleichermaßen geeignet. Die stärker abweichenden Werte bei der analytischen Vorgabe von $\mathbf{J}_{\text{imp}}$ sind über den Geometrie-Approximationsfehler des Torus zu erklären, wie durch numerische Tests bestätigt wird.

Spule mit Skineffekt

Um die schnelle Frequenzgangsberechnung zu demonstrieren, wird eine rotationssymmetrische Spule #1 nach Abbildung 3.6 betrachtet. Der Ferrit besitzt eine relative Permeabilität von $\mu_r = 450$ und keine elektrische Leitfähigkeit, für die 20 Windungen der Spule gilt $\mu_r = 1$ und $\sigma = 3 \cdot 10^7$ S/m. Die Induktivität L und der Widerstand R der Spule sind in Abbildung 3.7 über der Frequenz $f = [1 \text{ Hz}; 100 \text{ kHz}]$ dargestellt. Wie zu erwarten sinkt die Induktivität durch den Skineffekt in den Leitern über der Frequenz, während der Widerstand ansteigt.

Zusätzlich zur konventionellen Berechnung mit der Impedanzformulierung (3.88) wird ein EP-ROM der Ordnung $q = 12$ um den Entwicklungspunkt $f = 10 \text{ kHz}$ erstellt und mittels Algorithmus 3.1 ein MP-ROM mit Fehlertoleranz $\epsilon = 10^{-4}$. Optisch ist in Abbildung 3.7 eine gute Übereinstimmung zwischen den ROMs und dem vollen Modell zu erkennen. Abbildung 3.8 stellt den relativen Fehler in der

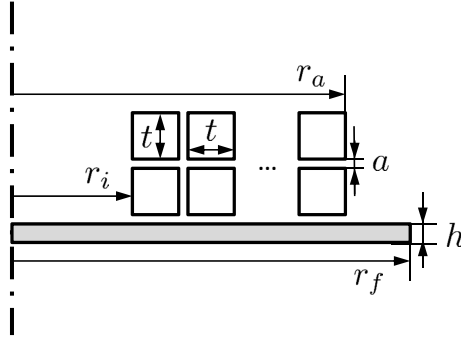


Abbildung 3.6: Querschnitt durch Spule #1 mit Ferritplatte und 20 Windungen, $r_i = 11,1$ mm, $r_a = 22,1$ mm, $r_f = 23,5$ mm, $h = 1$ mm, $t = 1,01$ mm und $a = 0,1$ mm.

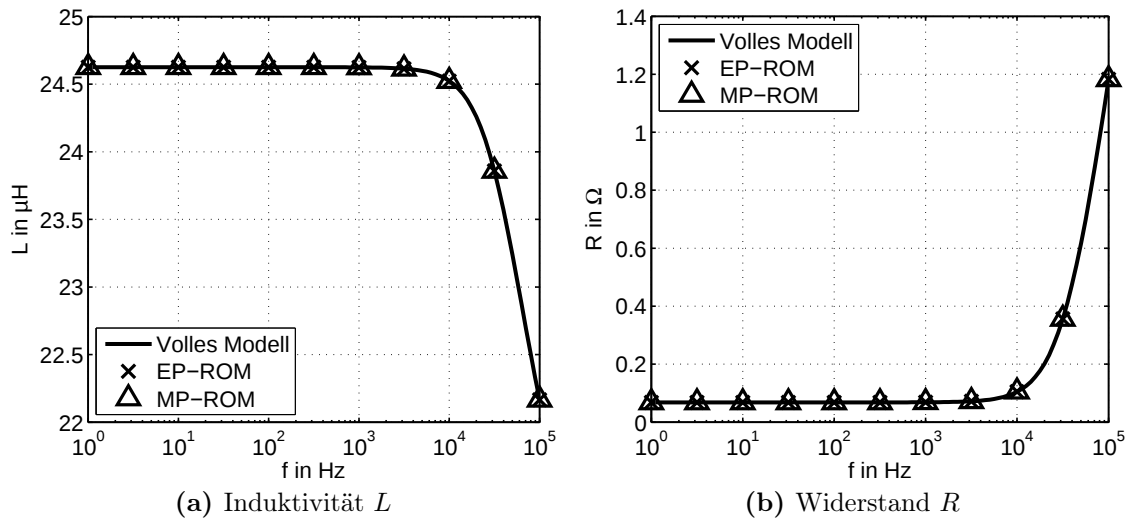


Abbildung 3.7: Kenngrößen der Spule über der Frequenz f .

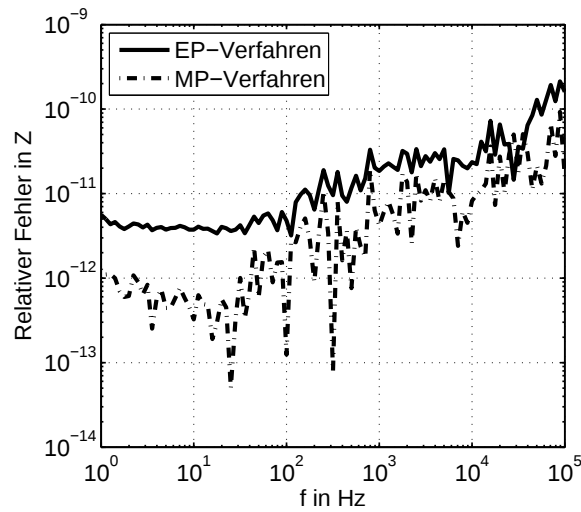


Abbildung 3.8: Relativer Fehler in der Impedanz für EP- und MP-ROMs.

	Volles Modell ^a	EP-ROM	MP-ROM
Anzahl Unbekannte	1.464.416	33	28
davon FE-Unbekannte	1.464.396	13	8
Modellgenerierung in s	81,9	486	3026
Lösung pro Frequenzpunkt in s	358	$3,50 \cdot 10^{-4}$	$2,83 \cdot 10^{-4}$
Auswertungen pro s	$2,79 \cdot 10^{-3}$	2860	3528

Rechnung auf einem Intel Core i5-4670K CPU mit 3.4 GHz und 32 GB RAM.

^a Intel MKL 11.1 PARDISO zur Faktorisierung.

Tabelle 3.2: Simulationszeiten für Spule #1.

Impedanz e mit Bezug auf die Impedanz des vollen Modells Z_{ref} quantitativ dar,

$$e = \frac{|Z - Z_{\text{ref}}|}{|Z_{\text{ref}}|}. \quad (3.93)$$

Das Fehlerniveau liegt im Bereich des numerischen Rauschens, folglich entsteht kein relevanter Genauigkeitsverlust durch den Einsatz eines ROMs.

Schließlich gibt Tabelle 3.2 eine Übersicht über die Rechenzeiten. Die Modellgenerierung umfasst für das volle Modell die Assemblierung der Größen in (3.88), während für die reduzierten Modelle die Erstellung einer Projektionsmatrix und der Projektionsschritt ebenfalls inbegriffen sind. Durch die Windungen der Spule enthält das Modell 20 Freiheitsgrade $\mathbf{u}_{w,CS}$ laut (3.88), die nicht von der Ordnungsreduktion beeinflusst werden. Lösungs- oder Auswertungszeiten umfassen in der gesamten Arbeit sowohl die Dauer zum Berechnen des Lösungsvektors als auch des Systemausgangs. Für affine Modelle wie (2.40) wird zusätzlich die Zeit zur Berechnung der Koeffizienten und Bildung der Summen mitberücksichtigt. Die Ergebnisse entsprechen den Voraussagen aus Abschnitt 2.3. Während das EP-ROM schneller generiert ist, weil nur eine Faktorisierung der Systemmatrix benötigt wird, ist das MP-ROM kleiner bei etwas höherer Genauigkeit laut Abbildung 3.8. Das EP-ROM amortisiert sich ab zwei Auswertungen, das MP-ROM ab neun Auswertungen. Bei beiden ROMs liegt die Rechengeschwindigkeit um einen Faktor von mehr als einer Million über der des vollen Modells.

3.5 Fazit

Mit der $\mathbf{AV}\text{-}\mathbf{A}$ -Wirbelstromformulierung können Leiter allgemeiner Geometrie simuliert werden. MOR-Verfahren für affine Systeme sind unmittelbar anwendbar, um eine schnelle Auswertung der Frequenzgänge der Klemmenströme- und Spannungen zu ermöglichen. Der Ordnungsreduktionsfehler kann bis weit unterhalb zu erwartender Diskretisierungsfehler verringert werden, wobei die ROM-Dimensionen typischerweise kleiner sind als bei Modellen resonanter elektromagnetischer Strukturen [ZC06].

Kapitel 4

Numerische Charakterisierung von Litzendrähten mittels Homogenisierung

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Simulationsverfahren für quasistationäre Magnetfelder aus dem vorangehenden Kapitel 3 ist die Charakterisierung induktiver Bauelemente in elektronischen Schaltungen. Durch den in vielen Bereichen der Elektronik herrschenden Trend zur Miniaturisierung steigen die Betriebsfrequenzen der Schaltungen. Mit der Frequenz steigen aber auch durch Wirbelströme verursachte Verluste. Als Gegenmaßnahme wird üblicherweise Litzendraht statt massivem Draht verbaut. Dieser besteht aus vielen dünnen, gegeneinander isolierten und miteinander verseilten Einzeldrähten, den sogenannten Litzen. Durch die Verseilung wird ein näherungsweise gleicher Strom in jeder Litze erreicht, gleichzeitig sind die Wirbelstromverluste durch den dünnen Litzenquerschnitt deutlich schwächer ausgeprägt. Litzendraht kommt beispielsweise in Spulen für die kontaktlose Energieübertragung [B4], in induktiven Kochfeldern [AAB⁺06] und in verlustarmen Spulen für Schaltetzteile zum Einsatz. Auch wenn die präsentierten Verfahren für allgemeine, aus Litzendraht bestehende Bauteile gültig sind, wird der einfachen Darstellung halber die Terminologie auf Spulen angepasst.

Für die konventionelle Feldsimulation ergeben sich durch die komplexe Mikrostruktur von Litzendrähten zwei Probleme:

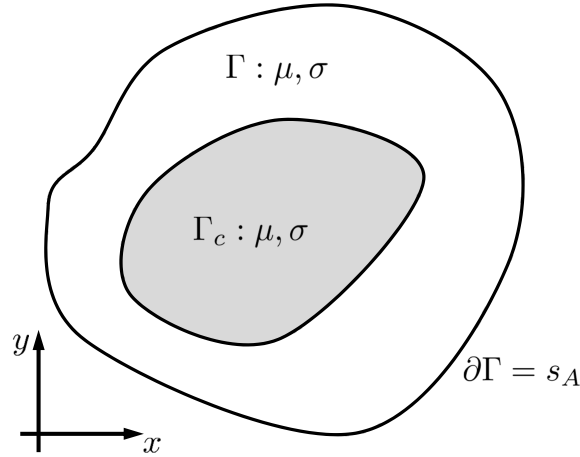
- Im Allgemeinen wird es nicht möglich sein, ein CAD-Modell und daraus ein geeignetes FE-Netz zu erzeugen.
- Selbst wenn ein FE-Netz existiert, wird dieses durch seine Komplexität auf Gleichungssysteme so hoher Dimension führen, dass deren Lösung nicht zweckmäßig ist.

Daher wurden erste Aussagen über die Verluste in aus Litzendraht gefertigten Spulen mittels analytischer Modelle getroffen [BL40], [Dow66], [Fer90], [Fer94]. Die genannten Ansätze sind allerdings nur für spezielle Geometrien gültig, zusätzlich ist die Genauigkeit der Formeln teilweise unbefriedigend. Um Litzendrähte dennoch effektiv bei numerischen Simulationen berücksichtigen zu können, haben sich neben heuristischen Verfahren [Sul01] vor allem Homogenisierungsverfahren durchgesetzt.

Homogenisierung bedeutet, statt des tatsächlichen Problems ein einfacheres Ersatzproblem zu berechnen, dessen Lösung in dem komplexen Körper näherungsweise einem makroskopischen Mittelwert entspricht [ERRB97]. Die Grundidee besagt, dass sich die Felder innerhalb der Mikrostruktur zerlegen lassen in einen örtlich schnell schwingenden Teil, welcher ausschließlich auf mikroskopischer Ebene behandelt wird, und einen langsam schwingenden Teil, der auf der makroskopischen Ebene simuliert wird: Die Litzenstruktur wird durch eine echt periodische Kristallstruktur approximiert, welche vollständig durch eine Kristall-Einheitszelle, also auf mikroskopischer Ebene, bestimmt ist. Die FE-Simulation solch einer Einheitszelle liefert einen äquivalenten magnetischen Permeabilitätstensor und eine konzentrierte Serienimpedanz [PKL03]. In dem makroskopischen Modell wird das gesamte Wicklungsfenster durch einen homogenen Block ersetzt, welchem die äquivalente Permeabilität zugewiesen wird. Damit ist das makroskopische Modell geometrisch so weit vereinfacht, dass Simulationsverfahren aus Kapitel 3 angewendet werden können.

Homogenisierungsverfahren im Frequenzbereich existieren für das gesamte System der Maxwell-Gleichungen [Bos94], [ERRB97] und speziell für Wirbelstromprobleme [PKL03], [GD05], [MPC⁺08], [MCG⁺10]. Ansätze für Homogenisierung im Zeitbereich sind in [GSD07], [SDG08] zu finden. Unterschiede liegen in der Art, die Einheitszelle zu modellieren, und darin, ob zweidimensionale oder dreidimensionale Zellen gerechnet werden. Während [Bos94] und [ERRB97] periodische Randbedingungen für 3D-Zellen vorgeben, werden in den anderen Arbeiten Symmetrien der Einheitszelle ausgenutzt, um konventionelle Randbedingungen zu nutzen.

In Abschnitt 4.2 der vorliegenden Arbeit wird ein quasistationäres 2D-Zellenproblem ähnlich [MCG⁺10] vorgestellt, allerdings mit periodischen Randbedingungen, sodass die Einheitszelle keine bestimmte Symmetrie aufweisen muss. Dazu wird in Abschnitt 4.1 zunächst eine Formulierung für 2D-Wirbelstromprobleme eingeführt. Die Extraktion der makroskopischen Materialparameter wird in Abschnitt 4.3 behandelt. Abschnitt 4.4 zeigt am Beispiel der Impedanzformulierung (3.88), wie homogenisierte Spulen in 3D-FE-Formulierungen zu berücksichtigen sind. Schließlich werden auch die schnellen Frequenzbereichsverfahren aus Kapitel 3 in Abschnitt 4.5 um homogenisierte Strukturen erweitert. Die Ausführungen dieses Kapitels orientieren sich an [A4].

Abbildung 4.1: Zweidimensionales planares Feldgebiet Γ .

4.1 Zweidimensionale planare Probleme

Geometrien mit vernachlässigbaren Änderungen entlang einer Koordinatenachse, die hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit der z -Achse mit Einheitsvektor $\hat{e}_z$ identifiziert wird, können durch einen Separationsansatz als zweidimensionale planare Probleme behandelt werden. Dies vereinfacht sowohl den Modellierungs- als auch den Rechenaufwand, denn es muss nur noch eine Querschnittsebene $z = \text{const.}$ diskretisiert werden. Außerdem ist ein Einkomponentenvektorpotenzial

$$\mathbf{A} = A \hat{e}_z \quad \text{mit } A \in \mathcal{H}^1 \quad (4.1)$$

ausreichend zur Beschreibung der Felder.

Es wird eine FE-Formulierung nach [WC82] für ein Feldgebiet Γ nach Abbildung 4.1 verwendet. Der Einfachheit halber werden nur ein einzelner angeregter Leiter Γ_c und Dirichletränder s_A betrachtet. Außerdem werden isotrope Materialien mit skalarer Permeabilität μ und Leitfähigkeit σ vorausgesetzt. Das RWP lautet

$$\hat{e}_z \cdot \text{rot } \mu^{-1} \text{rot } A \hat{e}_z - j\omega\sigma A - \sigma\chi U' = 0 \quad \text{in } \Gamma, \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{J} \cdot \hat{e}_z = -j\omega\sigma A + \sigma U' \quad \text{in } \Gamma_c, \quad (4.2b)$$

$$A = 0 \quad \text{auf } s_A. \quad (4.2c)$$

Darin bezeichnet U' den Spannungsabfall pro Längeneinheit über dem Leiter Γ_c und χ dessen charakteristische Funktion. Multiplikation mit Testfunktionen $v \in \mathcal{H}^1(\Gamma)$ und Integration über Γ führt auf die schwache Form

$$\int_{\Gamma} \text{rot } v \hat{e}_z \cdot \mu^{-1} \text{rot } A \hat{e}_z \, d\Gamma + \int_{\Gamma} v \sigma A \, d\Gamma - \int_{\Gamma_c} v \sigma \, d\Gamma U' = 0, \quad (4.3a)$$

$$I = -j\omega \int_{\Gamma_c} \sigma A \, d\Gamma + (R')^{-1} U' \quad (4.3b)$$

mit dem Klemmenstrom I und dem Gleichstromwiderstand pro Längeneinheit

$$R' = \left(\int_{\Gamma_c} \sigma \, d\Gamma \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Diskretisierung des Vektorpotenzials mit Knotenelementen

$$A = \sum_k [\mathbf{x}]_k v_k \quad \text{mit } v_k \in \mathcal{V}^{h,p}(\Gamma) \quad (4.5)$$

und Wahl gleicher Testfunktionen im Sinne eines Galerkin-Ansatzes ergibt das FE-Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{2D} + j\omega \mathbf{T}_{2D} & -\mathbf{g}_\sigma \\ -j\omega \mathbf{g}_\sigma^T & (R')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

mit

$$[\mathbf{S}_{2D}]_{ij} = \int_{\Gamma} \text{rot } v_i \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mu^{-1} \text{rot } v_j \hat{\mathbf{e}}_z \, d\Gamma, \quad (4.7a)$$

$$[\mathbf{T}_{2D}]_{ij} = \int_{\Gamma} v_i \sigma v_j \, d\Gamma, \quad (4.7b)$$

$$[\mathbf{g}_\sigma]_i = \int_{\Gamma_c} v_i \sigma \, d\Gamma. \quad (4.7c)$$

Bemerkung. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.1.2 wird das Gleichungssystem (4.6) symmetrisch durch Formulierung in einer modifizierten Spannung $U'/j\omega$. Um weitere Formeln übersichtlich zu halten, wird für planare Probleme auf eine Umformulierung verzichtet, denn Rechen- und Speicheraufwand fallen bei den betrachteten Modellen nicht ins Gewicht.

4.2 Das Zellenproblem

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine FE-Formulierung zur mikroskopischen Beschreibung von Litzendrähten herzuleiten. Es wird angenommen, dass der Krümmungsradius und die Schlaglänge des Litzendrahtes wesentlich größer sind als der Litzendurchmesser, außerdem sei die Anzahl der Litzen sehr groß. Damit verhält sich eine einzelne Litze näherungsweise wie ein gerader Leiter in einem planaren, periodischen Kristallgitter identischer Leiter. Folglich ist die Modellierung einer 2D-Einheitsszelle,

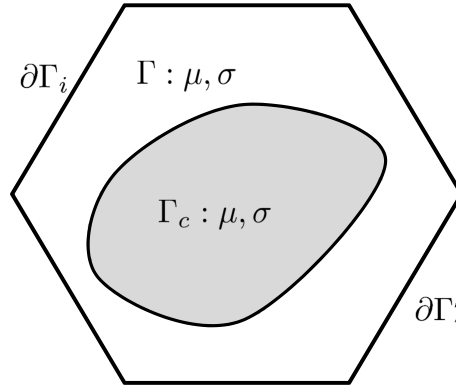


Abbildung 4.2: Feldgebiet einer Einheitszelle Γ mit Rand $\partial\Gamma = \bigcup_i \partial\Gamma_i, \partial\Gamma'_i$.

welche einen Leiterquerschnitt enthält, ausreichend zur Beschreibung der Leiterstruktur.

Betrachtet wird dazu ein Feldgebiet Γ nach Abbildung 4.2 mit isotropen Materialeigenschaften μ und σ . In dem Feldgebiet befindet sich ein angeregter Leiter $\Gamma_c \subset \Gamma$ mit $\sigma > 0$. Der Rand $\partial\Gamma$ zerfällt in paarweise gegenüberliegende Teilränder $\partial\Gamma_i$ und $\partial\Gamma'_i$, die äquivalente Flächen im Kristallgitter repräsentieren. Der Einfachheit halber soll der Koordinatenursprung im geometrischen Schwerpunkt des Feldgebiets liegen.

Nach [Bos94], [ERRB97] werden die elektromagnetischen Felder zerlegt in einen zellperiodischen Anteil mit verschwindendem Mittelwert und in Restfelder, welche mit den makroskopischen Feldern identifiziert werden. Der Ausdruck zellperiodisch bedeutet, dass die Felder invariant gegen Translationen entlang der Basisvektoren des Kristallgitters sind, also dass die Felder auf äquivalenten Kristallflächen identisch sind. Für eine planare, magnetoquasistatische Berechnung sind nur das (Einkomponenten-)Vektorpotenzial und die magnetische Flussdichte von Interesse. Wir zerlegen A in den zellperiodischen Anteil a und das Restfeld A_m sowie $\mathbf{B}$ in den zellperiodischen Anteil $\mathbf{b}$ und den makroskopischen Anteil $\mathbf{B}_m$ nach

$$\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{B}_m, \quad (4.8)$$

$$A = a + A_m. \quad (4.9)$$

Es wird gefordert, dass auch für die makroskopischen Felder die Bestimmungsgleichung

$$\text{rot } A_m \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{B}_m \quad (4.10)$$

gilt. Damit führt eine Taylorentwicklung niedrigster Ordnung auf den Ansatz

$$\mathbf{B}_m = B_x \hat{\mathbf{e}}_x + B_y \hat{\mathbf{e}}_y \quad \text{mit } B_x, B_y = \text{const.}, \quad (4.11)$$

$$A_m = \mathbf{B}_m \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = B_x y - B_y x. \quad (4.12)$$

Aufgrund der Lage des Koordinatenursprungs ist der Mittelwert des so definierten makroskopischen Vektorpotenzials A_m über die Einheitszelle Null. Es wird keine zusätzliche Konstante mitberücksichtigt, da diese die physikalischen Felder nicht ändern würde. Für a gelten die periodischen Randbedingungen

$$a|_{\partial\Gamma'_i} = a|_{\partial\Gamma_i}. \quad (4.13)$$

Aus Gleichung (4.13) folgt jedoch keine Aussage über den Mittelwert von a . Über eine Variante des gaußschen Satzes

$$\int_{\Gamma} \operatorname{rot} a \hat{\mathbf{e}}_z \, d\Gamma = \oint_{\partial\Gamma} a \, d\mathbf{s} \quad (4.14)$$

folgt für den Mittelwert der zellperiodischen magnetischen Flussdichte

$$\int_{\Gamma} \mathbf{b}_c \, d\Gamma = \sum_i \left(\int_{\partial\Gamma_i} a \, d\mathbf{s} + \int_{\partial\Gamma'_i} a \, d\mathbf{s}' \right) = 0. \quad (4.15)$$

Die Integrale löschen sich paarweise aus wegen (4.13) und $d\mathbf{s} = -d\mathbf{s}'$. Gleichung (4.15) untermauert, dass $\mathbf{B}_m$ tatsächlich die makroskopische magnetische Flussdichte repräsentiert.

Ausgangspunkt für das Zellenproblem ist das 2D-planare RWP (4.2). Eine Formulierung im zellperiodischen Vektorpotenzial a ergibt sich durch Einsetzen von (4.9) und Berücksichtigen der periodischen Randbedingungen zu

$$\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} a \hat{\mathbf{e}}_z + j\omega\sigma a - \sigma\chi U' = -j\omega\sigma (B_x y - B_y x), \quad (4.16a)$$

$$I = -j\omega \int_{\Gamma_c} \sigma (a + B_x y - B_y x) \, d\Gamma + (R')^{-1} U', \quad (4.16b)$$

$$a|_{\partial\Gamma'_i} = a|_{\partial\Gamma_i}. \quad (4.16c)$$

Das RWP (4.16) ist nicht eindeutig lösbar, denn jedes Tupel (a_0, U'_0) der Form

$$a_0 = \operatorname{const.}(\Gamma), \quad (4.17a)$$

$$U'_0 = j\omega a_0 \quad (4.17b)$$

löst die homogenen Gleichungen $B_x = B_y = I = 0$. Anschaulich folgen diese Lösungen aus der bereits angesprochenen Unbestimmtheit des Mittelwerts von a . Um eine eindeutige Lösung zu garantieren, muss der durch (4.17) aufgespannte Nullraum ausgeschlossen werden, indem ein Mittelwert vorgegeben wird. Die Festlegung

$$\int_{\Gamma} a \, d\Gamma = 0 \quad (4.18)$$

ist konsistent mit der Interpretation von A_m als makroskopisches Vektorpotenzial.

4.2.1 Schwache Form und FE-Gleichungssystem

Eine schwache Form der Differenzialgleichung (4.16a) folgt durch Testen mit Funktionen $v \in \mathcal{H}^1(\Gamma)$ zu

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \operatorname{rot} v \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mu^{-1} \operatorname{rot} a \hat{\mathbf{e}}_z \, d\Gamma + j\omega \int_{\Gamma} v \sigma a \, d\Gamma - \int_{\Gamma_c} v \sigma \, d\Gamma U' + \lambda \int_{\Gamma} v \, d\Gamma \\ = j\omega \int_{\Gamma} v \sigma (B_y x - B_x y) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Darin ist (4.18) über einen Lagrange-Multiplikator λ realisiert. Randintegrale treten nicht auf, weil periodische Randbedingungen (4.16c) gelten müssen. Approximation von a durch eine endliche Anzahl Ansatzfunktionen

$$a = \sum_k [\mathbf{x}]_k v_k \quad \text{mit } v_k \in \mathcal{V}^{h,p} \quad (4.20)$$

und Galerkin-Testen führt auf ein FE-Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}_c \mathbf{x}_c = \mathbf{B}_c \mathbf{b}_c \quad (4.21)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{2D} + j\omega \mathbf{T}_{2D} & -\mathbf{g}_{\sigma} & \mathbf{v} \\ -j\omega \mathbf{g}_{\sigma} & (R')^{-1} & 0 \\ \mathbf{v}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -j\omega \mathbf{g}_y & j\omega \mathbf{g}_x & 0 \\ j\omega C_y & -j\omega C_x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.22b)$$

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ U' \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad (4.22c)$$

$$\mathbf{b}_c = [B_x \quad B_y \quad I]^T. \quad (4.22d)$$

Die darin auftretenden Größen sind definiert in (4.7) und

$$[\mathbf{g}_p]_i = \int_{\Gamma} \sigma v_i p \, d\Gamma \quad \text{mit } p \in \{x, y\}, \quad (4.23a)$$

$$C_p = \int_{\Gamma_c} \sigma p \, d\Gamma \quad \text{mit } p \in \{x, y\}, \quad (4.23b)$$

$$[\mathbf{v}]_i = \int_{\Gamma} v_i \, d\Gamma. \quad (4.23c)$$

4.2.2 Periodische Randbedingungen

Es wird angenommen, dass das FE-Netz konform ist, also dass zu jedem Knoten und jeder Kante auf $\partial\Gamma_i$ entsprechende Knoten und Kanten auf $\partial\Gamma'_i$ existieren. Die Wahl des Ansatzfunktionsraumes $\mathcal{V}^{h,p}$ und die Randbedingungen (4.16c) implizieren, dass die Koeffizienten von Ansatzfunktionen, welche einander entsprechenden Netzentitäten zugeordnet sind, gleich sein müssen. Formal kann der Lösungsvektor $\mathbf{x}_c$ in (4.21) daher über einen reduzierten Lösungsvektor $\mathbf{x}_r$ und eine Prolongationsmatrix $\mathbf{P}$ nach

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{P}\mathbf{x}_r \quad (4.24)$$

dargestellt werden. Es seien i und $i+1$ die Indizes zweier einander entsprechenden Ansatzfunktionen in $\mathbf{x}_c$. Wenn j der zugehörige Index im reduzierten Vektor $\mathbf{x}_r$ ist, dann lautet die entsprechende Spalte der Prolongationsmatrix

$$\mathbf{P}_{(:,j)} = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ i \\ i+1 \end{matrix} \quad (4.25)$$

Das Zellenproblem unter Einbeziehung der periodischen Randbedingungen lautet damit

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A}_c \mathbf{P} \mathbf{x}_r = \mathbf{P}^T \mathbf{B}_c \mathbf{b}_c. \quad (4.26)$$

4.3 Extraktion der makroskopischen Materialparameter

In diesem Abschnitt wird dargelegt, wie aus dem Zellenproblem Daten zur makroskopischen Beschreibung einer aus Litzendraht bestehenden Leiterstruktur gewonnen werden können. Konkret müssen die Wirbelstromverluste im Makromodell abgebildet werden, bei dem klassischer Weise eine Unterscheidung zwischen Skineffekt und Proximityeffekt getroffen wird [Dix88]. Der Skineffekt in einem Leiter wird durch die Leitungsströme selbst verursacht, wohingegen der Proximityeffekt durch eine äußere magnetische Flussdichte induziert wird. Für das weitere Vorgehen wird vorausgesetzt, dass die elektromagnetischen Reaktionsfelder beider Effekte zueinander leistungs-orthogonal stehen. Diese Bedingung ist für Leiter Γ_c , welche eine Symmetrieachse aufweisen, erfüllt [Fer90], was in vielen praktischen Anwendungen der Fall ist. Die Orthogonalität erlaubt die getrennte Betrachtung beider Effekte, was in [PKL03], [GD05] ausgenutzt wurde.

4.3.1 Proximityeffekt

Der Proximityeffekt wird abgebildet durch Anregung des Zellenproblems mit ($\mathbf{B}_m \neq 0, I = 0$). Zunächst sei angenommen, dass sich das Zellenproblem isotrop hinsichtlich des Proximityeffekts verhält, dass also die Richtung von $\mathbf{B}_m$ keinen Einfluss auf die Verluste hat. Wie in [MLPP98] vorgeschlagen, können die Verluste mittels einer komplexwertigen magnetischen Reluktivität

$$\nu_m = \nu'_m + j\nu''_m \quad (4.27)$$

im makroskopischen Modell berücksichtigt werden. Diese wird errechnet durch äquivalente Scheinleistungen [GD05]: Die Scheinleistungsdichte aufgrund einer magnetischen Flussdichte $\mathbf{B}_m$ ergibt sich im makroskopischen Modell zu

$$s_m = \frac{1}{2} (\omega\nu''_m + j\omega\nu'_m) |\mathbf{B}_m|^2. \quad (4.28)$$

Im Zellenproblem hingegen wird eine Scheinleistung von

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_z [\chi U' - j\omega (a + B_x y - B_y x)], \quad (4.29)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } a\hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{B}_m, \quad (4.30)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot (\sigma \mathbf{E})^* d\Gamma + j\frac{\omega}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot (\nu \mathbf{B})^* d\Gamma \quad (4.31)$$

umgesetzt. Da die Dimensionen des Zellenproblems als sehr klein im Vergleich zur makroskopischen Skala angenommen werden, kann die mittlere Scheinleistungsdichte

$$s = \frac{S}{|\Gamma|} \quad (4.32)$$

mit (4.28) gleichgesetzt werden. Daraus folgt die äquivalente Reluktivität

$$\nu'_m = \frac{2 \text{Im } S}{\omega |\Gamma|}, \quad (4.33a)$$

$$\nu''_m = \frac{2 \text{Re } S}{\omega |\Gamma|}. \quad (4.33b)$$

Mit einer FE-Lösung des Zellenproblems (4.26) und unter Voraussetzung reeller Materialeigenschaften lautet die Scheinleistung

$$S = \frac{j\omega}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ U' \\ B_x \\ B_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{2D} - j\omega \mathbf{T}_{2D} & \mathbf{g}_\sigma & \mathbf{h}_y & -\mathbf{h}_x \\ \mathbf{g}_\sigma^T & (j\omega R')^{-1} & C_y & -C_x \\ \mathbf{h}_y^T & C_y & \langle \nu \rangle - j\omega C_{yy} & -j\omega C_{xy} \\ -\mathbf{h}_x^T & -C_x & -j\omega C_{xy} & \langle \nu \rangle - j\omega C_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ U' \\ B_x \\ B_y \end{bmatrix}^* \quad (4.34)$$

mit den Größen aus (4.7), (4.23) und

$$[\mathbf{h}_p]_i = \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial}{\partial p} v_i \, d\Gamma \quad \text{mit } p \in \{x, y\}, \quad (4.35a)$$

$$C_{pq} = \int_{\Gamma} \sigma p q \, d\Gamma \quad \text{mit } p, q \in \{x, y\}, \quad (4.35b)$$

$$\langle \nu \rangle = \int_{\Gamma} \nu \, d\Gamma. \quad (4.35c)$$

Nun kann auf die Annahme der Isotropie verzichtet werden. Als Konsequenz ergibt sich statt (4.27) ein Reluktivitätstensor

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}_m = \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}'_m + j \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}''_m, \quad (4.36)$$

dessen Komponenten aus Anregung des Zellenproblems in zwei orthogonale Richtungen $\mathbf{B}_{m,1}$ sowie $\mathbf{B}_{m,2}$ und Auswertung von Formel (4.34) folgen. Die Matrix in (4.34) ist komplex-symmetrisch und damit diagonalisierbar [Ber09, Proposition 3.1.6]. Folglich existiert für $\underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}_m$ ein Hauptachsensystem, in dem der Tensor Diagonalgestalt annimmt. Für die Berechnung sei auf die Literatur verwiesen [TB97, Kapitel 24 f.], im Hauptachsensystem gilt die Darstellung

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}_m = \nu_{m,1} \hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s^T + \nu_{m,2} \hat{\mathbf{e}}_t \hat{\mathbf{e}}_t^T \quad (4.37)$$

mit skalaren $\nu_{m,1}$ und $\nu_{m,2}$ und den Hauptachsenrichtungen $\hat{\mathbf{e}}_s$ und $\hat{\mathbf{e}}_t$.

Der Übersichtlichkeit halber wird weiter mit einer skalaren Reluktivität (4.27) gerechnet, die Berücksichtigung von (4.36) ist trivial. Es bleibt, die Reluktivität in $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Richtung zu bestimmen. Die aus einer makroskopischen Flussdichte in dieser Richtung zu erwartenden Proximity-Verluste sind aufgrund der Litzengeometrie vernachlässigbar [PASG07]. Werden keine Wirbelströme in der xy -Ebene zugelassen, ergibt sich die Reluktivität ν_z als gewichteter Mittelwert

$$\nu_z = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \nu \, d\Gamma. \quad (4.38)$$

Im dreidimensionalen Makromodell ist die Orientierung der Litzendrähte eine Funktion des Ortes, denn die Drähte zeigen im Mittel in die Stromrichtung $\hat{\mathbf{e}}_\tau$ aus (3.55). Mit einer orthonormalen Basis $(\hat{\mathbf{e}}_\tau, \hat{\mathbf{e}}_s, \hat{\mathbf{e}}_t)$ lautet der Reluktivitätstensor

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}} = \nu_m (\hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s^T + \hat{\mathbf{e}}_t \hat{\mathbf{e}}_t^T) + \nu_z \hat{\mathbf{e}}_\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau^T. \quad (4.39)$$

4.3.2 Skineffekt

Der Skineffekt wird abgebildet durch Anregung des Zellenproblems mit $(\mathbf{B}_m = 0, I \neq 0)$. Ähnlich dem Vorgehen in [ERRB97], [MCG⁺10] könnte eine äquivalente Leitfähigkeit für das makroskopische Problem definiert werden. Dieses Vorgehen würde aber erfordern, dass die Elementarzellen auch im Makromodell gegeneinander isoliert werden, weil sich sonst ein unphysikalischer Skineffekt auf der Skala der gesamten Leiterstruktur ausbilden könnte [MCG⁺10]. Damit werden aber die geometrischen Vereinfachungen durch die Homogenisierung weitestgehend zunichte gemacht.

Als Alternative wird wie in [PKL03] über Leistungsbetrachtungen analog Abschnitt 4.3.1 eine konzentrierte Impedanz definiert, welche dem Leiter im makroskopischen Modell in Serie geschaltet wird. Die Methode wird durch die Tatsache motiviert, dass der Skineffekt von den extern induzierten elektromagnetischen Feldern im Leiter und damit von dem FE-Modell unabhängig ist. Außerdem ist die Scheinleistung im Zellenproblem genau wie die einer Impedanz proportional zum Betragsquadrat des Stroms. Aus einer FE-Lösung des Zellenproblems (4.26) bestimmt sich die Scheinleistung zu

$$S = \frac{U'I^*}{2} \quad (4.40)$$

und damit die Serienimpedanz Z'_{skin} pro Längeneinheit für eine Litze zu

$$Z'_{\text{skin}} = \frac{2S}{|I|^2}. \quad (4.41)$$

4.4 Das makroskopische FE-Modell

Die präsentierte Methodik erlaubt die FE-Simulation aus Litzendraht bestehender Spulen, indem die Geometrie durch einen homogenen Block vereinfacht wird und Verluste über äquivalente Materialien abgebildet werden. Die Anregung der Spulen auf FE-Ebene geschieht durch eine homogene Stromdichte nach Abschnitt 3.2.1 und erlaubt die Ansteuerung mittels eines Klemmenstroms oder mittels einer Klemmenspannung, siehe Abschnitt 3.2. Das Vorgehen wird am Beispiel stromgesteuerter Leiter erläutert.

Gegeben seien n_C homogenisierte Spulen, welche durch den Index h identifiziert werden. Jede bestehe aus N_h Wicklungen eines Litzendrahts mit n_h Einzellitzen und Elementarzelle Γ_h . Die mittlere Drahtlänge sei L_h und das Wicklungsfenster der

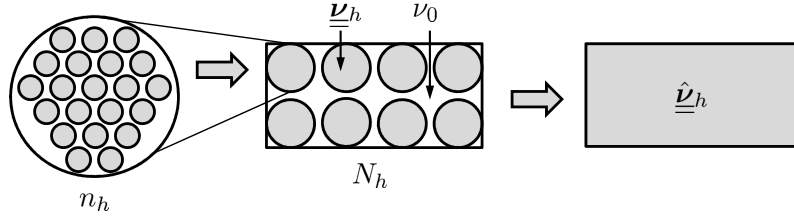


Abbildung 4.3: Homogenisierungsprozess anhand des Wicklungsfensters einer Spule.

Links: Tatsächlicher Draht mit n_h Litzen. Mitte: Wicklungsfenster mit N_h homogenisierten Windungen mit $\underline{\underline{\nu}}_h$ und Luft mit ν_0 . Rechts: Homogenisiertes Wicklungsfenster mit skalierten Reluktivität $\hat{\underline{\underline{\nu}}}_h$.

Spulen $\Omega_h \subset \Omega$ Teil des Feldgebiets Ω aus Abschnitt 3.1. Ihre Skineffekt-Impedanz lautet mit (4.41):

$$Z_h = \frac{N_h}{n_h} L_h Z'_{\text{skin},h}. \quad (4.42)$$

Sie wird als Serienimpedanz Z_c in (3.56) verwendet.

Für den Referenzquerschnitt A_h , auf den sich der äquivalente Reluktivitätstensor $\underline{\underline{\nu}}_h$ nach (4.39) bezieht, gilt

$$A_h = n_h N_h |\Gamma_h|. \quad (4.43)$$

Durch nicht-ideale Packung der Litzen im Draht sowie Lufteinschlüsse bedingt durch quadratische Packung und gegebenenfalls Umspinnung der Drähte im Wicklungsfenster ist der tatsächliche Spulenquerschnitt $\hat{A}_h$ in der Regel größer, es lässt sich ein Füllfaktor

$$f_h = \frac{A_h}{\hat{A}_h} \quad (4.44)$$

definieren. Mit der Vakuumreluktivität $\underline{\underline{\nu}}_0 = \nu_0 \mathbf{I}_3$ kann $\underline{\underline{\nu}}_h$ umskaliert werden zu

$$\hat{\underline{\underline{\nu}}}_h = f_h \underline{\underline{\nu}}_h + (1 - f_h) \underline{\underline{\nu}}_0. \quad (4.45)$$

Der Prozess ist schematisch in Abbildung 4.3 dargestellt.

Ausgangspunkt der FE-Formulierung ist (3.59). Der Einfluss der Homogenisierung und damit der äquivalenten Reluktivitäten auf das FE-System soll verdeutlicht werden. Dazu werden die Gleichungen (4.45) und (4.39) in die Definition der im FE-System vorkommenden Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}$ nach (3.24a) eingesetzt; von der Bau-

meichung betroffene Ansatzfunktionen seien bereits eliminiert. Es ergibt sich eine Aufspaltung

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \sum_{h=1}^{n_C} \nu_m^h \mathbf{S}_h, \quad (4.46)$$

$$[\mathbf{S}_0]_{ij} = \int_{\Omega \setminus \bigcup_h \Omega_h} \text{rot } \mathbf{w}_i \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} \text{rot } \mathbf{w}_j \\ + \sum_{h=1}^{n_C} \int_{\Omega_h} \text{rot } \mathbf{w}_i \cdot [(1 - f_h) \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_0 + f_h \nu_z^h \hat{\mathbf{e}}_\tau \hat{\mathbf{e}}_\tau^T] \text{rot } \mathbf{w}_j \, d\Omega, \quad (4.47)$$

$$[\mathbf{S}_h]_{ij} = \int_{\Omega_h} \text{rot } \mathbf{w}_i \cdot f_h (\hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s^T + \hat{\mathbf{e}}_t \hat{\mathbf{e}}_t^T) \text{rot } \mathbf{w}_j \, d\Omega. \quad (4.48)$$

Damit lautet die FE-Formulierung für n_C stromgesteuerte Spulen mit Litzendrähten unter expliziter Angabe der Frequenzabhängigkeit

$$\left(\mathbf{A}_0 + j\omega \mathbf{A}_1 + \sum_{i=1}^{n_C} \nu_m^h(\omega) \mathbf{A}_h \right) \mathbf{x}(\omega) = \mathbf{B}_C \mathbf{i}_C, \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{u}_C = j\omega \mathbf{B}_C^T \mathbf{x}(\omega) + \text{diag } Z_h(\omega) \mathbf{i}_C, \quad (4.49b)$$

mit den in (3.60) eingeführten Größen, $\mathbf{A}_1$ nach (3.31b) und

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.50a)$$

$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.50b)$$

Die Impedanzformulierung unter zusätzlicher Einbeziehung stromgesteuerter Spulen aus massiven Leitern nach Abschnitt 3.2.3 ist aus (4.49) und (3.88) leicht zu konstruieren.

4.5 Schnelle Frequenzgangsberechnungen für Spulen mit Litzendrähten

Mit bekanntem Aufbau der FE-Modelle zur Simulation von Spulen mit Litzendrähten stellt sich die Frage nach Möglichkeiten, den Frequenzgang schnell auszuwerten. Prinzipiell kommen dafür genau wie für die FE-Modelle aus Kapitel 3 die MOR-Verfahren aus Abschnitt 2.3 in Frage.

Das volle Modell (4.49) weist eine affine Struktur entsprechend (2.40) mit der Kreisfrequenz ω als Parameter auf. Die affinen Funktionen können mit den aus dem Zellenproblem zu bestimmenden äquivalenten Reluktivitäten und Serienimpedanzen

identifiziert werden. Damit sind Mehrpunkt-MOR-Verfahren unmittelbar anwendbar. Wegen der schnellen ROM-Generierung ist auch die Anwendung von Einpunktverfahren wünschenswert, aber die dafür notwendige polynomielle Parametrierung des Ausgangsmodells (4.49) ist nicht gegeben. Der Grund liegt in der impliziten Frequenzabhängigkeit von ν_m^h , die aus der FE-Lösung des Zellenproblems folgt. Doch die dem Zellenproblem zugrunde liegende Diffusionsgleichung legt nahe, dass der Frequenzgang der Reluktivität näherungsweise eine klassische Debye-Relaxation [Bal89, S. 83] aufweist, welche gegeben ist durch

$$\nu_{\text{Debye}} = \nu_{\infty} + \frac{\nu_{\text{stat}} - \nu_{\infty}}{1 + j\omega\tau}. \quad (4.51)$$

Darin beschreiben ν_{stat} und ν_{∞} die Grenzwerte der Reluktivität für $\omega \rightarrow 0$ bzw. $\omega \rightarrow \infty$, und τ ist die Relaxations-Zeitkonstante. Es wird vorgeschlagen, Tripel $(\nu_{\text{stat}}^h, \nu_{\infty}^h, \tau_h)$ über einen least-squares-fit an $\nu_m^h(\omega)$ in einem vorgegebenen Frequenzintervall $[\omega_{\min}; \omega_{\max}]$ zu bestimmen. Die Qualität der daraus resultierenden Approximation (4.51) wird in Abschnitt 4.6 anhand numerischer Beispiele gezeigt.

Einsetzen von (4.51) in (4.49a) führt auf

$$\left(\mathbf{A}'_0 + j\omega \mathbf{A}_1 + \sum_{h=1}^{n_C} \frac{\nu_{\text{stat}}^h - \nu_{\infty}^h}{1 + j\omega\tau_h} \mathbf{A}_h \right) \mathbf{x} = \mathbf{B}_c \mathbf{i}_C, \quad (4.52)$$

mit

$$\mathbf{A}'_0 = \mathbf{A}_0 + \sum_{h=1}^{n_C} \nu_{\infty}^h \mathbf{A}_h. \quad (4.53)$$

Die gewünschte polynomielle Parametrierung der Zustandsgleichung des Modells folgt aus (4.52) durch Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$\prod_{i=1}^{n_C} (1 + j\omega\tau_i) \quad (4.54)$$

zu

$$\left[\prod_{i=1}^{n_C} (1 + j\omega\tau_i) (\mathbf{A}'_0 + j\omega \mathbf{A}_1) + \sum_{h=1}^{n_C} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{n_C} (\nu_{\text{stat}}^h - \nu_{\infty}^h) (1 + j\omega\tau_i) \mathbf{A}_h \right] \mathbf{x} = \mathbf{B}_c \mathbf{i}_C, \quad (4.55a)$$

$$\mathbf{u}_C = j\omega \mathbf{B}_C^T \mathbf{x} + \text{diag } Z_h(\omega) \mathbf{i}_C. \quad (4.55b)$$

Das Modell (4.55) wird ausschließlich zur Generierung der Projektionsmatrix verwendet, aber als Ausgangsmodell für die Ordnungsreduktion dient weiterhin (4.49), denn

- Gleichung (4.55a) stellt nur eine Approximation an (4.49a) dar und
- das exakte Modell (4.49) weist eine einfachere Struktur hinsichtlich der Anzahl der vorkommenden Matrizen auf.

Mit diesen Ergebnissen lautet ein ROM für n_C stromgesteuerte Spulen mit Litzendrähten

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}_0 + j\omega \tilde{\mathbf{A}}_1 + \sum_{i=1}^{n_C} \nu_m^h(\omega) \tilde{\mathbf{A}}_h \right) \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{B}}_C \mathbf{i}_C, \quad (4.56a)$$

$$\mathbf{u}_C = j\omega \tilde{\mathbf{B}}_C^T \tilde{\mathbf{x}} + \text{diag } Z_h(\omega) \mathbf{i}_C, \quad (4.56b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{V}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V}, \quad (4.57a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{V}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{V}, \quad (4.57b)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_h = \mathbf{V}^T \mathbf{A}_h \mathbf{V}, \quad (4.57c)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_C = \mathbf{V}^T \mathbf{B}_C. \quad (4.57d)$$

Die Projektionsmatrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times n}$ mit $n \ll N$ kann dabei über ein MP-Verfahren nach Definition 2.6 oder ein EP-Verfahren für (4.55) nach Definition 2.4 generiert werden. Aus der Notwendigkeit, im ROM für jeden Frequenzpunkt das Zellenproblem zu lösen, um $\nu_m^h(\omega)$ zu bestimmen, ergibt sich kein Nachteil im Vergleich zu einem aus (4.55) generierten ROM. Denn das Zellenproblem muss ohnehin aufgestellt werden, um $Z_h(\omega)$ zu errechnen. Aus der Bestimmung der Skineffekt-Impedanz liegt eine Faktorisierung der Matrix in (4.26) vor. Damit liegt der rechnerische Mehraufwand der exakten Bestimmung von $\nu_m^h(\omega)$ im Vergleich zur Debye-Näherung bei einem Vor- und Rückeinsetzen für (4.26). Dabei handelt es sich um ein aus einer unkomplizierten 2D-Struktur abgeleitetes FE-Gleichungssystem kleiner Dimension, sodass die numerischen Kosten insgesamt nicht ins Gewicht fallen.

Ein ROM für die Impedanzformulierung kann völlig analog konstruiert werden.

Bemerkung. Falls eine FE-Simulation mit homogenisierten, spannungsgesteuerten Spulen nach Abschnitt 3.2.2 durchgeführt wird, sind die Impedanzen Z_h Teil der Systemmatrix und nicht mehr Teil des Durchgriffs. Um ein Einpunktverfahren für diesen Typ der Simulation herzuleiten, müssen auch die Verläufe $Z_h(\omega)$ mit geeigneten Funktionen approximiert werden. In dem Fall kann es zweckmäßig sein, das ROM aus der polynomiellen Approximation zu generieren, und im online-Schritt vollkommen auf die Auswertung von Zellenproblemen zu verzichten.

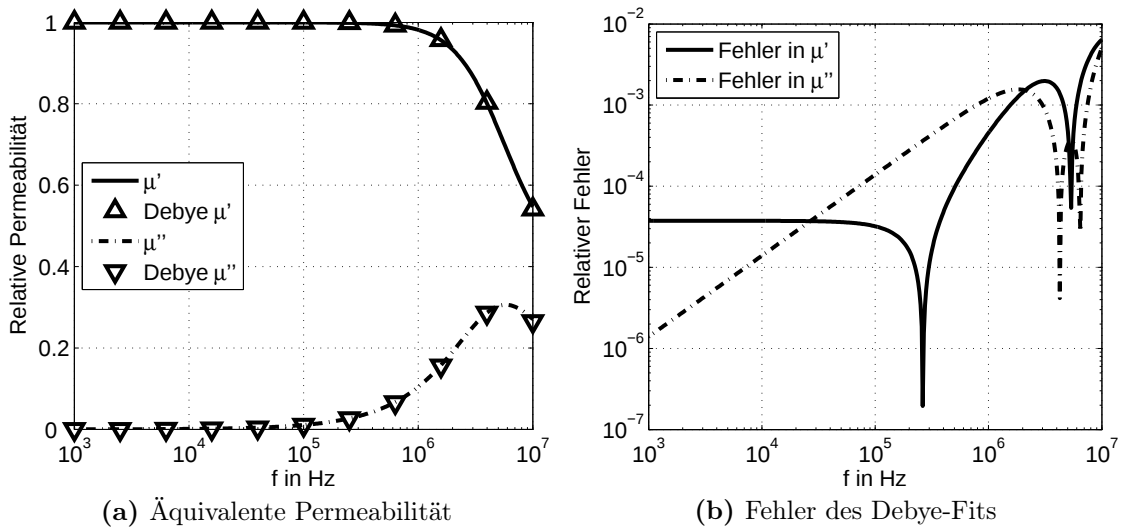


Abbildung 4.4: Äquivalente Permeabilität aus dem Zellenproblem und nach einem Debye-Fit mit zugehörigem relativem Fehler.

4.6 Numerische Ergebnisse

Hexagonal gepackter Litzendraht

Um das Zellenproblem und die Extraktion der makroskopischen Materialparameter zu demonstrieren, wird ein runder Litzendraht mit einem Durchmesser von $80 \mu\text{m}$ und einer Leitfähigkeit von $\sigma = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ in einer hexagonalen Packung betrachtet. Daraus ergibt sich eine hexagonale Einheitszelle nach Abbildung 4.2, deren Fläche aus der Packungsdichte der Litzen von $p = 11663/\text{cm}^2$ folgt. Damit beträgt die Kantenlänge a der Zelle etwa

$$a = \frac{2}{3\sqrt{3}p} \approx 57,4 \mu\text{m}. \quad (4.58)$$

Das FE-Modell der Einheitszelle hat für Ansatzfunktionen zweiter Ordnung 290 Unbekannte, sodass der Autor die Anwendung von MOR auf das Zellenproblem als irrelevant betrachtet.

Abbildung 4.4 zeigt die relative äquivalente Permeabilität $\mu_{m,r}$, welche sich aus der äquivalenten Reluktivität (4.27) berechnet zu

$$\nu_m^{-1} = \mu_0 \mu_{m,r} = \mu_0 (\mu' - j\mu''). \quad (4.59)$$

Zusätzlich ist ein Debye-Fit nach (4.51) eingezeichnet, Abbildung 4.4(b) stellt den relativen Fehler des Fits grafisch dar. Zu Demonstrationszwecken sind Frequenzen bis 10 MHz simuliert, typische Anwendungen bewegen sich aber unterhalb von 1 MHz.

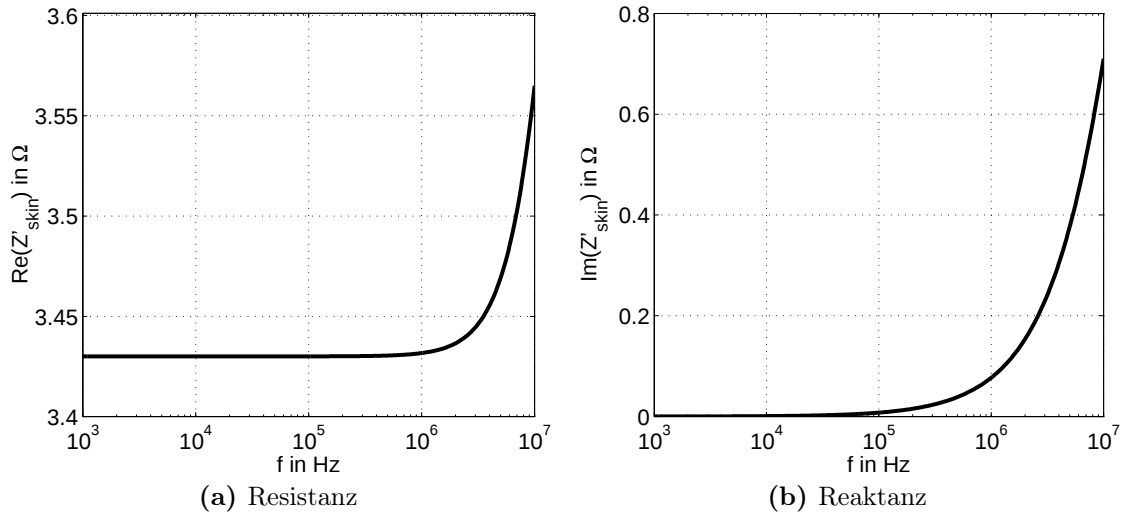


Abbildung 4.5: Real- und Imaginärteil der Skineffekt-Impedanz pro Längeneinheit.

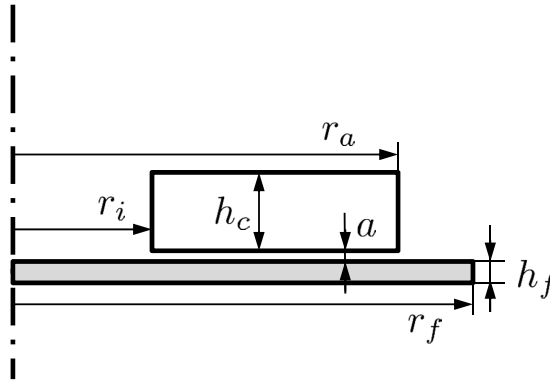


Abbildung 4.6: Querschnitt durch Spule #2 mit Ferritplatte und 20 Windungen, $r_i = 11,1$ mm, $r_a = 22,1$ mm, $r_f = 23,5$ mm, $h_c = 2,3$ mm, $h_f = 1$ mm und $a = 0,1$ mm.

Dort beträgt der relative Fehler des Fits weniger als 0.12 %. Die Skineffekt-Impedanz pro Längeneinheit Z'_{skin} nach (4.41) ist in Abbildung 4.5 gezeigt. Der Betrag der Impedanz liegt bei 10 MHz weniger als 6 % über dem Gleichstromwiderstand, weshalb zu vermuten ist, dass die Verluste eines aus dem gewählten Draht bestehenden Makromodells durch den Proximity-Effekt dominiert werden.

Homogenisierte Spule

Eine Aussage über die Genauigkeit der Homogenisierungsverfahren kann anhand der Spule #2 nach Abbildung 4.6 getroffen werden. Zum einen erlaubt die rotations-symmetrische Struktur den Vergleich gegen ein 2D-Modell, in welchem die Litzenstruktur explizit modelliert ist, zum anderen liegen für die gezeigte Spule Messdaten vor. Der Litzendraht besteht aus 105 Litzen entsprechend dem vorangehenden

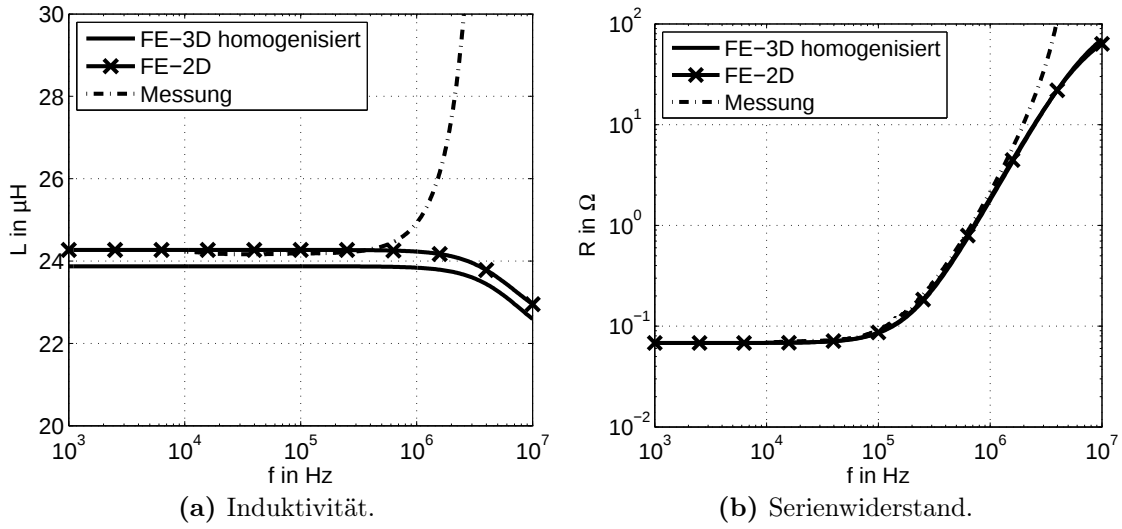


Abbildung 4.7: Frequenzgang der Spule #2, Vergleich zwischen homogenisiertem 3D-FE-Modell, achsensymmetrischem 2D-FE-Modell und Messwerten.

numerischen Beispiel, der Ferrit besitzt eine relative Permeabilität $\mu_r = 450$ und $\sigma = 0 \text{ S/m}$.

Abbildung 4.7 zeigt die Induktivität L und den Serienwiderstand $R = \text{Re}(Z)$ der Spule je als Ergebnis der homogenisierten Simulation (4.49) und der rotationssymmetrischen 2D-Simulation im Frequenzband

$$f \in [1 \text{ kHz}; 10 \text{ MHz}]. \quad (4.60)$$

Messwerte liegen für den Bereich $f \in [10 \text{ kHz}; 3 \text{ MHz}]$ vor. Die Messung der Induktivität zeigt ab etwa 1 MHz einen starken Anstieg, der mit der ersten Eigenresonanz der Spule zusammenhängt. Die quasistationären Maxwell-Gleichungen vermögen diesen Effekt nicht abzubilden, weshalb bei den Simulationskurven kein Anstieg beobachtet werden kann. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass typische Betriebsfrequenzen von Spulen wie #2 unterhalb von 1 MHz liegen; in diesem Bereich liefert das Wirbelstrommodell sowohl für R als auch für L unter Berücksichtigung von Fertigungstoleranzen hinreichend genaue Voraussagen.

Vergleicht man die 2D-Simulation mit der homogenisierten Simulation, so weichen die Induktivitäten bei gleichem qualitativen Verhalten rund 2% voneinander ab. Dieser Versatz kann über die unterschiedlichen Diskretisierungen erklärt werden, denn für kleine Frequenzen nähert sich die Induktivität dem statischen Grenzfall, der von der eingprägten Stromdichte und nicht von den Homogenisierungsmethoden bestimmt wird. In Abbildung 4.8(a) sind die relativen Fehler zwischen beiden Simulationen dargestellt. Die Widerstände weichen bis zu 10% voneinander ab, was aber durch absolute Wertänderungen von drei Größenordnungen im betrachteten Frequenzband und durch deutlich bessere Übereinstimmung für kleinere Frequenzen

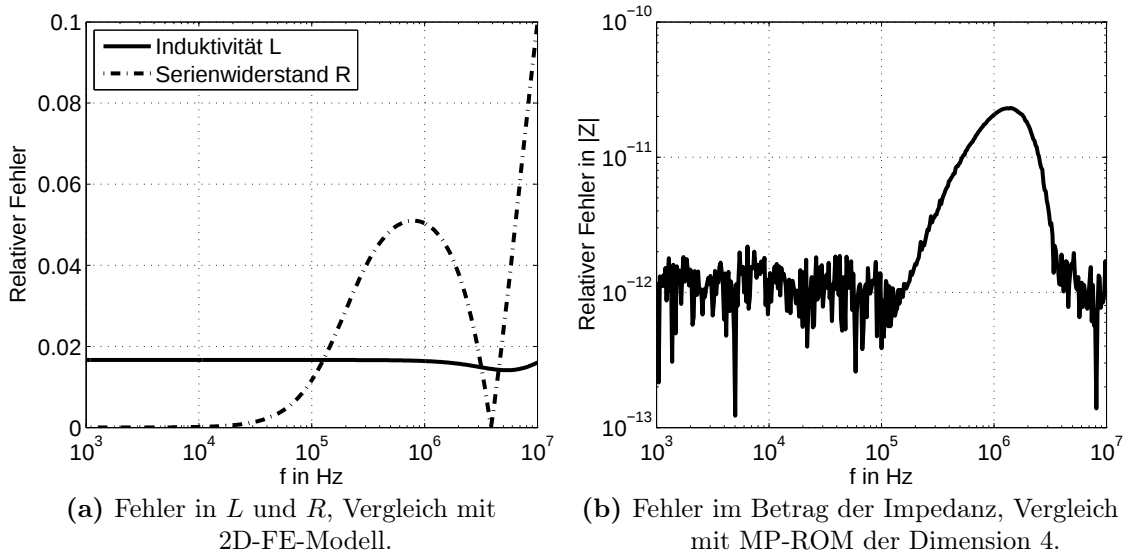


Abbildung 4.8: Relative Fehler des homogenisierten 3D-FE-Modells.

	Volles Modell ^a	MP-ROM
Dimension	76.946	4
Homogenisierung	2,63 s	2,63 s
Modellgenerierung	—	16,8 s
Auswertung 401 Frequenzpunkte	1540 s	0,299 s

Simulation auf einem Intel Core i7-2600K CPU mit 3.4 GHz und 16 GB RAM.

^a Intel MKL 11.1 PARDISO zur Faktorisierung.

Tabelle 4.1: Simulationsdaten für volles und reduziertes Modell.

relativiert wird. Zusammenfassend weichen beide Simulationen etwa gleich stark von den Messungen ab beziehungsweise sind unter Berücksichtigung von Fertigungstoleranzen hinreichend genau, was den Einsatz der Homogenisierungsverfahren für Litzendrähte validiert.

Schließlich sollen die Modelldaten und Simulationszeiten betrachtet werden. Für Ansatzfunktionen zweiter Ordnung hat das homogenisierte FE-Modell etwa 77.000 Unbekannte und ist damit bereits deutlich kleiner als das FE-Modell der ähnlichen Spule #1 aus Abschnitt 3.4, bei der die 20 Windungen separat modelliert werden müssen. Das Frequenzband (4.60) wird mit 401 Punkten diskretisiert. Der gesamte Homogenisierungsprozess, also die Bestimmung von $\mu_m^h(\omega)$ und $Z_h(\omega)$ in (4.49), nimmt dafür 2,63 s in Anspruch. Die Simulation des vollen FE-Modells dauert rund 26 min, aber die einfache Form der Systemantwort laut Abbildung 4.7 legt nahe, dass die Auswertung über MOR deutlich zu beschleunigen ist. Mithilfe des adaptiven Algorithmus 3.1 wird ein MP-ROM erstellt, die Fehlerschranke $\epsilon = 10^{-4}$ führt auf die ROM-Dimension 4. Tatsächlich zeigt Abbildung 4.8(b), dass bereits dieses sehr kleine ROM die Impedanz, von numerischem Rauschen abgesehen, reprodu-

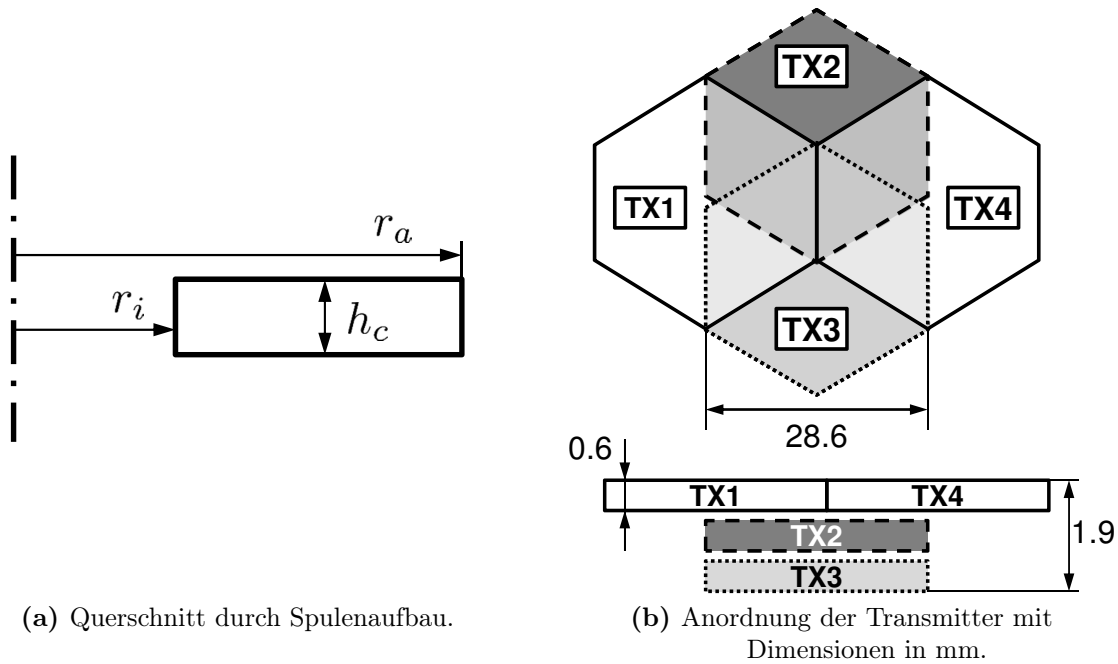


Abbildung 4.9: Aufbau des Energieübertragungs-Systems.

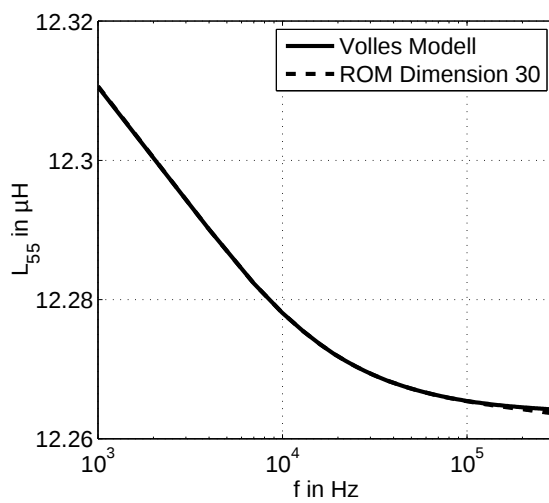
ziert, während die Modellauswertung um einen Faktor von etwa 5000 schneller ist. Detaillierte Simulationsdaten sind Tabelle 4.1 zu entnehmen.

Kontaktloses Energieübertragungs-System

Als letztes numerisches Beispiel dieses Kapitels soll die Anwendung auf ein komplexeres, aus fünf Spulen bestehendes kontaktloses Energieübertragungs-System gezeigt werden. Das Modell dient gleichzeitig als Beispiel für die parametrische MOR aus Kapitel 5. Es besteht aus vier Transmitterspulen nach Abbildung 4.9(a) mit $r_a = 14,25$ mm, $r_i = 5,25$ mm und $h_c = 0,6$ mm sowie aus einer Empfängerspule nach Abbildung 4.9(a) mit $r_a = 16,25$ mm, $r_i = 9,75$ mm und $h_c = 1,5$ mm. Die Transmitterspulen sind in den Mittelpunkten der vier Hexagone TX1 bis TX4 laut Abbildung 4.9(b) angeordnet, als fünfte Spule befindet sich die Empfängerspule im Abstand von 4 mm über den Transmittern, ihr Mittelpunkt liegt zwischen den Mittelpunkten von TX1 und TX4. Unterhalb der Transmitter befindet sich im Abstand von 0,5 mm eine Ferritplatte der Dicke 2 mm mit $\mu_r = 2200$ und $\sigma = 0,1$ S/m; direkt darunter liegt eine Metallplatte der Dicke 1 mm mit $\mu_r = 1$ und $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ S/m. Der Aufbau der Litzendrähte ist in Tabelle 4.2 beschrieben, die Transmitter verwenden Draht #1 und der Empfänger Draht #2. Es wird der Frequenzbereich $f = [1 \text{ kHz}; 300 \text{ kHz}]$ betrachtet.

	Draht #1	Draht #2
Litzendurchmesser	80 μm	30 μm
Füllfaktor	11663/ cm^2	75917/ cm^2
Litzen pro Draht	24	240

Tabelle 4.2: Drahteigenschaften.



(a) Eigeninduktivität des Empfängers.

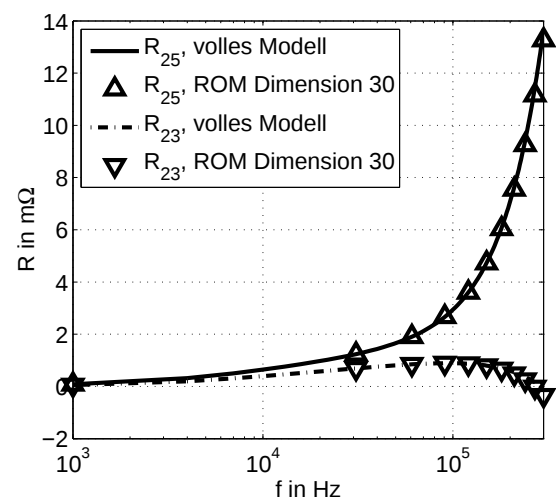
(b) Koppelwiderstände $TX2$ zu Empfänger und $TX2$ zu $TX5$.

Abbildung 4.10: Kenngrößen mit vollem Modell und EP-ROM der Dimension 30.

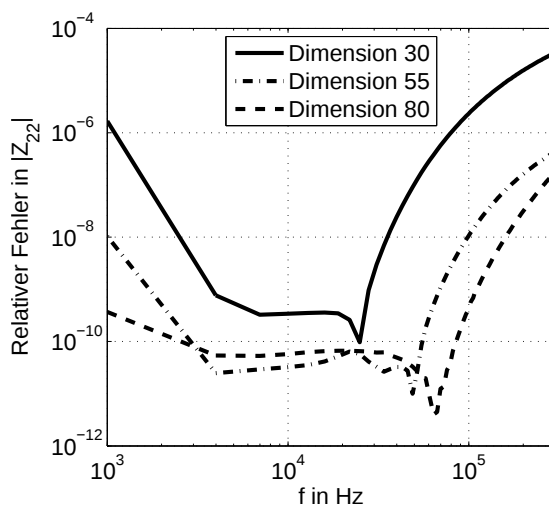
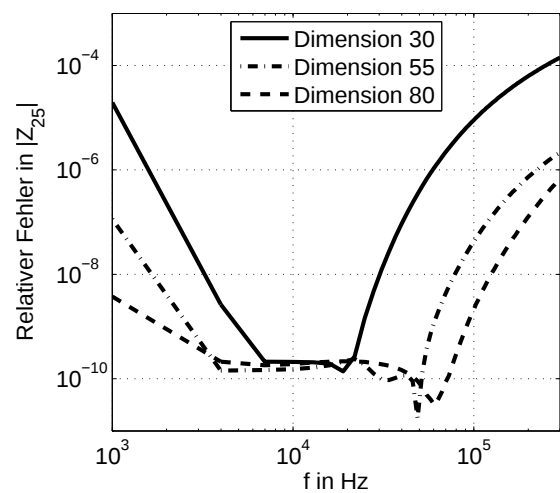
(a) Eigenimpedanz $TX2$.(b) Koppelimpedanz $TX2$ zu Empfänger.

Abbildung 4.11: Relative Fehler in Einträgen der Impedanzmatrix für verschiedene ROM-Dimensionen.

	Volles Modell ^a	EP-ROM
Dimension	129.134	30
Homogenisierung	5,32 s	5,32 s
Modellgenerierung	–	26,1 s
Auswertung 101 Frequenzpunkte	1150 s	0,136 s
Simulation auf einem Intel Core i7-2600K CPU mit 3.4 GHz und 16 GB RAM.		

^a Intel MKL 11.1 PARDISO zur Faktorisierung.

Tabelle 4.3: Simulationsdaten für das Energieübertragungs-System.

Für das System wird nach Abschnitt 4.5 ein Einpunkt-ROM mit Entwicklungspunkt $f = 10$ kHz und Ordnung des Momentenabgleichs $q = 5$ erstellt, was einer Dimension von 30 entspricht. Abbildung 4.10 zeigt sowohl die Eigeninduktivität des Empfängers als auch die Koppelwiderstände $TX2$ zu Empfänger und $TX2$ zu $TX5$ über der Frequenz. Optisch ist eine gute Übereinstimmung bei allen Größen zu sehen. Quantitativ sind in Abbildung 4.11 relative Fehler e nach (3.93) in verschiedenen Einträgen der Impedanzmatrix dargestellt. Es ist gut zu sehen, dass das ROM um den Entwicklungspunkt konvergiert ist, das heißt, die Impedanzen werden bis auf numerisches Rauschen reproduziert. Für Frequenzen, welche weiter vom Entwicklungspunkt entfernt sind, ist der relative Fehler entsprechend größer. Mit steigender Ordnung des Momentenabgleichs und damit steigender ROM-Dimension verringert sich der Fehler und der Konvergenzbereich vergrößert sich. Da der Fehler aber für das ROM der Dimension 30 bereits für die meisten Frequenzen unterhalb von 10^{-4} liegt, wird dieses ROM als hinreichend genau zur Charakterisierung des Systems angesehen. Tabelle 4.3 gibt einen Überblick über die Simulationszeiten.

4.7 Fazit

Homogenisierungsverfahren können Litzendraht anhand einer mikroskopischen Einheitszelle charakterisieren. Die energetische Entkopplung von Skin- und Proximityeffekt erlaubt die Extraktion äquivalenter Materialparameter und damit die FE-Simulation von Strukturen mit Litzendraht. Messungen zeigen, dass die Methodik für systemrelevante Frequenzen im Rahmen von Fertigungstoleranzen genaue Voraussagen liefert. Analog zu Kapitel 3 sind kleine reduzierte Modelle in der Lage, den Frequenzgang der FE-Modelle mit im Vergleich zum Diskretisierungsfehler hoher Genauigkeit zu approximieren.

Kapitel 5

Modellordnungsreduktion für Wirbelstromprobleme variabler Geometrie

Die in Kapitel 3 und 4 vorgestellten Verfahren sind für eine bekannte, feste Modellgeometrie formuliert und ermöglichen eine schnelle Simulation der Frequenzgänge. Bei der computergestützten Produktentwicklung sind sie somit für die Analyse bestehender Bauteile oder einzelner Designs geeignet. Im Rahmen eines Entwicklungsprozesses sind aber oft auch Synthesewerkzeuge gewünscht, welche Optimierungsaufgaben erfüllen oder Antwortflächen über geometrische Designparameter erstellen sollen. Dazu müssen die Computermodele nicht nur an mehreren Frequenzpunkten, sondern auch an einer Vielzahl geometrischer Konfigurationen ausgewertet werden. Für die Praxistauglichkeit ist es zudem obligatorisch, dass die Rechnungen schnell durchzuführen sind. Folglich kommen die bisher betrachteten MOR-Methoden nicht in Frage, weil die Modelle für jede Konfiguration neu erstellt werden müssten.

Abhilfe schaffen Verfahren zur parametrischen Modellordnungsreduktion (PMOR), ein detaillierter Überblick ist in [Bur14] gegeben. In dieser Arbeit werden auf Projektion basierende Ansätze betrachtet, bei welchen grundsätzlich zwischen Gesamtbereichs- und Teilbereichsverfahren unterschieden werden kann. Gesamtbereichsverfahren erstellen ein einziges, im gesamten Parameterraum gültiges Modell durch Projektion in einen konstanten Unterraum. Hierzu zählen beispielsweise [PS05] und [FDE10]. Ein Nachteil solcher Verfahren ist, dass der Unterraum sowohl mit der Anzahl der Parameter als auch mit der Größe einzelner Parameterintervalle in seiner Dimension stark ansteigt. Dieser Effekt lässt sich dadurch erklären, dass der Unterraum alle Änderungen der Übertragungseigenschaften des Modells mit den Parametern abbilden können muss. Mit steigender Dimension sinkt aber die Rechengeschwindigkeit des parametrischen reduzierten Modells (PROM) bis zur Unbrauchbarkeit.

Im Gegensatz dazu arbeiten Teilbereichsverfahren mit der Interpolation mehrerer, an verschiedenen Stützstellen im Parameterraum erzeugter ROMs [LE09], [PMEL10] oder mit explizit parameterabhängigen Unterräumen [AF08], [Son13], wodurch die Dimension der entstehenden reduzierten Modelle nahezu von der Anzahl der Parameter entkoppelt wird. Die Verfahren mit parameterabhängigem Unterraum zeichnen sich dabei durch einen besonders niedrigen Fehler aus. Zu dieser Klasse zählt auch das im Rahmen der Dissertation [Bur14] hervorgegangene Verfahren.

Eine konkrete Anwendung für PMOR-Methoden ist die Charakterisierung verschiedener Designvariationen von Spulen: In Kombination mit der Homogenisierung aus Kapitel 4 ist das Ziel, sowohl den Wicklungsaufbau der Spule über Windungszahl oder -position als auch den verwendeten Draht zu variieren. Dies schlägt sich in parametrischen Systemmatrizen sowie Ein- und Ausgangsfunktionalen der FE-Modelle nieder. Die PMOR-Methode aus [Bur14] unterliegt jedoch der Einschränkung auf konstante Ein- und Ausgangsfunktionale. In der vorliegenden Arbeit soll diese Einschränkung auf intuitive Weise behoben werden.

5.1 Rekonstruktion einer affinen Parametrierung

Für die Erläuterungen dieses Abschnitts sei

$$\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p \quad (5.1)$$

ein Vektor geometrischer Parameter und $\mathcal{P}$ ein hyperkubisches Gebiet. Zusätzlich sei $\mathbf{s} \in \mathcal{S} \subset \mathbb{C}^s$ ein Parametervektor derart, dass die betrachteten Modelle für $\mathbf{p} = \text{const.}$ affin in $\mathbf{s}$ parametrisiert sind. Dem Vektor $\mathbf{s}$ kommt für die Modelle aus Kapitel 4 die Rolle der Frequenz und der Materialeigenschaften zu.

Auch im Kontext parametrischer MOR ist eine affine Form der Ausgangsmodelle (2.40) Voraussetzung für ein effizientes ROM nach Definition 2.7. Mit üblichen Verfahren erzeugte FE-Modelle basieren allerdings auf separat an den verschiedenen Parameterpunkten erstellten FE-Netzen, die sich hinsichtlich der Netztopologie und damit auch hinsichtlich der Anzahl der Unbekannten und der Besetzungsstruktur der FE-Matrizen unterscheiden. Daher wird in [DEF09] vorgeschlagen, ein parameterabhängiges Netz $\mathcal{M}(\mathbf{p})$ mit konstanter Topologie zu erstellen, bei welchem die Knotenpositionen stetig von $\mathbf{p}$ abhängen. Zur Realisierung solcher Netze kommen Verzerrungsalgorithmen zum Einsatz [Bur08], [WV12], bei einfachen Geometrieänderungen können die Knotenpositionen über analytische Formeln angepasst werden.

Aus $\mathcal{M}(\mathbf{p})$ kann zwar eine affine Darstellung der FE-Matrizen abgeleitet werden, doch aufgrund der Komplexität dieses Vorgehens und der daraus resultierenden hohen Anzahl an affinen Koeffizienten erweist es sich als zweckmäßig, die Parametrierung als implizit anzunehmen und eine affine Approximation zu erzeugen. Dies

geschieht nach [DEF09], [BFDE13] durch Interpolation der Matrizen mit multivariaten Polynomen.

Gegeben sei ein Ausgangsmodell der Form

$$\left(\sum_{i=1}^{M_i} \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i(\mathbf{p}) \right) \mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left(\sum_{k=1}^{M_k} \vartheta_k(\mathbf{s}) \mathbf{B}_k(\mathbf{p}) \right) \mathbf{u}(\mathbf{p}), \quad (5.2a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left(\sum_{l=1}^{M_l} \varsigma_l(\mathbf{s}) \mathbf{C}_l(\mathbf{p}) \right) \mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (5.2b)$$

Die Matrizen $\mathbf{A}_i(\mathbf{p})$ werden mit geeigneten Interpolationsfunktionen $\Gamma_m : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$ und Koeffizienten $\mathbf{A}_{i,m}$ approximiert, sodass

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{p}) \approx \check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) := \sum_{m=1}^{M_m} \Gamma_m(\mathbf{p}) \mathbf{A}_{i,m}. \quad (5.3)$$

Die gleichen Funktionen Γ_m führen damit auch zur Interpolation der Eingangs- und Ausgangsmatrizen

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{p}) \approx \check{\mathbf{B}}_k(\mathbf{p}) := \sum_{m=1}^{M_m} \Gamma_m(\mathbf{p}) \mathbf{B}_{k,m}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{C}_l(\mathbf{p}) \approx \check{\mathbf{C}}_l(\mathbf{p}) := \sum_{m=1}^M \Gamma_m(\mathbf{p}) \mathbf{C}_{l,m}. \quad (5.5)$$

Werden die Γ_m so gewählt, dass an den Punkten $\mathbf{p}_i \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ die Interpolationsbedingung

$$\Gamma_i(\mathbf{p}_k) = \delta_{ik} \quad \text{für } \mathbf{p}_i \in \mathcal{Q} \quad (5.6)$$

gilt, dann muss kein zusätzliches Interpolationsproblem gelöst werden. Stattdessen entsprechen die Koeffizienten in (5.3) bis (5.5) den FE-Größen, die an den durch $\mathcal{Q}$ gegebenen Konfigurationen ausgewertet sind. Einsetzen der interpolierten Größen in (5.2) führt auf das im Sinne von Definition 2.2 affine Ausgangsmodell

$$\left(\sum_{i=1}^{M_i} \theta_i(\mathbf{s}) \check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) \right) \mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left(\sum_{k=1}^{M_k} \vartheta_k(\mathbf{s}) \check{\mathbf{B}}_k(\mathbf{p}) \right) \mathbf{u}(\mathbf{p}), \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left(\sum_{l=1}^{M_l} \varsigma_l(\mathbf{s}) \check{\mathbf{C}}_l(\mathbf{p}) \right) \mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (5.7b)$$

5.2 Parametrische Ordnungsreduktion mit parameterabhängigen Unterräumen

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an den zitierten Originalarbeiten und [Bur14]. Die Konstruktion der Projektionsmatrix wird in [B5] beschrieben. Ausgangspunkt ist ein Tensorgitter $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ mit Interpolationspunkten $\mathbf{p}_i$. Aus diesem Grund wird vorausgesetzt, dass $\mathcal{P}$ eine hyperkubische Parameterdomäne ist. An den Interpolationspunkten werden Projektionsmatrizen $\mathbf{V}_i \in \mathbb{C}^{N \times n}$ zur Beschreibung des Verhaltens von (5.7) über $\mathbf{s}$ für $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i \in \mathcal{G}$ erstellt. Mithilfe von Interpolationsfunktionen

$$\Omega_i : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R} \quad \text{mit } \Omega_i(\mathbf{p}_k) = \delta_{ik} \quad (5.8)$$

wird die parameterabhängige Projektionsmatrix berechnet:

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}) = \sum_i \Omega_i(\mathbf{p}) \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_c \mathbf{D}_{i,c}. \quad (5.9)$$

Sie ergibt sich als Interpolation von Projektionen einer Referenzbasis $\mathbf{V}_c$ auf den von $\mathbf{V}_i$ aufgespannten Raum. Diagonalmatrizen

$$[\mathbf{D}_{i,c}]_{kk} = \|\mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_c \mathbf{e}_k\|_2^{-1} \quad (5.10)$$

mit Einheitsvektoren $\mathbf{e}_k$ nach (3.87) skalieren die Projektionsmatrix derart, dass $\mathbf{V}(\mathbf{p}_i)$ unitär ist. An $\mathbf{V}_c$ wird die Anforderung gestellt, dass die Projektionen auf $\mathbf{V}_i$ immer Matrizen vollen Ranges liefern,

$$\text{rank } \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_c = n \quad \forall i, \quad (5.11)$$

damit ein PROM mit regulärer Systemmatrix entsteht. Ein entsprechendes Vorgehen kann zur Konstruktion von Testmatrizen $\mathbf{W}(\mathbf{p})$ verwendet werden.

Ein PROM von (5.7) unter Verwendung parameterabhängiger Projektionsmatrizen (5.9) ist gegeben durch

$$\left(\sum_{i=1}^{M_i} \sum_{m=1}^{M_m} \sum_{w,v} \theta_i(\mathbf{s}) \Gamma_m(\mathbf{p}) \Omega_w(\mathbf{p}) \Omega_v(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{A}}_{imvw} \right) \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left(\sum_{k=1}^{M_k} \sum_{m=1}^{M_m} \sum_w \vartheta_k(s) \Gamma_m(\mathbf{p}) \Omega_w(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{B}}_{kmw} \right) \mathbf{u}(\mathbf{p}), \quad (5.12a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left(\sum_{l=1}^{M_l} \sum_{m=1}^{M_m} \sum_v \varsigma_l(s) \Omega_v(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{C}}_{lmv} \right) \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (5.12b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_{imwv} = \mathbf{D}_{w,c}^H \mathbf{W}_c^H \mathbf{W}_w \mathbf{W}_w^H \mathbf{A}_{i,m} \mathbf{V}_v \mathbf{V}_v^H \mathbf{V}_c \mathbf{D}_{v,c}, \quad (5.13a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{kmw} = \mathbf{D}_{w,c}^H \mathbf{W}_c^H \mathbf{W}_w \mathbf{W}_w^H \mathbf{B}_{k,m}, \quad (5.13b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{lmv} = \mathbf{C}_{l,m} \mathbf{V}_v \mathbf{V}_v^H \mathbf{V}_c \mathbf{D}_{v,c}. \quad (5.13c)$$

sowie Referenzbasen $\mathbf{V}_c$ und $\mathbf{W}_c$. Es ist effizient im Sinne von Definition 2.7, weil die reduzierten Größen (5.13) nur einmal berechnet werden müssen. Zur Generierung der Projektionsmatrizen $\mathbf{V}_i$ und $\mathbf{W}_i$ bezüglich $\mathbf{s}$ an den Stützstellen $\mathbf{p}_i$ ist nach Voraussetzung ein Mehrpunktverfahren nach Definition 2.6 geeignet. Für den Fall, dass das Ausgangsmodell (5.2) mit $\mathbf{p} = \text{const.}$ sogar polynomiell in $\mathbf{s}$ parametrisiert ist, sind auch Einpunktverfahren nach Definition 2.4 anwendbar.

In [Bur14] ist ein Algorithmus zur adaptiven Konstruktion des Gitters $\mathcal{G}$ gegeben, zur Interpolation der Projektionsmatrizen werden multilineare Hutfunktionen Ω_i gewählt [B5]. Die Konstruktion der Geometrie-Interpolationsfunktionen Γ_m ist in [BSFDE14] dargelegt. Da ohnehin eine hyperkubische Parameterdomäne gefordert ist, werden Lagrange-Polynome zweiter Ordnung für Γ_m gewählt. Ein Algorithmus zur Konstruktion von $\mathcal{Q}$ als adaptive Verfeinerung des Interpolationsgitters der Projektionsmatrizen $\mathcal{G}$ ist ebenfalls in [Bur14] gegeben. Die Referenzbasen werden aus der Menge der Projektionsmatrizen ausgewählt, sofern dadurch (5.11) erfüllt ist.

5.3 Anwendung auf Wirbelstromprobleme

Als Anwendung des in diesem Kapitel vorgestellten Rahmenwerks wird das FE-Modell (4.49) von Spulen mit Litzendrähten unter Einbeziehung geometrischer Parameter (5.1) vorgestellt. Das Ausgangsmodell lautet

$$\left(\mathbf{A}_0(\mathbf{p}) + j\omega \mathbf{A}_1(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n_C} \nu_m^h(\omega, \mathbf{p}) \mathbf{A}_h(\mathbf{p}) \right) \mathbf{x} = \mathbf{B}_C(\mathbf{p}) \mathbf{i}_C, \quad (5.14a)$$

$$\mathbf{u}_C = j\omega \mathbf{B}_C^T(\mathbf{p}) \mathbf{x} + \text{diag } Z_h(\omega, \mathbf{p}) \mathbf{i}_C \quad (5.14b)$$

mit den in (4.50) definierten Matrizen. Die äquivalenten Materialgrößen $\nu_m^h(\omega, \mathbf{p})$ und $\text{diag } Z_h(\omega, \mathbf{p})$ sind nur von denjenigen Einträgen von $\mathbf{p}$ abhängig, die den physikalischen Aufbau der Litzendrähte derart beeinflussen, dass das zugrunde liegende Zellenproblem sich ändert. Auch bei den FE-Matrizen kann die Parameterabhängigkeit eingegrenzt werden, denn entsprechend [B4] gehen Lageänderungen von Spulen nur in die Matrizen $\mathbf{A}_0(\mathbf{p})$ und $\mathbf{A}_1(\mathbf{p})$ ein. Parameter, die das Wicklungsfenster der Spulen ändern, haben hingegen Auswirkungen auf alle FE-Größen.

Durch Einsatz von Geometrieinterpolation (5.3) bis (5.5) an Stützstellen $\mathbf{p}_m$ kann ein reduziertes Modell erstellt werden. Die Konstruktion der Projektionsmatrizen $\mathbf{V}_i \in \mathbb{C}^{N \times n}$ folgt dem Vorgehen in Abschnitt 4.5. Das PROM lautet damit

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} = \left(\sum_{m=1}^{M_m} \sum_w \Gamma_m(\mathbf{p}) \Omega_w(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{B}}_{mw} \right) \mathbf{i}_C, \quad (5.15a)$$

$$\mathbf{u}_C = j\omega \left(\sum_{m=1}^{M_m} \sum_w \Gamma_m(\mathbf{p}) \Omega_w(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{B}}_{mw}^T \right) \tilde{\mathbf{x}} + \text{diag } Z_h(\omega, \mathbf{p}) \mathbf{i}_C, \quad (5.15b)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{m=1}^{M_m} \sum_{w,v} \Gamma_m(\mathbf{p}) \Omega_w(\mathbf{p}) \Omega_v(\mathbf{p}) \left(\tilde{\mathbf{A}}_0^{mwv} + j\omega \tilde{\mathbf{A}}_1^{mwv} + \sum_{i=1}^{n_C} \nu_m^h(\omega, \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{A}}_h^{mwv} \right) \quad (5.15c)$$

und die zugehörigen reduzierten Größen berechnen sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}}_x^{mwv} = \mathbf{D}_{w,c} \mathbf{V}_c^T \mathbf{V}_w \mathbf{V}_w^T \mathbf{A}_x(\mathbf{p}_m) \mathbf{V}_v \mathbf{V}_v^T \mathbf{V}_c \mathbf{D}_{v,c} \quad \text{für } x \in \{0, 1, h\}, \quad (5.16a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{mw} = \mathbf{D}_{w,c} \mathbf{V}_c^T \mathbf{V}_w \mathbf{V}_w^T \mathbf{B}_C(\mathbf{p}_m). \quad (5.16b)$$

Der Speicheraufwand des ROMs reduziert sich durch die Symmetrie der Ausgangsmatrizen, weil

$$\tilde{\mathbf{A}}_x^{mvw} = (\mathbf{D}_{w,c} \mathbf{V}_c^T \mathbf{V}_w \mathbf{V}_w^T \mathbf{A}_x^T(\mathbf{p}_m) \mathbf{V}_v \mathbf{V}_v^T \mathbf{V}_c \mathbf{D}_{v,c})^T = \tilde{\mathbf{A}}_x^{mwv,T}. \quad (5.17)$$

5.4 Numerische Ergebnisse

Kontaktloses Energieübertragungs-System

Als erstes Beispiel wird das kontaktlose Energieübertragungs-System aus Kapitel 4 betrachtet. Die Geometrie der Referenzkonfiguration ist in Abschnitt 4.6 beschrieben. Die Position der Empfängerspule sei nun veränderlich, indem ihr Mittelpunkt bei konstantem Abstand von $d = 4$ mm entlang einer geraden Linie vom Mittelpunkt von $TX1$ bis zum Mittelpunkt von $TX4$ variieren kann, beschrieben durch den Geometrieparameter t . Da nur die Position der Spulen beeinflusst wird, ist nur die Systemmatrix von (5.14), nicht aber $\mathbf{B}_C$ parameterabhängig. Zusammen mit der Frequenz f lauten die Systemparameter

$$f \in [1; 300] \text{ kHz}, \quad (5.18a)$$

$$t \in [-14, 3; 14, 3] \text{ mm}. \quad (5.18b)$$

Das parametrische FE-Modell wird realisiert über ein von t abhängiges FE-Netz durch analytische Anpassung der Knotenpositionen ausgehend von dem Referenz-Netz für $t = 0$. Ein Vergleich der Impedanzmatrix $\mathbf{Z}_{\text{verz}}$ der über Netzverzerrung

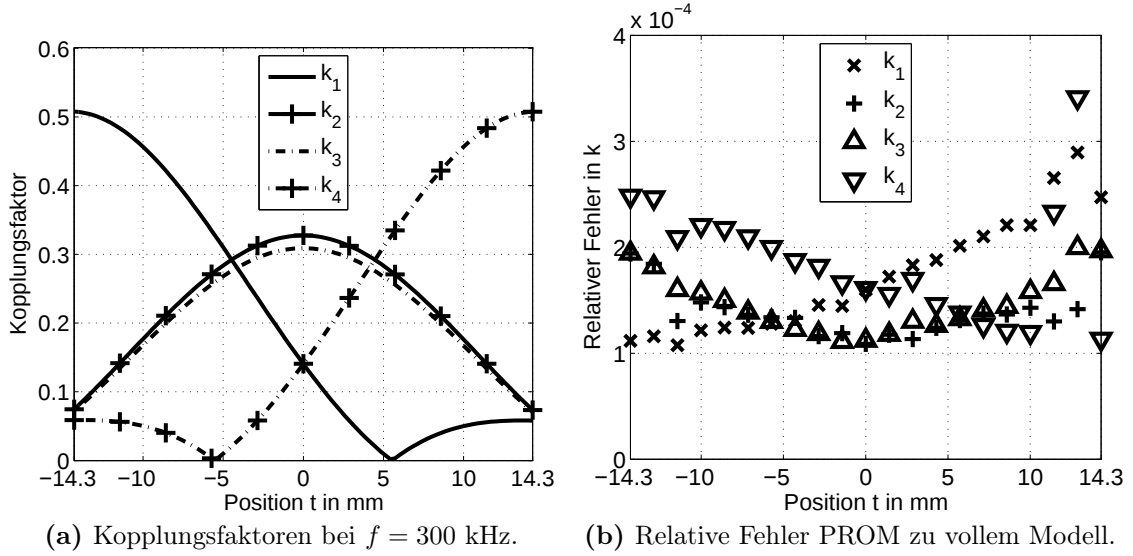


Abbildung 5.1: Induktive Kopplungsfaktoren k_i der Transmitterspulen zur Empfängerspule basierend auf PROM und zugehörige Fehler über t .

generierten FE-Lösung mit der Impedanzmatrix $\mathbf{Z}_{\text{neu}}$ basierend auf einer Neuvernetzung ergibt bei ($f = 300$ kHz, $t = 14,3$ mm) einen relativen Fehler von

$$\frac{\|\mathbf{Z}_{\text{verz}} - \mathbf{Z}_{\text{neu}}\|_2}{\|\mathbf{Z}_{\text{neu}}\|_2} < 1\%. \quad (5.19)$$

Damit wird das FE-Netz unter Berücksichtigung der Diskretisierungsfeinheit als geeignet für die Ordnungsreduktion eingestuft. Zur Konstruktion eines PROMs wird der adaptive Algorithmus aus [Bur14, Kapitel 5] verwendet. Die Fehlertoleranzen betragen $e_{th}^I = e_{th}^{II} = 10^{-3}$ für die Konstruktion des Unterraum-Interpolationsgitters $\mathcal{G}$ bzw. des System-Interpolationsgitters $\mathcal{Q}$. Die Projektionsmatrizen werden über ein Einpunktverfahren nach Abschnitt 4.5 generiert. Die ROM-Dimension wird dabei auf den festen Wert $n = 30$ gesetzt, weil dieser sich in Abschnitt 4.6 als ausreichend für die Beschreibung des Systemverhaltens über der Frequenz erwiesen hat. Es ergeben sich $|\mathcal{Q}| = 35$ Interpolationspunkte für die Geometrie nach (5.3) unter Verwendung von Lagrange-Polynomen zweiter Ordnung. Die Projektionsmatrizen (5.9) werden stückweise linear interpoliert mit $|\mathcal{G}| = 18$ Interpolationspunkten.

Das PROM wird an $101 \times 101 = 10.201$ äquidistant im Parameterraum verteilten Punkten ausgewertet. Da die Variationen der Systemantwort mit der Frequenz verhältnismäßig gering sind, werden in Abbildung 5.1(a) die Kopplungsfaktoren k_1 bis k_4 der Transmitter $TX1$ bis $TX4$ zum Empfänger über dem Geometrieparameter t für eine feste Frequenz $f = 300$ kHz dargestellt. Die Graphen von k_1 und k_4 sind wie das zugrunde liegende Modell symmetrisch zu $t = 0$, wobei die Kopplungsfaktoren ihr Maximum erreichen, wenn sich der Empfänger über den entsprechenden Transmittern befindet. Die Spulen $TX2$ und $TX3$ weisen das Maximum bei $t = 0$ auf,

	volles FE-Modell ^a	PROM
Generierung	31,2 s	3100 s
davon Erzeugung der $\mathbf{V}_i$	–	1745 s
davon Erzeugung der Modelle (5.14)	31,2 s	1247 s
Simulation an 10.201 Punkten	62 h ^b	3,71 s
davon Homogenisierung	1,95 s	1,95 s

Simulation auf einem Intel Core i7-2600K CPU mit 3.4 GHz und 16 GB RAM.

^a Intel MKL 11.1 PARDISO zur Faktorisierung.

^b Extrapoliert.

Tabelle 5.1: Simulationszeiten für das Energieübertragungs-System.

wobei die Kopplung für $TX2$ etwas höher liegt, da sich die Spule näher am Empfänger befindet. Abbildung 5.1(b) zeigt relative Fehler des PROMs im Vergleich zum vollen, auf Netzverzerrung basierenden Modell. Die Fehler enthalten also Anteile aus der Geometrieinterpolation und Anteile aus der Ordnungsreduktion. Dennoch liegt der Fehler stets unter $4 \cdot 10^{-4}$, was in oder unterhalb der Größenordnung zu erwartender Diskretisierungsfehler der FE-Methode liegt. Gleichzeitig sind die Unterschiede im vollen Modell unter Verwendung verschiedener FE-Netze (5.19) größer, was die Grenzen des Prinzips der Netzverzerrung aufzeigt.

In Tabelle 5.1 sind Simulationszeiten für das Energieübertragungs-System gegeben. Unter dem vollen Modell ist dabei das auf Netzverzerrung basierende Ausgangsmodell zu verstehen; hier umfasst die Generierungszeit die Verzerrung des Referenznetzes sowie die Erstellung der Systemmatrizen für einen Parameterpunkt. Bedingt durch die Prototyp-Implementierung entfallen rund 40% der Generierungszeit für das PROM auf IO-Operationen der Festplatte. Es ist zu erkennen, dass die gesamte Prozesskette des PROM weniger als eine Stunde in Anspruch nimmt, während das volle Modell bereits mehrere Tage für die Auswertung benötigen würde. Dies unterstreicht die Zweckmäßigkeit der parametrischen Ordnungsreduktion. Gleichzeitig ist zu sehen, dass die Homogenisierung nur einen verschwindenden Teil der gesamten Simulationszeit ausmacht.

Gekoppeltes Spulenpaar mit variablem Aufbau

Zur Demonstration parameterabhängiger $\mathbf{B}_C$ in (5.15) wird ein aus Litzendraht gewickeltes Spulenpaar mit Topfkernen betrachtet. Die Einzelspulen sind nach Abbildung 5.2 aufgebaut, wobei die Größe der Wicklungsfenster aus den je identischen elektrischen Eigenschaften der Spulen folgt. Beide Spulen liegen sich im Abstand von 4 mm von der Oberfläche der Kerne aus gemessen gegenüber. Zwischen den Symmetrieachsen ist ein Versatz von 2 mm, sodass es sich um eine echt dreidimen-

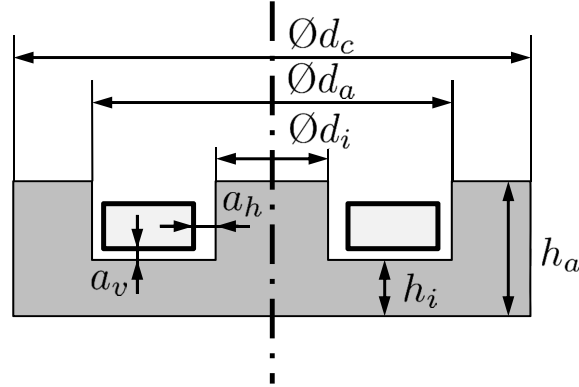


Abbildung 5.2: Querschnitt durch rotationssymmetrische Spule mit Topfkern. Für den Topfkern gelten die Maße $d_i = 17,7$ mm, $d_a = 35,4$ mm, $d_c = 40$ mm, $h_i = 2$ mm und $h_a = 5$ mm sowie die Materialeigenschaften $\mu_r = 3000$ und $\sigma = 0$ S/m. Weiterhin ist $a_h = 0,4$ mm und $a_v = 0,1$ mm.

sionale Struktur handelt. Die Parameter sind die Windungszahl N_w , die Anzahl der Litzen pro Draht n_w , der Litzendurchmesser d und die Betriebsfrequenz f nach

$$N_w \in [8; 12], \quad (5.20a)$$

$$n_w \in [30; 80], \quad (5.20b)$$

$$d \in [60; 100] \text{ } \mu\text{m}, \quad (5.20c)$$

$$f \in [100; 200] \text{ kHz}. \quad (5.20d)$$

Der Einfachheit halber werden für die Modellierung alle Parameter als reelle Zahlen angesehen.

Zunächst wird der Aufbau des Wicklungsfensters erläutert. Der Litzendraht besteht aus Kupferlitzen mit $\mu_r = 1$ und $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ S/m sowie einer nichtmagnetischen Isolationsschicht. Um das Zellenproblem aufzustellen, wird außer d die Fläche der Einheitszelle A_z benötigt, die näherungsweise proportional zu d^2 sein sollte. In Anlehnung an Herstellerdaten [Ele] wird sie über einen quadratischen Fit

$$A_z = 1,1432 \cdot d^2 + 1,6547 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot d - 1,1482 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \quad (5.21)$$

berechnet. Daraus folgt die Fläche A_d eines Drahtstranges zu

$$A_d = n_w A_z. \quad (5.22)$$

Der Draht ist mit nichtmagnetischer Isolation der Dicke $r_u = 50 \text{ } \mu\text{m}$ umspinnen und auf Windungsebene mit quadratischer Packung zu einer zweilagigen Spule gewickelt. Damit lauten die Breite b und Höhe h des Wicklungsfensters

$$b = \frac{N_w}{2} \sqrt{\frac{4}{\pi} A_d} + 2r_u, \quad (5.23)$$

$$h = 2 \sqrt{\frac{4}{\pi} A_d} + 2r_u. \quad (5.24)$$

	Volles Modell ^a	PROM
Dimension	459.966	8
Generierung	100 s	51,7 h
davon Erzeugung der $\mathbf{V}_i$	–	17,6 h
davon Erzeugung der Modelle (5.14)	100 s	27,2 h
Simulation an 6.765.201 Punkten	42.2 a ^b	3,98 h
davon Homogenisierung	21,1 s	21,1 s
Einzelne Auswertung	197 s	2,1 ms
Simulation auf einem Intel Core i7-2600K CPU mit 3.4 GHz und 16 GB RAM.		

^a Intel MKL 11.1 PARDISO zur Faktorisierung.

^b Extrapoliert.

Tabelle 5.2: Simulationszeiten für das Spulenpaar mit Topfkern.

Grundlage für weitere Betrachtungen ist ein FE-Modell der Spulen, welches für Ansatzfunktionen zweiter Ordnung rund 460.000 Freiheitsgrade besitzt. Daraus wird mithilfe des adaptiven Algorithmus aus [Bur14, Kapitel 5] mit $e_{th}^I = e_{th}^{II} = 10^{-3}$ ein PROM erstellt. Die Projektionsmatrizen werden über den MP-Algorithmus 3.1 generiert; deren Dimension wird dabei auf 8 fixiert. Die Wahl der verhältnismäßig kleinen ROM-Dimension lässt sich durch die geringen zu erwartenden Variationen der Impedanz mit der Frequenz erklären, siehe dazu auch die numerischen Beispiele aus Kapitel 4 und das Verhalten des Litzendrahtes im hier betrachteten Frequenzbereich. Der Modellfehler wird somit hauptsächlich durch die Geometrieinterpolation verursacht und bewegt sich aufgrund der Wahl der Fehlerindikatoren e_{th} in der gleichen Größenordnung wie im vorherigen numerischen Beispiel. Auf eine weitere Diskussion der Fehler wird an dieser Stelle verzichtet.

Jeder Parameter wird mit 51 äquidistant verteilten Punkten diskretisiert, sodass das PROM an $51^4 = 6.765.201$ Punkten ausgewertet wird. Dabei ist zu beachten, dass das Zellenproblem zur Charakterisierung des Litzendrahtes nach (5.21) nur von d und f abhängt und somit nur an 51^2 Punkten auszuwerten ist. Die Parameter N_w und n_n beeinflussen ausschließlich die Skalierung der äquivalenten Permeabilitäten und Impedanzen. An den Simulationszeiten für das PROM laut Tabelle 5.2 ist zu erkennen, dass der Homogenisierungs-Schritt nicht ins Gewicht fällt. Auch wenn die Modellgenerierung über zwei Tage in Anspruch nimmt, ist die Zeit sinnvoll investiert. Denn eine Auswertung des vollen FE-Modells kommt mit einer geschätzten Simulationsdauer von über 40 Jahren nicht in Frage.

Zuletzt werden die Ergebnisse des PROMs betrachtet. Die Abbildungen 5.3 bis 5.5 zeigen Schnitte durch die Antwortfläche des PROMs, wobei jeweils die Frequenz $f = 150$ kHz gewählt wird, weil Änderungen der Impedanz über der Frequenz verhältnismäßig gering ausfallen. Abbildung 5.3 zeigt die Eigeninduktivität der Primärspule in Abhängigkeit der Windungszahl und der Litzen pro Draht für $d = 60 \mu\text{m}$. Während die Induktivität mit der Windungszahl stark ansteigt, ist ein leichter Ab-

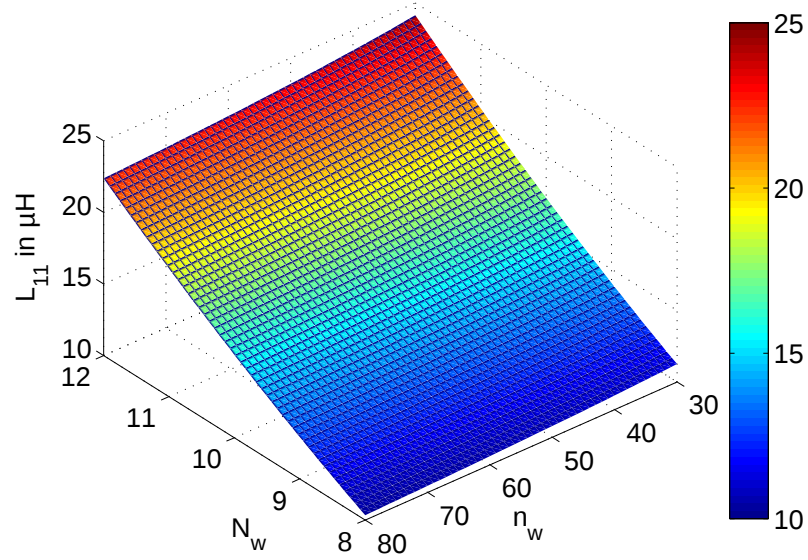


Abbildung 5.3: Eigeninduktivität der Primärspule für $f=150$ kHz und $d = 60\mu\text{m}$.

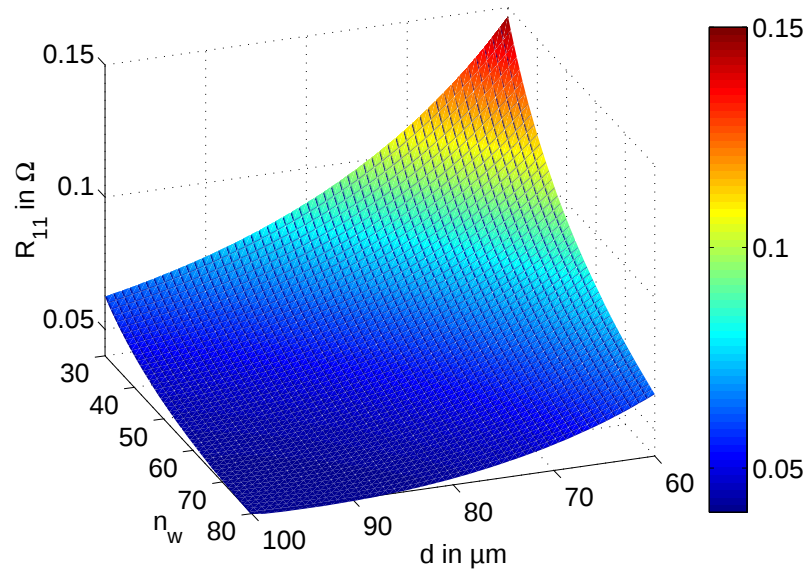


Abbildung 5.4: Widerstand der Primärspule für $f=150$ kHz und $N_w = 10$.

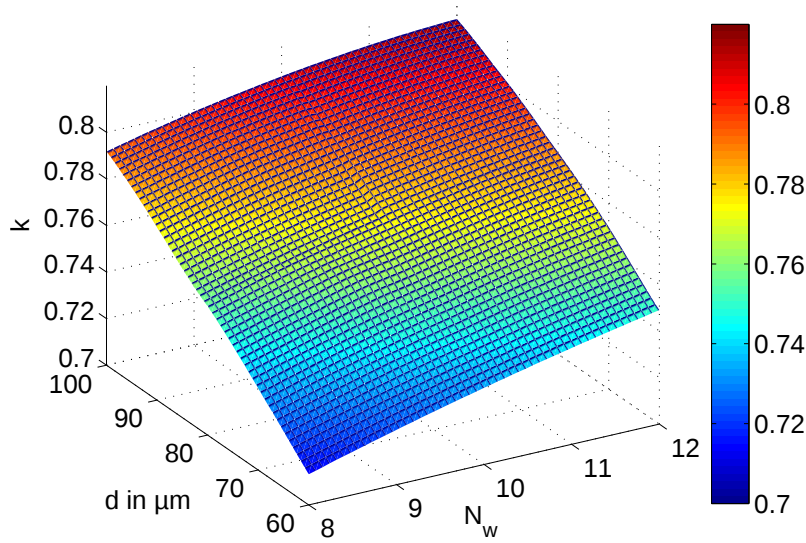


Abbildung 5.5: Kopplungsfaktor für $f=150$ kHz und $n_w = 80$.

fall über der Litzenzahl zu beobachten, weil die Einzeldrähte dicker werden und die Windungen damit nicht mehr so dicht gepackt sind. In Abbildung 5.4 werden bei $N_w = 10$ der Litzendurchmesser und die Litzenzahl variiert, der Widerstand der Primärspule ist dargestellt. Hohe Widerstandswerte ergeben sich für kleines d und kleines n_w . Schließlich wird in Abbildung 5.5 der induktive Kopplungsfaktor k abgebildet für $n_w = 80$ und variables N_w und d . Die größere Kopplung bei großer Windungszahl und großem Litzendurchmesser ist dadurch zu erklären, dass für diese Parameterwerte das Wicklungsfenster stärker ausgefüllt ist und sich somit größere Anteile der Spulen bezüglich der gemeinsamen Achse geometrisch überlappen.

5.5 Fazit

Das in diesem Kapitel vorgestellte Rahmenwerk erlaubt die Ordnungsreduktion von Systemen mit affinen und geometrischen nicht-affinen Parametern. Eine affine Parametrierung wird durch Interpolation der Systemgrößen über der Geometrie approximiert. Anschließende MOR mit variabler Projektionsmatrix ermöglicht die effiziente Behandlung von Systemen selbst mit vielen Parametern. Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass auf diese Weise breitbandige Charakterisierungen von Systemen durchgeführt werden können, welche mit konventionellen Methoden unrealistisch lange Rechenzeiten benötigen würden. Einschränkungen ergeben sich durch die hyperkubischen Parameterdomänen und die Grenzen der FE-Netzverzerrung.

Kapitel 6

Modellordnungsreduktion für Wirbelstromprobleme mit Starrkörperbewegungen

Gegenstand dieses Kapitels sind, wie bereits in Kapitel 5, parametrische MOR-Verfahren, wie sie bei Syntheseprozessen der technischen Produktentwicklung benötigt werden. Konkret werden als geometrische Parameter die wichtige Klasse der Starrkörperbewegungen betrachtet. Eine mögliche Anwendung im Kontext von Wirbelstromproblemen liegt in der Charakterisierung induktiv gekoppelter Systeme mit variablen Spulenpositionen. Wie sich im vorangehenden Kapitel gezeigt hat, ist die dort verwendete Methode der Netzverzerrung zwar gut geeignet, um Bauteile variabler Geometrie zu modellieren, kommt jedoch nur bedingt in Frage, um Starrkörperbewegungen abzubilden. Während translatorische Bewegungen bei zu großen Verzerrungen auf eine schlechte Elementqualität und damit eine schlechte Qualität der FE-Lösung führen, sind rotatorische Bewegungen meist überhaupt nicht über diesen Ansatz zu realisieren.

Im Gegensatz dazu ist die Randelementmethode prinzipbedingt gut geeignet dazu, parametrisierte Ausgangsmodelle mit Starrkörperbewegungen zu erstellen. Denn üblicherweise müssen nur die Oberflächen von Körpern diskretisiert werden, ihre lageabhängigen Wechselwirkungen untereinander werden durch die Fundamentallösungsformeln automatisch abgebildet. Um sowohl komplexe Geometrien und Materialeigenschaften als auch Starrkörperbewegungen berücksichtigen zu können, bietet sich daher die Verwendung der gekoppelten FE-BE-Methode an [BTW84, Kapitel 13]. Ältere Ansätze für FE-BE-Wirbelstromprobleme [KFLR97] basieren auf der Methode der Punktkollokation [Jin10, Kapitel 10], um den BE-Teil zu diskretisieren. Die resultierenden Systemmatrizen sind jedoch unsymmetrisch mit den in dieser Arbeit bereits erwähnten Nachteilen. Eine symmetrische FE-BE-Wirbelstromformulierung wurde erstmals in [Hip02] für die $\mathbf{E}$ -Feld-Formulierung vorgestellt, in [Ost02]

und [HO05] finden sich Anpassungen auf die $\mathbf{A}$ -Formulierung. Letztere Methoden sind damit ohne Probleme an die $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung aus Kapitel 3 zu koppeln.

Zur Auswertung von FE-BE-Modellen ist die Lösung eines linearen Gleichungssystems hoher Dimension notwendig. Die Systemmatrix setzt sich dabei zusammen aus mit der Volumendiskretisierung verknüpften, schwach besetzten FE-Matrizen und mit der Oberflächendiskretisierung verknüpften, vollen BE-Matrizen. Selbst unter Verwendung schneller BE-Techniken wie in [Rok85], [Hac99] ist der Zeitaufwand für die Lösung an einem Punkt im Parameterraum zu hoch, um brauchbare Synthesemethoden zu konstruieren. Genau wie in den vorangehenden Kapiteln ist somit das Ziel dieser Arbeit, den numerischen Aufwand mithilfe eines effizienten MOR-Verfahrens zu verringern. Der wesentliche Unterschied zu bisher betrachteten Systemen liegt in der Art der Parameterabhängigkeit. Während die FE-Matrizen bezüglich Starrkörperbewegungen konstant bleiben, ändern sich die BE-Matrizen trotz unverändertem Netz aufgrund der Fundamentallösung; die Parametrierung ist dabei nicht-affin. Für die Generierung eines effizienten PROMs ist daher die Überführung des Systems in eine affine Form obligatorisch.

Bisherige MOR-Verfahren für gekoppelte FE-BE-Systeme interpolieren die parameterabhängigen BE-Matrizen [ARFL08], [JPHL11]. Nachteilig an Interpolationen ist zum einen, dass ihre Konvergenz nicht gesichert und eine Quantifizierung des Interpolationsfehlers nur schwer möglich ist. Zum anderen wird die einfache Form der zugrunde liegenden Fundamentallösung nicht ausgenutzt, sodass zu erwartende Approximationen dieser Verfahren eine unnötig hohe Komplexität aufweisen. In der vorliegenden Arbeit wird daher die Methode der empirischen Interpolation [BMNP04] auf die greensche Funktion angewendet, um eine affine Parametrierung der BE-Matrizen zu erreichen. Dieses Vorgehen wurde in [FHMS11] für die EFIE (engl. *electrical field integral equation*) vorgeschlagen. Das resultierende affine Modell ist zugänglich für übliche Methoden der parametrischen Ordnungsreduktion.

Abschnitt 6.1 befasst sich mit der Herleitung der symmetrischen FE-BE-Wirbelstromformulierung. Im Hinblick auf eine direkte Lösung der Gleichungssysteme wird eine neue Eichung vorgestellt. Das für eine fixe Geometrie gültige Modell wird in Abschnitt 6.2 auf parametrische Modelle mit Starrkörperbewegungen erweitert. In Abschnitt 6.3 wird die affine Approximation der BE-Matrizen vorgestellt, womit in Abschnitt 6.4 ein effizientes PROM basierend auf einem Mehrpunktverfahren nach Abschnitt 2.3.2 konstruiert wird. Auch die in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren werden anhand numerischer Beispiele in Abschnitt 6.5 validiert.

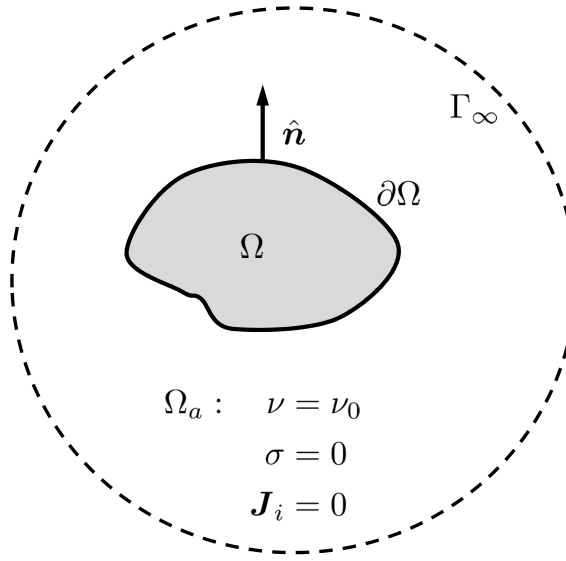


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung eines Feldgebiets Ω für die Randelementmethode.

6.1 Kopplung der Methode der finiten Elemente und der Randelementmethode

In diesem Abschnitt wird eine Galerkin-BE-Formulierung vorgestellt und es wird dargelegt, wie diese symmetrisch mit der FE-Formulierung aus Kapitel 3 gekoppelt werden kann. Betrachtet wird dazu ein Gebiet $\Omega_a \subset \mathbb{R}^3$, dem die physikalische Bedeutung des Außenraums um diskretisierte Strukturen zukommt. Es umschließt nach Innen hin das Feldgebiet Ω , welches mit der FE-Methode behandelte Strukturen repräsentiert. Das Feldgebiet habe den Rand $\partial\Omega$ und den aus Ω heraus zeigenden Einheits-Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$, siehe Abbildung 6.1. Es wird angenommen, dass Ω eine Vereinigung disjunkter, einfach zusammenhängender Lipschitz-Polyeder $\hat{\Omega}_i$ darstellt,

$$\Omega = \bigcup_i \hat{\Omega}_i \quad \text{mit } \hat{\Omega}_i \cap \hat{\Omega}_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, \quad (6.1)$$

wobei die einzelnen Domänen über die Randelementmethode miteinander gekoppelt werden sollen. Die Behandlung nicht einfach zusammenhängender Teilgebiete stellt kein prinzipielles Problem dar; sie kann durch globale Ansatzfunktionen erfolgen [Hip02], worauf aber im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wird.

Nach außen hin ist Ω_a unbeschränkt, was durch den Rand Γ_∞ angedeutet ist. In Ω_a sind keine eingepprägten Ströme erlaubt und die Materialeigenschaften entsprechen denen des Vakuums. Die folgenden Herleitungen basieren auf Größen ausgewertet an Quellpunkten $\mathbf{y}$ und Aufpunkten $\mathbf{x}$, welche der Übersicht halber als

$$f_x = f(\mathbf{x}), \quad (6.2)$$

$$f_y = f(\mathbf{y}) \quad (6.3)$$

geschrieben werden. Ausgangspunkt ist eine Stratton-Chu-Formel für das magnetische Vektorpotenzial [Str10, S. 253], [CK13, Theorem 6.1]: Für $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{A}_x &= \operatorname{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{\mathbf{n}}_y \times \mathbf{A}_y \, d\Gamma_y \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{rot}_y \mathbf{A}_y \times \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y - \operatorname{grad}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{A}_y^+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit der Greenschen Funktion des Laplace-Operators

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (6.5)$$

und der Notation

$$\mathbf{A}_y^+ = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{A}(\mathbf{y} + h\hat{\mathbf{n}}). \quad (6.6)$$

Um eine symmetrische Form der FE-BE-Kopplung zu erhalten, werden aus (6.4) die Calderón-Identitäten [SS11, Kapitel 3.6] in schwacher Form abgeleitet. Calderón-Identitäten bilden die Dirichlet- und die Neumannspur einer Größe auf sich selbst ab und werden daher auch als Calderón-Projektor bezeichnet. Die gesuchten Formeln lauten

$$-\frac{1}{2} \langle \mathbf{K}, \mathbf{w} \rangle_{\partial\Omega} = \mu_0^{-1} N(\mathbf{A}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{K}, \mathbf{w}), \quad (6.7a)$$

$$-\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{A} \rangle_{\partial\Omega} = -B(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{A}) + \mu_0 A(\mathbf{K}, \boldsymbol{\lambda}), \quad (6.7b)$$

mit den Bilinearformen

$$A(\mathbf{K}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}_y \cdot \boldsymbol{\lambda}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x, \quad (6.8a)$$

$$N(\mathbf{A}, \mathbf{w}) = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{A}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{rot} \mathbf{w}_x \cdot \hat{\mathbf{n}}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x, \quad (6.8b)$$

$$B(\mathbf{K}, \mathbf{w}) = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \hat{\mathbf{n}}_y} \mathbf{K}_y \cdot \mathbf{w}_x - \operatorname{grad}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{w}_x \mathbf{K}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x, \quad (6.8c)$$

und dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$.

Beweis. Die Dirichletspur berechnet sich für Lipschitz-Polyeder durch Bilden der Tangentialkomponenten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}_x \times (\mathbf{A}_x \times \hat{\mathbf{n}}_x) = & \hat{\mathbf{n}}_x \times \left(\operatorname{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{\mathbf{n}}_y \times \mathbf{A}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \right) \\ & - \hat{\mathbf{n}}_x \times \left(\int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{rot}_y \mathbf{A}_y \times \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \right) \\ & - \operatorname{grad}_{\Gamma, x} \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{A}_y^+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Gleichung (6.9) ist im Raum $\mathcal{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \partial\Omega)$ formuliert [Hip02, Theorem 3.2]. Um eine symmetrische Formulierung im Sinne eines Galerkin-Ansatzes zu erhalten, wird die schwache Form durch Testen mit Funktionen $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \partial\Omega)$ erreicht. Es ist allerdings zu beachten, dass dieser Raum nur ein Teilraum des Dualraums von $\mathcal{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \partial\Omega)$ ist, nämlich

$$\left[\mathcal{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \partial\Omega) \right]^* = \left\{ \mathbf{w} \in \mathcal{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \partial\Omega) \mid \langle \mathbf{w}, \operatorname{grad}_\Gamma u \rangle_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\}. \quad (6.10)$$

Darin bezeichnet $\operatorname{grad}_\Gamma$ den Oberflächengradienten mit

$$\operatorname{grad}_\Gamma u = \hat{\mathbf{n}} \times (\operatorname{grad} u \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (6.11)$$

Diese Tatsache ist wichtig für die in Abschnitt 6.1.3 vorgestellte Eichung des FE-Gleichungssystems. Testen von (6.9) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma = & \int_{\partial\Omega} \operatorname{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{\mathbf{n}}_y \times \mathbf{A}_y \, d\Gamma_y \cdot \boldsymbol{\lambda}_x \, d\Gamma_x \\ & - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{rot}_y \mathbf{A}_y \times \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y \cdot \boldsymbol{\lambda}_x \, d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dabei liefert der dritte Term der rechten Seite von (6.9) keinen Beitrag wegen

$$\int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}_\Gamma u \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma = \int_{\partial\Omega} u \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma = 0. \quad (6.13)$$

Gleichung (6.13) definiert die Oberflächendivergenz $\operatorname{div}_\Gamma$. Mit der elektrischen Oberflächenstromdichte

$$\mathbf{K} = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} \in \mathcal{H}_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \partial\Omega) \quad (6.14)$$

und der Vektoridentität

$$\nabla_x \times (u_x \mathbf{v}_y) = -\mathbf{v}_y \times \nabla_x u_x \quad (6.15)$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma &= - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} (\hat{\mathbf{n}}_y \times \mathbf{A}_y) \times \text{grad}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\lambda}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x \\ &\quad - \mu_0 \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{K}_y \cdot \boldsymbol{\lambda}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die gewünschte Form der Gleichungen ergibt sich durch Ausnutzung der Grassmann-Identität

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w} \quad (6.17)$$

zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \text{grad}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{A}_y \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \boldsymbol{\lambda}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \hat{\mathbf{n}}_y} \mathbf{A}_y \cdot \boldsymbol{\lambda}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x \\ &\quad - \mu_0 \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{K}_y \cdot \boldsymbol{\lambda}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Die Neumannspur entspricht physikalisch der magnetischen Erregung, die entsprechende Formel lautet daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} &= \text{rot}_x \text{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{\mathbf{n}}_y \times \mathbf{A}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \\ &\quad - \text{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{rot}_y \mathbf{A}_y \times \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die schwache Form folgt durch Bilden des Skalarprodukts mit Testfunktionen $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \partial\Omega)$ zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \text{rot } \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} \text{rot}_x \text{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{\mathbf{n}}_y \times \mathbf{A}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \mathbf{w}_x \, d\Gamma_x \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \text{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{rot}_y \mathbf{A}_y \times \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \mathbf{w}_x \, d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Einsetzen der Oberflächenstromdichte (6.14) auf der linken Seite und in dem zweiten Term der rechten Seite und Anwendung von [CK83, Formel 2.86] auf den ersten Ausdruck der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu_0 \int_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{div}_\Gamma (\hat{\mathbf{n}}_y \times \mathbf{A}_y) \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \mathbf{w}_x \, d\Gamma_x \\ &\quad - \mu_0 \int_{\partial\Omega} \operatorname{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{K}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \mathbf{w}_x \, d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Mit den Summanden wird aus Platzgründen getrennt weitergerechnet. Für den ersten Term wird ausgenutzt, dass

$$\operatorname{div}_\Gamma (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (6.22)$$

laut [CK13, Formel 6.43]. In Kombination mit (3.14) lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{rot} \mathbf{A}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \mathbf{w}_x \\ \stackrel{(6.15)}{=} \operatorname{rot}_x \left[\int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{rot} \mathbf{A}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y \hat{\mathbf{n}}_x \right] \cdot \mathbf{w}_x \\ \stackrel{(3.14)}{=} \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{rot} \mathbf{A}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_y \, d\Gamma_y \operatorname{rot}_x \mathbf{w}_x \cdot \hat{\mathbf{n}}_x. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Der zweite Ausdruck der rechten Seite von (6.21) lässt sich mittels (6.15) und (6.17) umformen zu

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{K}_y \, d\Gamma_y \times \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \mathbf{w}_x &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{K}_y \times \operatorname{grad}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \times \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \mathbf{w}_x \, d\Gamma_y \\ &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \hat{\mathbf{n}}_y} \mathbf{K}_y \cdot \mathbf{w}_x \, d\Gamma_y + \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{w}_x \mathbf{K}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_x \, d\Gamma_y. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Daraus folgt die gewünschte Form der Neumannspur

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma &= \mu_0^{-1} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{rot} \mathbf{A}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_y \operatorname{rot}_x \mathbf{w}_x \cdot \hat{\mathbf{n}}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \hat{\mathbf{n}}_y} \mathbf{K}_y \cdot \mathbf{w}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{w}_x \mathbf{K}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_x \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (6.25)$$

□

6.1.1 FE-Formulierung

Die schwachen Calderón-Identitäten (6.7) ermöglichen über den Term auf der linken Seite von (6.7a) unmittelbar eine Kopplung an die $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung für Wirbelstromprobleme aus Abschnitt 3.1.2. Diskretisierung über eine endliche Anzahl an Ansatzfunktionen nach

$$\mathbf{A} = \sum_k [\bar{\mathbf{x}}_A]_k \mathbf{w}_k \quad \text{mit } \mathbf{w}_k \in \mathcal{W}_{2D}^{h,p}, \quad (6.26)$$

$$\mathbf{K} = \sum_k [\mathbf{x}_K]_k \boldsymbol{\lambda}_k \quad \text{mit } \boldsymbol{\lambda}_k \in \mathcal{D}_{2D}^{h,p,0}, \quad (6.27)$$

führt auf

$$-\frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{x}_K = \mu_0^{-1} \mathbf{N} \bar{\mathbf{x}}_A + \mathbf{B} \mathbf{x}_K, \quad (6.28a)$$

$$-\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{x}}_A = -\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{x}}_A + \mu_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_K, \quad (6.28b)$$

mit

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\lambda}_{i,y} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{j,x} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Gamma_y d\Gamma_x, \quad (6.29a)$$

$$[\mathbf{N}]_{ij} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \text{rot } \mathbf{w}_{i,y} \cdot \hat{\mathbf{n}}_y \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \text{rot } \mathbf{w}_{j,x} \cdot \hat{\mathbf{n}}_x d\Gamma_y d\Gamma_x, \quad (6.29b)$$

$$[\mathbf{B}]_{ij} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\hat{\mathbf{n}}_y \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \boldsymbol{\lambda}_{j,y} \cdot \mathbf{w}_{i,x} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \cdot \mathbf{w}_{i,x} \boldsymbol{\lambda}_{j,y} \cdot \hat{\mathbf{n}}_x d\Gamma_y d\Gamma_x, \quad (6.29c)$$

$$[\mathbf{F}]_{ij} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \boldsymbol{\lambda}_j d\Gamma. \quad (6.29d)$$

Die Ansatzfunktionen für $\mathbf{A}$ in (6.26) entsprechen genau den Tangentialkomponenten der Ansatzfunktionen für $\mathbf{A}$ in (3.21) wegen (2.18). Somit brauchen für eine FE-BE-Kopplung zur Diskretisierung von $\mathbf{A}$ keine zusätzlichen Unbekannten $\bar{\mathbf{x}}_A$ eingeführt zu werden, sondern der Koeffizientenvektor $\mathbf{x}_A$ einer gekoppelten Formulierung entspricht dem einer reinen FE-Formulierung. Ansatzfunktionen auf der Oberfläche werden mit entsprechenden Ansatzfunktionen aus $\mathcal{W}^{h,p}(\Omega)$ identifiziert und die BE-Matrixeinträge an den entsprechenden Indizes der 3D-Ansatzfunktionen im Vektor $\mathbf{x}_A$ einsortiert.

Einsetzen der Oberflächenstromdichte (6.14) in den Oberflächenterm der schwachen FE-Formulierung (3.15),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{w} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} \text{rot } \mathbf{A} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot \mathbf{w} d\Gamma + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \mathbf{A} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \sigma \text{grad } \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_{\text{imp}} d\Omega, \end{aligned} \quad (6.30)$$

zeigt, dass dieser im Diskreten $\mathbf{F}\mathbf{x}_K$ entspricht. Die gekoppelte FE-BE-Formulierung ergibt sich, indem $1/2 \cdot \mathbf{F}\mathbf{x}_K$ durch (6.28a) ersetzt wird. Mit den Matrizen aus (3.24) und (6.29) lautet sie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^u + j\omega\mathbf{T}^u + \mu_0^{-1}\mathbf{N}^u & j\omega\mathbf{M}_{AV}^u & -\frac{1}{2}\mathbf{F}^u + \mathbf{B}^u \\ j\omega\mathbf{M}_{VA}^u & j\omega\mathbf{M}_{VV} & 0 \\ -\frac{1}{2}\mathbf{F}^{uT} + \mathbf{B}^{uT} & 0 & -\mu_0\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \\ \mathbf{x}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A \\ \mathbf{b}_V \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Das Gleichungssystem (6.31) ist konsistent und damit iterativ lösbar, aber aus den in Abschnitt 3.1.2 beschriebenen Gründen singulär. Das Superskript u an den Matrizen deutet an, dass es sich um eine ungeeichte Formulierung handelt. Eine konventionelle Baumeichung ist nicht möglich, weil sie auf einer Eliminierung reiner Gradientenfelder basiert, aber die Repräsentationsformel (6.4) eine Coulomb-Eichung von $\mathbf{A}$ auf der Oberfläche voraussetzt. Eine alternative Eichung wird in Abschnitt 6.1.3 besprochen.

6.1.2 Erstellung der BE-Matrizen

Die Erstellung der verwendeten FE-Matrizen wurde nicht detailliert, da diese mit üblichen Verfahren der numerischen Integration [ŠSD04, Kapitel 4] oder Mastermatrizen [SF96, Anhang 3] trivial ist. Im Gegensatz dazu ergeben sich bei den BE-Matrizen Schwierigkeiten, weshalb im Folgenden explizit auf die Assemblierung eingegangen wird.

Zur Berechnung der in (6.29) auftauchenden Doppelintegrale müssen ebenjene Integrale mit je einem finiten Element als Integrationsgebiet ausgewertet werden. Durch die greensche Funktion im Integranden kann dieser je nach geometrischer Lage der Elemente zueinander singulär werden und eine Auswertung der Integrale mit den konventionellen Methoden ist nicht mehr möglich. Man unterscheidet die folgenden Integralarten:

- *Regulär.* Sowohl das Integral als auch der Integrand weisen keine Singularitäten auf. Eine Berechnung ist mit konventioneller numerischer Integration möglich. Dabei wird das Integral durch gewichtete Summation des Integranden an den sogenannten Integrationspunkten x_i approximiert nach

$$\int f(x) dx \approx \sum_i f(x_i)w_i \quad (6.32)$$

mit den Gewichten w_i . In dieser Arbeit wird die Gauß-Quadratur verwendet mit Integrationspunkten nach [ŠSD04, Kapitel 4] für Linien, Dreiecke und Quadrate.

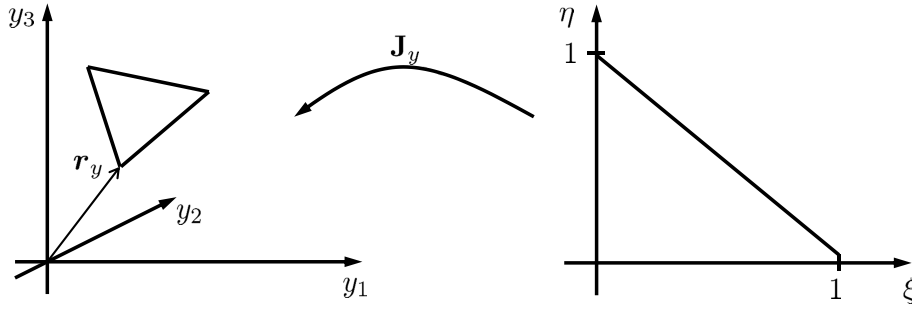


Abbildung 6.2: Transformation eines beliebigen finiten Elements auf das Referenzelement Δ_y .

- *Schwach singulär.* Obwohl der Wert des Integrals regulär ist, ist sein Integrand singulär. Im Allgemeinen kann das Integral daher nicht mittels Gauß-Quadratur ausgewertet werden. Alternativ können die Integrale analytisch berechnet werden [Ost02], was jedoch die Flexibilität hinsichtlich der Wahl der Ansatzfunktionen einschränkt. Es existieren auch angepasste numerische Quadratschemen [BTW84, Appendix A], [Kre14, Kapitel 12], [HRHR97], die verfügbaren tabellierten Integrationspunkte schränken aber die Approximationsgenauigkeit ein. Dies ist vor allem im Hinblick auf Ansatzfunktionen höherer Ordnungen kritisch zu sehen. In der vorliegenden Arbeit werden daher Methoden verwendet, welche semi-analytische Transformationen des Integranden auf reguläre Integrale durchführen [Duf82], [GGK04]. Diese Ansätze bieten im Vergleich höchste Flexibilität und Wiederverwendbarkeit. Nachteilig ist die höhere numerische Komplexität und damit verbundene Laufzeit der Programme, welche aber für eine Prototyp-Implementierung nachrangig bewertet wird.
- *Stark singulär.* Sowohl der Integrand als auch das Integral sind singulär, eine Integration ist nur noch im Sinne eines Cauchy-Hauptwertes möglich [SS11, S. 294]. Auch für diesen Typ Integral existieren speziell angepasste Integrationspunkte [Kut75], auf Koordinatentransformation basierende, semi-analytische Verfahren [GG90], [GGK04] und komplett analytische Ansätze [Gra93]. Die in dieser Arbeit vorkommenden Integrale sind jedoch höchstens schwach singulär.

Alle Integrationen werden zurückgeführt auf Integrationen über ein Referenzelement Δ nach Abbildung 6.2. Mit dem Positionsvektor des Referenzknotens $\mathbf{r}$ im globalen Koordinatensystem, den lokalen Koordinaten (ξ, η) und Jacobimatrizen $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ lauten die affinen Abbildungen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_x + \mathbf{J}_x \begin{bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{bmatrix}, \quad (6.33a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_y + \mathbf{J}_y \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (6.33b)$$

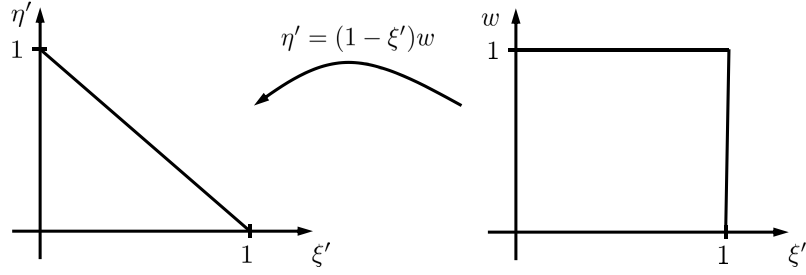


Abbildung 6.3: Duffy-Transformation.

Die Ansatzfunktionen transformieren sich dabei nach

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}^{-T} \bar{\mathbf{w}} \quad \text{für } \mathbf{w} \in \mathcal{W}_{2D}^{h,p}, \quad (6.34a)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \quad \text{für } \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{D}_{2D}^{h,p,0}, \quad (6.34b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{J}^{-T} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (6.34c)$$

auf Ansatzfunktionen im Referenzelement, welche durch Überstriche gekennzeichnet sind, siehe [Pet05, Kapitel 5] und [Mon08, S. 78 f]. Um die Inverse der Jacobimatrizen berechnen zu können, wird nach [Pet05, Kapitel 5] zu $\mathbf{J}$ ein Einheitsvektor, der senkrecht zu den ersten beiden Spalten steht, als dritte Spalte hinzugenommen.

Die Matrix $\mathbf{A}$

Zunächst werden die Elementbeiträge der Matrix $\mathbf{A}$ berechnet. Mit (6.33) und (6.34) setzt sich (6.29a) zusammen aus Beiträgen in lokalen Koordinaten

$$A_{ij}^{xy} = \int_{\Delta_x} \int_{\Delta_y} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{i,y}^T \mathbf{J}_y^T \mathbf{J}_x \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,x} \frac{|\det \mathbf{J}_x|}{\det \mathbf{J}_x} \frac{|\det \mathbf{J}_y|}{\det \mathbf{J}_y} d\Gamma_y d\Gamma_x. \quad (6.35)$$

Es werden zwei Fälle je nach Lage von Δ_x und Δ_y zueinander unterschieden.

Gleiche Elemente: Falls Δ_x und Δ_y das gleiche Element beschreiben, ist das innere Integral für jeden Wert von $\mathbf{x}$ schwach singulär. Die in dieser Arbeit verwendete Duffy-Transformation geht von einem Dreieck nach Abbildung 6.3 aus, bei dem die Singularität im Punkt $(1,0)$ liegt. Mittels der Koordinatentransformation

$$\eta' = (1 - \xi')w, \quad (6.36a)$$

$$d\eta' = (1 - \xi') dw \quad (6.36b)$$

wird das Integrationsgebiet in ein Quadrat $0 \leq \xi' \leq 1, 0 \leq w \leq 1$ überführt, was die Singularität im Integranden behebt.

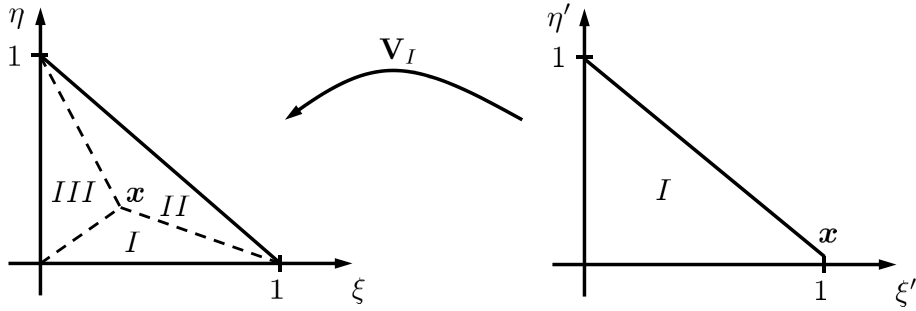


Abbildung 6.4: Aufspaltung eines finiten Elements um eine Singularität und Transformation auf neue Referenzelemente.

Das äußere Integral in (6.35) über Δ_x kann mittels Gauß-Quadratur berechnet werden. Folglich ergibt sich für jeden Integrationspunkt (ξ^*, η^*) eine Situation nach Abbildung 6.4: Das Element Δ_y kann in drei Dreiecke unterteilt werden, bei denen die Singularität in einer Ecke auftritt. Mittels affiner Transformationen

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = \mathbf{d}_k + \mathbf{V}_k \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{mit } k \in \{I, II, III\} \quad (6.37)$$

werden die Dreiecke in (ξ', η') -Koordinaten kompatibel zur Duffy-Transformation überführt. Damit kann A_{ij}^{xy} ausgewertet werden durch die Summe über drei Beiträge

$$A_{ij}^{xy} = \int_{\Delta_x} \sum_{k=I}^{III} A_{ij}^k \frac{|\det \mathbf{J}_x|}{\det \mathbf{J}_x} \frac{|\det \mathbf{J}_y|}{\det \mathbf{J}_y} d\Gamma_x. \quad (6.38)$$

Am Beispiel von A_{ij}^I wird die Duffy-Transformation (6.36) gezeigt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} A_{ij}^I &= \int_{\xi'=0}^1 \int_{\eta'=0}^{1-\xi'} \bar{\mathbf{\lambda}}_{i,y}^T \mathbf{J}_y^T \mathbf{J}_x \bar{\mathbf{\lambda}}_{j,x} \frac{1}{4\pi \left| \mathbf{J} \mathbf{V}_I \begin{bmatrix} 1-\xi' \\ -\eta' \end{bmatrix} \right|} |\det \mathbf{V}_I| d\eta' d\xi' \\ &= \int_{\xi'=0}^1 \int_{w=0}^1 \bar{\mathbf{\lambda}}_{i,y}^T \mathbf{J}_y^T \mathbf{J}_x \bar{\mathbf{\lambda}}_{j,x} \frac{1}{4\pi \left| \mathbf{J} \mathbf{V}_I \begin{bmatrix} 1-\xi' \\ -w(1-\xi') \end{bmatrix} \right|} |\det \mathbf{V}_I| (1-\xi') dw d\xi' \quad (6.39) \\ &= \int_{\xi'=0}^1 \int_{w=0}^1 \bar{\mathbf{\lambda}}_{i,y}^T \mathbf{J}_y^T \mathbf{J}_x \bar{\mathbf{\lambda}}_{j,x} \frac{1}{4\pi \left| \mathbf{J} \mathbf{V}_I \begin{bmatrix} 1 \\ -w \end{bmatrix} \right|} |\det \mathbf{V}_I| dw d\xi', \end{aligned}$$

was mittels Gauß-Quadratur über ein Referenzquadrat integriert werden kann.

Ungleiche Elemente Hierzu zählen der Fall gemeinsamer Kanten, der Fall gemeinsamer Knoten und der Fall räumlich getrennter Elemente. Im Fall räumlich

getrennter Elemente wird die greensche Funktion niemals singulär, da $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ für alle möglichen Werte von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Die Gauß-Quadratur kann ohne Einschränkungen verwendet werden. Im Fall eines gemeinsamen Knotens oder einer gemeinsamen Kante wird die greensche Funktion singulär, wenn $\mathbf{x}$ sich genau auf diesem Knoten oder dieser Kante befindet. Die verwendeten Integrationspunkte liegen jedoch alle innerhalb des Referenzdreiecks, daher kann die Singularität nicht auftreten. Numerische Experimente zeigen, dass Gauß-Quadratur hier keine wesentlich ungenaueren Ergebnisse liefert als im Fall räumlich getrennter Elemente.

Die Matrix $\mathbf{N}$

Die Berechnung der Elementbeiträge für die Matrix $\mathbf{N}$, welche sich in lokalen Koordinaten aus Beiträgen

$$N_{ij}^{xy} = \int_{\Delta_x} \int_{\Delta_y} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (\text{rot } \bar{\mathbf{w}}_{i,y})^T \hat{\mathbf{e}}_z (\text{rot } \bar{\mathbf{w}}_{j,x})^T \hat{\mathbf{e}}_z \frac{|\det \mathbf{J}_x|}{\det \mathbf{J}_x} \frac{|\det \mathbf{J}_y|}{\det \mathbf{J}_y} d\Gamma_y d\Gamma_x \quad (6.40)$$

zusammensetzt, verläuft im Wesentlichen analog zu dem Vorgehen für $\mathbf{A}$. Im Fall gleicher Elemente erfolgt entsprechend (6.38) eine Aufspaltung

$$N_{ij}^{xy} = \int_{\Delta_x} \sum_{k=I}^{III} N_{ij}^k \frac{|\det \mathbf{J}_x|}{\det \mathbf{J}_x} \frac{|\det \mathbf{J}_y|}{\det \mathbf{J}_y} d\Gamma_x. \quad (6.41)$$

Es gilt am Beispiel von Dreieck I die Formel

$$N_{ij}^I = \int_{\xi'=0}^1 \int_{w=0}^1 \frac{1}{4\pi \left| \mathbf{J} \mathbf{V}_I \begin{bmatrix} 1 \\ -w \end{bmatrix} \right|} (\text{rot } \bar{\mathbf{w}}_{i,y})^T \hat{\mathbf{e}}_z (\text{rot } \bar{\mathbf{w}}_{j,x})^T \hat{\mathbf{e}}_z |\det \mathbf{V}_I| dw d\xi'. \quad (6.42)$$

Die Matrix $\mathbf{B}$

Die Berechnung folgt einem anderen Schema, da nicht die greensche Funktion selbst, sondern ihr Gradient im Integranden steht. In lokalen Koordinaten entsteht $\mathbf{B}$ durch Beiträge

$$\begin{aligned} B_{ij}^{xy} = & \int_{\Delta_x} \int_{\Delta_y} \hat{\mathbf{e}}_z^T \frac{\mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \frac{|\det \mathbf{J}_y|}{\det \mathbf{J}_y} |\det \mathbf{J}_x| d\Gamma_y d\Gamma_x \\ & - \int_{\Delta_x} \int_{\Delta_y} \bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \frac{\mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \hat{\mathbf{e}}_z^T \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \frac{|\det \mathbf{J}_y|}{\det \mathbf{J}_y} |\det \mathbf{J}_x| d\Gamma_y d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (6.43)$$

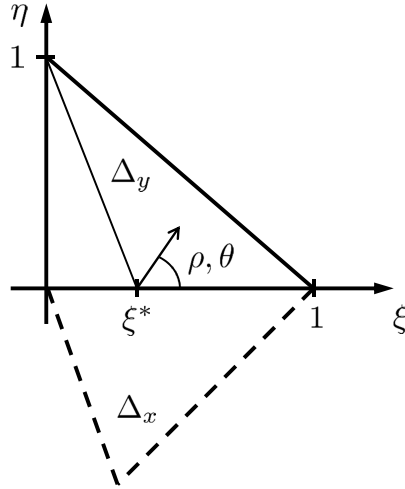


Abbildung 6.5: Zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante in ξ -Richtung. Transformation von (ξ, η) auf Polarkoordinaten (ρ, θ) zur Umhung der Singularität bei $\xi = \xi^*$.

Gleiche Elemente Im Prinzip wäre das Integral durch die $1/r^2$ -Singularität stark singular. Bei den in dieser Arbeit verwendeten ebenen finiten Elementen ist aber

$$\text{grad}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \perp \hat{\mathbf{n}}_x \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \quad (6.44)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_y \perp \hat{\mathbf{n}}_x \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad (6.45)$$

erfüllt, sodass diese Elementbeiträge verschwinden.

Gemeinsame Kante Der innere Integrand kann singular werden, falls $\mathbf{x}$ auf der gemeinsamen Kante liegt. Obwohl die Integrationspunkte im Inneren des Referenzdreiecks liegen und damit wie für die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{N}$ dieser Fall nicht exakt auftritt, liefert die Gauß-Quadratur unzureichend genaue Ergebnisse. Zur Abhilfe wird eine Koordinatentransformation basierend auf dem Vorgehen in [GGK04] durchgeführt.

Die Elemente seien wie in Abbildung 6.5 so orientiert, dass ξ und ξ^* die gemeinsame Kante beschreiben. Da die Singularität nur an der Stelle $\xi = \xi^*$ auftreten kann, wird das innere Integral in Polarkoordinaten um diesen Punkt umgeschrieben. Die Integration zerfällt damit in zwei Teildreiecke, wie in Abbildung 6.5 angedeutet. Mit der Transformationsvorschrift

$$\xi - \xi^* = \rho \cos \theta, \quad (6.46a)$$

$$\eta = \rho \sin \theta \quad (6.46b)$$

und der Abkürzung

$$c = \bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \frac{|\det \mathbf{J}_y|}{\det \mathbf{J}_y} |\det \mathbf{J}_x| \quad (6.47)$$

wird der erste Term aus (6.43) zu

$$B_1 = \int_{\xi^*=0}^1 \int_{\eta^*=0}^{1-\xi^*} \left[\int_{\theta=0}^{\theta_1} + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] \int_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_z^T \frac{\mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} c \rho \, d\rho \, d\theta \, d\eta^* \, d\xi^*. \quad (6.48)$$

Die Integralgrenzen lauten

$$\theta_1 = -\arctan\left(\frac{1}{\xi^*}\right) + \pi, \quad (6.49)$$

$$0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{2}(1-\xi^*)}{2 \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)} \quad \text{für } \theta < \theta_1, \quad (6.50)$$

$$0 \leq \rho \leq -\frac{\xi^*}{\cos \theta} \quad \text{für } \theta \geq \theta_1. \quad (6.51)$$

Die Singularität kann nun identifiziert werden mit dem Punkt

$$\rho = \eta^* = 0. \quad (6.52)$$

Nach erneuter Transformation in Polarkoordinaten (Λ, φ) um diesen Punkt

$$\rho = \Lambda \cos \varphi, \quad (6.53a)$$

$$\eta^* = \Lambda \sin \varphi \quad (6.53b)$$

ist die Singularität nur noch von einer Variable $\Lambda = 0$ abhängig. Vertauschen der Integrationsreihenfolge von θ und η^* in (6.48) ergibt

$$B_1 = \int_{\xi^*=0}^1 \left[\int_{\theta=0}^{\theta_1} + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] \left[\int_{\varphi=0}^{\varphi_1} + \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] \int_{\Lambda} \hat{\mathbf{e}}_z^T \frac{\mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} c \Lambda^2 \cos \varphi \, d\Lambda \, d\varphi \, d\theta \, d\xi^* \quad (6.54)$$

mit den Integrationsgrenzen

$$\varphi_1 = \arctan \frac{1 - \xi^*}{\max \rho(\theta)}, \quad (6.55)$$

$$0 \leq \Lambda \leq \frac{\max \rho(\theta)}{\cos \varphi} \quad \text{für } \varphi < \varphi_1, \quad (6.56)$$

$$0 \leq \Lambda \leq \frac{1 - \xi^*}{\sin \varphi} \quad \text{für } \varphi \geq \varphi_1. \quad (6.57)$$

Bei einer Situation nach Abbildung 6.5 unterliegen die Koordinatentransformationen (6.33) den Bedingungen

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_y, \quad (6.58a)$$

$$[\mathbf{J}_y]_{11} = [\mathbf{J}_x]_{11} =: J_{11}, \quad (6.58b)$$

$$[\mathbf{J}_y]_{21} = [\mathbf{J}_x]_{21} =: J_{21}, \quad (6.58c)$$

$$[\mathbf{J}_y]_{31} = [\mathbf{J}_x]_{31} =: J_{31}. \quad (6.58d)$$

Damit kann der Nenner der Fundamentallösung explizit in Λ ausgedrückt werden mittels

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{y} &= \mathbf{J}_x \begin{bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{bmatrix} - \mathbf{J}_y \begin{bmatrix} \rho \cos \theta + \xi^* \\ \rho \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} [\mathbf{J}_x]_{12} \\ [\mathbf{J}_x]_{22} \\ [\mathbf{J}_x]_{32} \end{bmatrix} \sin \varphi - \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \\ J_{31} \end{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \begin{bmatrix} [\mathbf{J}_y]_{12} \\ [\mathbf{J}_y]_{22} \\ [\mathbf{J}_y]_{32} \end{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \right) \Lambda, \\ &=: -\mathbf{j} \Lambda. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Einsetzen von (6.59) in (6.54) ergibt einen regulären Ausdruck für die Berechnung der Elementmatrix, der über mehrfache Anwendung der eindimensionalen Gauß-Quadratur berechnet werden kann:

$$B_1 = \int_{\xi^*=0}^1 \left[\int_{\theta=0}^{\theta_1} + \int_{\theta=\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] \left[\int_{\varphi=0}^{\varphi_1} + \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] \int_{\Lambda} \frac{\hat{\mathbf{e}}_z^T \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{j}}{4\pi |\mathbf{j}|^3} c \cos \varphi \, d\Lambda \, d\varphi \, d\theta \, d\xi^*. \quad (6.60)$$

Gleiches Vorgehen ergibt für den zweiten Term aus (6.43) den Ausdruck

$$B_2 = \int_{\xi^*=0}^1 \left[\int_{\theta=0}^{\theta_1} + \int_{\theta=\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] \left[\int_{\varphi=0}^{\varphi_1} + \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] \int_{\Lambda} \frac{\bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{j}}{4\pi |\mathbf{j}|^3} c_2 \cos \varphi \, d\Lambda \, d\varphi \, d\theta \, d\xi^*, \quad (6.61)$$

$$c_2 = \hat{\mathbf{e}}_z^T \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \frac{|\det \mathbf{J}_y|}{\det \mathbf{J}_y} |\det \mathbf{J}_x|. \quad (6.62)$$

Keine gemeinsame Kante Hierzu zählen der Fall eines gemeinsamen Knotens und der Fall räumlich getrennter Elemente. Die räumlich getrennten Elemente führen auf reguläre Integrale. Der Fall eines gemeinsamen Knotens führt zu einer Singularität, falls $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ sich genau auf diesem Knoten befinden. Eine Koordinatentransformation ähnlich wie die hier für den Fall der gemeinsamen Kante gezeigte ist möglich, siehe [GGK04] für gemeinsamen Knoten, aber unnötig aufgrund der hohen Genauigkeit konventioneller Gauß-Quadratur.

6.1.3 Eichung des FE-BE-Systems

Im Hinblick auf die Anwendung von Ordnungsreduktionsalgorithmen wird eine direkte Lösung der FE-BE-Formulierung (6.31) angestrebt. Wie bereits angesprochen, setzt die zugrunde liegende Repräsentationsformel eine Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ auf $\partial\Omega$ voraus, welche für das gesamte FE-Gebiet über Lagrange-Multiplikatoren realisiert werden kann [Rod83]. Damit erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade im

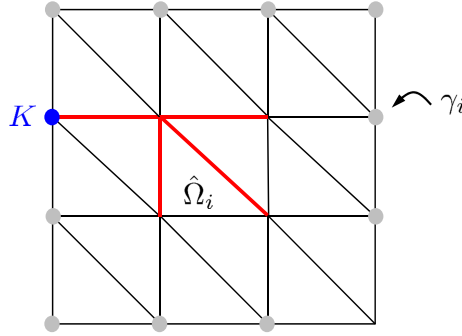


Abbildung 6.6: Zweidimensionales FE-Netz für $\hat{\Omega}_i$ mit vorgeschlagener gekoppelter Eichung. Baumkanten sind in rot dargestellt, farbige Knoten markieren Lagrange-Multiplikatoren γ_i erster Ordnung.

Gegensatz zur Baumeichung um das Doppelte der Dimension von $\mathcal{V}^{h,p}(\Omega)$. Um eine möglichst geringe Anzahl an Unbekannten für das geeichte System zu erhalten, wird daher vorgeschlagen, eine Coulomb-Eichung an der Grenzschicht zu $\partial\Omega$ mit einer Baumeichung im Volumen von Ω zu koppeln.

Zunächst wird nur der Fall linearer Ansatzfunktionen $p = 1$ und ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet $\hat{\Omega}_i$ betrachtet. Zur Realisierung der Eichung auf der Oberfläche werden alle N_k Knoten auf $\partial\hat{\Omega}_i$ zu einem Superknoten zusammengefasst. Der verbleibende Baum besitzt dann nur noch eine Kante, welche aus dem Volumen auf den Randknoten K zeigt, siehe Abbildung 6.6. Er hat somit $N_k - 1$ Kanten weniger als der vollständige Baum, was bedeutet, dass die FE-Gleichungen einen Nullraum ebenjener Dimension aufweisen. Durch die spezielle Wahl des Baums kann der Raum $\mathcal{W}_{2D}^{h,1}(\partial\hat{\Omega}_i)$ vollständig von $\mathbf{A}$ dargestellt werden, entsprechend der Forderung (6.26), dass die BE-Ansatzfunktionen im Raum der FE-Ansatzfunktionen enthalten sein sollen.

Über den diskreten Gradientenoperator können die Gradienten

$$\bar{\mathcal{W}} = \left\{ \mathbf{w} \in \text{grad } \mathcal{V}^{h,1}(\hat{\Omega}_i) \mid \mathbf{w}|_K = 0 \right\} \quad (6.63)$$

dargestellt werden, wegen des Rotationsoperators in der Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{N}$ stellt $\bar{\mathcal{W}}$ gerade den Nullraum des FE-BE-Systems dar. Es ist aber

$$\left\{ \mathbf{w}|_{\partial\hat{\Omega}_i} \mid \mathbf{w} \in \bar{\mathcal{W}} \right\} = \text{grad } \mathcal{V}_{2D}^{h,1}(\partial\hat{\Omega}_i), \quad (6.64)$$

denn durch die Gradientenbildung liegen alle konstanten Felder im Nullraum von $\text{grad } \mathcal{V}_{2D}^{h,1}(\partial\hat{\Omega}_i)$. Der Ausschluss einer Ansatzfunktion durch die Baumkante zu K eliminiert diesen Nullraum.

Motiviert durch (6.64) wird die Eichbedingung

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{A} = 0 \quad \text{auf } \partial\hat{\Omega}_i \quad (6.65)$$

vorgegeben. Wegen (6.10) ist sie mit der BE-Formulierung konsistent und wegen

$$\text{supp} \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \text{grad}_\Gamma u \right\} \cap \text{supp} \left\{ \mathbf{w} \mid \begin{array}{l} \mathbf{w} \text{ ist mit Baumkante, die} \\ \text{nicht zu } K \text{ zeigt, assoziiert} \end{array} \right\} = \emptyset \quad (6.66)$$

mit der Baumeichung im Volumen. Wäre (6.66) verletzt, gäbe es Ansatzfunktionen, für die beide Eichbedingungen gleichzeitig gelten würden. Gleichung (6.65) wird entsprechend dem Rangdefizit des FE-BE-Systems über Lagrange-Multiplikatoren

$$\gamma_k = [\mathbf{x}_D]_k \hat{v}_k \quad \text{mit } \hat{v}_k \in \mathcal{V}_{2D}^{h,1}(\partial\hat{\Omega}_i) \quad (6.67)$$

realisiert.

Bemerkung. Es mag naheliegen, statt (6.65) in einer Randschicht um $\partial\hat{\Omega}_i$ die Coulomb-Eichung $\text{div } \mathbf{A} = 0$ mittels Lagrange-Multiplikatoren aus $\mathcal{V}^{h,1}(\hat{\Omega}_i)$ zu fordern. Doch dadurch wird die Bedingung (6.66) verletzt.

Für Ansatzfunktionen höherer Ordnung werden nur diejenigen Funktionen aus $\text{grad } \mathcal{V}^{h,p}(\hat{\Omega}_i)$, die mit Kanten oder Flächen auf $\partial\hat{\Omega}_i$ assoziiert sind, zu den Ansatzfunktionen für $\mathbf{A}$ hinzugefügt. Damit können alle BE-Ansatzfunktionen (6.26) dargestellt werden. Zu den Lagrange-Multiplikatoren wird der Raum $\mathcal{V}_{2D}^{h,p}(\partial\hat{\Omega}_i)$ hinzugenommen; beide Räume besitzen die gleiche Dimension. Die Berücksichtigung des gesamten FE-Gebietes Ω folgt durch separate Konstruktion der beschriebenen Eichung für jedes Teilgebiet $\hat{\Omega}_i$.

Die gemischt geeichte FE-BE-Formulierung lautet

$$\begin{bmatrix} \mu_0 \mathbf{S} + j\omega\mu_0 \mathbf{T} + \mathbf{N} & j\omega\mu_0 \mathbf{M}_{AV} & \mathbf{D} & -\frac{1}{2} \mathbf{F} + \mathbf{B} \\ j\omega\mu_0 \mathbf{M}_{VA}^u & j\omega\mu_0 \mathbf{M}_{VV} & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \mathbf{F}^T + \mathbf{B}^T & 0 & 0 & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{x}'_K \end{bmatrix} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A \\ \mathbf{b}_V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.68)$$

Die Matrizen $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}_{AV}$, $\mathbf{M}_{VA}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{F}$ gehen aus den ungeeichten Matrizen durch Streichen der zu Baumkanten gehörenden Ansatzfunktionen hervor, die Lagrange-Multiplikatoren werden über

$$[\mathbf{D}]_{ij} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \text{grad } \hat{v}_j \, d\Gamma \quad (6.69)$$

eingbracht. Zur besseren Konditionierung ist das System in

$$\mathbf{x}'_K = \mu_0 \mathbf{x}_K \quad (6.70)$$

formuliert. Über die Wahl der rechten Seite entsprechend Abschnitt 3.2 oder Kapitel 4 können strom- und spannungsgesteuerte Spulen mit oder ohne Litzendrähten als Anregung für das System verwendet werden.

6.2 Parametrisches FE-BE-Modell

Gleichung (6.68) für eine geometrische Konfiguration wird in diesem Abschnitt für Systeme mit Starrkörperbewegungen formuliert. Die Bewegungen seien beschrieben durch einen Parametervektor $\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$, dessen Einträge Rotationen oder Verschiebungen einzelner, mittels finiter Elemente modellierter, starrer Körper beschreiben. Die Körper werden dabei mit den Teilgebieten $\hat{\Omega}_i$ aus Abschnitt 6.1 identifiziert. Sowohl das auf (6.68) basierende Ausgangsmodell als auch das vorgeschlagene Rahmenwerk zur parametrischen MOR können vollständig beschrieben werden anhand zweier FE-Teilgebiete $\hat{\Omega}_1$ und $\hat{\Omega}_2$, die separat von $\mathbf{p}$ beeinflusst werden.

Zur Erstellung der BE-Matrizen (6.29) sei eine Referenzkonfiguration der Positionsvektoren für beide Gebiete $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}_1$ und $\hat{\mathbf{y}} \in \hat{\Omega}_2$ bekannt. Dann gilt mit orthogonalen Rotationsmatrizen $\mathbf{R}$ mit $\det \mathbf{R} = 1$ und Translationsvektoren $\mathbf{t}$ der Zusammenhang

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \mathbf{R}_x(\mathbf{p})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_x(\mathbf{p}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \hat{\Omega}_1, \quad (6.71)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{R}_y(\mathbf{p})\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{t}_y(\mathbf{p}) \quad \text{für } \mathbf{y} \in \hat{\Omega}_2. \quad (6.72)$$

Ferner seien $\hat{\mathbf{J}}_x$ und $\hat{\mathbf{J}}_y$ die Jacobimatrizen der Referenzkonfiguration. Mit den Jacobimatrizen der parameterabhängigen Konfiguration

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{p}) = \mathbf{R}_x(\mathbf{p})\hat{\mathbf{J}}_x, \quad \det \mathbf{J}_x(\mathbf{p}) = \det \hat{\mathbf{J}}_x, \quad (6.73)$$

$$\mathbf{J}_y(\mathbf{p}) = \mathbf{R}_y(\mathbf{p})\hat{\mathbf{J}}_y, \quad \det \mathbf{J}_y(\mathbf{p}) = \det \hat{\mathbf{J}}_y, \quad (6.74)$$

sind alle Größen zur Assemblierung der Matrizen nach Abschnitt 6.1.2 bekannt.

Um die Parameterabhängigkeit genauer einzugrenzen, werden die Unbekannten umsortiert entsprechend der ihnen zugeordneten Teilgebiete nach

$$\mathbf{x}_A = [\mathbf{x}_A^{\Omega_1, T} \quad \mathbf{x}_A^{\Omega_2, T}]^T, \quad (6.75)$$

$$\mathbf{x}'_K = [\mathbf{x}_K^{\Omega_1, T} \quad \mathbf{x}_K^{\Omega_2, T}]^T, \quad (6.76)$$

was eine analoge Aufteilung der $\mathbf{A}$ und $\mathbf{K}$ zugeordneten Matrizen ermöglicht. Alle FE-Matrizen sind konstant hinsichtlich der Starrkörperbewegungen, weil die absolute Lage der Gebiete $\hat{\Omega}_i$ die Matrixeinträge nicht beeinflusst. Bei den BE-Matrizen sind wegen des gleichen Arguments nur Blöcke von $\mathbf{p}$ abhängig, welche zwischen verschiedenen Gebieten koppeln. Wird die Gebietszugehörigkeit durch Subskripte angedeutet, lässt sich schreiben

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Omega_{11}} & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_{\Omega_{22}} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{X} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{F}\}, \quad (6.77a)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\Omega 11} & \mathbf{N}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{N}_{\Omega 12}^T(\mathbf{p}) & \mathbf{N}_{\Omega 22} \end{bmatrix}, \quad (6.77b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Omega 11} & \mathbf{B}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{B}_{\Omega 21}(\mathbf{p}) & \mathbf{B}_{\Omega 22} \end{bmatrix}, \quad (6.77c)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Omega 11} & \mathbf{A}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{A}_{\Omega 12}^T(\mathbf{p}) & \mathbf{A}_{\Omega 22} \end{bmatrix}. \quad (6.77d)$$

Unter Verwendung dieser Größen ergibt sich die kompakte Beschreibung des parametrischen FE-BE-Systems

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^{\text{FF}} + j\omega \mathbf{A}_1^{\text{FF}} + \mathbf{A}_p^{\text{FF}}(\mathbf{p}) & \mathbf{A}_0^{\text{FB}} + \mathbf{A}_p^{\text{FB}}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{A}_0^{\text{FB},T} + \mathbf{A}_p^{\text{FB},T}(\mathbf{p}) & \mathbf{A}_0^{\text{BB}} + \mathbf{A}_p^{\text{BB}}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_F \\ \mathbf{x}'_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

mit

$$\mathbf{x}_F = [\mathbf{x}_A^{\Omega 1, T} \quad \mathbf{x}_A^{\Omega 2, T} \quad \mathbf{x}_V^T \quad \mathbf{x}_D^T]^T, \quad (6.79a)$$

$$\mathbf{b}_F = \mu_0 [\mathbf{b}_A^T \quad \mathbf{b}_V^T \quad 0]^T, \quad (6.79b)$$

$$\mathbf{A}_0^{\text{FF}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \mathbf{S}_{\Omega 11} + \mathbf{N}_{\Omega 11} & 0 \\ 0 & \mu_0 \mathbf{S}_{\Omega 22} + \mathbf{N}_{\Omega 22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \mathbf{D}^T \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (6.79c)$$

$$\mathbf{A}_1^{\text{FF}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{M}_{AV} & 0 \\ \mathbf{M}_{VA} & \mathbf{M}_{VV} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.79d)$$

$$\mathbf{A}_0^{\text{FB}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{F}_{\Omega 11} + \mathbf{B}_{\Omega 11} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \mathbf{F}_{\Omega 22} + \mathbf{B}_{\Omega 22} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.79e)$$

$$\mathbf{A}_0^{\text{BB}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Omega 11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\Omega 22} \end{bmatrix}, \quad (6.79f)$$

$$\mathbf{A}_p^{\text{FF}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{N}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{N}_{\Omega 12}^T(\mathbf{p}) & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (6.79g)$$

$$\mathbf{A}_p^{\text{FB}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{B}_{\Omega 21}(\mathbf{p}) & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.79h)$$

$$\mathbf{A}_p^{\text{BB}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{A}_{\Omega 12}^T(\mathbf{p}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.79i)$$

Die Durchführung einer parametrischen Simulation basierend auf der Systembeschreibung (6.78) erfordert unabhängig von einmalig zu berechnenden Größen für

jeden Wert von $\mathbf{p}$ die Assemblierung der BE-Koppelmatrizen $\mathbf{A}_p^{\text{FF}}(\mathbf{p})$, $\mathbf{A}_p^{\text{FB}}(\mathbf{p})$ und $\mathbf{A}_p^{\text{BB}}(\mathbf{p})$ sowie die Lösung des hochdimensionalen Gleichungssystems (6.78). Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel erläutert, ist die Auswertung für eine Vielzahl verschiedener Parameterwerte unpraktikabel aufgrund des Zeitaufwandes.

Auch die Anwendung von MOR auf das System (6.78) ist ohne weitere Maßnahmen ineffizient, denn die Parametrierung der BE-Matrizen ist durch die greensche Funktion

$$G(\mathbf{x}(\mathbf{p}), \mathbf{y}(\mathbf{p})) = G(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{R}_x(\mathbf{p})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_x(\mathbf{p}) - \mathbf{R}_y(\mathbf{p})\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{t}_y(\mathbf{p})|} \quad (6.80)$$

nicht-affin, vergleiche Abschnitt 2.3.3. Es wird daher vorgeschlagen, ein effizientes ROM basierend auf einer im nächsten Abschnitt vorgestellten affinen Näherung von (6.80) zu generieren.

6.3 Rahmenwerk zur Rekonstruktion einer affinen Parametrierung

Das Ziel ist, eine affine Darstellung der BE-Matrizen nach Definition 2.2 herzuleiten. Die Methoden der polynomiellen Matrixinterpolation aus Kapitel 5 werden nicht eingesetzt, weil

- keine Einschränkung auf hyperkubische Parameterbereiche gelten soll,
- aufgrund der $1/r$ -Struktur der greenschen Funktion eine unnötig hohe Anzahl matrixwertiger Koeffizienten und damit verbundener Speicheraufwand zu erwarten ist,
- es schwierig ist, Aussagen über den Interpolationsfehler zu treffen.

Stattdessen wird die EI-Methode aus [BMNP04] eingesetzt, um die greensche Funktion (6.80) affin im Bezug auf $\mathbf{p}$ zu approximieren. In [FHMS11] wird dieses Vorgehen genutzt, um die Streuformulierung der EFIE hinsichtlich der Frequenz und der Beobachtungsrichtung zu variieren, in [GHS12] wird zusätzlich die Geometrie der Streukörper mittels Skalierungen berücksichtigt. Generell werden die BE-Matrizen nicht direkt approximiert, weil die einfache Struktur der greenschen Funktion sich in einer geringen Anzahl an Summanden der Approximation (2.25) widerspiegelt, die Berechnung der parameterabhängigen Funktionen besonders einfach und folglich schnell ist und die affine Form sich auf die Matrizen überträgt. Außerdem bietet die EI die Möglichkeit, Fehlerschranken zu konstruieren. Im Gegensatz zu den Verfahren aus der Literatur wird in der vorliegenden Arbeit die Approximation hinsichtlich allgemeiner Starrkörperbewegungen durchgeführt, zusätzlich wird die EI erstmals für die Ordnungsreduktion einer FE-BE-Kopplung eingesetzt.

6.3.1 Methode der empirischen Interpolation

Die EI-Methode ist ein Verfahren zur Approximation einer von einem Parameter $\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ abhängigen Funktion $f(\cdot, \mathbf{p}) \in \mathbb{L}^2$, sodass

$$f(\cdot, \mathbf{p}) \approx \tilde{f}(\cdot, \mathbf{p}) := \sum_{i=1}^{M_e} f(r_i, \mathbf{p}) \mathbf{q}_i, \quad (6.81)$$

mit Basisfunktionen $\mathbf{q}_i \in \mathbb{L}^2$ und Stützstellen r_i , an welchen die Interpolationseigenschaft

$$\tilde{f}(r_i, \mathbf{p}) = f(r_i, \mathbf{p}) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, M_e\} \quad (6.82)$$

gilt. Die EI-Methode wurde in [BMNP04] vorgeschlagen, detailliertere Erläuterungen sind in [GMNP07] gegeben. Es handelt sich um einen Greedy-Algorithmus, von dem unter Voraussetzung glatter Parameterabhängigkeit von f exponentielle Konvergenz zu erwarten ist [MNPP09]. In dieser Arbeit werden nur Funktionen mit einer finiten Anzahl an Auswertungspunkten $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ betrachtet. Der Parameterraum wird über eine dichte Abtastung $\{\boldsymbol{\mu}_m\}_{m=1}^P = \mathcal{P}_P \subset \mathcal{P}$ mit einer finiten Anzahl P an Parameterwerten dargestellt.

Die Basisfunktionen werden anschaulich wie folgt konstruiert: Eine erste Approximation wird durch Wahl eines Vertreters $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_1)/f(r_1, \boldsymbol{\mu}_1)$ als Basisfunktion $\bar{\mathbf{q}}_1$, welche an der Stützstelle r_1 interpolierend ist, gewonnen. Die Approximation wird verbessert durch Hinzunahme weiterer Basisfunktionen $\bar{\mathbf{q}}_i$ und zugehörigen Stützstellen r_i , die sich je aus der größten Fehlerfunktion zwischen ursprünglicher und approximierter Funktion berechnen,

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})(\bar{\mathbf{q}}_1 \dots \bar{\mathbf{q}}_{i-1})}{f(r_i, \mathbf{p}) - \tilde{f}(r_i, \mathbf{p})(\bar{\mathbf{q}}_1 \dots \bar{\mathbf{q}}_{i-1})} \quad \text{mit } \|f - \tilde{f}\|_2 \text{ maximal.} \quad (6.83)$$

Die genaue Methodik ist in Algorithmus 6.1 beschrieben. Durch den Greedy-Schritt ist der maximale Approximationsfehler über alle Parameter aus $\mathcal{P}_P$ bekannt, was einen guten Fehlerindikator für den tatsächlichen maximalen Fehler für $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ darstellt. Daher wird der Approximationsfehler als Abbruchkriterium des Algorithmus genutzt.

Die Interpolationseigenschaft bedingt bei bekannten Basisfunktionen $\bar{\mathbf{q}}_i$ die Konstruktionsvorschrift der EI-Approximation

$$[\mathbf{B}]_{ij} = [\bar{\mathbf{q}}_j]_{r_i}, \quad (6.84)$$

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{M_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(r_1, \mathbf{p}) \\ \vdots \\ f(r_{M_e}, \mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad (6.85)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{M_e} \alpha_i \bar{\mathbf{q}}_i. \quad (6.86)$$

Algorithmus 6.1 Empirische Interpolation

Eingabe: Funktion f , Auswertungspunkte $\mathbf{x}$,
Parametermenge $\mathcal{P}_P = \{\boldsymbol{\mu}_m\}_{m=1}^P$, Fehlerschranke ϵ

Ausgabe: Interpolationsordnung M_e , Basisfunktionen $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_{M_e}]$,
Interpolationspunkte $\{r_i\}_{i=1}^{M_e}$

begin

$M_e = 1$ *// Initialisiere Algorithmus mit einer Basisfunktion*

$\mathbf{p} = \arg \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_P} \|f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})\|_2$

$r_1 = \arg \max_{[\mathbf{x}]_i} |f(\mathbf{x}, \mathbf{p})|$

$\mathbf{Q} = f(\mathbf{x}, \mathbf{p})/f(r_1, \mathbf{p})$

$\mathbf{B} = 1$

$e = \epsilon + 1$

while $e > \epsilon$ **do** *// Neue Basisfunktionen, solange Fehler zu groß*

for $m = 1 \dots P$ **do** *// Berechne Interpolationsfehler*

$\mathbf{B}[\alpha_1 \dots \alpha_{M_e}]^T = [f(r_1, \boldsymbol{\mu}_m) \dots f(r_{M_e}, \boldsymbol{\mu}_m)]^T$ *// Löse Gleichungssystem*

$\tilde{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_m) = \mathbf{Q}[\alpha_1 \dots \alpha_{M_e}]^T$ *// EI-Approximation der Ordnung M_e*

$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_m) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_m) - \tilde{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_m)$ *// Fehlerfunktion*

$e_m = \|g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_m)\|_2 / \|f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_m)\|_2$ *// Relativer Fehler*

end for

$e = \max_m e_m$ *// Maximaler Fehler*

if $e > \epsilon$ **then** *// Füge neue Basisfunktion hinzu*

$M_e \leftarrow M_e + 1$

$\mathbf{p} = \arg \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_P} \|g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})\|_2$

$r_{M_e} = \arg \max_{[\mathbf{x}]_i} |f(\mathbf{x}, \mathbf{p})|$

$\mathbf{Q} \leftarrow [\mathbf{Q}, g(\mathbf{x}, \mathbf{p})/g(r_{M_e}, \mathbf{p})]$

$[\mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{Q}]_{(r_i, j)}$ für $i, j \in \{1, \dots, M_e\}$ *// Definiere Interpolationsmatrix*

end if

end while

$\mathbf{Q} \leftarrow \mathbf{Q}\mathbf{B}^{-1}$ *// Umskalierung der Basis*

end

Da die Interpolationsmatrix $\mathbf{B}$ konstant ist, kann die Basis umskaliert werden mittels

$$[\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_{M_e}] = [\bar{\mathbf{q}}_1 \dots \bar{\mathbf{q}}_{M_e}] \mathbf{B}^{-1}, \quad (6.87)$$

sodass der numerische Aufwand zur Auswertung der Approximation (6.81) nur noch in der Bestimmung von M_e Funktionswerten der ursprünglichen Funktion f liegt [SFDE15].

6.3.2 Anwendung auf parametrische FE-BE-Systeme

Zur Bestimmung der parameterabhängigen BE-Matrizen in (6.79) werden sowohl die Funktion $G(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p})$ laut (6.80) als auch ihr Gradient benötigt, wobei als Auswertungspunkte alle möglichen Paarungen an Quadraturpunkten $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}_1$ und $\hat{\mathbf{y}} \in \hat{\Omega}_2$ zu berücksichtigen sind. Die Anzahl der Quadraturpunkte sowie ihre Lage relativ zu $\hat{\Omega}_1$ bzw. $\hat{\Omega}_2$ ist konstant bezüglich $\mathbf{p}$, weshalb die EI-Methode aus Abschnitt 6.3.1 zur affinen Approximation geeignet ist. Es sei

$$G(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) \approx \tilde{G}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) := \sum_{m=1}^{M_e} G(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{p})[\mathbf{q}_m]. \quad (6.88)$$

Darin bezeichnet wie im vorherigen Abschnitt $\mathbf{q}_m$ die Basisvektoren, welche mittels Algorithmus 6.1 bestimmt werden, und $[\cdot]$ den zur Paarung $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ gehörenden Eintrag des Vektors. An den Interpolationspunkten $\mathbf{x}_m$ und $\mathbf{y}_m$ muss $G(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{p})$ mittels (6.80) ausgewertet werden.

Eine affine Darstellung der Matrix $\mathbf{N}_{\Omega 12}$ folgt durch Einsetzen von (6.88) in (6.29) bzw. (6.40) zu

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_e} G(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{p}) \mathbf{N}_m^q, \quad (6.89)$$

$$[\mathbf{N}_m^q]_{ij} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} [\mathbf{q}_m] \hat{\mathbf{e}}_z^T \text{rot } \bar{\mathbf{w}}_{i,y} \hat{\mathbf{e}}_z^T \text{rot } \bar{\mathbf{w}}_{j,x} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_x|}{\det \hat{\mathbf{J}}_x} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_y|}{\det \hat{\mathbf{J}}_y} d\Gamma_y d\Gamma_x. \quad (6.90)$$

Die Approximation der Matrix $\mathbf{A}_{\Omega 12}$ mit (6.35),

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{\Omega 12}]_{ij}(\mathbf{p}) = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \tilde{G}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{i,y}^T \mathbf{J}_y^T \mathbf{J}_x \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,x} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_x|}{\det \hat{\mathbf{J}}_x} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_y|}{\det \hat{\mathbf{J}}_y} d\Gamma_y d\Gamma_x, \quad (6.91)$$

erfordert aufgrund der Rotationsmatrizen in

$$\mathbf{J}_y^T \mathbf{J}_x = \hat{\mathbf{J}}_y^T \mathbf{R}_y^T(\mathbf{p}) \mathbf{R}_x(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{J}}_x \quad (6.92)$$

eine weitere Aufspaltung. Es gilt

$$\mathbf{R}_y^T(\mathbf{p})\mathbf{R}_x(\mathbf{p}) = \sum_{i,j=1}^3 R_{ij}(\mathbf{p})\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j^T. \quad (6.93)$$

Bemerkung. Als Produkt zweier Rotationsmatrizen sind nur drei linear unabhängige Summanden nötig, was im Rahmen der verwendeten Prototyp-Implementierung nicht ausgenutzt wird.

Einsetzen in (6.91) liefert die gesuchte Gleichung

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_e} \sum_{k,l=1}^3 G(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{p}) R_{kl}(\mathbf{p}) \mathbf{A}_{mkl}^q, \quad (6.94)$$

$$[\mathbf{A}_{mkl}^q]_{ij} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} [\mathbf{q}_m] \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{i,y}^T \hat{\mathbf{J}}_y^T \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_l^T \hat{\mathbf{J}}_x \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,x} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_x|}{\det \hat{\mathbf{J}}_x} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_y|}{\det \hat{\mathbf{J}}_y} d\Gamma_y d\Gamma_x. \quad (6.95)$$

Für die Matrix $\mathbf{B}_{\Omega 12}$ werden, wie in (6.43) zu sehen, die Komponenten des vektorwertigen Ausdrucks $\mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})/4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3$ benötigt und über drei skalarwertige EI-Funktionen $\tilde{\Lambda}$ genähert,

$$\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \frac{\hat{\mathbf{J}}_x^{-1} \mathbf{R}_x^{-1}(\mathbf{p})(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \approx \tilde{\Lambda}_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) := \sum_{m=1}^{M_\alpha} \gamma_x(\mathbf{x}_m^\alpha, \mathbf{y}_m^\alpha, \mathbf{p})[\mathbf{q}_m^\alpha], \quad (6.96)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_y \cdot \frac{\hat{\mathbf{J}}_y^{-1} \mathbf{R}_y^{-1}(\mathbf{p})(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \approx \tilde{\Lambda}_y(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) := \sum_{m=1}^{M_\beta} \gamma_y(\mathbf{x}_m^\beta, \mathbf{y}_m^\beta, \mathbf{p})[\mathbf{q}_m^\beta], \quad (6.97)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \frac{\hat{\mathbf{J}}_z^{-1} \mathbf{R}_z^{-1}(\mathbf{p})(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \approx \tilde{\Lambda}_z(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) := \sum_{m=1}^{M_\gamma} \gamma_z(\mathbf{x}_m^\gamma, \mathbf{y}_m^\gamma, \mathbf{p})[\mathbf{q}_m^\gamma], \quad (6.98)$$

$$\gamma_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}) = \hat{\mathbf{e}}_t \cdot \hat{\mathbf{J}}_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1}(\mathbf{p}) \operatorname{grad}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}) \quad \text{mit } t \in \{x, y, z\}. \quad (6.99)$$

Auch hier sei $M_{(\cdot)}$ die Approximationsordnung, $\mathbf{x}_m^{(\cdot)}$, $\mathbf{y}_m^{(\cdot)}$ seien die Interpolationspunkte und $\mathbf{q}_m^{(\cdot)}$ die Basisvektoren. Einsetzen in (6.43) ergibt

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{B}}_{\Omega 12}]_{ij}(\mathbf{p}) = & \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \left[\tilde{\Lambda}_z(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) \bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \right. \\ & \left. - \bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) \\ \tilde{\Lambda}_y(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}) \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_z^T \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \right] \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_y|}{\det \hat{\mathbf{J}}_y} |\det \hat{\mathbf{J}}_x| d\Gamma_y d\Gamma_x. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Ausnutzung der Orthogonalität der Rotationsmatrizen und Verwendung von (6.93) führt auf

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_{\Omega 12}(\mathbf{p}) = & \sum_{k,l=1}^3 R_{lk}(\mathbf{p}) \left[\sum_{m=1}^{M_\gamma} \gamma_z(\mathbf{x}_m^\gamma, \mathbf{y}_m^\gamma, \mathbf{p}) \mathbf{B}_{mkl}^\gamma \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{M_\alpha} \gamma_x(\mathbf{x}_m^\alpha, \mathbf{y}_m^\alpha, \mathbf{p}) \mathbf{B}_{mkl}^\alpha + \sum_{m=1}^{M_\beta} \gamma_y(\mathbf{x}_m^\beta, \mathbf{y}_m^\beta, \mathbf{p}) \mathbf{B}_{mkl}^\beta \right], \end{aligned} \quad (6.101)$$

$$[\mathbf{B}_{mkl}^\gamma]_{ij} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} [\mathbf{q}_m^\gamma] \bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \hat{\mathbf{J}}_x^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_l^T \hat{\mathbf{J}}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_y|}{\det \hat{\mathbf{J}}_y} |\det \hat{\mathbf{J}}_x| d\Gamma_y d\Gamma_x, \quad (6.102)$$

$$[\mathbf{B}_{mkl}^\alpha]_{ij} = - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \hat{\mathbf{e}}_x [\mathbf{q}_m^\alpha] \hat{\mathbf{e}}_z^T \hat{\mathbf{J}}_x^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_l^T \hat{\mathbf{J}}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_y|}{\det \hat{\mathbf{J}}_y} |\det \hat{\mathbf{J}}_x| d\Gamma_y d\Gamma_x, \quad (6.103)$$

$$[\mathbf{B}_{mkl}^\beta]_{ij} = - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{w}}_{i,x}^T \hat{\mathbf{e}}_y [\mathbf{q}_m^\beta] \hat{\mathbf{e}}_z^T \hat{\mathbf{J}}_x^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_l^T \hat{\mathbf{J}}_y \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{j,y} \frac{|\det \hat{\mathbf{J}}_y|}{\det \hat{\mathbf{J}}_y} |\det \hat{\mathbf{J}}_x| d\Gamma_y d\Gamma_x. \quad (6.104)$$

Das Vorgehen zur Bestimmung von $\mathbf{B}_{\Omega 21}(\mathbf{p})$ verläuft analog mit denselben EI-Funktionen und Basismatrizen $\bar{\mathbf{B}}_{mkl}^\alpha$, $\bar{\mathbf{B}}_{mkl}^\beta$ sowie $\bar{\mathbf{B}}_{mkl}^\gamma$. Damit sind affine Darstellungen im Sinne von Definition 2.2 für alle BE-Matrizen bekannt und Ersetzen der Matrizen (6.79g) bis (6.79i) in (6.78) ergibt das Ausgangsmodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^{\text{FF}} + j\omega \mathbf{A}_1^{\text{FF}} + \sum_{m=1}^{M_e} G(\cdot) \mathbf{A}_{q,m}^{\text{FF}} & \mathbf{A}_0^{\text{FB}} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{\text{FB}}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{A}_0^{\text{FB},T} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{\text{FB},T}(\mathbf{p}) & \mathbf{A}_0^{\text{BB}} + \sum_{k,l=1}^3 R_{kl}(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^{M_e} G(\cdot) \mathbf{A}_{q,mkl}^{\text{BB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_F \\ \mathbf{x}'_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.105)$$

Die verwendeten Größen sind definiert in (6.79) und

$$\mathbf{A}_{q,m}^{\text{FF}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{N}_m^q \\ \mathbf{N}_m^{q,T} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (6.106a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_p^{\text{FB}}(\mathbf{p}) = & \sum_{k,l=1}^3 R_{lk}(\mathbf{p}) \left[\sum_{m=1}^{M_\gamma} \gamma_z(\mathbf{x}_m^\gamma, \mathbf{y}_m^\gamma, \mathbf{p}) \mathbf{A}_{mkl\gamma}^{\text{FB}} \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{M_\alpha} \gamma_x(\mathbf{x}_m^\alpha, \mathbf{y}_m^\alpha, \mathbf{p}) \mathbf{A}_{mkl\alpha}^{\text{FB}} + \sum_{m=1}^{M_\beta} \gamma_y(\mathbf{x}_m^\beta, \mathbf{y}_m^\beta, \mathbf{p}) \mathbf{A}_{mkl\beta}^{\text{FB}} \right], \end{aligned} \quad (6.106b)$$

$$\mathbf{A}_{mkl t}^{\text{FB}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_{mkl}^t \\ \bar{\mathbf{B}}_{mkl}^t & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } t \in \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad (6.106c)$$

$$\mathbf{A}_{q,mkl}^{\text{BB}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{mkl}^q \\ \mathbf{A}_{mkl}^{q,T} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.106d)$$

6.4 Parametrische Ordnungsreduktion

Das gekoppelte FE-BE-Modell (6.105) weist die Form (2.40) auf, sodass ein effizientes reduziertes Modell erstellt werden kann. Zur Generierung der Projektionsmatrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times n}$ mit $n \ll N$ ist das Mehrpunktverfahren nach Definition 2.6 geeignet. Es wird jedoch vorgeschlagen, nicht direkt den Projektionsschritt durchzuführen wie bei den bisher betrachteten reduzierten Modellen, sondern die natürliche Trennung in FE- und BE-Unbekannte mittels strukturerhaltender Projektion beizubehalten. Dies wird erreicht durch Aufspaltung der Projektionsmatrix in entsprechende Blöcke und durch Orthogonalisierung dieser, sodass sich eine Projektionsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_F & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times 2n} \quad (6.107)$$

ergibt. Als Nachteil ist die doppelte ROM-Dimension zu nennen. es können aber Vorteile hinsichtlich der numerischen Stabilität und der Konvergenz der reduzierten Modelle entstehen, siehe hierzu das numerische Beispiel in Abschnitt 6.5.

Ein strukturerhaltend reduziertes FE-BE-Modell unter Verwendung der Projektionsmatrix (6.107) ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_0^{\text{FF}} + j\omega \tilde{\mathbf{A}}_1^{\text{FF}} + \sum_{m=1}^{M_e} G(\cdot) \tilde{\mathbf{A}}_{q,m}^{\text{FF}} & \tilde{\mathbf{A}}_0^{\text{FB}} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{\text{FB}}(\mathbf{p}) \\ \tilde{\mathbf{A}}_0^{\text{FB},T} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{\text{FB},T}(\mathbf{p}) & \tilde{\mathbf{A}}_0^{\text{BB}} + \sum_{k,l=1}^3 R_{kl}(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^{M_e} G(\cdot) \tilde{\mathbf{A}}_{q,mkl}^{\text{BB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_F \\ \tilde{\mathbf{x}}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.108)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_0^{\text{FF}} = \mathbf{V}_F^T \mathbf{A}_0^{\text{FF}} \mathbf{V}_F, \quad (6.109a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_1^{\text{FF}} = \mathbf{V}_F^T \mathbf{A}_1^{\text{FF}} \mathbf{V}_F, \quad (6.109b)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{q,m}^{\text{FF}} = \mathbf{V}_F^T \mathbf{A}_{q,m}^{\text{FF}} \mathbf{V}_F, \quad (6.109c)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_0^{\text{FB}} = \mathbf{V}_F^T \mathbf{A}_0^{\text{FB}} \mathbf{V}_B, \quad (6.109d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_p^{\text{FB}}(\mathbf{p}) = \sum_{k,l=1}^3 R_{lk}(\mathbf{p}) \left[\sum_{m=1}^{M_\gamma} \gamma_z(\mathbf{x}_m^\gamma, \mathbf{y}_m^\gamma, \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{A}}_{mkl\gamma}^{\text{FB}} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{M_\alpha} \gamma_x(\mathbf{x}_m^\alpha, \mathbf{y}_m^\alpha, \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{A}}_{mkl\alpha}^{\text{FB}} + \sum_{m=1}^{M_\beta} \gamma_y(\mathbf{x}_m^\beta, \mathbf{y}_m^\beta, \mathbf{p}) \tilde{\mathbf{A}}_{mkl\beta}^{\text{FB}} \right], \end{aligned} \quad (6.109e)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{mkl}^{\text{FB}} = \mathbf{V}_F^T \mathbf{A}_{mkl}^{\text{FB}} \mathbf{V}_B, \quad (6.109\text{f})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_0^{\text{BB}} = \mathbf{V}_B^T \mathbf{A}_0^{\text{BB}} \mathbf{V}_B, \quad (6.109\text{g})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{q,mkl}^{\text{BB}} = \mathbf{V}_B^T \mathbf{A}_{q,mkl}^{\text{BB}} \mathbf{V}_B, \quad (6.109\text{h})$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_F = \mathbf{V}_F^T \mathbf{b}_F. \quad (6.109\text{i})$$

Hochdimensionale Modelle

Wie bereits in der Einleitung angesprochen, ist eine explizite Darstellung der vollen BE-Matrizen für hochdimensionale Modelle wegen des hohen Speicheraufwandes nicht möglich. Für ein praktikables BE-Rahmenwerk müssen speichereffiziente Verfahren zur impliziten Bildung von Matrix-Vektor-Produkten zum Einsatz kommen, welche im Rahmen dieser Arbeit nicht umgesetzt werden. Mögliche Alternativen sind hierarchische Matrizen [Hac99] und eine entsprechende Modifikation der Fast Multipole Method [OSW06], beide bedingen eine iterative Lösung der Ausgangsmodelle. Der Autor schlägt daher vor, im Rahmen der ROM-Generierung alle Lösungen des vollen Modells unter Einsatz der speichereffizienten Verfahren zu berechnen. Das resultierende ROM unterscheidet sich in seinen Eigenschaften nicht von ROMs basierend auf konventionell gelösten niedrigdimensionalen Ausgangsmodellen und kann wie üblich direkt gelöst werden.

6.5 Numerische Ergebnisse

Kontaktloses Energieübertragungssystem

Zur Validierung der FE-BE-Formulierung (6.78) wird das kontaktlose Energieübertragungssystem aus Abschnitt 5.4 simuliert. Die vier Transmitterspulen werden dazu als ein Gebiet $\hat{\Omega}_1$ aufgefasst und vernetzt, die Empfängerspule wird als separates Gebiet $\hat{\Omega}_2$ vernetzt. Dadurch stellt ihre Position t aus (5.18b) einen Starrkörper-Parameter dar, wie er durch die parametrische Formulierung dieses Kapitels behandelt werden kann.

Abbildung 6.7 zeigt im Vergleich die Kopplungsfaktoren bei Berechnung über das FE-Modell mit Netzverzerrung und über (6.78). In Abbildung 6.7(a) ist zu sehen, dass beide Methoden qualitativ das gleiche Ergebnis liefern. Die Unterschiede sind in Abbildung 6.7(b) quantifiziert, dabei ist für k_2 und k_3 der relative Fehler dargestellt und für k_1 und k_4 aufgrund des Nulldurchgangs der absolute Fehler. Wie zu sehen, werden die Unterschiede für betragsgroßes t größer, was durch den Einfluss von Elementen schlechter Qualität als Ergebnis der Netzverzerrung zu begründen ist.

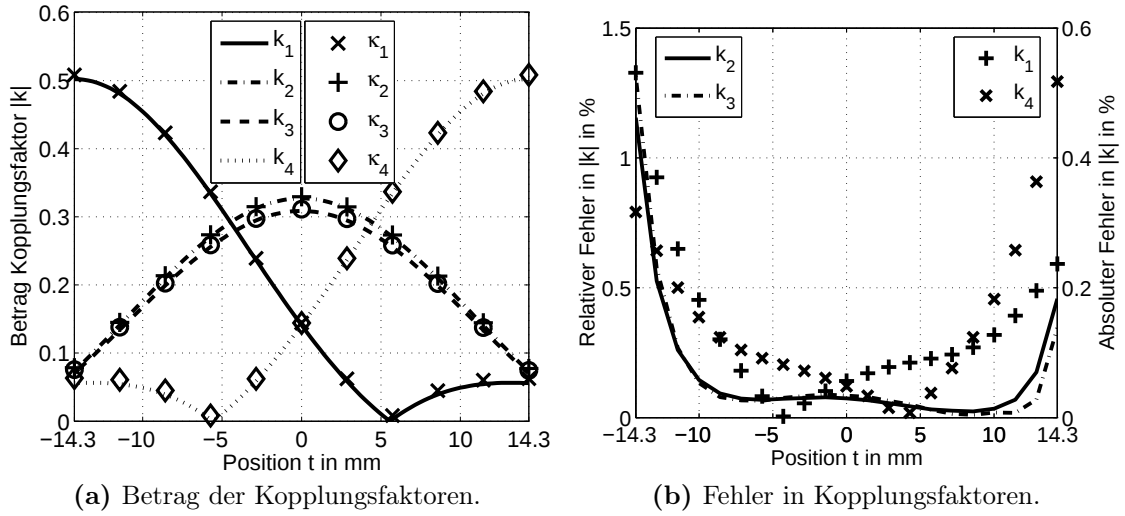


Abbildung 6.7: Betrag der induktiven Kopplungsfaktoren im Vergleich zwischen FE-Lösung (κ_1 bis κ_4) und FE-BE-Lösung (k_1 bis k_4).

Die FE-BE-Formulierung leidet nicht unter diesem Nachteil und kann prinzipbedingt auch große Parameterbereiche für t mit gleichbleibender Genauigkeit abdecken.

System mit frei drehbarer Sekundärspule

Die MOR-Methodik wird anhand eines Beispiels demonstriert, das nicht über ein verzerrtes FE-Netz dargestellt werden kann. Die Transmitter-Konfiguration des Energieübertragungs-System aus Abschnitt 5.4 dient abermals als erstes Gebiet $\hat{\Omega}_1$, sie wird an die Spule #1 mit Ferritplatte nach Abschnitt 3.4 gekoppelt. Der Einfachheit halber werden nur die Transmitter $TX2$ und $TX4$ sowie Spule #1 betrachtet. Als Systemparameter dienen neben der Frequenz f die Position t entsprechend (5.18b) und der Winkel α der Sekundärspule mit

$$f \in [1 \text{ Hz}; 100 \text{ kHz}], \quad (6.110a)$$

$$t \in [0; 14, 3] \text{ mm}, \quad (6.110b)$$

$$\alpha \in [0; 90]^\circ, \quad (6.110c)$$

siehe Abbildung 6.8. Der Drehpunkt liegt auf der Symmetrieachse der Spule #1 auf der transmitterseitigen Oberfläche ihres Wicklungsfensters, sein Abstand von der Oberfläche der Transmitter beträgt konstante 30 mm.

Von der Struktur wird ein FE-BE-Modell erstellt, es besitzt etwa 275.000 Freiheitsgrade unter Verwendung von Ansatzfunktionen erster Ordnung. Da nicht nur die Lösung dieses Modells, sondern auch die Assemblierung der parameterabhängigen BE-Matrizen zeitaufwendig ist, soll nach der Theorie dieses Kapitels ein effizientes reduziertes Modell erstellt werden. Zunächst sind, wie in Abschnitt 6.3 erläutert, die

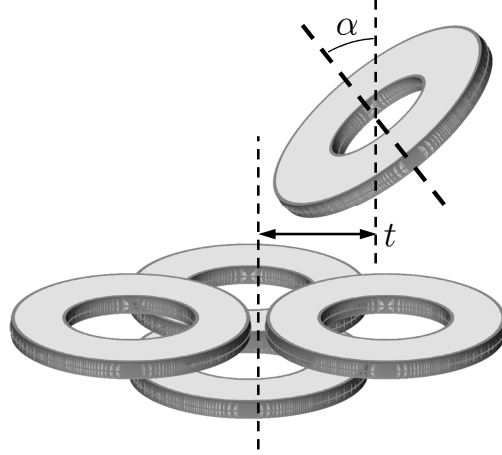


Abbildung 6.8: Skizze des Systems mit frei drehbarer Sekundärspule.

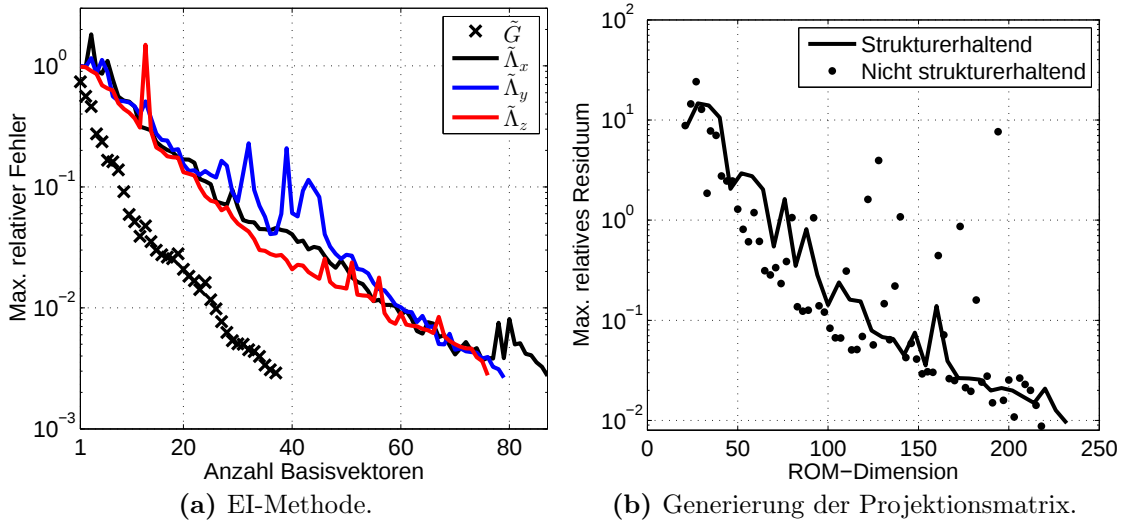


Abbildung 6.9: Konvergenzraten bei der ROM-Erstellung.

greensche Funktion und ihr Gradient mit der EI-Methode zu approximieren. Das resultierende affine, aber hochdimensionale Modell wird im Folgenden als EI-Modell bezeichnet. Wird die numerische Integration der BE-Matrixeinträge mit Gauß-Quadratur vierter Ordnung durchgeführt, so sind auf $\partial\Omega_1$ 3396 Integrationspunkte zu berücksichtigen, und auf $\partial\Omega_2$ 2988 Integrationspunkte. Die Fehlerschranke in Algorithmus 6.1 sei $\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$, die Parameter werden mit $(t, \alpha) \hat{=} (21, 91)$ äquidistant verteilten Punkten diskretisiert. Abbildung 6.9(a) zeigt die Konvergenz der vier Funktionen $\tilde{G}$, $\tilde{\Lambda}_x$, $\tilde{\Lambda}_y$ und $\tilde{\Lambda}_z$. Den theoretischen Voraussagen entsprechend konvergieren die Funktionen je exponentiell, wobei die Gradientenanteile schwieriger zu approximieren sind und etwa doppelt so viele Basisfunktionen benötigen.

Für das EI-Modell wird mittels Algorithmus 3.1 ein MP-ROM erstellt, als Diskretisierung von (6.110) werden $6 \times 11 \times 19$ Punkte gewählt, die logarithmisch in f

	Volles Modell ^a	ROM
Dimension	273.458	232
davon $\mathbf{K}$ zugeordnet	534	106
davon $\mathbf{A} _{\partial\Omega}$ zugeordnet	1596	–
Modellgenerierung	–	10,8 d
davon EI		8,05 d ^b
davon Berechnung von $\mathbf{V}$		2,72 d
Simulationsdauer (749.521 Punkte)	390 d ^c	2,27 h
ein Parameterpunkt	44,9 s	10,9 ms

Simulation auf einem Intel Core i5-4670K CPU mit 3.4 GHz und 32 GB RAM.

^a Intel MKL 11.1 PARDISO zur Faktorisierung.

^b Zeit für Fehlerschranke $\epsilon = 10^{-3}$.

^c Extrapoliert.

Tabelle 6.1: Simulationsdaten für das System mit frei drehbarer Sekundärspule.

und linear in den geometrischen Parametern verteilt sind. Auch dieser Schritt weist entsprechend der Theorie bis zum Erreichen der Fehlerschranke $\epsilon = 10^{-2}$ exponentielle Konvergenz auf, siehe Abbildung 6.9(b). Durch die vorgeschlagene Projektion erhält das ROM die Blockstruktur des Ausgangsmodells, von den 232 Unbekannten sind 20 den Windungsspannungen der Empfängerspule $\mathbf{u}_{w,CS}$ aus (3.89) zugeordnet und je 106 $\tilde{\mathbf{x}}_F$ und $\tilde{\mathbf{x}}_K$ aus (6.108). Zusätzlich ist in Abbildung 6.9(b) die Konvergenz für konventionelle, nicht strukturerhaltende Projektion dargestellt. Das Residuum nimmt durchschnittlich etwa gleich schnell ab, der Verlauf ist jedoch insgesamt deutlich unregelmäßiger. Weil keine Aufspaltung der Projektionsmatrix erfolgt, ist zum Erreichen der vorgegebenen Fehlerschranke etwa die doppelte Rechenzeit nötig. Somit ist die Strukturerhaltung nicht nur im Hinblick auf Systemeigenschaften, sondern auch der Effizienz wegen sinnvoll. Eine detaillierte Zusammenfassung der Modelldimensionen und Rechenzeiten ist in Tabelle 6.1 gegeben.

Um das System mit dem ROM zu charakterisieren, wird eine feine Diskretisierung von (6.110) mit $101 \times 41 \times 181 = 749.521$ Punkten gewählt. Die gesamte Simulationsdauer beträgt hierfür 2,27 h und ist damit um einen Faktor von 4000 schneller als eine Rechnung mit dem konventionellen Modell (6.78). Damit ist klar, dass der Aufwand zur ROM-Generierung sinnvoll investiert ist. Schließlich werden die Simulationsergebnisse betrachtet. In Abbildung 6.10(a) ist die Eigeninduktivität von TX2 über α aufgetragen. Bei $t = 0$ mm ist ein Anstieg mit α zu beobachten, weil die Ferritplatte der Empfängerspule durch die Drehung näher an TX2 gebracht wird. Für $t = 14,3$ mm liegt die Empfängerspule nicht mehr direkt über TX2, weshalb der Kurvenverlauf etwas anders aussieht. Steigende Frequenz hat keinen Einfluss auf das qualitative Verhalten, senkt die Induktivität aber betragsmäßig ab. Die verschiedenen Approximationsqualitäten des ROMs können anhand von Abbildung 6.10(b) untersucht werden. Im Vergleich zum Ausgangsmodell hat das ROM einen relativen Fehler unterhalb von 10^{-4} , was im Hinblick auf die Genauigkeit des FE-BE-Modells

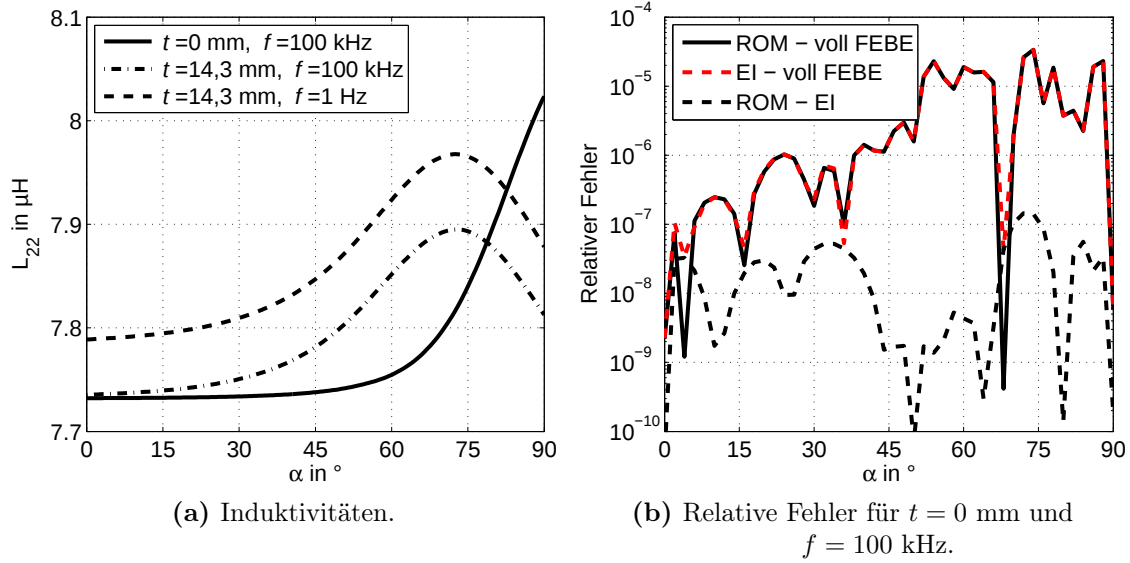


Abbildung 6.10: Eigeninduktivität L_{22} von $TX2$ an verschiedenen Parameterpunkten und relative Fehler zu EI- und vollem Modell.

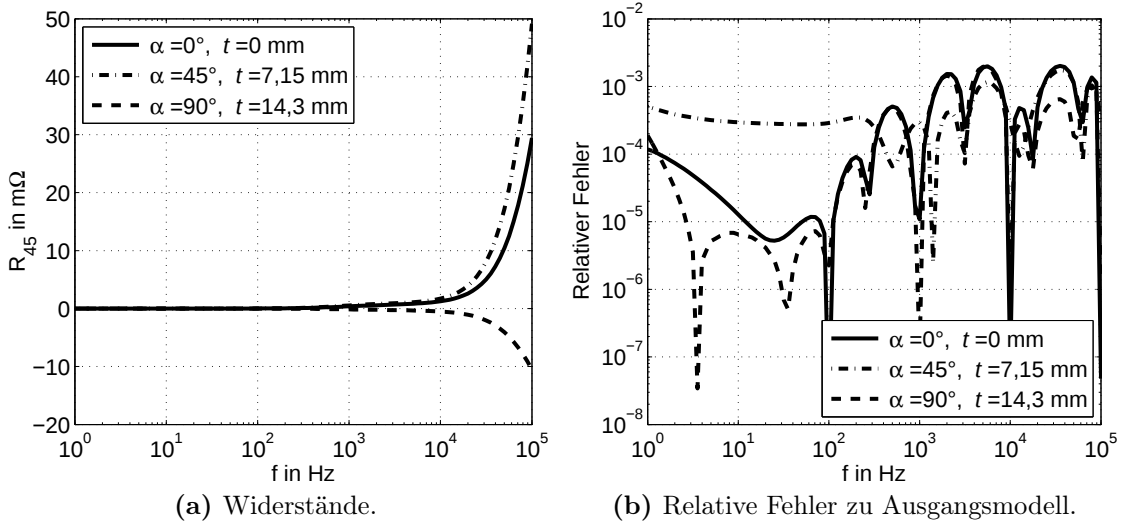


Abbildung 6.11: Koppelwiderstand $R_{45} = \text{Re}[\mathbf{Z}]_{45}$ von $TX4$ zur Empfängerspule und relative Fehler.

mehr als ausreichend ist. Der Vergleich zwischen dem EI-Modell und dem vollen Modell zeigt, dass der Fehler hauptsächlich durch die affine Approximation der BE-Matrizen hervorgerufen wird. Denn das ROM approximiert das EI-Modell mit einer Genauigkeit im Bereich von 10^{-7} . Somit ist die Fehlertoleranz bei der EI zu senken, um ein genaueres reduziertes Modell zu erhalten. Es fällt auf, dass das ROM sowohl für $\alpha = 0^\circ$ als auch für $\alpha = 90^\circ$ das volle Modell numerisch exakt reproduziert. Dies kann dadurch begründet werden, dass an beiden Parameterpunkten alle

EI-Approximationen eine Stützstelle haben und die zugehörigen vollen Lösungen von Algorithmus 3.1 zur Konstruktion der Projektionsmatrix verwendet wurden.

Abbildung 6.11 zeigt den Koppelwiderstand zwischen $TX4$ und $\#1$ über der Frequenz. Die geometrischen Parameter haben einen deutlichen Einfluss auf den qualitativen Verlauf. Wie zu erwarten, liegen die relativen Fehler laut Abbildung 6.11(b) für eine Koppelgröße höher als für eine Selbstwirkung, aber immer noch in einer tolerierbaren Höhe. An den niedrigen Fehlerwerten bei $f \in \{1, 10, 100\}$ kHz ist die Frequenzdiskretisierung bei der Generierung der Projektionsmatrix zu erkennen.

Für die Kopplungsfaktoren k_2 und k_4 sind in Abbildung 6.12 beziehungsweise Abbildung 6.13 Antwortflächen über den gesamten geometrischen Parameterbereich gezeigt. Betragsmäßig liegen die Kopplungen im einstelligen Prozentbereich. Durch die Drehung der Empfängerspule um bis zu 90° ist das Verhalten von k_2 und k_4 über den geometrischen Parametern komplex; es gibt jeweils Vorzeichenwechsel, also eine Umkehr der Richtung der induzierten Spannung. Dennoch ist zu sehen, dass das ROM die Systemantwort des Ausgangsmodells mit geringem Fehler nachbilden kann. Analog zu den Ergebnissen zu L_{22} sinken die Beträge der Kopplungsfaktoren mit steigender Frequenz und der Fehler wird hauptsächlich durch die EI hervorgerufen. Denn der Fehler zwischen dem ROM und dem EI-Modell je laut Unterabbildungen (e) und (f) liegt etwa drei bis vier Größenordnungen unter dem Fehler zum vollen Modell laut Unterabbildungen (c) und (d).

6.6 Fazit

Starrkörperbewegungen als wichtige Unterklasse geometrischer Parameter können prinzipbedingt gut mit parametrischen FE-BE-Modellen simuliert werden. In diesem Kapitel wird ein Rahmenwerk zur zweistufigen Konstruktion eines effizienten reduzierten Modells für solche Systeme vorgestellt. Der erste Schritt umfasst eine affine Approximation der BE-Matrizen mit der EI-Methode. Dies erlaubt in einem zweiten Schritt die Anwendung strukturerhaltender Ordnungsreduktion mit einem Mehrpunktverfahren. Der Einsatz des vorgeschlagenen Verfahrens ermöglicht parametrische Simulationen mit einer Vielzahl an Konfigurationen, die mithilfe konventioneller Techniken zu zeitaufwendig wären. Dabei liegt der entstehende Fehler der reduzierten Modelle im Bereich oder unterhalb des Diskretisierungsfehlers der Ausgangsmodelle. Ausschlaggebend für den Fehler ist der Schritt der affinen Approximation. Da beide Schritte der ROM-Erstellung auf Greedy-Verfahren basieren, ist eine gezielte Beeinflussung der Fehlerniveaus möglich.

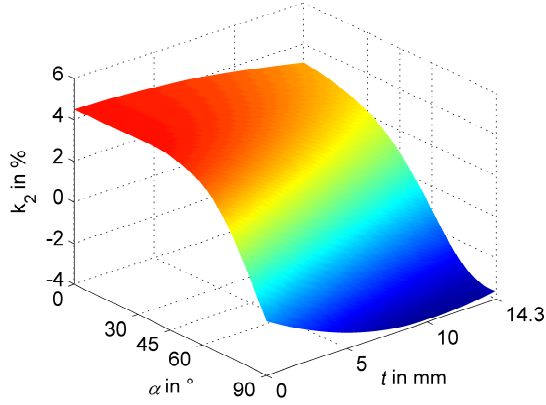
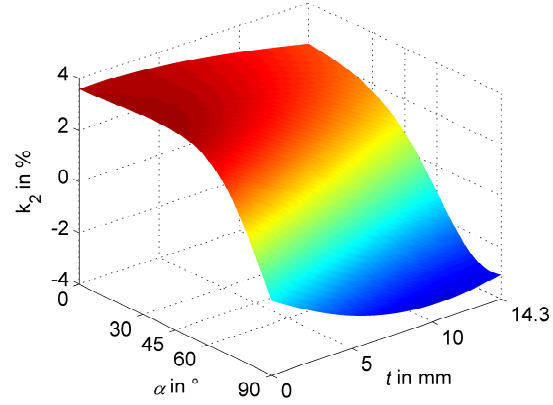
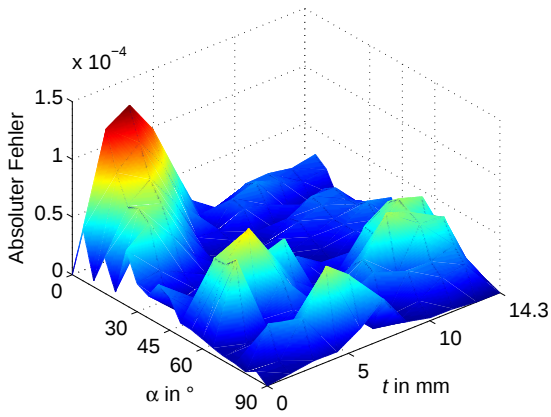
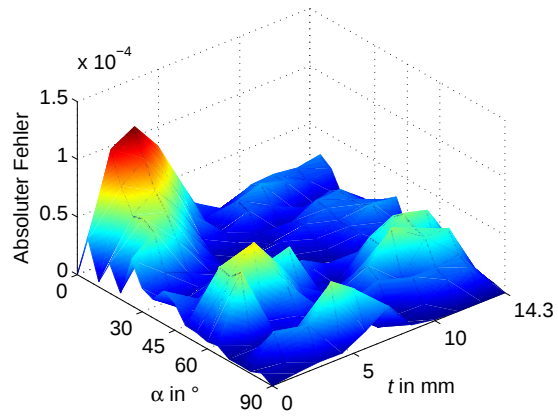
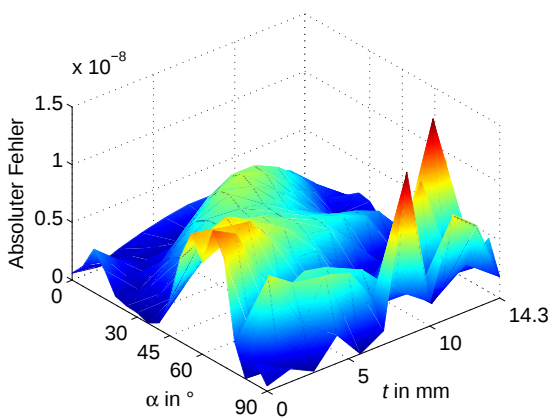
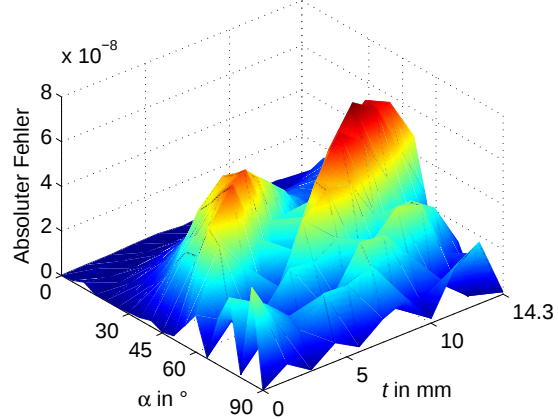
(a) Kopplungsfaktor für $f = 1$ Hz.(b) Kopplungsfaktor für $f = 100$ kHz.(c) Absoluter Fehler zu Ausgangsmodell für $f = 1$ Hz.(d) Absoluter Fehler zu Ausgangsmodell für $f = 100$ kHz.(e) Absoluter Fehler zu EI-Modell für $f = 1$ Hz.(f) Absoluter Fehler zu EI-Modell für $f = 100$ kHz.

Abbildung 6.12: Induktiver Kopplungsfaktor k_2 zwischen $TX2$ und Empfänger. Auswertung über ROM und zugehörige Fehler.

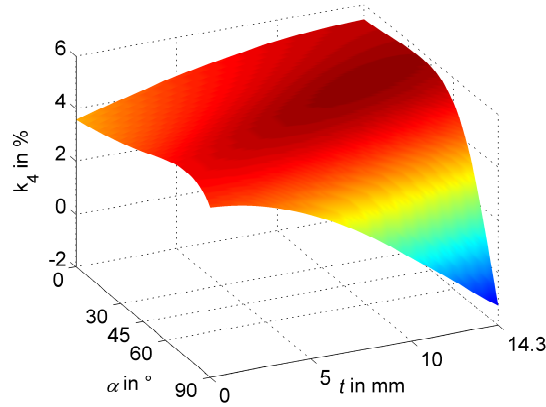
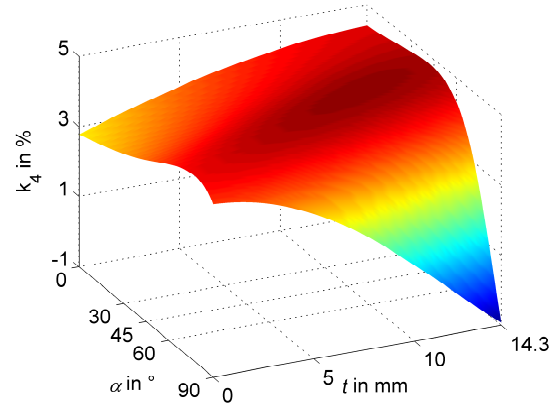
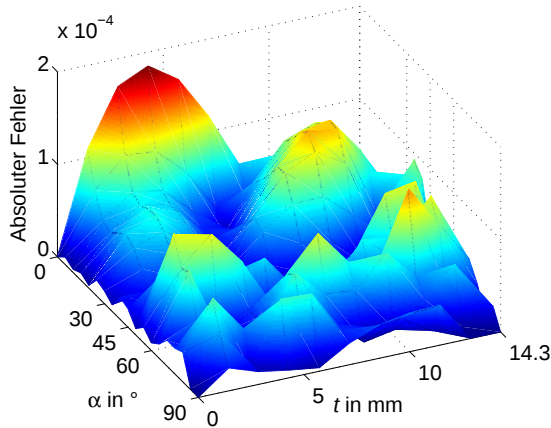
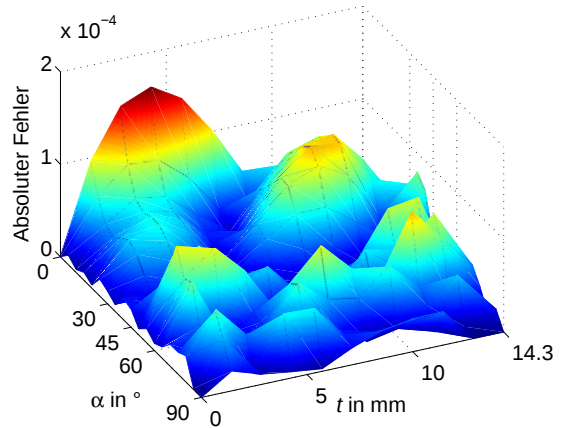
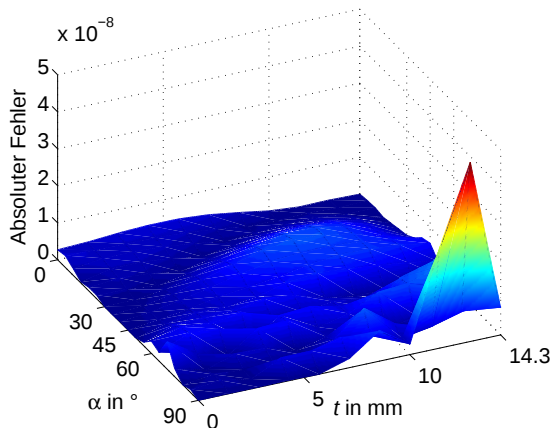
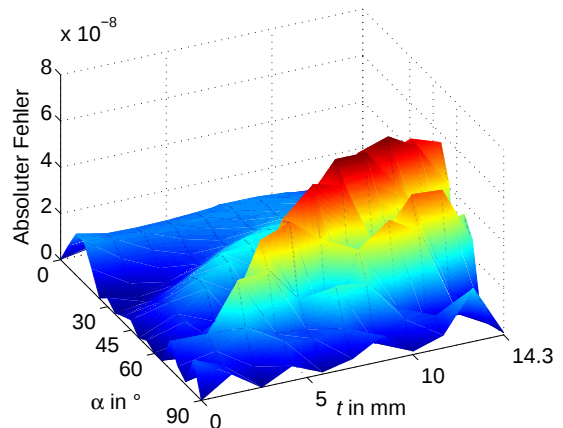
(a) Kopplungsfaktor für $f = 1$ Hz.(b) Kopplungsfaktor für $f = 100$ kHz.(c) Absoluter Fehler zu Ausgangsmodell für $f = 1$ Hz.(d) Absoluter Fehler zu Ausgangsmodell für $f = 100$ kHz.(e) Absoluter Fehler zu EI-Modell für $f = 1$ Hz.(f) Absoluter Fehler zu EI-Modell für $f = 100$ kHz.

Abbildung 6.13: Induktiver Kopplungsfaktor k_4 zwischen TX_4 und Empfänger. Auswertung über ROM und zugehörige Fehler.

Kapitel 7

Verfahren zur schnellen Berechnung nichtlinearer Wirbelstromprobleme

Nichtlinearitäten spielen eine wesentliche Rolle bei physikalischen Prozessen, im Rahmen des Elektromagnetismus ist das Verhalten von Halbleiterbauteilen oder magnetischen Materialien ein wichtiges Beispiel. Daher ist die Modellierung und Simulation nichtlinearer Systeme von Interesse, auch hier wird wegen ihrer Vielseitigkeit häufig die FE-Methode angewandt [ZT00].

Zur Auswertung eines nichtlinearen FE-Modells im Zeitbereich kommen iterative Verfahren wie das Newton-Verfahren [NW06, Kapitel 11] zum Einsatz, welche für jede Iteration die Lösung eines dünn besetzten, linearen Gleichungssystems erfordern. Damit liegt der numerische Aufwand höher als bei vergleichbaren linearen Systemen, was einen Bedarf an effizienten Algorithmen für den computergestützten Designprozess motiviert. Doch während MOR-Methoden für lineare Systeme, wie sie in den vorangegangenen Kapiteln verwendet werden, allgemein bereits auf einem hohen Stand der Technik sind, hat sich noch kein nichtlinearer MOR-Algorithmus als vielseitig anwendbar erwiesen.

Die in dieser Arbeit betrachteten nichtlinearen Systeme weisen eine Deskriptorstruktur der Form

$$\mathbf{E} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (7.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (7.1b)$$

auf, oder mit nichtlinearer Systemmatrix geschrieben

$$\left(\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{E} \frac{d}{dt} \right) \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (7.2a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (7.2b)$$

wobei $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nicht-affin ist im Sinne von Definition 2.2. Aus der Literatur bekannte Ansätze zur nichtlinearen MOR, die für Systeme (7.1) geeignet sind, lassen sich grob in zwei Klassen einteilen:

Affine Approximation der Nichtlinearität

Ähnlich der Rekonstruktion einer affinen Parametrierung bei der PMOR versuchen diese Verfahren, die Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ durch einen Ausdruck der Form (2.25) zu ersetzen. Hier sind drei Verfahren zu nennen. Die *Trajectory Piecewise Linearization* (dt. trajektorienbasierte, stückweise Linearisierung, TPWL) ersetzt die nichtlineare Systemmatrix durch eine gewichtete Superposition linearisierter Systemmatrizen [RW03], [RW06]. Anwendungen auf Wirbelstromprobleme sind in [QC04], [ARFL08] oder [B11] zu finden.

Auch die in Kapitel 6 verwendete EI [BMNP04] ist für nichtlineare MOR geeignet [CS10]. Im Kontext von Magnetostatik ist die Publikation [HC14] zu nennen, eine Anwendung auf magnetoquasistatische Probleme ist dem Autor nicht bekannt. Schließlich wurde in [PAOS03] vorgeschlagen, aus dem Bereich des statistischen Lernens stammende Kernel-Methoden [SS02] zur affinen Approximation heranzuziehen. Ergebnisse wurden sowohl für parametrische [Zhu09] als auch für nicht-lineare Modelle publiziert [WH12], [WKH12].

Umformulierung der Nichtlinearität

Ein Ansatz zur Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme, der ohne Approximationen arbeitet, wurde in [Gu09] vorgestellt, weitere Details sind [Gu11] zu entnehmen. Die Kernidee liegt darin, die nichtlinearen Gleichungen durch das Einführen zusätzlicher Unbekannter und unter Zuhilfenahme einfacher analytischer Funktionen so umzuformulieren, dass die resultierenden Gleichungen höchstens quadratische Polynome in den Unbekannten sind. Diese Technik wurde ursprünglich im Kontext globaler Optimierungsverfahren entwickelt [McC76]. Anwendungen auf FE-Modelle für Wärmeleitung oder Wirbelstromprobleme sind in [Cod13], [Cod15] zu finden.

Bemerkung. Jedes nichtlineare System der Form (7.2) kann als parametrisches System aufgefasst werden, wobei der Parametervektor mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ zu identifizieren ist. Damit sind prinzipiell PMOR-Methoden zur Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme geeignet, es gibt jedoch zwei wesentliche Unterschiede. Erstens sind PMOR-Methoden meist nur für eine geringe Anzahl an Parametern effizient, wohingegen die Anzahl der nichtlinearen Gleichungen entsprechend der FE-Diskretisierung in der Größenordnung von Millionen liegen kann. Zweitens ist die Parameterdomäne $\mathcal{P}$ a priori bekannt, was beispielsweise für Greedy-Methoden wie die in Abschnitt 6.3.1 vorgestellte EI-Methode ausgenutzt wird. Die Komponenten von $\mathbf{x}$ können im Allgemeinen jedoch jeden Wert $[\mathbf{x}]_i \in \mathbb{C}$ annehmen.

In den folgenden Abschnitten 7.1 und 7.2 wird eine FE-Formulierung des nichtlinearen Wirbelstromproblems hergeleitet und mit der *Proper Orthogonal Decomposition*

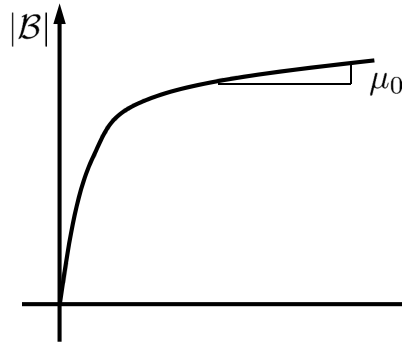


Abbildung 7.1: Schematische BH-Kennlinie mit Sättigung.

(POD) eine Methode zur Generierung einer Projektionsmatrix für nichtlineare Systeme vorgestellt. Gegenstand von Abschnitt 7.3 ist ein MOR-Verfahren basierend auf Kernel-Methoden, welche in der Literatur bisher nicht für Wirbelstromprobleme eingesetzt wurden. Den Abschluss dieser Arbeit bildet Abschnitt 7.4, worin der Ansatz der Umformulierung der Nichtlinearität verfolgt wird. Die Art der Umformulierung unterscheidet sich dabei wesentlich von [Cod15], wodurch eine höhere Allgemeinheit hinsichtlich der Zeitintegration zu erwarten ist.

7.1 Nichtlinearitäten bei Wirbelstromproblemen

Das Auftreten von Nichtlinearitäten bei Wirbelstromproblemen liegt meist in dem Verhalten magnetischer Materialien begründet. Zum Einen sind Hystereseeffekte zu nennen [Ber98, Kapitel 1]. Unter diesem Begriff versteht man die Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte $\mathbf{B}$ nicht nur von der momentanen magnetischen Erregung $\mathbf{H}(t = t_0)$, sondern auch von deren zeitlichem Verlauf $\mathbf{H}(t < t_0)$, weshalb häufig der Begriff des Materialgedächtnisses gebraucht wird. Ausgeprägte Hysteresen treten beispielsweise bei hartmagnetischen Materialien, wie sie in Permanentmagneten verwendet werden, auf. Verfahren zur numerischen Simulation sind in der Literatur zu finden [Sai01], [QC07].

Zum Anderen treten Sättigungseffekte auf [Mor01, Kapitel 6], welche zu BH-Kennlinien ähnlich der in Abbildung 7.1 dargestellten führen. Für kleine magnetische Erregungen ist der Zusammenhang zwischen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ nahezu linear und kann über eine konstante Permeabilität oder Reluktivität approximiert werden, wie in den vorangehenden Kapiteln geschehen. Für hohe magnetische Erregungen flacht die Kennlinie ab, im Grenzfall entspricht die Steigung der Kurve nur noch der Vakuumpermeabilität μ_0 . Sättigungsphänomene hängen mit der Ausrichtung permanenter magnetischer Dipole im Material zusammen und treten daher auch bei weichmagnetischen Ferriten mit vernachlässigbarer Hysterese auf [Mor01, Kapitel 9]. Um Materialkosten zu sparen, werden beim Design technischer Produkte wie elektrischer Maschinen

oder Transformatoren Sättigungseffekte zu einem gewissen Grad in Kauf genommen. Daher ist ihre Berücksichtigung bei numerischen Simulationsverfahren essentiell zur Beschreibung solcher Bauteile und ungleich wichtiger als die Berücksichtigung von Hysteresephänomenen. Entsprechende Verfahren werden in [Cha70], [ACM⁺92] oder [SF96, Kapitel 5] vorgestellt.

Aus den erläuterten Gründen werden in der vorliegenden Arbeit ausschließlich Materialien mit vernachlässigbarer Hysterese betrachtet. Folglich sind die behandelten Modelle zeitinvariant. Zusätzlich werden isotrope Materialien vorausgesetzt, sodass die Sättigungseffekte über einen skalaren Zusammenhang zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{B}$ modelliert werden können. Diese Annahmen sind für die Beschreibung nichtlinearer Effekte in Ferriten geeignet, wie sie beispielsweise zur Feldführung bei Spulen zum Einsatz kommen. Für das Materialgesetz (2.6a) lässt sich somit schreiben

$$\mathcal{H} = \nu(|\mathcal{B}|)\mathcal{B} \quad \text{mit } \nu_0 \geq \nu(|\mathcal{B}|) > 0. \quad (7.3)$$

Weiterhin muss für eine eindeutige Lösbarkeit des Wirbelstrommodells die Monotonie der Kennlinie

$$|\mathcal{H}(B_1)| \geq |\mathcal{H}(B_2)| \quad \text{für } B_1 > B_2 \quad (7.4)$$

gelten. In der praktischen Anwendung ist die Reluktivität nicht als analytische Funktion bekannt, sondern es liegen Messdaten der Beträge der magnetischen Erregung und der magnetischen Flussdichte als Paare $(\mathfrak{H}_m, \mathfrak{B}_m)$, $m \in \{1, \dots, M\}$ vor. Um daraus eine Funktion ν zu konstruieren, die (7.4) erfüllt, wird in [RKK02] vorgeschlagen, eine Spline-Approximation [Rei67] zu verwenden. Diese beschreibt den Verlauf von $\mathcal{H}$ als stückweise kubisches Polynom

$$\mathcal{H}(|\mathcal{B}|) = \mathcal{P}_m^3(|\mathcal{B}|) \frac{\mathcal{B}}{|\mathcal{B}|} \quad \text{für } \mathfrak{B}_m \leq |\mathcal{B}| \leq \mathfrak{B}_{m+1} \quad (7.5)$$

mit Polynomen dritten Grades $\mathcal{P}_m^3$. Im Hinblick auf die Methodik in Abschnitt 7.4 wird in der vorliegenden Arbeit die Reluktivität direkt über Splines genähert mittels

$$\nu(|\mathcal{B}|) = \mathcal{P}_m^3(|\mathcal{B}|) \quad \text{für } \mathfrak{B}_m \leq |\mathcal{B}| \leq \mathfrak{B}_{m+1}. \quad (7.6)$$

7.1.1 Finite-Elemente-Formulierung

Unter Verwendung von (2.5) mit (7.6) lassen sich FE-Modelle für Wirbelstromprobleme herleiten. Analog zum Vorgehen in Kapitel 3 wird eine $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung im magnetischen Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ und im elektrischen Skalarpotenzial φ eingesetzt. Für das Feldgebiet Ω gelten bis auf die Nichtlinearitäten die gleichen Anforderungen wie in Abschnitt 3.1.1. Die Bestimmungsgleichungen (3.1) und (3.4) lauten im Zeitbereich

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathcal{B}, \quad (7.7)$$

$$\text{grad } \varphi = - \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right). \quad (7.8)$$

Die Diskretisierung beider Potenziale erfolgt nach (3.21) und (3.22) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_k [\mathbf{x}_A]_k \mathbf{w}_k & \text{mit } \mathbf{w}_k \in \mathcal{W}^{h,p}, \\ \varphi &= \sum_k [\mathbf{x}_V]_k v_k & \text{mit } v_k \in \mathcal{V}^{h,p}. \end{aligned}$$

Als nichtlineare Entsprechung zur baumgeeichten $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung (3.27) ergibt sich

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_A) + \mathbf{Z} & \mathbf{M}_{AV} \\ 0 & \mathbf{M}_{VV} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ \mathbf{M}_{VA} & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_H \\ \mathbf{b}_V \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Die darin auftretenden Größen sind in (3.24) definiert. Im Gegensatz zum linearen Fall wird auf eine Symmetrisierung verzichtet, damit keine Einschränkungen an die Zeitdiskretisierung gestellt werden müssen. Die Nichtlinearität beschränkt sich auf die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}$, weil nur darin die Reluktivität eingeht über

$$[\mathbf{S}(\mathbf{x}_A)]_{ij} = \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{w}_i \cdot \nu(\|\text{rot } \mathbf{A}\|_2) \text{rot } \mathbf{w}_j \, d\Omega. \quad (7.10)$$

7.2 Proper Orthogonal Decomposition

Es stellt sich die Frage nach geeigneten Verfahren, um für nichtlineare Modelle (7.1) und im Speziellen für (7.9) eine Projektionsmatrix zur Ordnungsreduktion zu konstruieren. Einpunktverfahren sind im Allgemeinen ungeeignet, weil das Verhalten eines nichtlinearen Systems nicht über das Verhalten an einem einzelnen Arbeitspunkt charakterisiert werden kann. Bei klassischen Mehrpunktverfahren muss eine geeignete Auswahl an Expansionspunkten getroffen werden, denn eine dichte Abtastung des gesamten Parameterraums zur Anwendung von Greedy-Verfahren wie Algorithmus 3.1 ist wegen des hohen numerischen Aufwands nicht zielführend. Eine Alternative ist durch die POD gegeben [KV02], [CS10].

Die POD benötigt eine Menge an Lösungen (auch *Snapshots*) des nichtlinearen Modells $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^S$, welche in der sogenannten Snapshot-Matrix

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_S] \in \mathbb{R}^{N \times S} \quad (7.11)$$

zusammengefasst werden. Es wird vorausgesetzt, dass $\text{span } \mathbf{X}$ ein geeigneter Unterraum zur Konstruktion eines ROMs ist, daher werden oft Trainingssimulationen des nichtlinearen Ausgangsmodells zur Generierung der Snapshots durchgeführt. Im Gegensatz zu klassischen Mehrpunktverfahren ist S verhältnismäßig groß, zusätzlich können die $\mathbf{x}_i$ (fast) linear abhängig sein, sodass eine Orthogonalisierung von $\mathbf{X}$ aus

Gründen der Effizienz ungeeignet als Projektionsmatrix ist. Stattdessen wird eine reduzierte SVD berechnet

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{W}^T \quad \text{mit } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times S}, \quad (7.12)$$

und es werden nur die ersten $n < S$ Spalten von $\mathbf{U}$, die zu den größten Singulärwerten gehören, zur Konstruktion der Projektionsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{U}]_{(:,1:n)} \quad (7.13)$$

verwendet. Durch die SVD stellt $\mathbf{V}$ die beste n -dimensionale Approximation an $\text{span} \mathbf{X}$ in der 2-Norm dar [TB97, Kapitel 5]. Anstelle einer SVD sind auch Greedy-Verfahren zur Bestimmung einer Projektionsmatrix aus $\mathbf{X}$ möglich [Wir13]. Die wesentliche Unsicherheit der POD liegt in der Wahl geeigneter Snapshots.

Bemerkung. *Da kein Momentenabgleich höherer Ordnung über eine spezielle Wahl der Testmatrix angestrebt wird, wird die Ordnungsreduktion üblicherweise mittels Galerkin-Projektion ($\mathbf{W} = \bar{\mathbf{V}}$ in (2.44)) durchgeführt.*

7.3 Ordnungsreduktion unter Verwendung von Kernel-Methoden

Kernel-Methoden bezeichnen eine Klasse von Verfahren des maschinellen Lernens, die auf der Verwendung von Kernel-Funktionen beruhen [SS02]. Auch wenn Approximation oder Interpolation nichtlinearer Funktionen durch eine Basis von Kernel-Funktionen mittels konventioneller Techniken wie orthogonaler Projektion oder der Methode der kleinsten Quadrate möglich ist [WH13], wird in dieser Arbeit die explizit für maschinelles Lernen entwickelte *Support-Vector-Regression* (SVR) verwendet. Die SVR approximiert reellwertige Funktionen basierend auf einer Menge bekannter Funktionswerte. Die Ausführungen dieses Abschnitts orientieren sich an [B9].

7.3.1 ν -Support-Vector-Regression

Gegeben seien eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ und T Funktionswerte an Stützstellen $\{\mathbf{t}_t\}_{t=1}^T$, sodass

$$f(\mathbf{t}_t) = y_t \quad \text{für } t \in \{1, \dots, T\}. \quad (7.14)$$

Die ν -SVR nach [SS02, Kapitel 9] konstruiert daraus eine Approximation der Form

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{m=1}^M (\alpha_m^* - \alpha_m) K(\mathbf{x}, \mathbf{t}_m) + b \quad \text{mit } M \leq T. \quad (7.15)$$

Darin bezeichnen α_m , α_m^* und b reelle Koeffizienten und K eine Kernel-Funktion. Die Koeffizienten in (7.15) ergeben sich als Lösung des Optimierungsproblems: Finde

$$\max_{\alpha_t, \alpha_t^* \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^T (\alpha_t^* - \alpha_t) y_t - \frac{1}{2} \sum_{t,s=1}^T (\alpha_t^* - \alpha_t) (\alpha_s^* - \alpha_s) K(\mathbf{t}_t, \mathbf{t}_s) \quad (7.16a)$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{t=1}^T (\alpha_t^* - \alpha_t) = 0, \quad (7.16b)$$

$$\alpha_t, \alpha_t^* \in [0; \frac{C}{T}], \quad (7.16c)$$

$$\sum_{t=1}^T (\alpha_t^* + \alpha_t) \leq \nu C, \quad (7.16d)$$

für gegebenes $C > 0$ und $\nu \in [0; 1]$. Der Parameter C ist eine Regularisierungskonstante und ν kontrolliert die Genauigkeit der Approximation, wobei kleinere Werte für eine ungenauere Approximation, aber auch für weniger Stützstellen M stehen (durch Paare $\alpha_t^* = \alpha_t = 0$). Aus der Lösung des Optimierungsproblems folgt b für einen beliebigen bekannten Punkt (7.14) zu

$$b = y_t - \sum_{m=1}^M \alpha_m^* K(\mathbf{t}_t, \mathbf{t}_m) \quad \text{falls } 0 < \alpha_m^* < \frac{C}{T}, \quad (7.17a)$$

$$\text{oder } b = y_t + \sum_{m=1}^M \alpha_m K(\mathbf{t}_t, \mathbf{t}_m) \quad \text{falls } 0 < \alpha_m < \frac{C}{T}. \quad (7.17b)$$

Kernel-Funktionen $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sind ein abstraktes Ähnlichkeitsmaß zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, eine detaillierte Beschreibung ist in [SS02, Kapitel9] zu finden. Zu einer wichtigen Unterklasse der Kernel-Funktionen zählen die radialen Basisfunktionen [Buh00], deren Funktionsargument auf einem Skalarprodukt der Form

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2) \quad (7.18)$$

beruht, was vorteilhaft für den MOR-Prozess ist. Denn mit einer orthonormalen Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ und reduzierten Größen

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \text{span } \mathbf{V}, \quad (7.19)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{y}} \quad \text{mit } \mathbf{y} \in \text{span } \mathbf{V}, \quad (7.20)$$

lassen sich Kernel nach (7.18) rein über Größen des ROMs auswerten mittels

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = \|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}\|_2^2. \quad (7.21)$$

Zu radialen Basisfunktionen zählen auch die in der vorliegenden Arbeit gewählten gaußschen Kernel

$$K'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2}{\gamma}\right) \quad \text{mit } \gamma > 0, \quad (7.22)$$

und rationalen Kernel

$$K'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{c_1 + c_2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^{2c_3}} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 > 0. \quad (7.23)$$

Beide Kernel gehen asymptotisch gegen Null für $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \rightarrow \infty$, was sich auf die SVR-Approximation überträgt. Im Kontext nichtlinearer MOR bedeutet dies, dass die Approximation der Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ aus (7.2) sich einer durch b aus (7.15) gegebenen Konstanten annähert, wenn der Zustand sich von den Stützstellen entfernt. Durch den schnellen Abfall der Exponentialfunktion in (7.22) tritt dieser Fall bereits nahe der Stützstellen ein, was die Approximationsqualität negativ beeinflusst. Folglich ist die Verwendung eines renormalisierten Nadaraya-Watson-Kernels (NW-Kernel) sinnvoll [PAOS03],

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{m=1}^M K'(\mathbf{x}, \mathbf{t}_m) K'(\mathbf{y}, \mathbf{t}_m)}{\left(\sum_{m=1}^M K'(\mathbf{x}, \mathbf{t}_m)\right) \left(\sum_{m=1}^M K'(\mathbf{y}, \mathbf{t}_m)\right)}. \quad (7.24)$$

Das Bilden der Summe der Kernel über alle Stützstellen zeigt, dass NW-Kernel eine Partitionierung der Eins darstellen,

$$\sum_{m=1}^M K(\mathbf{x}, \mathbf{t}_m) = 1. \quad (7.25)$$

7.3.2 Anwendung auf Wirbelstromprobleme

Zur Lösung des nichtlinearen FE-Wirbelstromproblems (7.9) kommen üblicherweise implizite Zeitschrittverfahren zum Einsatz, weil diese absolut stabil sind [SB00, Kapitel 7]. Zusätzlich ist die Massenmatrix $\mathbf{T}$ singulär, falls nichtleitende Bereiche im Feldgebiet enthalten sind, was den Einsatz impliziter Verfahren obligatorisch macht. Denn Auflösen der durch Nullzeilen von $\mathbf{T}$ entstehenden algebraischen Nebenbedingungen würde auf ein voll besetztes Gleichungssystem hoher Dimension führen. Für implizite Verfahren muss die Matrix $\mathbf{S}(\mathbf{x}_A)$ approximiert werden. Die hohe Anzahl an Unbekannten des vollen Modells und die daraus resultierende Anzahl an Nicht-null-Einträgen in $\mathbf{S}(\mathbf{x}_A)$ motivieren jedoch, die Approximation nicht wie bei der TPWL auf dem vollen Modell, sondern auf reduzierten Matrizen durchzuführen.

Die Ordnungsreduktion wird mittels POD nach Abschnitt 7.2 durchgeführt. Es wird der Einsatz strukturerhaltender Projektion vorgeschlagen [Fre04], um auch im ROM eine Trennung in lineare und nichtlineare Gleichungen zu erhalten. Anderenfalls wären die ROM-Gleichungen Linearkombinationen linearer und nichtlinearer Gleichungen des vollen Modells, sodass es bei der SVR zu einer unerwünschten Abhängigkeit der zu lernenden Funktion von linearen Zuständen gäbe.

Eine Zerlegung des Feldgebiets Ω in nichtlineare (Subskript n) und lineare (Subskript l) Materialbereiche führt auf eine entsprechende Aufteilung der Unbekannten und der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_l \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}_A) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{nn}(\mathbf{x}_n) & \mathbf{S}_{nl} \\ \mathbf{S}_{ln} & \mathbf{S}_{ll} \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

sowie der Snapshotmatrix $\mathbf{X}$ in zwei Blöcke $\mathbf{X}_n$ und $\mathbf{X}_l$. Entsprechend (7.12) und (7.13) lassen sich aus den Blöcken zwei Projektionsmatrizen $\mathbf{V}_n \in \mathbb{R}^{N_n \times n_n}$ und $\mathbf{V}_l \in \mathbb{R}^{N_l \times n_l}$ bilden. Die Dimensionen N_n und N_l entsprechen der Anzahl der nichtlinearen beziehungsweise linearen Gleichungen des vollen Modells und n_n und n_l der Anzahl der nichtlinearen beziehungsweise linearen ROM-Gleichungen. Der Übersichtlichkeit halber sei im Folgenden angenommen, dass $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{nn}$ gilt. Galerkin-Projektion mit $\mathbf{V}_n$ und $\mathbf{V}_l$ führt auf das ROM

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{x}}_n) + \tilde{\mathbf{Z}} & \tilde{\mathbf{M}}_{AV} \\ 0 & \tilde{\mathbf{M}}_{VV} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & 0 \\ \tilde{\mathbf{M}}_{AV}^T & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_n \\ \tilde{\mathbf{x}}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_n \\ \tilde{\mathbf{b}}_V \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{x}}_n) = \mathbf{V}_n^T \mathbf{S}(\mathbf{V}_n \tilde{\mathbf{x}}_n) \mathbf{V}_n, \quad (7.29a)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{V}_n^T \mathbf{Z} \mathbf{V}_n, \quad (7.29b)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{AV} = \mathbf{V}_n^T \mathbf{M}_{AV} \mathbf{V}_l, \quad (7.29c)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{VV} = \mathbf{V}_l^T \mathbf{M}_{VV} \mathbf{V}_l, \quad (7.29d)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{V}_n^T \mathbf{T} \mathbf{V}_n, \quad (7.29e)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_n = \mathbf{V}_n^T (\mathbf{b}_A + \mathbf{b}_H), \quad (7.29f)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_V = \mathbf{V}_l^T \mathbf{b}_V. \quad (7.29g)$$

Um ein effizientes ROM zu erhalten, wird $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{V}_n \tilde{\mathbf{x}}_n)$ durch eine SVR-Approximation

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{V}_n \tilde{\mathbf{x}}_n) \approx \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{x}}_n) \quad (7.30)$$

ersetzt. Als Stützstellen $\tilde{\mathbf{t}}_t$ in (7.14) wird die Projektion einer Teilmenge $\{\mathbf{t}_t\}_{t=1}^T$ der Snapshots $\mathbf{X}_n$ verwendet,

$$\tilde{\mathbf{t}}_t = \mathbf{V}_n^T \mathbf{t}_t \quad \text{für } t \in \{1, \dots, T\}, \quad (7.31)$$

$\mathfrak{B}$	0	0,2	0,3	0,33	0,35	0,375	1
ν	190	200	209	447	1340	4300	$4,98 \cdot 10^5$

Tabelle 7.1: Datenpunkte für BH-Kennlinie.

damit (7.21) näherungsweise im Sinne der SVD (7.12) gewährleistet ist. Komponentenweise Anwendung der SVR ergibt den im Sinne von Definition 2.2 affinen Ausdruck

$$[\hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{x}}_n)]_{ij} = \sum_{m=1}^M c_{ijm} K(\tilde{\mathbf{x}}_n, \tilde{\mathbf{t}}_m) + b_{ij}. \quad (7.32)$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix und damit auch von $\tilde{\mathbf{S}}$ müssen nur $(n_n^2 + n_n)/2$ SVR-Approximationen berechnet werden.

7.3.3 Numerische Ergebnisse

Ausgangsmodell

Als Beispiel wird ein Transformator mit zwei Spulen und Ferritkern betrachtet, seine Geometrie ist in Abbildung 7.2 beschrieben. Die Struktur ist willkürlich so gewählt, damit eine dreidimensionale Modellierung notwendig ist; zusätzlich soll der schräge Kern den Kopplungsfaktor zwischen den Spulen im Falle der Sättigung stärker beeinflussen. Die runde Primärspule hat $N_w = 20$ Windungen und wird ohne Wirbelströme nach Abschnitt 3.2.2 modelliert, ihre eingeprägte Stromdichte wird analytisch mittels (3.55) vorgegeben. Die Sekundärspule hingegen besteht aus einem massiven Leiter mit $\sigma = 10^7 \Omega\text{m}$. Der Ferritkern ist nicht leitfähig; seine BH-Kennlinie wird über Splines (7.6) mit Daten nach Tabelle 7.1 dargestellt.

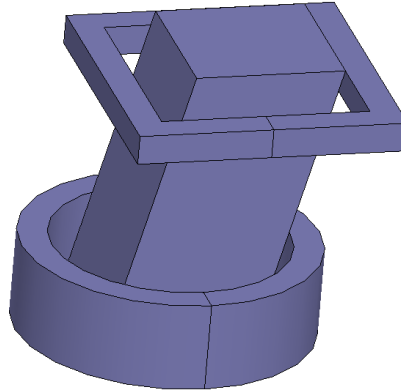
Um in den folgenden Beispielen vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, wird stets eine gleiche Ansteuerung des Trafos vorgegeben: Die Primärspule P wird mit einer Spannung $U(t)$ gespeist und die Sekundärspule S ist kurzgeschlossen. Als Systemausgang dienen beide Klemmenströme. Es sei

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } t \leq 500 \text{ ms,} \\ 0 & \text{für } t > 500 \text{ ms,} \end{cases} \quad (7.33)$$

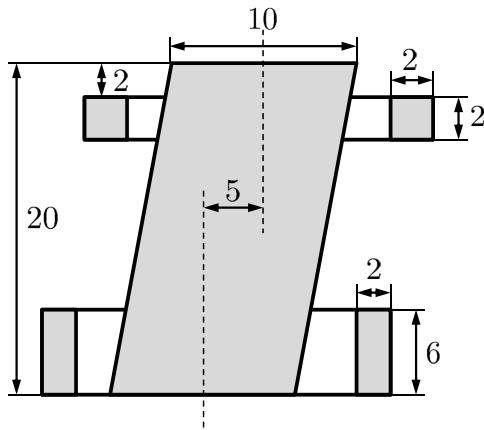
wobei die Signale $U_0 \in \{9; 9, 5; 10, 5; 11\}$ V als Trainings-Trajektorien für die MOR dienen und $U_0 = 10$ V als Testsignal betrachtet wird. Die Zeitintegration wird über ein implizites Euler-Verfahren realisiert [SB00, S. 174 f.]. Dazu wird das Intervall

$$t \in [0; 1] \text{ ms} \quad (7.34)$$

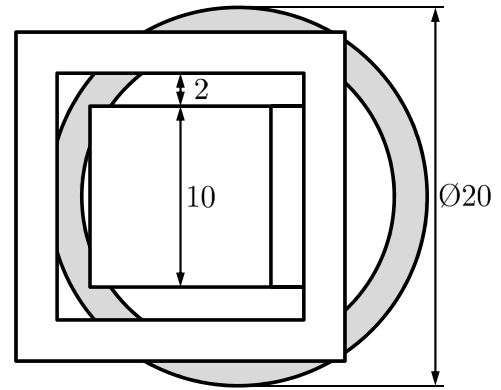
mit 1000 äquidistant verteilten Zeitschritten diskretisiert.



(a) Dreidimensionale Ansicht.



(b) Frontansicht im Querschnitt.



(c) Draufsicht.

Abbildung 7.2: Skizze des Transformators mit Dimensionsangaben in mm.

Es wird ein FE-Modell der Struktur mit Ansatzfunktionen zweiter Ordnung und 107.471 Freiheitsgraden erstellt, wovon 3516 Freiheitsgrade dem nichtlinearen Materialbereich zugeordnet sind. Als Referenz ist das Testsignal des vollen Modells (7.9) in Abbildung 7.3 dargestellt, als Vergleich sind außerdem die Ströme bei linearer Rechnung mit $\nu(|\mathcal{B}|) = \nu(0)$ gezeigt. Wie zu erkennen, unterscheiden sich die lineare und nichtlineare Rechnung stark voneinander, was den Einsatz der nichtlinearen Verfahren dieses Kapitels motiviert.

Generierung der reduzierten Modelle

Die Konstruktion der Projektionsmatrizen $\mathbf{V}_n$ und $\mathbf{V}_l$ laut Abschnitt 7.3.2 erfolgt mittels POD aus den 4000 Snapshots der Trainings-Trajektorien. Abbildung 7.4 zeigt die relative Größe der Singulärwerte $[\Sigma]_{ii}/[\Sigma]_{11}$ für den linearen und den nichtlinearen Teil des Modells. Es ist zu sehen, dass die Singulärwerte des linearen Teils schnell abfallen, was nahelegt, dass wie bei den Beispielen der vorangehenden Kapitel eine verhältnismäßig kleine ROM-Dimension ausreichend ist. Der nichtlineare Bereich hingegen zeigt ein deutlich komplexeres Verhalten, was sich in langsamer

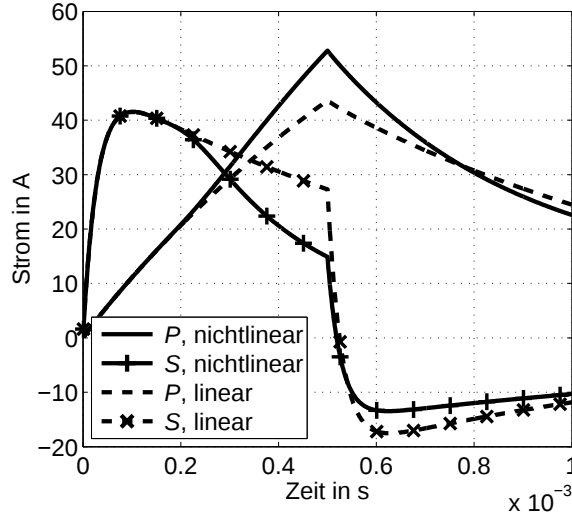


Abbildung 7.3: Referenz für Stromverlauf, volles Modell mit linearer und nichtlinearer Rechnung.

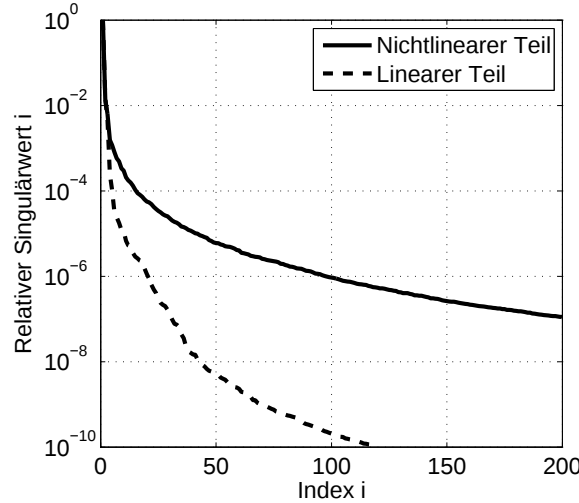


Abbildung 7.4: Relative Größe der Singulärwerte.

abfallenden Singulärwerten widerspiegelt. Konkret wird die Dimension der Projektionsmatrizen über die relative Größe der Singulärwerte gewählt,

$$\frac{[\Sigma]_{ii}}{[\Sigma]_{11}} \geq \epsilon, \quad (7.35)$$

für den nichtlinearen Teil führt $\epsilon = 10^{-5}$ auf $n_n = 41$ und für den linearen Teil führt $\epsilon = 10^{-7}$ auf $n_l = 30$.

Der nächste Schritt des MOR-Prozesses umfasst die Auswahl der Stützstellen (7.14) für die SVR. Es ist sinnvoll, nur einen Teil der Snapshots auszuwählen, weil zum einen viele Snapshots redundante Informationen liefern, zum anderen eine kleine Anzahl an Stützstellen sich in einer kleinen Anzahl an Koeffizienten M in (7.32)

und damit einer schnellen ROM-Auswertung niederschlägt. Das Problem ähnelt der Wahl der Linearisierungspunkte bei der TPWL. Aus der Literatur sind mehrere heuristische Verfahren bekannt, siehe beispielsweise [RW06]. In der vorliegenden Arbeit werden die Stützstellen mit einem Greedy-Algorithmus nach der größten Entfernung im reduzierten Zustandsraum gewählt, siehe Algorithmus 7.1.

Algorithmus 7.1 Wahl der Stützstellen

Eingabe: Reduzierte Snapshotmatrix $\mathbf{V}^T \mathbf{X} = \{\tilde{\mathbf{x}}_i\}_{i=1}^N$, Anzahl Stützstellen T

Ausgabe: Menge von Indizes gewählter Snapshots $\mathcal{T}$

```

begin
for  $i=1 \dots N$  do                                     // Berechne Distanzmatrix
    for  $j=1 \dots N$  do
         $[\mathbf{D}]_{ij} = \|\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_j\|_2$ 
    end for
end for
Wähle ersten Snapshot  $\mathcal{T} = \{1\}$ 
for  $i=2 \dots T$  do
    for  $j=1 \dots N$  do
         $[\mathbf{d}]_j = \min[\mathbf{D}]_{(\mathcal{T},j)}$                 // Kleinster gegenseitiger Abstand
    end for
    Füge Index größter Distanz hinzu  $\mathcal{T} \leftarrow \arg \max_j [\mathbf{d}]_j$ 
end for
end

```

Auswertung der reduzierten Modelle

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der ROM-Simulationen dargelegt. Es ist zu erwarten, dass der Verlauf des Sekundärstroms schwieriger zu approximieren ist, weil er einen reinen Induktionsstrom darstellt und weil die Modellierung der Sekundärspule Wirbelströme berücksichtigt. Daher kann sein Verlauf als Qualitätsmaß der MOR-Verfahren herangezogen werden.

Um den Stand der Technik abzubilden, wird zusätzlich zu dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen SVR-Verfahren die TPWL-Methode verwendet. Die Linearisierungspunkte werden ebenfalls mittels Algorithmus 7.1 gewählt, als Gewichtungsfunktionen dienen entsprechend [RW03] normierte Gauß-Funktionen (7.22). Der Parameter $\gamma = 0.1$ sorgt für einen schnellen Abfall der Gewichte, sodass das reduzierte Modell fast immer ausschließlich von der Linearisierung um die nächstgelegene Stützstelle beeinflusst wird. Abbildung 7.5 zeigt die Klemmenströme im Vergleich zwischen dem vollen Modell und TPWL-ROMs. Wie in Abbildung 7.5(a) zu sehen, wird der Stromverlauf bei Wahl von $T = 18$ Linearisierungspunkten qualitativ gut abgebildet. Es handelt sich jedoch nicht um ein konvergentes Verfahren. Denn wie auf der Detailansicht Abbildung 7.5(b) zu erkennen, ist die Approximationsqualität für $T = 50$

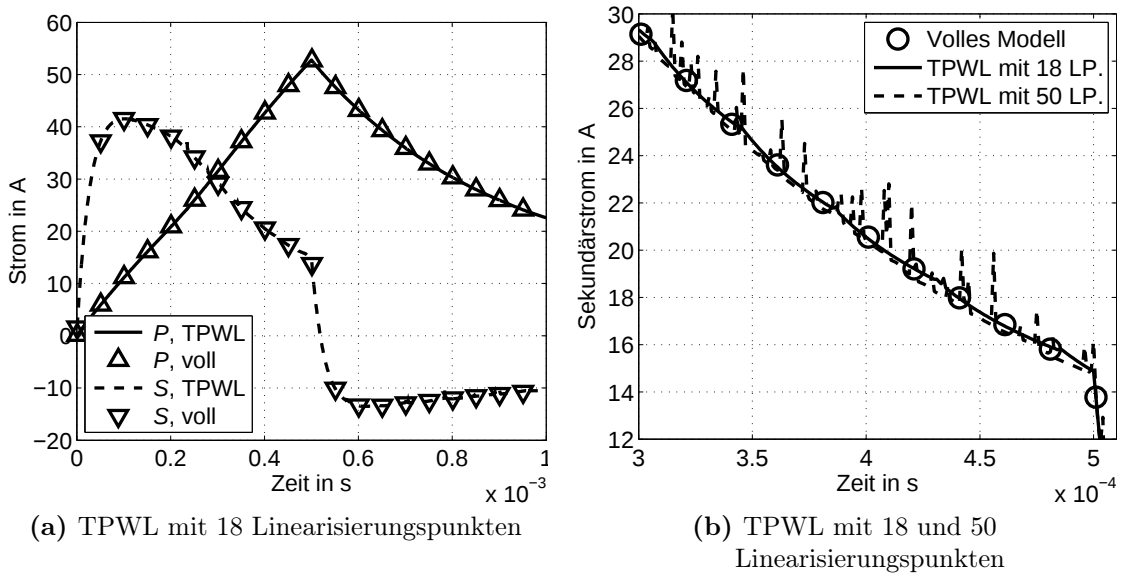


Abbildung 7.5: Vergleich zwischen TPWL-Methode und vollem Modell.

Linearisierungspunkte deutlich schlechter. Generell treten bei der TPWL-Methode unphysikalische Spitzen in den Stromverläufen auf; diese sind durch schnelle Änderungen in den Gewichtungsfunktionen zu erklären. So kann sich von einem Zeitschritt auf den nächsten das linearisierte Modell, das das ROM beeinflusst, ändern.

Das SVR-basierte Verfahren wird anhand zweier ROMs mit NW-Kernels der Funktionen (7.22) und (7.23) demonstriert. In beiden Fällen werden $T = 50$ Stützstellen gewählt um die SVR-Approximation zu errechnen. Das Gauß-Kernel-ROM verwendet $\nu = 0,2$ und $C = 400$ in (7.16) und $\gamma = 2$ in (7.22); Abbildung 7.6 zeigt die Ergebnisse. Die qualitative Übereinstimmung laut Abbildung 7.6(a) wird durch den Ausschnitt in Abbildung 7.6(b) besser gezeigt. Im Gegensatz zur TPWL sind die Stromverläufe des ROMs leicht oszillierend, aber glatt. Eine Erklärung hierfür liegt in der Wahl von γ , denn der deutlich größere Wert im Vergleich zur TPWL hat zur Folge, dass mehrere Stützstellen das ROM-Verhalten an einem Punkt im Zustandsraum beeinflussen. Unter Verwendung des rationalen NW-Kernels fallen die Gewichtungsfunktionen noch langsamer ab als beim Gauß-Kernel. Für die Ergebnisse wird $\nu = 0,2$ und $C = 600$ in (7.16) gewählt sowie $c_1 = 1,2$ und $c_2 = c_3 = 1$ in (7.23). Die Approximationsqualität ist bei gleichem qualitativen Verhalten etwas besser als bei Verwendung des Gauß-Kernels, wie in Abbildung 7.7 zu sehen.

Eine quantitative Analyse der Fehler geben Abbildung 7.8 für den Primärstrom und Tabelle 7.2 für den Sekundärstrom. Insgesamt wird die Approximationsqualität der SVR-ROMs als etwas besser eingestuft als die der TPWL, die Methodik ist damit geeignet, um schnell qualitative Simulationsergebnisse zu liefern. Numerische Tests zeigen, dass die Fehler nicht durch die Projektion, sondern durch die Approximation der Nichtlinearität dominiert werden. Da das Fehlerniveau über zu erwartenden

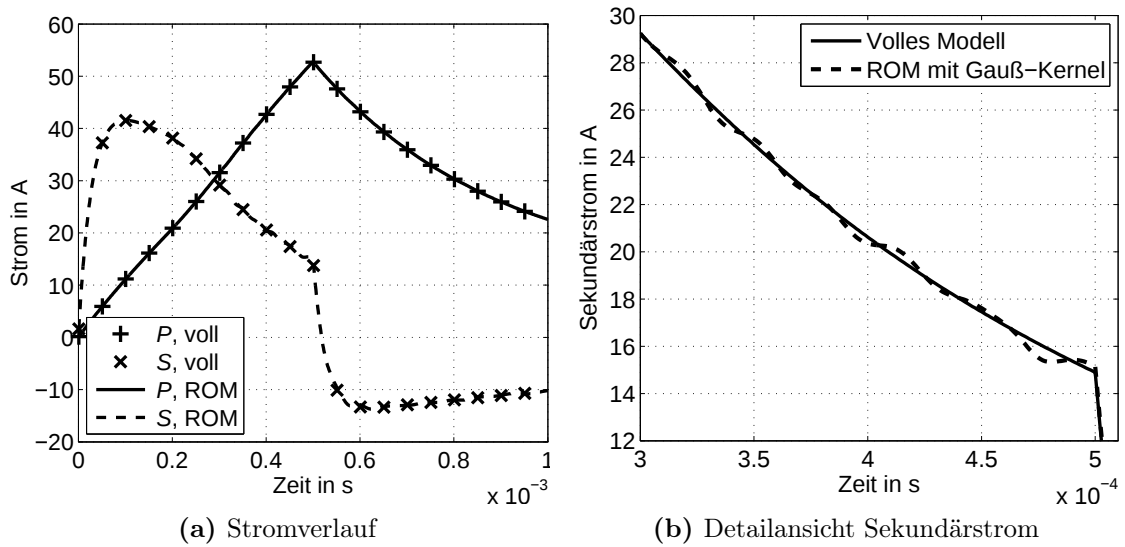


Abbildung 7.6: Vergleich zwischen ROM mit NW-Gauß-Kernel und vollem Modell.

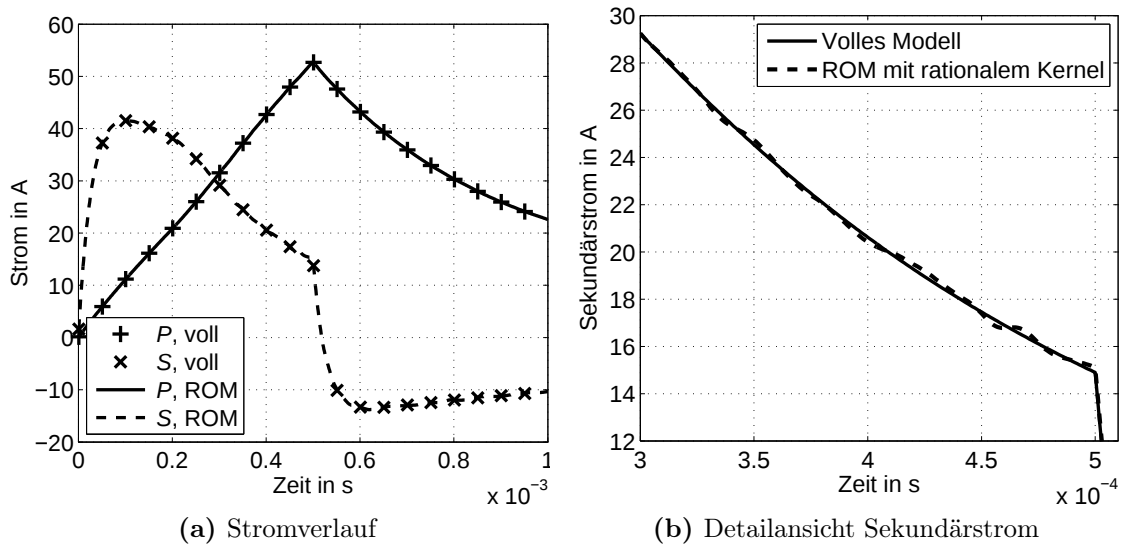


Abbildung 7.7: Vergleich zwischen ROM mit rationalem NW-Kernel und vollem Modell.

	SVR Gauß	SVR Rational	TPWL 18 LP.	TPWL 50 LP.
Max. Fehler	0,6066	0,3703	1.5854	2,9381
Mittlerer Fehler	0,1095	0,0857	0.0602	0.2757

Tabelle 7.2: Absolute Fehler im Sekundärstrom in A, Vergleich zwischen SVR-ROMs mit NW-Gauß-Kernel und rationalem NW-Kernel sowie TPWL-ROMs mit 18 und 50 Linearisierungspunkten.

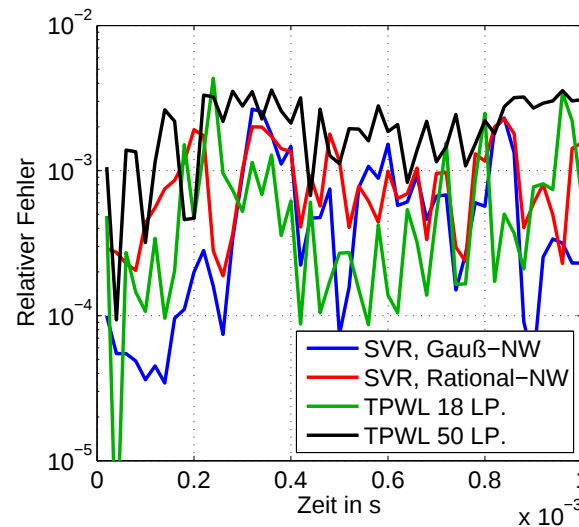


Abbildung 7.8: Relative Fehler im Primärstrom, Vergleich zwischen SVR-ROMs mit NW-Gauß-Kernel und rationalem NW-Kernel sowie TPWL-ROMs mit 18 und 50 Linearisierungspunkten. Der Übersicht halber wird der maximale Fehler über je 20 Zeitschritte dargestellt.

	volles Modell ^a	SVR-ROM	TPWL-ROM
Trainings-Trajektorien	—	14,3 h	14,3 h
Generierung Projektionsmatrix	—	290 s	290 s
Auswahl Linearisierungspunkte	—	12,0 s	12,0 s
SVR	—	109 s	—
Simulation	3,59 h	29,4 s	6,6 s

Rechnung auf einem Intel Core i7-2600K CPU mit 3.4 GHz und 16 GB RAM.

^a Intel MKL 11.1 PARDISO zur Faktorisierung.

Tabelle 7.3: Simulationszeiten für Transformator.

Diskretisierungsfehlern liegt, ist eine Verbesserung der Methodik wünschenswert. Ein weiterer Nachteil der Verfahren liegt in den freien Parametern der Kernel-Funktionen und der SVR. Es ist nicht a priori klar, welche Wahl auf bestmögliche Ergebnisse führt. Hier zeigen numerische Experimente bei SVR-ROMs eine höhere Robustheit gegen Parameteränderungen als bei TPWL-ROMs.

Abschließend werden die Rechenzeiten des SVR-ROMs mit rationalem Kernel und des TPWL-ROMs mit 18 Linearisierungspunkten einander gegenübergestellt, siehe Tabelle 7.3. Da die höhere Genauigkeit des SVR-ROMs an einer größeren Zahl an Termen für die Approximation der Nichtlinearität liegt, ist ersichtlich, dass die Auswertung etwas mehr Zeit in Anspruch nimmt. Obwohl die Simulation selbst durch die MOR deutlich beschleunigt wird, rechnen sich trajektorienbasierte Verfahren nur, wenn viele Simulationen durchzuführen sind. Anderenfalls übersteigt der Aufwand zur Generierung der Trainingsdaten den Aufwand zur Lösung des vollen Modells.

7.4 Ordnungsreduktion unter Verwendung quadratisch-bilinearer Systeme

Dem Vorgehen in [Gu09] entsprechend ist es das Ziel dieses Abschnitts, aus (7.1a) ein System quadratisch-bilinear differenzial-algebraischer (QBDA) Gleichungen

$$\mathbf{E} \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{H} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (7.36a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (7.36b)$$

abzuleiten, über den Tensor dritter Stufe $\mathbf{H}$ wird der quadratische Anteil abgebildet. Aus dem System (7.36) kann analog dem Vorgehen bei linearen Systemen ein projektionsbasiertes ROM gebildet werden. Sei $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ die Projektionsmatrix, dann lautet das ROM

$$\tilde{\mathbf{E}} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}, \quad (7.37a)$$

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}} \quad (7.37b)$$

mit den reduzierten Größen

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{V}^T \mathbf{E} \mathbf{V}, \quad (7.38a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V}, \quad (7.38b)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{V}^T \mathbf{H} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}, \quad (7.38c)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^T \mathbf{B}, \quad (7.38d)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{V}. \quad (7.38e)$$

Da nur die konstanten reduzierten Größen (7.38) zur Auswertung des ROMs benötigt werden, ist ersichtlich, dass es effizient im Sinne von Definition 2.7 ist. Auch wenn das QBDA-ROM als nichtlineares System immer noch iterativ gelöst werden muss, liegt ein Vorteil der höchstens quadratischen Terme in der besonders einfachen Form, die das Newton-Verfahren annimmt: Es müssen keine zusätzlichen Ableitungen berechnet werden, sondern die Suchrichtung $\mathbf{p}$ aus [NW06, Algorithmus 11.1] bestimmt sich zu

$$\mathbf{p} = 2\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{E}} \frac{d}{dt}. \quad (7.39)$$

7.4.1 Eine QBDA-Formulierung für das Wirbelstromproblem

In diesem Abschnitt soll die nichtlineare FE-Wirbelstromformulierung (7.9) so umgeformt werden, dass sie sich als QBDA-System (7.36) schreiben lässt. Zu diesem Zweck wird vorgeschlagen, die Reluktivität als zusätzliche Unbekannte einzuführen

und (7.9) um geeignete Gleichungen zu deren Ermittlung zu erweitern. Das hier vorgestellte Verfahren unterscheidet sich von [Cod15] in der Approximation der Reluktivität, weshalb es auch auf magnetostatische Probleme anwendbar ist.

Formel (7.10) zur Bestimmung der Einträge der Steifigkeitsmatrix wird, wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, über Gauß-Quadratur ausgewertet. Wird also ein Vektor $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{N_R}$ eingeführt, welcher als Komponenten die Reluktivitäten $\nu(\|\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\|_2)$ an jedem Integrationspunkt $\mathbf{r}_i$, $i \in \{1, \dots, N_R\}$ im nichtlinearen Materialbereich enthält, kann die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}$ in (7.9) durch einen Tensor dritter Stufe $\check{\mathbf{S}}$ ersetzt werden, sodass

$$\mathbf{S} = \check{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu}. \quad (7.40)$$

Identifiziert man $\mathbf{H}\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ aus (7.36a) mit $\check{\mathbf{S}}\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{x}_A$ aus (7.9), ist zu sehen, dass die FE-Formulierung bereits eine QBDA-Struktur aufweist und nur noch um Bestimmungsgleichungen für $\boldsymbol{\nu}$ ergänzt werden muss.

Wie erläutert, folgt ν für ein skalares Argument B konventionell aus Splines (7.6), das QBDA-Rahmenwerk erfordert jedoch eine geschlossene Form der Gleichungen. Diese kann durch gewichtete Superposition der $\mathcal{P}_m^3$ geschehen,

$$\nu(B) = \sum_{m=1}^{M-1} s_m(B) \mathcal{P}_m^3, \quad (7.41)$$

wobei die Gewichtungsfunktionen s_m möglichst gute stetige Approximationen an entsprechend verschobene Rechteckfunktionen sein sollten, für die (7.41) exakt den Splines entspricht. Eine geeignete Funktion ist die algebraische Sigmoid-Funktion

$$\varsigma(B) = \frac{KB}{\sqrt{1 + 4(KB)^2}} \quad (7.42)$$

mit Steilheit K , die $\lim_{B \rightarrow -\infty} \varsigma(B) = -\frac{1}{2}$ und $\lim_{B \rightarrow \infty} \varsigma(B) = \frac{1}{2}$ erfüllt, siehe [MMMR96]. Einsetzen in (7.41) und Verwendung einer expliziten Darstellung für die Polynome mit Koeffizienten c_{im} ergibt

$$\nu(B) = \sum_{m=1}^{M-1} (s_m(B) - s_{m+1}(B)) (c_{3m}B^3 + c_{2m}B^2 + c_{1m}B + c_{0m}), \quad (7.43)$$

$$s_1 = 1/2, \quad (7.44)$$

$$s_m = \frac{K(B - \mathfrak{B}_m)}{\check{s}_m} \quad \text{für } 2 \leq m \leq M-1, \quad (7.45)$$

$$s_M = -1/2. \quad (7.46)$$

Die Wurzel im Nenner von (7.42) ist im Sinne des QBDA-Rahmenwerks über $\check{s}_m$ abgebildet,

$$\check{s}_m^2 = 1 + 4K^2(B - \mathfrak{B}_m)^2 \quad \text{für } 2 \leq m \leq M-1. \quad (7.47)$$

Die Gleichungen (7.43) bis (7.47) sind bereits rational in den Unbekannten. Bevor die Umformung zu QBDA-Gleichungen gezeigt wird, ist zu klären, wie der Betrag der magnetischen Flussdichte als Argument der Reluktivitätsfunktion realisiert wird.

Durch den kompakten Träger der FE-Ansatzfunktionen ergibt sich $\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$ und entsprechend $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$ als gewichtete Superposition nur derjenigen Ansatzfunktionen, die dem finiten Element, welches $\mathbf{r}_i$ enthält, zugeordnet sind. Es gilt

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) = \sum_{k \in \text{FE}(\mathbf{r}_i)} \text{rot } \mathbf{w}_k(\mathbf{r}_i) [\mathbf{x}_A]_k. \quad (7.48)$$

Das Betragsquadrat der Flussdichte lässt sich somit als quadratische Form mit einer kleinen Elementmatrix $\mathbf{R}_i$ schreiben,

$$\|\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\|_2^2 = [\mathbf{x}_A]^T \mathbf{R}_i [\mathbf{x}_A] =: B_i^2, \quad (7.49)$$

mit den entsprechenden Einträgen des Lösungsvektors $[\mathbf{x}_A]$. Beispielsweise ist für Ansatzfunktionen erster Ordnung $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$.

Die endgültige QBDA-Formulierung ergibt sich durch Kombination von Gleichungen (7.9), (7.40) und für jeden Integrationspunkt $\mathbf{r}_i$ Gleichungen (7.43) bis (7.47) und (7.49). Es sind noch zusätzliche Variablen

$$E_i := B_i^2, \quad (7.50)$$

$$D_i := B_i^3 \quad (7.51)$$

nötig, um Polynome höheren Grades auf quadratische Ausdrücke zu überführen. Das QBDA-Wirbelstrommodell lautet

$$\mathbf{T} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_A = -\check{\mathbf{S}} \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{x}_A - \mathbf{Z} \mathbf{x}_A - \mathbf{M}_{AV} \mathbf{x}_V + \mathbf{b}_A + \mathbf{b}_H, \quad (7.52a)$$

$$\mathbf{M}_{VA} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_A = -\mathbf{M}_{VV} \mathbf{x}_V + \mathbf{b}_V \quad (7.52b)$$

und für $i \in \{1, \dots, R\}$:

$$B_i^2 = [\mathbf{x}_A]^T \mathbf{R}_i [\mathbf{x}_A], \quad (7.52c)$$

$$E_i = [\mathbf{x}_A]^T \mathbf{R}_i [\mathbf{x}_A], \quad (7.52d)$$

$$D_i = B_i E_i, \quad (7.52e)$$

$$[\boldsymbol{\nu}]_i = \sum_{m=1}^{M-1} (s_{mi} - s_{m+1,i}) (c_{3m} D_i + c_{2m} E_i + c_{1m} B_i + c_{0m}), \quad (7.52f)$$

$$s_{1i} = 1/2, \quad (7.52g)$$

$$s_{mi} \check{s}_{mi} = K(B_i - \mathfrak{B}_m) \quad \text{für } 2 \leq m \leq M-1, \quad (7.52h)$$

$$s_{Mi} = -1/2, \quad (7.52i)$$

$$\check{s}_{mi}^2 = 1 + 4K^2 (B_i - \mathfrak{B}_m)^2 \quad \text{für } 2 \leq m \leq M-1. \quad (7.52j)$$

Die Gleichungen (7.52) sind von der abstrakten Form (7.36), weshalb projektionsbasierte MOR darauf anwendbar ist. Genau wie die FE-Matrizen ist auch der Tensor $\mathbf{H}$ dünn besetzt in dem Sinne, dass die Anzahl seiner Einträge linear mit der Anzahl der Unbekannten skaliert, sodass der Speicheraufwand für (7.52) in der gleichen Größenordnung wie für die konventionelle Formulierung (7.9) liegt.

Als Nachteil des vorgestellten Rahmenwerks ist zu nennen, dass die Gleichungen nicht eindeutig lösbar sind. Sowohl (7.52c) als auch (7.52j) lassen $-B_i$ bzw. $-\dot{s}_{mi}$ als unerwünschte Lösung zu. Eine Behebung dieses Nachteils ist Gegenstand aktueller Forschung, beim derzeitigen Stand des Verfahrens muss der Startwert für das Newton-Verfahren stets so gewählt werden, dass er im Konvergenzbereich um die physikalisch korrekte Lösung liegt. Dies kann im Kontext von Zeitschrittverfahren durch Wahl eines genügend kleinen Zeitschritts erreicht werden.

7.4.2 Ein adaptives Verfahren

Nun da eine QBDA-Formulierung des Wirbelstromproblems vorliegt, ist zur Konstruktion eines ROMs nach (7.37) nur noch die Bestimmung einer Projektionsmatrix nötig. Die quadratische Modellstruktur ermöglicht neben der POD auch den Einsatz momentenabgleichender Mehrpunktverfahren [Gu11], [BB15], die Frage nach geeigneten Snapshots oder Entwicklungspunkten bleibt jedoch bestehen. Aus diesem Grund wird ein POD-basiertes adaptives Verfahren vorgeschlagen, das ausgehend von einer Initiallösung des vollen Modells (7.52) ein ROM konstruiert. Die Simulation wird mit dem ROM durchgeführt und über einen Fehlerindikator wird entschieden, ob und wann die ROM-Lösung zu ungenau wird. In diesem Fall wird die Projektionsbasis über erneute Lösung des vollen Modells erweitert und die Simulation mit dem neuen ROM fortgesetzt. Details sind Algorithmus 7.2 zu entnehmen.

Ein Vorteil der QBDA-Formulierung im Vergleich zu approximationsbasierten nichtlinearen MOR-Verfahren liegt in der Verfügbarkeit der Norm des relativen Residuums

$$r = \frac{\|(\mathbf{A} - \mathbf{E}_{dt}^d) \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{H}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{B}\mathbf{u}\|_2} \quad (7.53)$$

als Fehlerindikator e in Algorithmus 7.2, wie sie auch für lineare Systeme verwendet wird [dlRRM09]. Dies ist nur möglich, weil das Ausgangsmodell (7.36) exakt ist und nicht auf einer Approximation der Nichtlinearität beruht. Zusätzlich ist es möglich, die Norm allein mit Größen des reduzierten Modells zu berechnen, sodass die Effizienz der ROM-Simulation auch mit Auswertung des Residuums bewahrt bleibt. Die Berechnungsvorschrift wird in Abschnitt 7.4.4 erläutert.

Algorithmus 7.2 Adaptive QBDA-MOR

Eingabe: Ausgangsmodell Σ , Eingangssignal $u(t)$, Fehlerschranke ϵ **Ausgabe:** Ausgangssignal $y(t)$ **begin**Setze Zeitschritt $t = 1$ Löse Σ nach Zustand $\mathbf{x}$ und Ausgang y für Zeitschritt t Initialisiere Snapshot-Matrix $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ Generiere ROM $\tilde{\Sigma}$ mittels $\mathbf{X}$ **repeat** $t \leftarrow t + 1$ Löse $\tilde{\Sigma}$ nach Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ und Ausgang y für Zeitschritt t Berechne Fehlerindikator e **if** $e > \epsilon$ **then**Löse Σ nach Zustand $\mathbf{x}$ und Ausgang y für Zeitschritt t Erweitere Snapshot-Matrix $\mathbf{X} \leftarrow [\mathbf{X} \mathbf{x}]$ Generiere ROM $\tilde{\Sigma}$ mittels $\mathbf{X}$ **end if****until** Simulation komplett**end**

7.4.3 Bestimmung der Projektionsmatrix

Zur ROM-Generierung in Algorithmus 7.2 muss aus $\mathbf{X}$ eine Projektionsmatrix berechnet werden. Das QBDA-Wirbelstrommodell setzt sich mit den FE-Gleichungen (7.52a) sowie (7.52b) und den Gleichungen (7.52c) bis (7.52f), (7.52h) und (7.52j) aus sieben verschiedene Typen von Gleichungen zusammen. Um eine numerisch robuste Projektionsmatrix zu erhalten, wird daher abermals strukturerhaltende Projektion angewandt, welche aus der Snapshotmatrix $\mathbf{X}$ Block-Projektionsmatrizen für die sieben Gleichungstypen erstellt. Der verwendete POD-Algorithmus ist als Algorithmus 7.3 beschrieben.

Algorithmus 7.3 Projektionsmatrix über POD

Eingabe: Snapshotmatrix $\mathbf{X}$, SVD-Toleranz ϵ **Ausgabe:** Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ **for** $i=1 \dots 7$ **do**Entnehme Block-Snapshotmatrix $\mathbf{Y}$ aus $\mathbf{X}$ für Gleichungstyp i Berechne SVD $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{W}^T = \mathbf{Y}$ Teilprojektionsmatrix $\mathbf{V}_i = [\mathbf{U}]_{(:,1:s)}$ mit $[\Sigma]_{ss} \geq \epsilon$ und $[\Sigma]_{s+1,s+1} < \epsilon$ Sortiere $\mathbf{V}_i$ in Gesamt-Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ ein**end for**

Algorithmus 7.4 Aktualisierung des ROMs

Eingabe: Projektionsmatrix $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times n}$, zugeordnetes ROM nach (7.37),
neuer Snapshot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$

Ausgabe: $n + 1$ -dimensionales ROM nach (7.37)

begin

Bilde neuen orthogonalen Basisvektor $[\mathbf{V}\mathbf{v}] = \text{QR}([\mathbf{V}\mathbf{x}])$

Für alle ROM-Vektoren setze $\tilde{\mathbf{b}} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{b} \end{bmatrix}$

Für alle ROM-Matrizen setze $\tilde{\mathbf{A}} \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{V} & \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \end{bmatrix}$

Für ROM-Tensor setze $\tilde{\mathbf{H}}_{1:n,j,k} \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} & \mathbf{V}^T \mathbf{H} \mathbf{V} \otimes \mathbf{v} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{H} \mathbf{v} \otimes \mathbf{V} & \mathbf{V}^T \mathbf{H} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \end{bmatrix}$

und $\tilde{\mathbf{H}}_{n+1,j,k} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} & \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{V} \otimes \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{v} \otimes \mathbf{V} & \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \end{bmatrix}$

end

Wird das ROM $\tilde{\Sigma}$ aus Algorithmus 7.2 neu konstruiert, hat sich die Snapshotmatrix nur um eine Spalte geändert. Die numerischen Kosten setzen sich aber aus sieben SVDs und den Projektionen (7.38) zusammen. Eine numerisch günstigere Alternative bildet in diesem Fall eine Aktualisierung der Projektionsmatrix und des ROMs nach Algorithmus 7.4 für alle sieben Gleichungsböcke. In der Praxis kann eine Kombination aus beiden Verfahren verwendet werden, siehe hierzu das numerische Beispiel aus Abschnitt 7.4.6.

7.4.4 Effiziente Residuenberechnung

Die Berechnung erfolgt über das Quadrat der Norm des Residuums zu

$$\begin{aligned} r^2 = & \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{R}}_0 \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{R}}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{R}}_2 \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{R}}_3 \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}} \\ & + \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{R}}_4 \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{R}}_5 \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (7.54)$$

wobei die konstanten Größen

$$\tilde{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{B}^T \mathbf{B}, \quad (7.55a)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{B}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{E} \frac{d}{dt} \right) \mathbf{V}, \quad (7.55b)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{V}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{E} \frac{d}{dt} \right)^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{E} \frac{d}{dt} \right) \mathbf{V}, \quad (7.55c)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_3 = \mathbf{V}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{E} \frac{d}{dt} \right)^T \mathbf{H} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}, \quad (7.55d)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_4 = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}, \quad (7.55e)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_5 = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \quad (7.55f)$$

nur ein Mal berechnet werden müssen. Die Größe $\tilde{\mathbf{R}}_4 \in \mathbb{R}^{n \times n \times n \times n}$ als voller Tensor vierter Stufe kann auch für kleine n sehr speicherintensiv sein, daher wird vorgeschlagen, an dieser Stelle nicht auf reinen n -dimensionalen Größen zu operieren. Stattdessen wird unter Ausnutzung der Symmetrie von $\tilde{\mathbf{R}}_4$ der Tensor dritter Stufe

$$\check{\mathbf{R}}_4 = \mathbf{H} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times n \times n} \quad (7.56)$$

definiert, sodass

$$\mathbf{h} := \check{\mathbf{R}}_4 \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}, \quad (7.57)$$

$$\mathbf{h}^T \mathbf{h} = \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}} \check{\mathbf{R}}_4 \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}. \quad (7.58)$$

Weil der zugrunde liegende Tensor $\mathbf{H}$ dünn besetzt ist, kann die Anzahl der Nicht-Null-Einträge von $\check{\mathbf{R}}_4$ deutlich kleiner sein als die der Nicht-Null-Einträge von $\tilde{\mathbf{R}}_4$.

7.4.5 Implementierung von Tensorprodukten

Tensoren höherer Stufe treten selten in FE-Simulationen auf, daher soll die rechnergestützte Umsetzung der Tensoralgebra kurz beschrieben werden. Tensor-Matrix-Multiplikationen wie beispielsweise der Projektionsschritt (7.38c) können effizient mit einem Computer berechnet werden, weil jeder Tensor als Matrix dargestellt werden kann. Dieser Umstand ist in [BB15] unter dem Begriff *matricization* (dt. Matrixdarstellung) beschrieben. Für $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N \times N}$ existiert die Zuordnung

$$[\check{\mathbf{H}}]_{(i+N(j-1),k)} = [\mathbf{H}]_{ijk} \quad \text{mit } \check{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N}. \quad (7.59)$$

Unter Verwendung solcher Matrixdarstellungen wird die Tensor-Matrix-Multiplikation (7.38c) realisiert mittels

$$\mathbf{W} = \check{\mathbf{H}} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N^2 \times n}, \quad (7.60)$$

$$[\mathbf{X}]_{(j+n(\text{mod}(i,N)-1), \lfloor (i-1)/N \rfloor + 1)} = [\mathbf{W}]_{ij} \quad \text{mit } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{Nn \times N}, \quad (7.61)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{Nn \times n}, \quad (7.62)$$

$$[\mathbf{Z}]_{(\lfloor (i-1)/n \rfloor + 1, j+n(i-1))} = [\mathbf{Y}]_{ij} \quad \text{mit } \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N \times n^2}, \quad (7.63)$$

$$\check{\mathbf{H}} = \mathbf{V}^T \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times n^2}. \quad (7.64)$$

Darin bezeichnet $\text{mod}(a, b)$ den ganzzahligen Rest der Division a/b und $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundung. Die Größe $\check{\mathbf{H}}$ ist eine Matrixdarstellung des reduzierten Tensors $\tilde{\mathbf{H}}$ aus (7.37a),

$$[\check{\mathbf{H}}]_{ijk} = [\tilde{\mathbf{H}}]_{(k, i+(n-1)j)}. \quad (7.65)$$

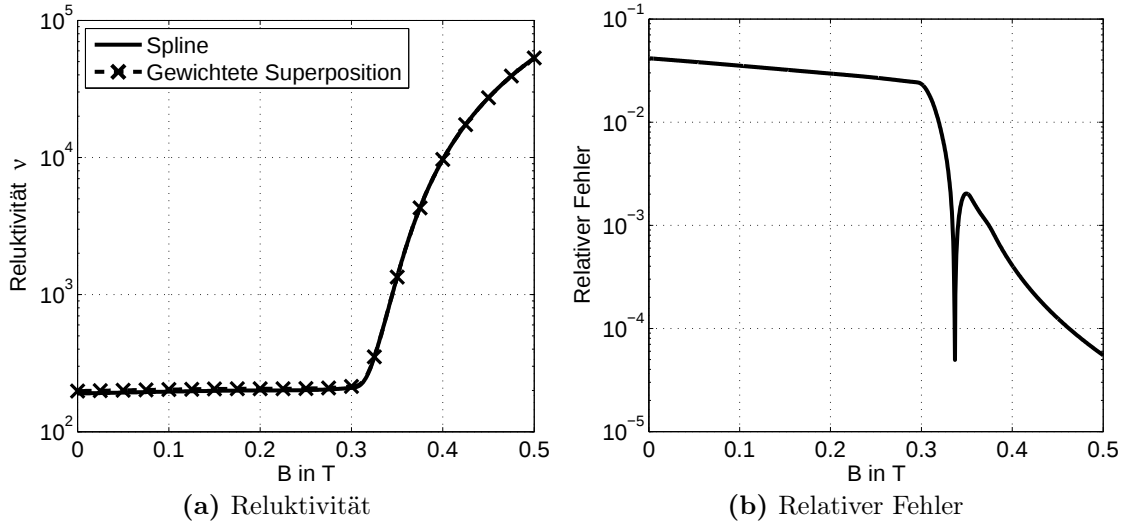


Abbildung 7.9: Reluktivität über Splines (7.6) und als gewichtete Superposition (7.52f).

Über dieses Vorgehen können für sparse Tensoren effiziente sparse Matrixformate zur Speicherung und für Tensorprodukte Routinen für sparse Matrixprodukte verwendet werden.

7.4.6 Numerische Ergebnisse

Als numerisches Beispiel wird abermals der Transformator aus Abschnitt 7.3.3 betrachtet. Es wird ein FE-Modell mit Ansatzfunktionen erster Ordnung erstellt, welches 21.300 Freiheitsgrade hat. Davon sind 898 dem nichtlinearen Materialbereich zugeordnet. Als Testsignal wird wie im Beispiel zur SVR-MOR der Wert $U_0 = 10$ V gewählt, siehe Abbildung 7.3.

Zunächst wird die Bestimmung der Reluktivität mittels (7.52f) validiert, denn diese Gleichung stellt nur eine Approximation an (7.6) dar. Abbildung 7.9(a) zeigt die Reluktivität für Datenpunkte nach Tabelle 7.1 unter Verwendung beider Gleichungen, wobei $K = 100$ in (7.52h) und (7.52j) gilt. Der relative Fehler nach Abbildung 7.9(b) ist mit etwa 3% bei $B = 0$ am größten und fällt für steigende magnetische Flussdichte ab. Es ist möglich, die Approximationsgüte durch Erhöhung von K zu verbessern, aber bei üblichen Toleranzen der Reluktivität von bis zu 25% wird dies als unnötig erachtet.

Somit kann ein QBDA-Modell aus dem FE-Modell erstellt werden. Aus den sieben Datenpunkten der BH-Kurve folgen sechs Summanden in (7.52f) und ebensoviele Gleichungen (7.52g) bis (7.52j) werden pro Integrationspunkt benötigt. Damit entstehen insgesamt 14 zusätzliche Gleichungen pro Integrationspunkt, was im FE-Modell bei 590 Integrationspunkten auf 8260 Gleichungen führt. Das volle QBDA-Modell

Algorithmus 7.5 Kombinierte Generierung der Projektionsmatrix

Eingabe: ROM-Dimension n , Schwellwert $n_{\max}$ **Ausgabe:** Strategie für Projektionsmatrix**if** $n \leq n_{\max}$ **then**

Verwende Aktualisierungs-Strategie Algorithmus 7.4

else

Verwende Neugenerierung Algorithmus 7.3

Erhöhe $n_{\max}$ **end if**

hat also insgesamt $N = 29.560$ Gleichungen, muss aber niemals faktorisiert werden, weil Lösungen des vollen Modells stets konventionell gewonnen werden können. Die Lösungen für die zusätzlichen Gleichungen können aus der konventionellen Lösung rekonstruiert werden. Auch der Speicheraufwand des QBDA-Modells liegt nur unwesentlich höher, denn der N -dimensionale Tensor dritter Stufe hat weniger als 105.000 Nicht-Null-Einträge.

Zur Simulation wird der adaptive Algorithmus 7.2 verwendet mit der Norm des relativen Residuums (7.53) als Fehlerindikator und der Fehlerschranke $\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$. Die Projektionsmatrix für das ROM kann über die in Abschnitt 7.4.3 präsentierten Algorithmen neu erstellt oder aktualisiert werden. Da die Aktualisierung numerisch günstiger ist, sollte sie so oft wie möglich verwendet werden. Genau wie bei den trajektorienbasierten ROMs sind viele Snapshots aber nahezu linear abhängig, sodass irgendwann die ROM-Dimension unnötig groß wird. Daher wird eine Kombination der Algorithmen vorgeschlagen, welche schematisch als Algorithmus 7.5 gegeben ist. Es wird $n_{\max} = 50$ gewählt, und bei jeder Neugenerierung der Projektionsmatrix wird $n_{\max} \leftarrow n_{\max} + 50$ gesetzt. Die SVD-Toleranz in Algorithmus 7.3 beträgt $\epsilon = 10^{-5}$.

Die Simulationsergebnisse sind in Abbildung 7.10 dargestellt, Abbildung 7.10(b) gibt den gleichen Detailausschnitt wie Abbildung 7.7(b) wieder. Neben der qualitativen Übereinstimmung ist bereits eine deutlich bessere quantitative Übereinstimmung zu sehen im Vergleich zu Verfahren, welche die Nichtlinearität approximieren. Die relativen Fehler des QBDA-ROMs sind in Abbildung 7.11 gezeigt, hohe Fehler in den ersten Zeitschritten sind durch das anfangs sehr kleine ROM und durch Ströme nahe Null zu erklären. Im Vergleich zu Abbildung 7.8 fällt auf, dass der Primärstrom um etwa eine Größenordnung besser approximiert wird, der maximale Fehler nach den ersten zehn Zeitschritten beträgt $5,02 \cdot 10^{-4}$. Der hohe relative Fehler im Sekundärstrom bei etwa $t = 0,5$ ms liegt am Nulldurchgang des Stroms; nach den ersten zehn Zeitschritten beträgt der maximale Fehler ansonsten $7,70 \cdot 10^{-3}$. Auch im Vergleich zu Tabelle 7.2 sind der maximale absolute Fehler mit 0,3206 A und der mittlere Fehler mit 0,0240 A deutlich geringer. Zusätzlich sind in Abbildung 7.11 die Zeitschritte eingetragen, in denen der Fehlerindikator die Toleranz überschreitet und das volle

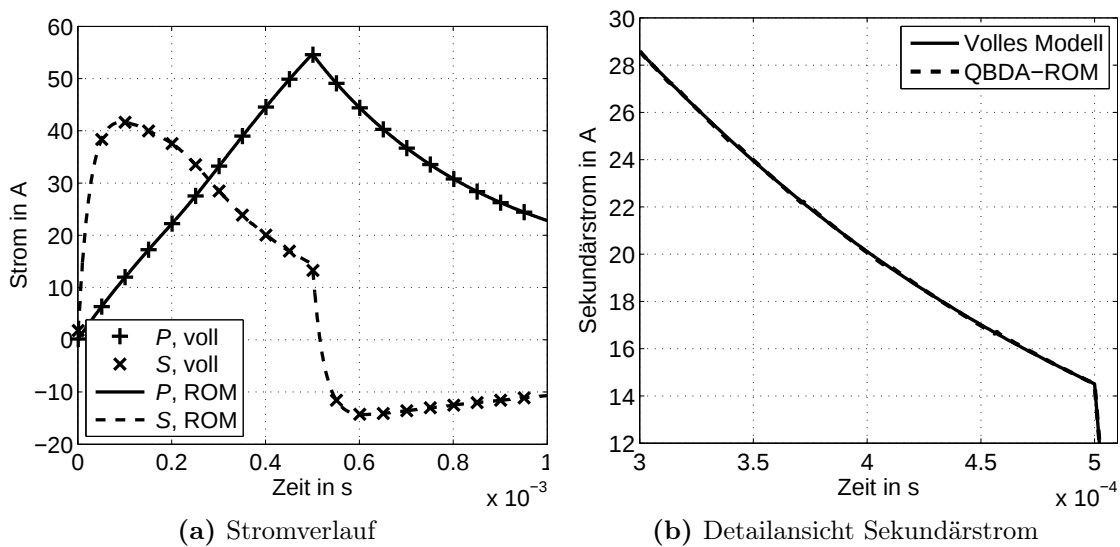


Abbildung 7.10: Vergleich zwischen QBDA-ROM und vollem Modell.

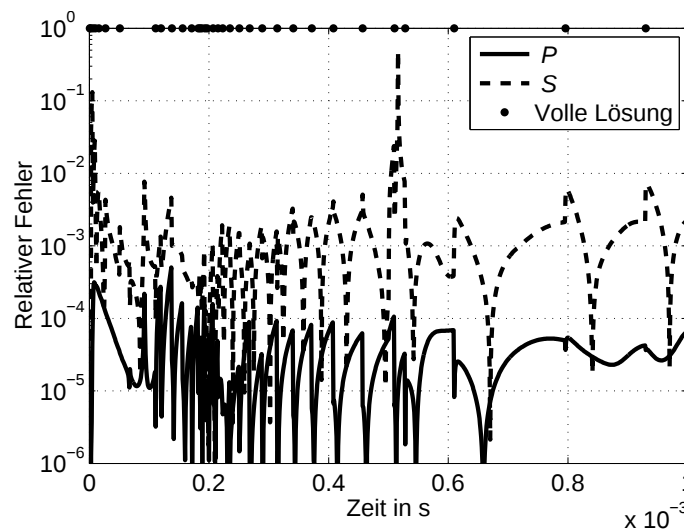


Abbildung 7.11: Relative Fehler des QBDA-ROMs und Zeitschritte, in denen das volle Modell gelöst wird.

Modell gelöst wird. Wie zu erwarten, steigt der Fehler tendenziell bis zu solch einem Punkt an und fällt danach nochmals ab. Die Beträge aller Fehler an Punkten, an denen das Ausgangsmodell gelöst wird, liegen etwa in der gleichen Größenordnung, was den Einsatz des relativen Residuums als Fehlerindikator validiert.

Abschließend sollen die Simulationszeiten betrachtet werden, Tabelle 7.4 gibt einen Überblick. Während der Berechnung des Testsignals muss 34 Mal das volle Modell gelöst werden, trotzdem liegt die gesamte Simulationsdauer um einen Faktor von 11 unter der einer konventionellen Simulation. Mehr als 75% der Zeit entfallen auf die adaptive Anpassung des ROMs. Für anschließende Simulationen wird diese Zeit

	volles Modell	adaptives ROM
Dimension	21.300	194 ^a
Volle Lösungen	1000	34
Simulationsdauer	2140 s	189 s
davon ROM-Generierung	–	48,4 s
davon Lösung des Ausgangsmodells	2140 s	93,7 s

Rechnung auf einem Intel Core i7-2600K CPU mit 3.4 GHz und 16 GB RAM,
 Intel MKL 11.1 PARDISO zur Faktorisierung und
 Tensor Toolbox [BK07] für sparse Tensoren.

^a nach Abschluss der Simulation.

Tabelle 7.4: Simulationsdaten für das QBDA-ROM.

geringer ausfallen, weil das ROM bereits entsprechend trainiert ist. Dennoch lohnt sich der Einsatz der QBDA-MOR bereits für eine einzelne Simulation, was einen großen Vorteil gegenüber trajektorienbasierten Verfahren darstellt.

7.5 Fazit

Mit dem SVR-Kernel-Verfahren und dem QBDA-Verfahren werden zwei neue Ansätze für die Modellordnungsreduktion nichtlinearer Wirbelstromprobleme gegeben. Während die SVR-MOR, welche die Nichtlinearität approximiert und von Trainingsimulationen abhängt, eine leichte Verbesserung zum TPWL-Verfahren darstellt, bringt der Einsatz der QBDA-MOR große Vorteile. Die Fehler liegen niedriger als bei Verfahren, die die Nichtlinearität approximieren, und es sind keine Trainingssimulationen nötig. Damit entfällt nicht nur die Notwendigkeit, das zu untersuchende System a priori zu charakterisieren, sondern es ergibt sich bereits bei einer einzigen Simulation eine Zeitersparnis.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Das Kernstück der vorliegenden Arbeit ist die Herleitung effizienter Verfahren zur FE-Simulation parametrischer Wirbelstromprobleme. Grundlegend für die präsentierten Algorithmen ist die projektionsbasierte Modellordnungsreduktion.

In Kapitel 3 wird mit der $\mathbf{AV}$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung eine konventionelle FE-Wirbelstromformulierung aufgegriffen, die sich durch ihre Flexibilität hinsichtlich der Leitergeometrie und der Anregungsarten auszeichnet. Es wird eine Baumeichung durchgeführt, sodass sich im Hinblick auf die nachfolgenden MOR-Prozesse ein symmetrisches, reguläres Gleichungssystem ergibt. Diese algebraischen Eigenschaften lassen sich auch zum Beweis von Systemeigenschaften nutzen.

Auf dem konventionellen Modell aufbauend wird ein reduziertes Modell zur schnellen Charakterisierung von Systemen im Frequenzbereich angegeben; die Anwendbarkeit wird durch Homogenisierungsverfahren in Kapitel 4 auf Strukturen mit Litzendrähten erweitert. Numerische Beispiele zeigen, dass der Fehler der Homogenisierung im Bereich der Fertigungstoleranzen liegt. Die reduzierten Modelle entsprechen in ihrer Genauigkeit den vollen FE-Modellen und sind dabei um Größenordnungen schneller auszuwerten. Zusätzlich dienen die vollen Modelle als Ausgangspunkt für effiziente parametrische Simulationen.

Kapitel 5 betrachtet eine Klasse von parametrischen Systemen, welche über topologieerhaltende Netzverzerrung abgebildet werden können. Für solche Systeme wird ein parametrisches Teilbereichs-MOR-Rahmenwerk als Erweiterung der Arbeit [Bur14] vorgestellt. Interpolation der geometrieabhängigen FE-Matrizen rekonstruiert eine affine Parameterabhängigkeit, was effiziente Projektion in einen parameterabhängigen Unterraum erlaubt. Die reduzierte Basis ergibt sich als Projektion einer Referenzbasis auf einen anhand eines Tensorgitters interpolierten Unterraum. Am Beispiel einer Spule mit variablem Aufbau und Litzendraht wird gezeigt, dass mit dem ROM parametrische Studien möglich sind, für die konventionelle Modelle mehrere Jahre an Rechenzeit benötigen würden.

Starrkörperbewegungen als Systemparameter können prinzipbedingt gut über eine

FE-BE-Kopplung simuliert werden. Es wird vorgeschlagen, die nicht-affinen BE-Matrizen mit der EI-Methode zu beschreiben. Dadurch können adaptive MP-MOR-Algorithmen zur Konstruktion eines effizienten reduzierten Modells herangezogen werden. Der Fehler der reduzierten Modelle wird hauptsächlich durch die EI beeinflusst. Numerische Beispiele zeigen, dass die Methodik nicht nur eine Alternative zur MOR über Netzverzerrung darstellt, sondern auch Parameter behandeln kann, die nicht über Netzverzerrung abgebildet werden können.

In Kapitel 7 werden zwei neue MOR-Verfahren für nichtlineare Wirbelstromprobleme vorgestellt. Das Kernel-Verfahren approximiert die reduzierte Systemmatrix mit der ν -SVR, sodass implizite Zeitschrittverfahren eingesetzt werden können. Die numerischen Ergebnisse zeigen hinsichtlich der Approximationsgenauigkeit jedoch nur kleine Vorteile im Vergleich zum Stand der Technik, der in dieser Arbeit über die TPWL-Methode abgebildet ist. Der größte Vorteil des Kernel-Verfahrens liegt in der höheren Robustheit gegenüber Schwankungen in den freien Parametern der Gewichtungsfunktionen.

Das zweite Verfahren liefert deutlich vielversprechendere Ergebnisse, weil es die Nichtlinearität nicht approximiert, sondern nur als QBDA-Gleichungen umformuliert. Neben dem QBDA-Ausgangsmodell wird ein adaptives MOR-Verfahren mit der Norm des relativen Residuums als Fehlerindikator vorgestellt. Ein numerisches Beispiel demonstriert die den approximierenden Verfahren überlegene Genauigkeit. Zusätzlich entfallen Trainingssimulationen, sodass bereits für eine einzelne Simulation ein Zeitersparnis im Vergleich zu konventioneller Rechnung erzielt werden kann.

Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen

- Die Symmetrie der betrachteten FE- und FE-BE-Frequenzbereichsverfahren stellt eine deutliche Vereinfachung für den Beweis von Systemeigenschaften wie Passivität und Stabilität im Ausgangsmodell und auch für deren Bewahrung durch die strukturerhaltende MOR dar. Der tatsächliche Nachweis ist noch zu erbringen. Eine elegante Möglichkeit dazu besteht in der Überführung der Systeme in port-hamiltonsche Form, welche auch eine systematische Kopplung an weitere physikalische Domänen zulässt [vdS06].
- Die Extraktion der äquivalenten Materialdaten bei der Homogenisierung erfordert die energetische Orthogonalität von Skin- und Proximityeffekt, wohingegen das Zellenproblem dieser Einschränkung nicht unterliegt. Es ist zu untersuchen, inwiefern für allgemeine Zellen- und Leitergeometrien eine äquivalente, makroskopische Beschreibung von Litzendraht möglich ist.
- Die Anwendbarkeit der PMOR aus Kapitel 5 beschränkt sich prinzipiell nicht auf Wirbelstromprobleme. Im Hochfrequenzfall stellen Strukturen mit parametrisierten Wellenleiter-Toren eine interessante Problemklasse dar, die ebenfalls parameterabhängige Ein- und Ausgangsfunktionale aufweist.

- Sowohl über Netzverzerrung parametrisierte Systeme als auch die BE-Kopplung gehen von einer konstanten Topologie des Ausgangsmodells aus. Dies ist oftmals, aber nicht immer gegeben. Eine sich ändernde Topologie erfordert eine Erweiterung der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden.
- Schnelle BE-Löser besitzen das Potenzial, die Anwendbarkeit der MOR für FE-BE-Systeme auf Modelle mit einer hohen Anzahl an BE-Unbekannten auszuweiten, für welche eine explizite Generierung der Matrizen nicht möglich ist. Zudem legt die Verwendung der EI nahe, eine beweisbare Fehlerschranke für die ROMs herzuleiten.
- Die QBDA-MOR befindet sich als neues Verfahren noch in einem experimentellen Stadium. Die hier vorgestellte Formulierung sollte so angepasst werden, dass die Gleichungen eindeutig lösbar sind. Zusätzlich wäre eine a priori ermittelbare Projektionsmatrix zur Konstruktion eines offline-online-Algorithmus wünschenswert. Dazu muss die Wahl von Entwicklungspunkten oder Snapshots automatisiert werden.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Schematische Darstellung des Feldgebiets Ω	21
3.2	FE-Netz mit Baumkanten	26
3.3	Schematische Darstellung eines angeregten Leiters Ω_c	28
3.4	Quellen-Skalarpotenzial φ_0 auf schematischem FE-Netz eines Leiters .	35
3.5	Stromführender Torus	42
3.6	Querschnitt durch Spule #1	43
3.7	Kenngößen der Spule über der Frequenz f	43
3.8	Relativer Fehler in der Impedanz für EP- und MP-ROMs	43
4.1	Zweidimensionales planares Feldgebiet Γ	47
4.2	Feldgebiet einer Einheitszelle Γ mit Rand $\partial\Gamma$	49
4.3	Homogenisierungsprozess anhand des Wicklungsfensters einer Spule .	56
4.4	Äquivalente Permeabilität aus dem Zellenproblem und nach einem Debye-Fit (4.51) mit zugehörigem relativem Fehler	60
4.5	Real- und Imaginärteil der Skineffekt-Impedanz pro Längeneinheit . .	61
4.6	Querschnitt durch Spule #2	61
4.7	Frequenzgang der Spule #2, Vergleich zwischen homogenisiertem 3D- FE-Modell, achsensymmetrischem 2D-FE-Modell und Messwerten . .	62
4.8	Relative Fehler des homogenisierten 3D-FE-Modells	63
4.9	Aufbau des Energieübertragungs-Systems	64

4.10	Kenngrößen mit vollem Modell und EP-ROM	65
4.11	Relative Fehler in Einträgen der Impedanzmatrix für verschiedene ROM-Dimensionen	65
5.1	Induktive Kopplungsfaktoren k_i der Transmitterspulen zur Empfängerspule basierend auf PROM und zugehörige Fehler	73
5.2	Querschnitt durch rotationssymmetrische Spule mit Topfkern	75
5.3	Eigeninduktivität der Primärspule	77
5.4	Widerstand der Primärspule	77
5.5	Kopplungsfaktor	78
6.1	Schematische Darstellung eines Feldgebiets Ω für die Randelementmethode	81
6.2	Transformation eines beliebigen finiten Elements auf das Referenzelement Δ_y	88
6.3	Duffy-Transformation	89
6.4	Aufspaltung eines finiten Elements um eine Singularität und Transformation auf neue Referenzelemente	90
6.5	Zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante in ξ -Richtung	92
6.6	Zweidimensionales FE-Netz für $\hat{\Omega}_i$ mit vorgeschlagener gekoppelter Eichung	95
6.7	Betrag der induktiven Kopplungsfaktoren im Vergleich zwischen FE-Lösung und FE-BE-Lösung	107
6.8	Skizze des Systems mit frei drehbarer Sekundärspule	108
6.9	Konvergenzraten bei der ROM-Erstellung	108
6.10	Eigeninduktivität von $TX2$ an verschiedenen Parameterpunkten und relative Fehler	110
6.11	Koppelwiderstand $R_{45} = \text{Re}[\mathbf{Z}]_{45}$ von $TX4$ zur Empfängerspule und relative Fehler.	110
6.12	Induktiver Kopplungsfaktor zwischen $TX2$ und Empfänger	112

6.13	Induktiver Kopplungsfaktor zwischen TX_4 und Empfänger	113
7.1	Schematische BH-Kennlinie mit Sättigung	117
7.2	Skizze des Transformators	125
7.3	Referenz für Stromverlauf	126
7.4	Relative Größe der Singulärwerte	126
7.5	Vergleich zwischen TPWL-Methdode und vollem Modell	128
7.6	Vergleich zwischen ROM mit NW-Gauß-Kernel und vollem Modell . .	129
7.7	Vergleich zwischen ROM mit rationalem NW-Kernel und vollem Modell	129
7.8	Relative Fehler im Primärstrom	130
7.9	Reluktivität über Splines und als gewichtete Superposition	138
7.10	Vergleich zwischen QBDA-ROM und vollem Modell	140
7.11	Relative Fehler des QBDA-ROMs und Zeitschritte, in denen das volle Modell gelöst wird	140

Tabellenverzeichnis

3.1	Simulationsergebnisse für stromführenden Torus	42
3.2	Simulationszeiten für Spule #1	44
4.1	Simulationsdaten für volles und reduziertes Modell	63
4.2	Drahteigenschaften	65
4.3	Simulationsdaten für das Energieübertragungs-System	66
5.1	Simulationszeiten für das Energieübertragungs-System	74
5.2	Simulationszeiten für das Spulenpaar mit Topfkern	76
6.1	Simulationsdaten für das System mit frei drehbarer Sekundärspule . .	109
7.1	Datenpunkte für BH-Kennlinie	124
7.2	Absolute Fehler im Sekundärstrom	129
7.3	Simulationszeiten für Transformator	130
7.4	Simulationsdaten für das QBDA-ROM	141

Eigene Publikationen

Begutachtete Journal-Artikel

- [A1] D. Klis, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Model-order reduction for the finite-element boundary-element simulation of eddy current problems including rigid body motion. *IEEE Transactions on Magnetism*, 52(3):1–4, März 2016, doi: 10.1109/TMAG.2015.2482541.
- [A2] D. Klis, S. Burgard, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. A self-adaptive model-order reduction algorithm for nonlinear eddy current problems based on quadratic-bilinear modeling. *IEEE Transactions on Magnetism*, 52(3):1–4, März 2016, doi: 10.1109/TMAG.2015.2487601.
- [A3] O. Floch, A. Sommer, D. Klis, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. An adaptive deflation domain-decomposition preconditioner for fast frequency sweeps. *IEEE Transactions on Magnetism*, 52(3):1–4, März 2016, doi: 10.1109/TMAG.2015.2463690.
- [A4] D. Klis, S. Burgard, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Litz wire homogenization by finite elements and model-order reduction. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 34(5):1418–1432, September 2015.

Begutachtete Konferenzbeiträge

- [B1] D. Klis, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Simulating rigid body motion occurring in eddy current problems by parametric model-order reduction. *Model Reduction of Parametrized Systems III (MoRePaS '15)*, Triest, Italien, 13.–16. Oktober 2015.
- [B2] O. Floch, A. Sommer, D. Klis, und R. Dyczij-Edlinger. Adaptive Preconditioning of Fast Frequency Sweeps by ROMs. *Model Reduction of Parametrized Systems III (MoRePaS '15)*, Triest, Italien, 13.–16. Oktober 2015.

- [B3] A. Sommer, O. Floch, D. Klis, und R. Dyczij-Edlinger. Effiziente numerische Optimierung der Richtcharakteristik von Antennengruppen mittels Ordnungsreduktion. *Kleinheubacher Tagung 2015*, Miltenberg, Deutschland, 28.–30. September 2015.
- [B4] D. Klis, S. Burgard, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Fast simulation of wireless power transfer systems with varying coil alignment. In *Proceedings of the 8th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD '15)*, S. 248–253, Wien, Österreich, 18.–20. Februar 2015.
- [B5] S. Burgard, O. Farle, D. Klis, und R. Dyczij-Edlinger. Order-reduction of fields-level models with affine and non-affine parameters by interpolation of subspaces. In *Proceedings of the 8th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD '15)*, S. 170–175, Wien, Österreich, 18.–20. Februar 2015.
- [B6] D. Klis, M. Jochum, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Anwendung nichtlinearer Modellordnungsreduktion auf 3D-Wirbelstromprobleme. *GMA-Fachausschuss 1.30 Workshop Modellbildung, Identifikation und Simulation in der Automatisierungstechnik*, Anif/Salzburg, Österreich, 18.–20. September 2013.
- [B7] O. Farle, R. Baltes, D. Klis, und R. Dyczij-Edlinger. Eine Port-Hamiltonsche Formulierung zur Finite-Elemente-Diskretisierung der Maxwellschen Gleichungen. *GMA-Fachausschuss 1.30 Workshop Modellbildung, Identifikation und Simulation in der Automatisierungstechnik*, Anif/Salzburg, Österreich, 18.–20. September 2013.
- [B8] O. Farle, D. Klis, M. Jochum, O. Floch, und R. Dyczij-Edlinger. A port-Hamiltonian finite- element formulation for the Maxwell Equations. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA '13)*, Turin, Italien, S. 324–327, 9.–13. September 2013.
- [B9] D. Klis, M. Jochum, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Application of nonlinear model-order reduction to 3D eddy current problems. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA '13)*, Turin, Italien, S. 344–347, 9.–13. September 2013.
- [B10] D. Klis, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Eine Port-Hamiltonsche Formulierung für nichtlineare Wirbelstromprobleme. *Kleinheubacher Tagung 2012*, Miltenberg, Deutschland, 24.–26. September 2012.
- [B11] D. Klis, S. Burgard, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Model order reduction for nonlinear eddy current problems. In *Proceedings of the 7th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD '12)*, S. 740–745, Wien, Österreich, 15.–17. Februar 2012.

Literaturverzeichnis

- [AAB⁺06] J. Acero, R. Alonso, J. M. Burdío, L. A. Barragán, und D. Puyal. Frequency-dependent resistance in litz-wire planar windings for domestic induction heating appliances. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 21(4):856–866, 2006.
- [ACM⁺92] R. Albanese, E. Coccoresse, R. Martone, G. Miano, und G. Rubinacci. Periodic solutions of nonlinear eddy current problems in three-dimensional geometries. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1118–1121, März 1992.
- [AF08] D. Amsallem und C. Farhat. Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 46(7):1803–1813, Juli 2008.
- [AR88] R. Albanese und G. Rubinacci. Integral formulation for 3d eddy-current computation using edge elements. *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews)*, 135(7):457–462, September 1988.
- [AR90] R. Albanese und G. Rubinacci. Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(3):515–532, 1990.
- [ARFL08] M. N. Albunni, V. Rischmüller, T. Fritzsche, und B. Lohmann. Model-order reduction of moving nonlinear electromagnetic devices. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(7):1822–1829, Juli 2008.
- [Bal89] C. A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 1989.
- [BB15] P. Benner und T. Breiten. Two-sided moment matching methods for nonlinear model reduction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(2):B239–B260, 2015.
- [BBPW00] O. Bíró, P. Bohm, K. Preis, und G. Wachutka. Edge finite element analysis of transient skin effect problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):835–839, Juli 2000.

- [BC01] A. Buffa und P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to maxwell's equations part I: An integration by parts formula in lipschitz polyhedra. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(1):9–30, 2001.
- [Beb00] M. Bebendorf. Approximation of boundary element matrices. *Numerische Mathematik*, 86(4):565–589, 2000.
- [Ber98] G. Bertotti. *Hysteresis in Magnetism*. Electromagnetism. Academic Press, 1998.
- [Ber09] D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics*. Princeton University Press, 2009.
- [BFDE13] S. Burgard, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. A novel parametric model order reduction approach with applications to geometrically parameterized microwave devices. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 32(5):1525–1538, 2013.
- [BG06] P. Bochev und M. Gunzburger. Compatible discretizations of second-order elliptic problems. *Journal of Mathematical Sciences*, 136(2):3691–3705, Juli 2006.
- [BHST82] C. S. Biddlecombe, E. A. Heighway, J. Simkin, und C. W. Trowbridge. Methods for eddy current computation in three dimensions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(2):492–497, März 1982.
- [Bír99] O. Bíró. Edge element formulations of eddy current problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169(3–4):391–405, 1999.
- [BK07] B. W. Bader und T. G. Kolda. Efficient MATLAB computations with sparse and factored tensors. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1):205–231, Dezember 2007.
- [BL40] E. Bennett und S. Larson. Effective resistance to alternating currents of multilayer windings. *Electrical Engineering*, 59(12):1010–1016, Dezember 1940.
- [BMNP04] M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, und A. T. Patera. An ‘empirical interpolation’ method: application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(9):667–672, 2004.
- [Bos94] A. Bossavit. Effective penetration depth in spatially periodic grids: a novel approach to homogenization. In *International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC '94)*, S. 859–864, 1994.

- [Bos98] A. Bossavit. *Computational Electromagnetism*, Band 2 der Reihe *Electromagnetism*. Academic Press, 1998.
- [BP07] O. Bíró und K. Preis. Generating source field functions with limited support for edge finite-element eddy current analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(4):1165–1168, April 2007.
- [BPBT04] O. Bíró, K. Preis, G. Buchgraber, und I. Tícar. Voltage-driven coils in finite-element formulations using a current vector and a magnetic scalar potential. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2):1286–1289, März 2004.
- [BPR⁺93] O. Bíró, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk, und K. R. Richter. Computation of 3-D current driven skin effect problems using a current vector potential. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1325–1328, März 1993.
- [BPR95] O. Bíró, K. Preis, und K. R. Richter. Various fem formulations for the calculation of transient 3D eddy currents in nonlinear media. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1307–1312, Mai 1995.
- [BS05] Z. Bai und Y. Su. Dimension reduction of large-scale second-order dynamical systems via a second-order arnoldi method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(5):1692–1709, 2005.
- [BSFDE14] S. Burgard, A. Sommer, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. Reduced-order models of finite-element systems featuring shape and material parameters. *Electromagnetics*, 34(3–4):143–160, 2014.
- [BSLM91] J. R. Brauer, S. Schaefer, J.-F. Lee, und R. Mittra. Asymptotic boundary condition for three dimensional magnetostatic finite elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(6):5013–5015, November 1991.
- [BTW84] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, und L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer, 1984.
- [Buh00] M. D. Buhmann. Radial basis functions. *Acta Numerica*, 9:1–38, 2000.
- [Bur08] S. Burgard. *Morphing von Finite-Elemente-Netzen*. Unveröffentlichte Studienarbeit, Universität des Saarlandes, 2008.
- [Bur14] S. Burgard. *Effiziente Methoden der parametrischen Ordnungsreduktion für affin und nicht-affin parametrisierte Modelle mit Anwendungen in der Finite-Elemente-Simulation von Mikrowellenstrukturen*. Dissertation, Universität des Saarlandes, 2014.
- [BV82] A. Bossavit und J.-C. Vérité. A mixed fem-biem method to solve eddy-current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(2):431–435, März 1982.

- [Car77] C. J. Carpenter. Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies. *IEE Proceedings*, 124(11):1026–1034, November 1977.
- [Cha70] M. V. Chari. *Finite-Element Analysis of Nonlinear Magnetic Fields*. Phd thesis, McGill University Montreal, März 1970.
- [CK83] D. Colton und R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Pure and applied mathematics. John Wiley & Sons, 1983.
- [CK97] Q. Chen und A. Konrad. A review of finite element open boundary techniques for static and quasi-static electromagnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(1):663–676, Januar 1997.
- [CK13] D. Colton und R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Band 93 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 3. Auflage, 2013.
- [CKPD82] M. V. K. Chari, A. Konrad, M. A. Palmo, und J. D’Angelo. Three-dimensional vector potential analysis for machine field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(2):436–446, März 1982.
- [CLRS01] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, und C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 2. Auflage, 2001.
- [Cod13] L. Codecasa. Novel approach to compact modeling for nonlinear thermal conduction problems. In *19th International Workshop on Thermal Investigations of ICs and Systems (THERMINIC ’13)*, S. 164–169, September 2013.
- [Cod15] L. Codecasa. Novel approach to model order reduction for nonlinear eddy-current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(3):1–4, März 2015.
- [CS10] S. Chaturantabut und D. C. Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5):2737–2764, 2010.
- [DEF09] R. Dyczij-Edlinger und O. Farle. Finite element analysis of linear boundary value problems with geometrical parameters. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 28(4):779–794, 2009.
- [DEPL00] R. Dyczij-Edlinger, G. Peng, und J.-F. Lee. Stability conditions for using TVFEMs to solve maxwell equations in the frequency domain. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 13(2-3):245–260, 2000.

- [DHL99] P. Dular, F. Henrotte, und W. Legros. A general and natural method to define circuit relations associated with magnetic vector potential formulations. *IEEE Transactions on Magnetism*, 35(3):1630–1633, 1999.
- [Dix88] L. H. Dixon, Jr. Eddy current losses in transformer windings and circuit wiring. In *SEM600 Unitrode Seminar*, 1988.
- [dlRRM09] V. de la Rubia, U. Razafison, und Y. Maday. Reliable fast frequency sweep for microwave devices via the reduced-basis method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 57(12):2923–2937, Dezember 2009.
- [Dow66] P. L. Dowell. Effects of eddy currents in transformer windings. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 113(8):1387–1394, August 1966.
- [DST10] P. Dłotko, R. Specogna, und F. Trevisan. Voltage and current sources for massive conductors suitable with the α - χ geometric eddy-current formulation. *IEEE Transactions on Magnetism*, 46(8):3069–3072, August 2010.
- [Duf82] M. G. Duffy. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(6):1260–1262, 1982.
- [Ele] Elektrisola. *Technische Daten für Kupferlackdraht nach Durchmesser entsprechend IEC 60317*. <http://www.elektrisola.com/de/lackdraht/technische-daten-nach-durchmesser/iec-60-317>, besucht am 12.05.2015.
- [ERRB97] M. El Feddi, Z. Ren, A. Razek, und A. Bossavit. Homogenization technique for maxwell equations in periodic structures. *IEEE Transactions on Magnetism*, 33(2):1382–1385, März 1997.
- [Far07] O. Farle. *Ordnungsreduktionsverfahren für die Finite-Elemente-Simulation parameterabhängiger passiver Mikrowellenstrukturen*. Dissertation, Universität des Saarlandes, 2007.
- [Far13] O. Farle. *Ordnungsreduktionsverfahren für Finite-Elemente-Modelle elektromagnetischer Strukturen*. Universität des Saarlandes, 2013. Habilitationsschrift.
- [FBDE11] O. Farle, S. Burgard, und R. Dyczij-Edlinger. Passivity preserving parametric model-order reduction for non-affine parameters. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 17(3):279–294, Juni 2011.

- [FDE10] O. Farle und R. Dyczij-Edlinger. Numerically stable moment matching for linear systems parameterized by polynomials in multiple variables with applications to finite element models of microwave structures. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 58(11):3675–3684, November 2010.
- [Fer90] J. A. Ferreira. Appropriate modelling of conductive losses in the design of magnetic components. In *21st Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC '90)*, S. 780–785, 1990.
- [Fer94] J. A. Ferreira. Improved analytical modeling of conductive losses in magnetic components. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 9(1):127–131, Januar 1994.
- [FHMS11] M. Fares, J. S. Hesthaven, Y. Maday, und B. Stamm. The reduced basis method for the electric field integral equation. *Journal of Computational Physics*, 230(14):5532–5555, 2011.
- [FNO96] K. Fujiwara, T. Nakata, und H. Ohashi. Improvement of convergence characteristic of iccg method for the A- ϕ method using edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):804–807, Mai 1996.
- [Fre04] R. W. Freund. Sprim: structure-preserving reduced-order interconnect macromodeling. In *IEEE/ACM International Conference on Computer Aided Design (ICCAD '04)*, S. 80–87, November 2004.
- [GD05] J. Gyselinck und P. Dular. Frequency-domain homogenization of bundles of wires in 2-D magnetodynamic FE calculations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(5):1416–1419, Mai 2005.
- [GG90] M. Guiggiani und A. Gigante. A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method. *Journal of Applied Mechanics*, 57(4):906–915, Dezember 1990.
- [GGK04] L. J. Gray, J. M. Glaeser, und T. Kaplan. Direct evaluation of hypersingular galerkin surface integrals. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(5):1534–1556, 2004.
- [GGvD96] K. Gallivan, G. Grimme, und P. van Dooren. A rational lanczos algorithm for model reduction. *Numerical Algorithms*, 12(1):33–63, 1996.
- [GHS12] M. Ganesh, J. S. Hesthaven, und B. Stamm. A reduced basis method for electromagnetic scattering by multiple particles in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, 231(23):7756–7779, 2012.
- [GMNP07] M. A. Grepl, Y. Maday, N. C. Nguyen, und A. T. Patera. Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 41(03):575–605, 2007.

- [Gra93] R. D. Graglia. On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 41(10):1448–1455, Oktober 1993.
- [Gri97] E. J. Grimme. *Krylov projection methods for model reduction*. Phd thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1997.
- [GSD07] J. Gyselinck, R. V. Sabariego, und P. Dular. Time-domain homogenization of windings in 2-d finite element models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(4):1297–1300, April 2007.
- [Gu09] C. Gu. Qlmor: A new projection-based approach for nonlinear model order reduction. In *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design - Digest of Technical Papers (ICCAD '09)*, S. 389–396, November 2009.
- [Gu11] C. Gu. Qlmor: A projection-based nonlinear model order reduction approach using quadratic-linear representation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 30(9):1307–1320, September 2011.
- [Hac99] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on H-matrices. part I: Introduction to H-matrices. *Computing*, 62(2):89–108, 1999.
- [HC14] T. Henneron und S. Clenet. Model order reduction of non-linear magnetostatic problems based on POD and DEI methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 50(2):33–36, Februar 2014.
- [HFDE03] V. Hill, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. A stabilized multilevel vector finite-element solver for time-harmonic electromagnetic waves. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(3):1203–1206, Mai 2003.
- [HH02] J. D. Hanson und S. P. Hirshman. Compact expressions for the biot-savart fields of a filamentary segment. *Physics of Plasmas*, 9(10):4410–4412, 2002.
- [Hip02] R. Hiptmair. Symmetric coupling for eddy current problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(1):41–65, 2002.
- [HO05] R. Hiptmair und J. Ostrowski. Coupled boundary-element scheme for eddy-current computation. *Journal of Engineering Mathematics*, 51(3):231–250, 2005.
- [HRHR97] C. J. Huber, W. M. Rucker, R. Hoschek, und K. R. Richter. A new method for the numerical calculation of Cauchy principal value integrals in BEM applied to electromagnetics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2):1386–1389, März 1997.

- [HS05] R. Hiptmair und O. Sterz. Current and voltage excitations for the eddy current model. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 18(1):1–21, 2005.
- [IH06] K. Iwata und H. Hirano. Magnetic field analysis by edge elements of magnetic components considering inhomogeneous current distribution within conductor windings. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(5):1549–1554, Mai 2006.
- [Ing06] P. Ingelström. A new set of $H(\text{curl})$ -conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 54(1):106–114, Januar 2006.
- [Jin10] J.-M. Jin. *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons, 2010.
- [Joc14] M. Jochum. *Niederfrequenzstabile Potenzialformulierungen zur Finite-Elemente-Simulation elektromagnetischer Felder im Frequenzbereich*. Dissertation, Universität des Saarlandes, 2014.
- [JPHL11] N. Jung, A. T. Patera, B. Haasdonk, und B. Lohmann. Model order reduction and error estimation with an application to the parameter-dependent eddy current equation. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 17(6):561–582, 2011.
- [KFK⁺11] Y. Konkel, O. Farle, A. Köhler, A. Schultschik, und R. Dyczij-Edlinger. Adaptive strategies for fast frequency sweeps. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 30(6):1855–1869, 2011.
- [KFLR97] S. Kurz, J. Fetzer, G. Lehner, und W. Rucker. Die BEM-FEM-kopplungsmethode zur behandlung dreidimensionaler nichtlinearer abschirmungsprobleme niederfrequenter felder am beispiel des TEAM problems 21. *Electrical Engineering*, 80(2):91–103, 1997.
- [KJP⁺04] H.-K. Kim, J.-K. Jung, K.-Y. Park, C.-H. Im, und H.-K. Jung. Efficient technique for 3-d finite element analysis of skin effect in current-carrying conductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2):1326–1329, März 2004.
- [Kre14] R. Kress. *Linear Integral Equations*, Band 82 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 3. Auflage, 2014.
- [Kut75] H. R. Kutt. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numerische Mathematik*, 24(3):205–210, 1975.

- [KV02] K. Kunisch und S. Volkwein. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2):492–515, Februar 2002.
- [LE09] B. Lohmann und R. Eid. Efficient order reduction of parametric and nonlinear models by superposition of locally reduced models. In G. Roppencker und B. Lohmann, Herausgeber, *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik*. Shaker Verlag, Aachen, 2009.
- [LLEAA96] P. J. Leonard, H. C. Lai, J. F. Eastham, und Q. H. Al-Akayshee. Automatic treatment of multiple wound coils in 3D finite element problems including multiply connected regions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):796–799, Mai 1996.
- [LR88] P. Leonard und D. Rodger. Voltage forced coils for 3D finite-element electromagnetic models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(6):2579–2581, 1988.
- [May83] I. D. Mayergoyz. A new approach to the calculation of three-dimensional skin effect problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 19(5):2198–2200, September 1983.
- [McC76] G. P. McCormick. Computability of global solutions to factorable non-convex programs: Part I - convex underestimating problems. *Mathematical programming*, 10(1):147–175, 1976.
- [MCG⁺10] G. Meunier, V. Charmoille, C. Guerin, P. Labie, und Y. Marechal. Homogenization for periodical electromagnetic structure: Which formulation? *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):3409–3412, August 2010.
- [MLPP98] O. Moreau, L. L. Popiel, und J. L. Pages. Proximity losses computation with a 2D complex permeability modelling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):3616–3619, September 1998.
- [MMMR96] A. Menon, K. Mehrotra, C. K. Mohan, und S. Ranka. Characterization of a class of sigmoid functions with applications to neural networks. *Neural Networks*, 9(5):819–835, 1996.
- [MNPP09] Y. Maday, N. C. Nguyen, A. T. Patera, und S. H. Pau. A general multipurpose interpolation procedure: the magic points. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 8(1):383–404, 2009.
- [Mon08] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell’s Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Clarendon Press, 2008.
- [Mor82] T. Morisue. Magnetic vector potential and electric scalar potential in three-dimensional eddy current problem. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(2):531–535, März 1982.

- [Mor90] T. Morisue. Infinitely many formulations using the magnetic vector potential with the coulomb gauge for 3D field calculations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):715–718, März 1990.
- [Mor01] A. H. Morrish. *The Physical Principles of Magnetism*. IEEE Press, Nachdruck der Originalauflage von 1965, 2001.
- [MPC⁺08] G. Meunier, A. Phung, O. Chadebec, X. Margueron, und J. Keradec. Propriétés macroscopiques équivalentes pour représenter les pertes dans les bobines conductrices. *Revue internationale de génie électrique*, 11(6):675–694, November 2008.
- [NW06] J. Nocedal und S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2. Auflage, 2006.
- [Ost02] J. Ostrowski. *Boundary Element Methods for Inductive Hardening*. Dissertation, Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen, 2002.
- [OSW06] G. Of, O. Steinbach, und W. L. Wendland. The fast multipole method for the symmetric boundary integral formulation. *IMA journal of numerical analysis*, 26(2):272–296, 2006.
- [PAOS03] J. Phillips, J. Afonso, A. Oliveira, und L. M. Silveira. Analog macromodeling using kernel methods. In *Proceedings of the IEEE/ACM International Conference on Computer-aided Design (ICCAD '03)*, S. 446–453, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.
- [PASG07] A. D. Podoltsev, K. G. N. B. Abeywickrama, Y. V. Serdyuk, und S. M. Gubanski. Multiscale computations of parameters of power transformer windings at high frequencies. part I: Small-scale level. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(11):3991–3998, November 2007.
- [Pau90] R. Paul. *Elektrotechnik 1*. Springer, 2. Auflage, 1990.
- [Pet05] A. F. Peterson. *Mapped Vector Basis Functions for Electromagnetic Integral Equations*. Morgan & Claypool, 2005.
- [PKL03] A. D. Podoltsev, I. N. Kucheryavaya, und B. B. Lebedev. Analysis of effective resistance and eddy-current losses in multiturn winding of high-frequency magnetic components. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(1):539–548, Januar 2003.
- [PMEL10] H. Panzer, J. Mohring, R. Eid, und B. Lohmann. Parametric model order reduction by matrix interpolation. *Automatisierungstechnik*, 58(8):475–484, 2010.
- [Poz98] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, 2. Auflage, 1998.

- [PR90] L. T. Pillage und R. A. Rohrer. Asymptotic waveform evaluation for timing analysis. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 9(4):352–366, 1990.
- [PR06] A. T. Patera und G. Rozza. *Reduced Basis Approximation and A Posteriori Error Estimation for Parametrized Partial Differential Equations*. MIT, Version 1.0, 2006. Erscheint bei MIT Pappalardo Graduate Monographs in Mechanical Engineering.
- [PS05] J. Phillips und L. M. Silveira. Poor man’s TBR: a simple model reduction scheme. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 24(1):43–55, 2005.
- [QC04] L. Qu und P. L. Chapman. A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction for nonlinear stationary magnetic devices. In *2004 IEEE Workshop on Computers in Power Electronics*, S. 15–19, August 2004.
- [QC07] L. Qu und P. L. Chapman. Extraction of dynamic, low-order models for magnetic devices based on finite element analysis with hysteresis. In *IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC ’07)*, S. 2082–2088, Juni 2007.
- [RE83] D. Rodger und J. F. Eastham. A formulation for low frequency eddy current solutions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 19(6):2443–2446, November 1983.
- [Rei67] C. Reinsch. Smoothing by spline functions. *Numerische Mathematik*, 10(3):177–183, Oktober 1967.
- [RKK02] S. Reitzinger, B. Kaltenbacher, und M. Kaltenbacher. A note on the approximation of B-H curves for nonlinear computations. Technical report, Johannes Kepler University Linz, 2002.
- [Rod83] D. Rodger. Finite-element method for calculating power frequency 3-dimensional electromagnetic field distributions. *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews)*, 130:233–238, Juli 1983.
- [Rok85] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *Journal of Computational Physics*, 60(2):187–207, 1985.
- [RV10] A. A. Rodríguez und A. Valli. *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations*, Band 4 der Reihe *Modeling, Simulation & Applications*. Springer, 2010.

- [RW03] M. Rewieński und J. White. A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction and fast simulation of nonlinear circuits and micromachined devices. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 22(2):155–170, Februar 2003.
- [RW06] M. Rewieński und J. White. Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations. *Linear Algebra and its Applications*, 415(2–3):426–454, 2006. Special Issue on Order Reduction of Large-Scale Systems.
- [RWG82] S. M. Rao, D. Wilton, und A. W. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 30(3):409–418, Mai 1982.
- [Sai01] J. Saitz. Magnetic field analysis of induction motors combining preisach hysteresis modeling and finite element techniques. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5):3693–3697, September 2001.
- [SB00] J. Stoer und R. Bulirsch. *Numerische Mathematik 2*. Springer, 4. Auflage, 2000.
- [SC70] P. P. Silvester und M. V. K. Chari. Finite element solution of saturable magnetic field problems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(7):1642–1651, September 1970.
- [SDG08] R. V. Sabariego, P. Dular, und J. Gyselinck. Time-domain homogenization of windings in 3-d finite element models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(6):1302–1305, Juni 2008.
- [SF96] P. P. Silvester und R. L. Ferrari. *Finite elements for electrical engineers*. Cambridge University Press, 3. Auflage, 1996.
- [SF08] G. Strang und G. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press, 2. Auflage, 2008.
- [SFDE09] A. Schultschik, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. An adaptive multi-point fast frequency sweep for large-scale finite element models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1108–1111, März 2009.
- [SFDE15] A. Sommer, O. Farle, und R. Dyczij-Edlinger. A fast certified parametric near-field-to-far-field transformation technique for electrically large antenna arrays. *Advances in Computational Mathematics*, 41(5):1015–1034, Oktober 2015.
- [SG11] O. Schenk und K. Gärtner. PARDISO. In D. Padua, Herausgeber, *Encyclopedia of Parallel Computing*, S. 1458–1464. Springer, 2011.

- [SH72] P. P. Silvester und C. R. S. Haslam. Magnetotelluric modelling by the finite element method. *Geophysical Prospecting*, 20(4):872–891, Dezember 1972.
- [SI13] Y. Sato und H. Igarashi. Model reduction of three-dimensional eddy current problems based on the method of snapshots. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5):1697–1700, Mai 2013.
- [SL04] B. Salimbahrami und B. Lohmann. A simulation-free nonlinear model order-reduction approach and comparison study. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 10(3–4):317–329, 2004.
- [SLL02] R. D. Slone, J.-F. Lee, und R. Lee. Automating multipoint galerkin AWE for a FEM fast frequency sweep. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2):637–640, März 2002.
- [SLL03] R. D. Slone, R. Lee, und J.-F. Lee. Well-conditioned asymptotic waveform evaluation for finite elements. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(9):2442–2447, 2003.
- [Som15] A. Sommer. *Effiziente und zuverlässige Ordnungsreduktionsverfahren zur breitbandigen Berechnung der Richtcharakteristik von Finite-Elemente-Modellen phasengesteuerter Gruppenantennen*. Dissertation, Universität des Saarlandes, 2015.
- [Son13] N. T. Son. A real time procedure for affinely dependent parametric model order reduction using interpolation on Grassmann manifolds. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(8):818–833, 2013.
- [SPLL12] Y. Shao, Z. Peng, K. H. Lim, und J.-F. Lee. Non-conformal domain decomposition methods for time-harmonic Maxwell equations. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2145):2433–2460, September 2012.
- [SS02] B. Schölkopf und A. J. Smola. *Learning with Kernels*. The MIT Press, 2002.
- [SS11] S. A. Sauter und C. Schwab. *Boundary Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 2011.
- [ŠSD04] P. Šolín, K. Segeth, und I. Doležel. *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [Str10] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. Swedenborg Press, Neuauflage, November 2010.

- [Sul01] C. R. Sullivan. Computationally efficient winding loss calculation with multiple windings, arbitrary waveforms, and two-dimensional or three-dimensional field geometry. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 16(1):142–150, 2001.
- [TB97] L. N. Trefethen und D. Bau. *Numerical Linear Algebra*. Siam, 1997.
- [TH05] A. Taflove und S. C. Hagness. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, 2005.
- [Ton01] E. Tonti. Finite formulation of the electromagnetic field. *Progress in Electromagnetics Research*, 32:1–44, 2001.
- [UNW⁺92] T. Ueyama, S. Nishi, K. Wajima, K. Umetsu, und T. Nishisaka. 3-D analyses of electromagnetic field including conductors connected with voltage sources. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1385–1388, März 1992.
- [vdS06] A. J. van der Schaft. Port-hamiltonian systems: an introductory survey. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. III*, S. 1339–1365, Madrid, Spanien, 2006. European Mathematical Society Publishing House.
- [Vec99] G. Vecchi. Loop-star decomposition of basis functions in the discretization of the EFIE. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(2):339–346, Februar 1999.
- [WC82] J. Weiss und Z. J. Csendes. A one-step finite element method for multi-conductor skin effect problems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101(10):3796–3803, Oktober 1982.
- [Wei96] T. Weiland. Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 9(4):295–319, 1996.
- [WH12] D. Wirtz und B. Haasdonk. A-posteriori error estimation for parameterized kernel-based systems. In *7th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD '12)*, S. 763–768, Wien, Österreich, Februar 2012.
- [WH13] D. Wirtz und B. Haasdonk. A vectorial kernel orthogonal greedy algorithm. *Dolomites Research Notes on Approximation*, 6:83–100, 2013.
- [Wil56] C. H. Wilcox. An expansion theorem for electromagnetic fields. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9:115–134, 1956.
- [Wir13] D. Wirtz. *Model Reduction for Nonlinear Systems: Kernel Methods and Error Estimation*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2013.

-
- [WKH12] D. Wirtz, N. Karajan, und B. Haasdonk. Model order reduction of multiscale models using kernel methods. Technischer Bericht, Universität Stuttgart, 2012.
- [WV12] W. Wang und M. N. Vouvakis. Mesh morphing strategies for robust geometric parameter model reduction. In *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, S. 1–2, Juli 2012.
- [Yee66] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3):302–307, 1966.
- [ZC06] Y. Zhu und A. C. Cangellaris. *Multigrid finite element methods for electromagnetic field modeling*. IEEE Press series on electromagnetic wave theory. John Wiley & Sons, 2006.
- [Zhu09] Z. Zhu. A parameterized mask model for lithography simulation. In *Proceedings of the 46th Annual Design Automation Conference (DAC ’09)*, S. 963–968, New York, USA, 2009. ACM.
- [ZT00] O. C. Zienkiewicz und R. L. Taylor. *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*. Butterworth-Heinemann, 5. Auflage, 2000.