

Algebraische Methoden zur Parameteridentifikation für lineare unendlichdimensionale Systeme

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades

der Doktorin der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät II

– Physik und Mechatronik –

der Universität des Saarlandes

von

NICOLE GEHRING

Saarbrücken

2015

Tag des Kolloquiums: 06.08.2015

Dekan: Prof. Dr.-Ing. G. Frey

Mitglieder des
Prüfungsausschusses: Prof. Dr.-Ing. M. Möller
Prof. Dr.-Ing. habil. J. Rudolph
Prof. Dr.-Ing. habil. B. Lohmann
Dr.-Ing. F. Felgner

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem Verfahren zur Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt.

Saarbrücken, 11. August 2015

Ort, Datum

Nicole Gehring

Kurzfassung

Während für durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschriebene Systeme eine Vielzahl an bekannten Verfahren zur Parameteridentifikation zur Verfügung stehen, basieren jene für Systeme unendlicher Dimension (wie Transportprozesse oder Leitungsprobleme) häufig auf endlichdimensionalen Ersatzmodellen. Der hier vorgestellte algebraische Zugang kommt ohne derartige Approximationen aus und ist in diesem Sinne exakt. Er nutzt neben der Laplace-Transformation mit dem Ritt-Algorithmus und dem Buchberger-Algorithmus zur Berechnung von Gröbner-Basen Methoden der kommutativen und Differentialalgebra, um eine einfache polynomiale Gleichung als Beziehung zwischen konzentrierten Messsignalen und den unbekannten Systemparametern herzuleiten. Letztlich erfordert die Berechnung der Parameter lediglich die Auswertung von Faltungsprodukten der Trajektorien gemessener Größen. In der Arbeit wird neben einem allgemeinen Algorithmus zur Identifikation der Parameter in partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ein entsprechendes Vorgehen für spezielle Gleichungen mit ortsabhängigen Koeffizienten diskutiert. Unterstützt sowohl durch Simulationsergebnisse als auch durch eine Messung illustrieren zahlreiche Fallstudien die Anwendung der algebraischen Methode zur Parameteridentifikation auch auf weitere Systemklassen wie beispielsweise fraktionale Systeme.

Abstract

While a wide range of methods of identification is known for finite-dimensional systems, this is not the case for systems of infinite dimension (such as transmission or diffusion processes). As a result, most methods rely on finite-dimensional approximations. In contrast, the algebraic approach presented here is an exact method that does not require any approximations. It derives simple polynomial equations relating the concentrated measurements and the unknown parameters by using the Laplace transform and applying methods of commutative and differential algebra such as the Ritt algorithm and the Buchberger algorithm for computing Gröbner bases. In the end, the identification of parameters requires only the calculation of convolution products of measurement signals. In addition to presenting the general identification procedure for partial differential equations with constant coefficients, this thesis discusses an equivalent approach for partial differential equations with spatially dependent coefficients. Reviewing a manifold of case studies, simulation results and experimental data serve to illustrate the identification method. They also show the applicability of the algebraic approach to a broader spectrum of systems such as fractional systems.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Herleitung von Identifikationsgleichungen für lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	7
2.1	Problemstellung	9
2.2	Herleitung einer Identifikationsgleichung am Beispiel einer schwingenden Saite	10
2.3	Herleitung von Messgleichungen	11
2.4	Aufstellen des Eliminationsproblems	13
2.5	Herleitung einer Identifikationsgleichung	16
2.6	Identifizierbarkeit	21
2.7	Anmerkung zum Fall inhomogener Anfangsbedingungen	24
3	Parameteridentifikation	27
3.1	Erzeugen neuer Gleichungen	27
3.2	Algebraische Identifikation der Parameter	29
3.2.1	Überparametrierung	29
3.2.2	Polynomiale Probleme	31
3.2.3	Anmerkung zur Berechnung der Parameter	34
3.3	Strukturierte und unstrukturierte Störungen der Messsignale	34
3.4	Aspekte der Implementierung	35
3.4.1	Diskretisierung	36
3.4.2	Asymptotische Approximation der Faltungsprodukte	36
3.5	Alternative, nicht-approximative Identifikationsmethoden in der Literatur	38
3.5.1	Ein Zugang für Totzeitsysteme mittels Distributionen	38
3.5.2	Identifikation auf der Basis einer Messgleichung	39
4	Fallstudien für lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	41
4.1	Ein Transportproblem	41
4.1.1	Herleitung einer Identifikationsgleichung	42
4.1.2	Simulationsergebnisse und asymptotische Approximation der Faltungsprodukte	43
4.1.3	Störung der Messsignale	45

4.2	Eine elektrische Leitung	46
4.2.1	Herleitung einer Identifikationsgleichung	47
4.2.2	Simulations- und Messergebnisse	49
4.2.3	Eine gestörte elektrische Leitung	50
4.3	Ein Euler-Bernoulli-Balken	54
5	Algebraische Identifikation für lineare partielle Differentialgleichungen mit ortsabhängigen Koeffizienten	59
5.1	Ein schweres Seil	59
5.1.1	Modell und Lösung	60
5.1.2	Fall 1: Identifikation im Fall ohne Last und ohne Kelvin-Voigt-Dämpfung	61
5.1.3	Fall 2: Identifikation im Fall mit Last und ohne Kelvin-Voigt-Dämpfung	64
5.1.4	Fall 3: Identifikation im Fall ohne Last und mit Kelvin-Voigt-Dämpfung	68
5.2	Eine ringförmige, elastische Platte	69
5.3	Allgemeine Beobachtungen und weitere Beispiele	72
6	Anwendung der algebraischen Identifikation auf weitere Systemklassen	75
6.1	Eine hydraulische Leitung	75
6.1.1	Mathematisches Modell	76
6.1.2	Herleitung einer Identifikationsgleichung	77
6.1.3	Simulationsergebnisse	79
6.2	Lineare fraktionale Systeme	80
6.2.1	Mathematische und systemtheoretische Grundlagen	83
6.2.2	Ein System mit einer fraktionalen Ableitung	84
6.2.3	Allgemeine Bemerkungen zur Identifikation von Parameter in Systemen endlicher Dimension mit fraktionalen Zeitableitungen	89
6.2.4	Ein System unendlicher Dimension mit einer fraktionalen Zeitableitung	90
6.3	Endlichdimensionale Systeme unbekannter Ordnung	92
6.3.1	Herleitung einer Identifikationsgleichung	92
6.3.2	Lösungen der Identifikationsgleichung	94
6.3.3	Beispiele	95
6.4	Bemerkung zu nichtlinearen Systemen	98
6.5	Bemerkung zu örtlich mehrdimensionalen Systemen	99
7	Zusammenfassung und Ausblick	101
A	Mathematischer Hintergrund	105
A.1	Laplace-Transformation	105
A.2	Kommutative Algebra	106

A.2.1	Gröbner-Basen	107
A.2.2	Buchberger-Algorithmus	108
A.2.3	Charakteristische Mengen	109
A.3	Differentialalgebra	109
A.3.1	Ritt-Algorithmus und charakteristische Mengen	110
A.4	Eigenschaften der Bessel-Funktionen	110
B	Alternative Herleitung der Differentialgleichungen der Fundamental- lösungen bezüglich der komplexen Veränderlichen der Laplace-Trans- formation	113
B.1	Fallunterscheidung in Abhängigkeit der Vielfachheit der Eigenwerte . .	114
B.2	Allgemeine Herleitung	117
B.3	Schweres Seil als Beispiel für ein System mit ortsabhängigen Koeffizienten	120
	Literaturverzeichnis	123

Kapitel 1

Einleitung

In vielen technischen Systemen hängen die Systemgrößen nicht nur von der Zeit sondern auch von einer Ortsvariable ab; beispielsweise die Temperaturverteilung bei thermischen Prozessen, elastische Strukturverformungen in der Mechanik oder die Diffusion und der Transport von Medien. Die mathematische Beschreibung derartiger dynamischer Prozesse führt auf partielle Differentialgleichungen (Dgl.), die im systemtheoretischen Kontext als Systeme mit verteilten Parametern oder Systeme unendlicher Dimension bezeichnet werden. Künftig wird eine wachsende Zahl technologischer Prozesse eine Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit der Systemgrößen in den sich stellenden Regelungsaufgaben erfordern, um unter anderem Anforderungen an Dynamik, Präzision oder Leichtbau gerecht zu werden.

In den letzten zwei Jahrzehnten wurden beispielsweise im Rahmen des flachheitsbasierten Entwurfs oder des sogenannten Backsteppings leistungsfähige Methoden sowohl für die Steuerung als auch für die Regelung derartiger Systeme entwickelt [Rud03a, Rud03b, KS08]. Die Anwendung der modellbasierten Verfahren setzt dabei die Kenntnis eines die Regelstrecke hinreichend gut beschreibenden mathematischen Modells voraus. Während die Struktur der Modelle aus einer physikalischen Modellbildung hervorgeht, müssen deren Parameter oft experimentell bestimmt werden.

Mit wenigen Ausnahmen basieren bekannte Methoden zur Identifikation von Parametern in linearen Systemen unendlicher Dimension auf endlichdimensionalen Ersatzmodellen – vgl. exemplarisch [GR95, CB02] sowie [PG76, Kub77] für eine ausführliche, wenn auch nicht ganz aktuelle Übersicht – nicht zuletzt, da für letztere Klasse eine Vielzahl an Methoden zur Parameteridentifikation zur Verfügung stehen [Lju87]. Geeignete Ersatzmodelle werden beispielsweise durch eine Diskretisierung der Ortsvariable oder eine modale Entwicklung der Lösung gewonnen. Die Notwendigkeit einer Approximation unterscheidet die meisten anderen Identifikationsmethoden vom hier vorgestellten algebraischen Ansatz, der sich einer Integraltransformation zur Algebraisierung bzgl. der Ortsvariable bedient und damit die Charakterisierung der Methode als *algebraisch* motiviert.

Die Idee der Verwendung einer Integraltransformation im Rahmen der Parameteridentifikation geht auf [Shi54] im Zusammenhang mit Systemen endlicher Dimension in Form einer Eingangs-Ausgangs-Gleichung zurück. Dabei dienen harmonische Funk-

tionen als Integralkern, um Ableitungen der bekannten Eingangs- und Ausgangssignale zu vermeiden. Ein entsprechender Ansatz findet sich in [PG66] für Systeme unendlicher Dimension, setzt jedoch die nur schwer realisierbare Kenntnis von verteilten Messgrößen voraus. Die Messung ortsabhängiger Größen wird auch in [DR94, BSDR97, OB00] für die Identifikation der Parameter örtlich verteilter Systeme angenommen, wodurch die Einsatzmöglichkeiten dieser Verfahren wesentlich eingeschränkt werden.

Basierend auf [Shi54] kam in [FSR03] mit der Laplace-Transformation eine spezielle Integraltransformation zum Einsatz (siehe auch [SRGRCRLJ14]). Der zunächst nur für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen vorgestellte Ansatz konnte schon wenige Jahre später auf lineare Totzeitsysteme [BRF06, BRF09] übertragen werden. Zeitgleich gelang in [RW07] die Erweiterung auf die Identifikation von Parametern für lineare örtlich eindimensionale partielle Dgln. (erster und) zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus konzentrierten Messsignalen.

Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall treten bei der Laplace-Transformation von Totzeitsystemen spezielle (transzendente) Operatoren auf, beispielsweise der Totzeitoperator $e^{-\tau s}$; die Gleichungen sind nicht mehr algebraisch in den Parametern. Um dennoch die Parameter in den in s transzendenten Funktionen identifizieren zu können, wird die Kenntnis jener Dgln. genutzt, denen die Funktionen bzgl. der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation genügen. Dadurch ergeben sich Gleichungen, die im Zeitbereich einfach zu interpretieren sind. Letztlich müssen zur Berechnung der Parameter lediglich Faltungsprodukte der Messsignale ausgewertet werden. Erschwerend kommt jedoch hinzu, dass die zu identifizierenden Parameter in polynomialer Form auftreten, wohingegen die Gleichungen im endlichdimensionalen Fall linear in diesen waren.

Zur Veranschaulichung des algebraischen Identifikationszugangs wird das einfache Totzeitsystem aus [RW07] aufgegriffen. Setzt man darin $b = 1$, so gilt

$$\dot{y}(t) = ay(t) + u(t - \tau) \quad (1.1)$$

mit dem um die unbekannte Totzeit $\tau > 0$ verzögerten Eingang u . Für die Messgrößen u und y , auf Basis derer die Systemparameter a und τ zu identifizieren sind, werden homogene Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad u(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0]$$

angenommen. Dann folgt durch Laplace-Transformation von (1.1)

$$(s - a)\hat{y} = \hat{u}e^{-\tau s}, \quad (1.2)$$

wobei $\hat{y}$ und $\hat{u}$ die Transformierten von y und u bezeichnen. Diese Gleichung lässt sich zwar nach der unbekannten Totzeit τ auflösen, eine Rücktransformation in den Zeitbereich ist nach der Umformung nicht möglich.

Da der Totzeitoperator $e^{-\tau s}$ mit

$$\left(\frac{d}{ds} + \tau\right)e^{-\tau s} = 0$$

einer (bekannten) Dgl. bzgl. der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation genügt, wird es im Folgenden möglich sein, eine im Parameter algebraische Gleichung zu ermitteln. Die Anwendung des entsprechenden Differentialoperators $\frac{d}{ds} + \tau$ auf die nach dem Totzeitoperator aufgelöste Gleichung (1.2) ermöglicht dessen Elimination:

$$\left(\frac{d}{ds} + \tau\right) \frac{(s-a)\hat{y}}{\hat{u}} = 0.$$

Nach elementaren Umformungen ergibt sich daraus

$$(1 - as^{-1})(\hat{u}\hat{y}' - \hat{u}'\hat{y}) + a^{-1}\hat{u}\hat{y} = -\tau(1 - as^{-1})\hat{u}\hat{y}, \quad (1.3)$$

mit $\hat{x}' = \frac{dx}{ds}$ der Ableitung nach s . Im Gegensatz zu (1.2) ist (1.3) algebraisch in den Parametern.

Da in (1.3) keine positiven Potenzen der komplexen Veränderlichen s auftreten, werden bei der Rücktransformation in den Zeitbereich Zeitableitungen der Messgrößen u und y vermieden¹, und es gilt

$$a \int_0^t \bar{y}_1(\sigma) d\sigma + a\tau \int_0^t \bar{y}_2(\sigma) d\sigma + \tau \bar{y}_2(t) = \bar{y}_1(t) + \int_0^t \bar{y}_2(\sigma) d\sigma \quad (1.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{t}u * y - u * \bar{t}y \\ \bar{y}_2 &= u * y \end{aligned}$$

und der identischen Abbildung $\bar{t} : t \mapsto t$. Da die Gl. (1.4) algebraisch (und nicht transzendent) in den zu identifizierenden Parametern a und τ ist, lassen sich diese mit Hilfe bekannter Methoden aus [Lju87] oder entsprechend [BRF06, RW07] identifizieren, d.h., aus den Faltungsprodukten der Messsignale berechnen.

Da das Totzeitsystem (1.1) äquivalent als Kopplung einer gewöhnlichen Dgl.

$$\dot{y}(t) = ay(t) + w(\ell, t)$$

und einer partiellen Dgl.

$$\partial_z w(z, t) + \frac{\ell}{\tau} \partial_t w(z, t) = 0, \quad z \in [0, \ell], t \geq 0$$

mit der Randbedingung $w(0, t) = u(t)$ und der homogenen Anfangsbedingung $w(z, 0) = 0$ dargestellt werden kann, liegt eine Übertragung des algebraischen Zugangs auf partielle Dgl. nahe, wie in [RW07] für solche erster und zweiter Ordnung geschehen. Die Grundidee der algebraischen Identifikation besteht dabei darin, zunächst einen Zusammenhang zwischen (mindestens) zwei konzentrierten Messgrößen herzuleiten, um auf diese Weise eine Art Eingangs-Ausgangs-Gleichung für das unendlichdimensionale System zu gewinnen. Durch (teilweise umfangreiche) Umformungen und Manipulationen dieser Beziehung ergeben sich in den zu identifizierenden Parametern polynomiale

¹Ggf. lässt sich das stets durch die (wiederholte) Multiplikation von (1.3) mit s^{-1} sicherstellen.

Gleichungen, deren Koeffizienten sich als einfache Faltungsprodukte der Messsignale darstellen, sogenannte Identifikationsgleichungen.

Die in dieser Arbeit vorgestellte algebraische Methode verallgemeinert den Ansatz aus [RW07] auf lineare örtlich eindimensionale partielle Dgln. beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten und zumindest exemplarisch auf solche mit ortsabhängigen Koeffizienten [GKRW12a, GKRW12b, GKRW12c]. Darüber hinaus werden Potentiale der Erweiterung auf weitere Systemklassen wie beispielsweise lineare fraktionale Systeme [GR12, GR13] und örtlich zweidimensionale Systeme [GRS12a, GRS12b, SGR13] aufgezeigt. Der Identifikationsalgorithmus ermöglicht dabei insbesondere die Identifikation jener Systemparameter, die keiner oder nur schwer einer direkten Messung zugänglich sind, und normalerweise aufwendig experimentell bestimmt werden müssen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in sieben Kapitel. Im Anschluss an diese Einleitung wird in Kapitel 2 die Herleitung von Identifikationsgleichungen allgemein für lineare partielle Dgln. mit konstanten Koeffizienten dargestellt. Ausgehend von der Laplace-Transformierten des partiellen Differentialgleichungssystems werden aus der Lösung der resultierenden gewöhnlichen Dgln. Beziehungen zwischen den konzentrierten Messgrößen ermittelt. In diesen sogenannten Messgleichungen treten in s transzendente Funktionen auf. Für deren Elimination mit Hilfe des Ritt-Algorithmus der Differentialalgebra kommen jene Dgln. zum Einsatz, denen die transzendenten Funktionen bzgl. s genügen, und die im Kapitel systematisch hergeleitet werden. Als Ergebnis ergeben sich in den unbekannten Parametern polynomiale Identifikationsgleichungen. In Kapitel 2 wird zudem die Frage der Identifizierbarkeit der Systemparameter diskutiert.

Basierend auf einer Identifikationsgleichung widmet sich Kapitel 3 schwerpunktmäßig der Lösung des zugehörigen polynomialen Parameterproblems. Dafür werden neben dem Zugang der Überparametrierung aus [RW07] weitere Ansätze zur Lösung der polynomialen Gleichungen angegeben, die vom Ritt-Algorithmus und vom Buchberger-Algorithmus (der kommutativen Algebra) Gebrauch machen. Das Kapitel gibt außerdem Hinweise zur systematischen Unterdrückung von Störungen der Messsignale im Zusammenhang mit der algebraischen Identifikation, sowie zur Implementierung der Identifikationsalgorithmen. Darüber hinaus erfolgt ein Vergleich des algebraischen Zugangs mit verwandten Identifikationsmethoden.

Die theoretischen Ergebnisse aus den Kapiteln 2 und 3 finden in Kapitel 4 Anwendung auf typische Beispiele partieller Dgln., wobei sowohl simulative als auch experimentelle Untersuchungen die Leistungsfähigkeit der algebraischen Identifikationsmethode unterstreichen. Mit einer Transportgleichung, einer elektrischen Leitung und einem Euler-Bernoulli-Balken dienen dabei Systeme zunehmender Ordnung (bzgl. der Ortsvariable) und Komplexität als Fallstudien.

In Kapitel 5 wird die Methode zumindest exemplarisch auf Systeme erweitert, die durch lineare partielle Dgln. mit ortsabhängigen Koeffizienten beschrieben werden. Die Herleitung von Beziehungen zwischen den Messgrößen gestaltet sich dabei insofern anspruchsvoller als im Fall konstanter Koeffizienten, als dass die Lösung von Dgln. mit ortsabhängigen Koeffizienten im Allgemeinen nicht-trivial ist. Mit dem schweren Seil und einer ringförmigen Platte werden Beispiele mit bekannter Lösung diskutiert. Sie

illustrieren, dass der algebraische Zugang für diese Systemklasse im Wesentlichen mit jenem für die Systeme in Kapitel 2 übereinstimmt.

Kapitel 6 fasst schließlich diverse Anwendungen der algebraischen Identifikation auf weitere Systemklassen zusammen. Mit einer hydraulischen Leitung wird der Zugang zunächst auf ein örtlich zweidimensionales System angewandt. Es wird an Beispielen illustriert, dass sich in fraktionalen Systemen sowohl deren nicht-ganzzahlige Ableitungsordnungen (bzgl. der Zeit) algebraisch identifizieren lassen als auch die übrigen Systemparameter. In Verallgemeinerung dessen wird gezeigt, dass sich die Ordnung gewöhnlicher Dgln. in Form von Eingangs-Ausgangs-Gleichungen ohne Eingangsableitungen eindeutig aus den Verläufen von Eingang und Ausgang berechnen lässt. Abschließende Bemerkungen zu nichtlinearen und örtlich mehrdimensionalen partiellen Dgln. geben einen ersten Ausblick in Bezug auf Erweiterungen des algebraischen Zugangs und schließen somit direkt an die Zusammenfassung in Kapitel 7 an.

Kapitel 2

Herleitung von Identifikationsgleichungen für lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die systematische Herleitung einer sogenannten Identifikationsgleichung für lineare partielle Dgln. mit konstanten Koeffizienten, wie im Folgenden beschrieben und in Ansätzen im Rahmen von [GKRW12c] präsentiert, stellt ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeit dar. Eine Identifikationsgleichung stellt dabei die konzentrierten Messgrößen des Systems in Relation mit dessen Parametern. Auf der Basis dieser exakten Beziehung, für deren Herleitung keinerlei Approximationen des zugrunde liegenden unendlichdimensionalen Systems erforderlich sind, lassen sich die Parameter ermitteln.

Der in Abbildung 2.1 schematisch dargestellte Algorithmus zur algebraischen Identifikation der Systemparameter lässt sich grob in vier Schritte unterteilen:

- 1.) die Überführung der partiellen Dgln. in gewöhnliche unter Verwendung der Laplace-Transformation,
- 2.) das Herstellen von Zusammenhängen zwischen den konzentrierten Messgrößen, sog. Messgleichungen, ausgehend von der Lösung des Randwertproblems,
- 3.) die Herleitung von Identifikationsgleichungen durch Elimination der transzendenten Funktionen in den Messgleichungen (mit Hilfe des Ritt-Algorithmus),
- 4.) die Identifikation der Parameter basierend auf den Identifikationsgleichungen (s. Kapitel 3).

Der erste Schritt motiviert die Bezeichnung der Identifikationsmethode als *algebraisch*, da durch die Laplace-Transformation eine Algebraisierung bzgl. der Zeit erfolgt. Die Namensgebung geht auf den Aufsatz in [FSR03] zurück, worin der algebraische Ansatz

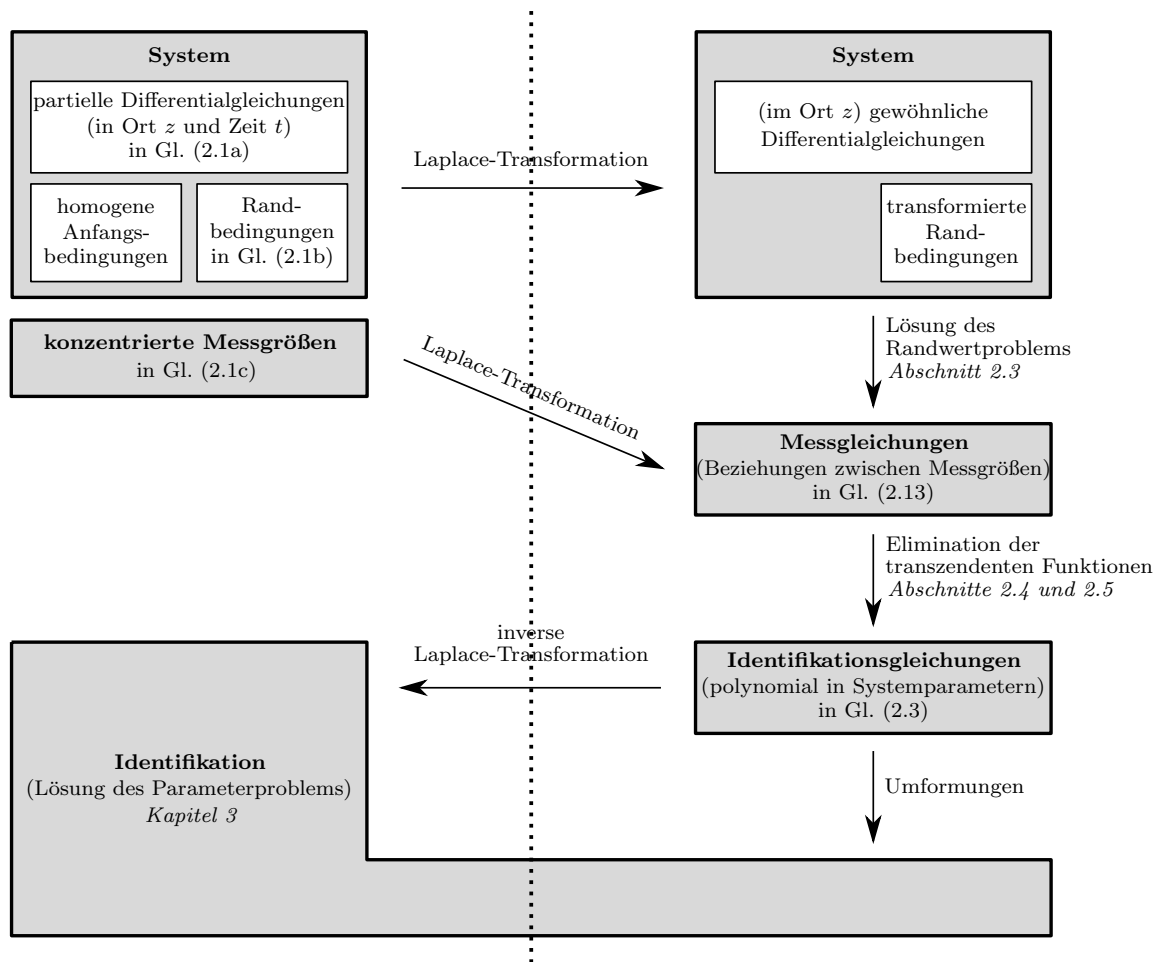


Abbildung 2.1: Vereinfachte schematische Darstellung der Vorgehensweise bei der algebraischen Identifikation von Parametern.

für gewöhnliche Dgln. vorgeschlagen wurde. Durch die Laplace-Transformation gehen diese gewöhnlichen Gln. in algebraische über, wobei die anschließend auf dieser Basis durchgeführten Operationen – insbesondere die algebraische Ableitung $\frac{d}{ds}$ nach der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation – zur Extraktion bzw. zur Berechnung der Systemparameter rein algebraischer Natur sind.

Im Folgenden wird zunächst die Problemstellung für die Identifikation in Form der betrachteten Systemklasse und der verfügbaren Messgrößen formuliert. Einem exemplarischen Ansatz zur Lösung dieses Problems schließt sich ein systematischer Algorithmus zur Herleitung von Identifikationsgleichungen in den Abschnitten 2.3–2.5 an, der im Wesentlichen den zuvor aufgeführten ersten drei Phasen der algebraischen Identifikation entspricht. Abschließend finden sich Bemerkungen zur Identifizierbarkeit der Parameter sowie zum Fall inhomogener Anfangsbedingungen für die partiellen Dgln., die sonst als homogen angenommen werden. Die eigentliche Berechnung und damit Identifikation der Systemparameter erfolgt auf der Basis der Identifikationsgleichung und wird in Kapitel 3 behandelt.

2.1 Problemstellung

Betrachtet werden Systeme, deren verteilte Größen $w_1, \dots, w_q$ sowohl vom Ort z als auch von der Zeit t abhängen. Das mathematische Modell des örtlich eindimensionalen Systems besteht aus q homogenen, linear unabhängigen partiellen Dgln.

$$\sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \sum_{\ell=1}^q a_{i,j,k,\ell} \partial_t^k \partial_z^j w_{\ell}(z, t) = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.1a)$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{i,j,k,\ell}$, homogenen Anfangsbedingungen und geeigneten Randbedingungen

$$\sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \sum_{m=0}^{\gamma} \sum_{\ell=1}^q b_{i,j,k,m,\ell} \partial_t^k \partial_z^j w_{\ell}(z_m, t) = \sum_{\bar{k}=0}^{\beta} \sum_{\bar{\ell}=1}^r c_{i,\bar{k},\bar{\ell}} \frac{d^{\bar{k}}}{dt^{\bar{k}}} v_{\bar{\ell}}(t), \quad i = 1, \dots, \bar{\alpha}, \quad (2.1b)$$

worin $v_{\bar{\ell}}$ konzentrierte Größen – beispielsweise Stelleingriffe – bezeichnen. Über entsprechende Beziehungen

$$\sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \sum_{m=0}^{\gamma} \sum_{\ell=1}^q b_{i,j,k,m,\ell} \partial_t^k \partial_z^j w_{\ell}(z_m, t) = \sum_{\bar{k}=0}^{\beta} \sum_{\bar{\ell}=1}^r c_{i,\bar{k},\bar{\ell}} \frac{d^{\bar{k}}}{dt^{\bar{k}}} v_{\bar{\ell}}(t) + y_{i-\bar{\alpha}}(t), \quad i = \bar{\alpha} + 1, \dots, \bar{\alpha} + N, \quad (2.1c)$$

sind N konzentrierte Messgrößen y_i definiert, die im Gegensatz zu den ebenfalls konzentrierten Größen $v_{\bar{\ell}}$ bekannt sind. Wird eine der Größen $\hat{v}_{\bar{\ell}}$ ebenfalls gemessen oder ist aufgrund ihres Charakters als eine Stellgröße bekannt, so lässt sich dieser Sachverhalt über eine entsprechende Gl. der Form (2.1c) berücksichtigen.

Die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Systemparameter $a_{i,j,k,\ell}, b_{i,j,k,m,\ell}, c_{i,\bar{k},\bar{\ell}} \in \mathbb{R}$, zumindest sofern möglich, aus den konzentrierten Messgrößen $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$. Man beachte, dass aufgrund der homogenen Anfangsbedingungen mindestens $N = 2$ Signale gemessen werden müssen, da – im Wesentlichen – für eine Identifikation der Systemparameter die Reaktion des Systems auf eine bekannte Anregung vorhanden sein muss. Allgemein gelte

$$N \geq 1 + r. \quad (2.2)$$

Die Lösung dieser Aufgabe soll auf dem Ansatz aus [RW07] aufsetzen, um unter Verwendung der Laplace-Transformation eine als Identifikationsgleichung bezeichnete Beziehung

$$F(s^{-1}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{y}}'', \dots) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

herzuleiten. Die ggf. vektorielle Funktion F sei polynomial in all ihren Argumenten, also dem Reziproken der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation, dem Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ als Untermenge der Systemparameter sowie den Messgrößen $\hat{\mathbf{y}}$ und einer endlichen Anzahl deren Ableitungen nach s . So ergibt sich aus der Darstellung von F im Zeitbereich ein polynomiales Problem in den zu identifizierenden Parametern $\boldsymbol{\theta}$, das als Grundlage für die Identifikation in Kapitel 3 dient.

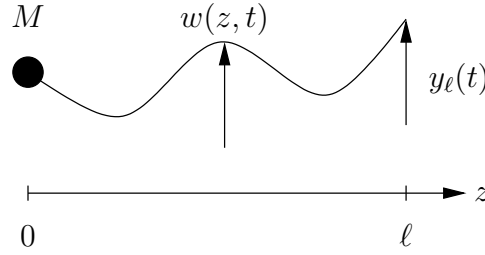


Abbildung 2.2: Schwingende Saite mit Punktmasse.

Definition 2.1 (Identifikationsgleichung). *Eine Identifikationsgleichung ist eine Gleichung der Form (2.3), in der die Funktion F polynomial in all ihren Argumenten ist. Als Identifikationsgleichung wird zudem die zugehörige Darstellung $\mathcal{L}^{-1}\{F\} = \mathbf{0}$ im Zeitbereich bezeichnet.*

2.2 Herleitung einer Identifikationsgleichung am Beispiel einer schwingenden Saite

Betrachtet wird die ebene Bewegung einer schwingenden Saite der Länge ℓ , an deren einem Ende sich ein als Punktmasse modellierter Körper befindet und deren anderes Ende frei beweglich ist (vgl. Abb. 2.2). Die Änderung der Auslenkung w der Saite wird durch die Wellengleichung

$$\partial_z^2 w(z, t) - \mu^2 \partial_t^2 w(z, t) = 0 \quad (2.4a)$$

und die Randbedingungen

$$m \partial_t^2 w(0, t) = \partial_z w(0, t), \quad w(\ell, t) = y_\ell(t) \quad (2.4b)$$

beschrieben, wobei μ den Kehrwert der Ausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet und m den Quotienten der Masse am Ende der Saite und der Zugspannung in der Saite. Als Messgrößen steht neben y_ℓ die Auslenkung der Last zur Verfügung:

$$y_0(t) = w(0, t), \quad y_\ell(t) = w(\ell, t). \quad (2.4c)$$

Zunächst wird eine Beziehung zwischen den Messgrößen (2.4c) benötigt. Aus der Laplace-Transformierten¹

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(z) - \mu^2 s^2 \hat{w}(z) = 0$$

von (2.4a) mit $\hat{w} = \mathcal{L}\{w\}$ erhält man für homogene Anfangsbedingungen die Lösung

$$\hat{w}(z) = \frac{1}{2}(e^{\mu s z} + e^{-\mu s z})\hat{w}(0) + \frac{1}{2\mu s}(e^{\mu s z} - e^{-\mu s z})\frac{d\hat{w}}{dz}(0) \quad (2.5)$$

¹vgl. Abschnitt A.1

in Abhängigkeit der Randwerte bei $z = 0$. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2.4b) und der Definition der Messsignale (2.4c) ergibt sich daraus

$$\hat{y}_\ell = \frac{1}{2\mu}(ms + \mu)\hat{y}_0 e^{\mu s \ell} - \frac{1}{2\mu}(ms - \mu)\hat{y}_0 e^{-\mu s \ell}. \quad (2.6)$$

Man erkennt, dass die zu identifizierenden Parameter als Argumente der transzendenten Fundamentallösungen auftreten, weshalb (2.6) nicht direkt nach diesen aufgelöst werden kann.

In dem Bestreben, die beiden Exponentialfunktionen $e^{\mu s \ell}$ und $e^{-\mu s \ell}$ zu eliminieren, wird diese Beziehung zwischen den beiden Messsignalen nach s abgeleitet. Zusammen mit (2.6) erhält man auf diese Weise ein Gleichungssystem, das nach den Exponentialfunktionen aufgelöst werden kann:

$$\begin{aligned} e^{\mu s \ell} &= \frac{\ell m \mu s - l \mu^2 - m}{\ell m^2 s^2 - l \mu^2 - m} \frac{\hat{y}_\ell}{\hat{y}_0} + \frac{ms - \mu}{\ell m^2 s^2 - l \mu^2 - m} \left(\frac{\hat{y}_\ell}{\hat{y}_0} \right)' \\ e^{-\mu s \ell} &= \frac{-\ell m \mu s - l \mu^2 - m}{\ell m^2 s^2 - l \mu^2 - m} \frac{\hat{y}_\ell}{\hat{y}_0} + \frac{ms + \mu}{\ell m^2 s^2 - l \mu^2 - m} \left(\frac{\hat{y}_\ell}{\hat{y}_0} \right)' \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden in der zweiten Ableitung von (2.6) nach s ersetzt. Das führt mit

$$\begin{aligned} (m + \ell \mu^2) (\hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell'' - 2 \hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell' + 2 (\hat{y}_0')^2 \hat{y}_\ell - \hat{y}_0 \hat{y}_0'' \hat{y}_\ell) - \ell^2 \mu^2 (3m + \ell \mu^2 - m^2 \ell s^2) \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell \\ - m^2 \ell (s^2 (\hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell'' - 2 \hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell' + 2 (\hat{y}_0')^2 \hat{y}_\ell - \hat{y}_0 \hat{y}_0'' \hat{y}_\ell) + 2s (\hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell - \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell') + 2 \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell) = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

auf eine Gleichung, die polynomial ist in den (transformierten) Messgrößen $\hat{y}_0$ und $\hat{y}_\ell$ sowie deren erster und zweiter Ableitung nach s , den Parametern ℓ , m und μ sowie der komplexen Veränderlichen s selbst. Folglich ist eine Interpretation im Zeitbereich sehr einfach, insbesondere nachdem (2.7) mit s^{-2} multipliziert wurde, um Ableitungen der Messgrößen nach der Zeit zu vermeiden. Auf die Frage, welche der drei Parameter sich daraus tatsächlich ermitteln lassen wird später eingegangen.

2.3 Herleitung von Messgleichungen

Zur Herleitung von Messgleichungen als Zusammenhängen zwischen den (transformierten) Messgrößen in $\hat{\mathbf{y}} = \mathcal{L}\{\mathbf{y}\}$ wird für die Laplace-Transformation von (2.1a) eine Darstellung erster Ordnung eingeführt:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dz}(z) = \hat{A}\hat{\mathbf{x}}(z), \quad \hat{A} \in \mathbb{R}(s)^{n \times n}, \quad (2.8)$$

mit $\hat{\mathbf{x}}(z) \in \mathbb{R}^n$. Dabei bezeichnet n die Ordnung des Gleichungssystems (2.1a) bzgl. des Ortes z . Im Gegensatz zu den Betrachtungen in [KW13], die in großen Teilen mit jenen in diesem Abschnitt übereinstimmen, sind hier die Einträge der Matrix $\hat{A}$

rational und nicht polynomial² in s . Die zu (2.8) gehörenden Laplace-transformierten Randbedingungen (2.1b) und der Definitionen (2.1c) der Messsignale können in der Form

$$\sum_{m=0}^{\gamma} \hat{B}_{m,1} \hat{\mathbf{x}}(z_m) + \hat{C}_1 \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (2.9a)$$

$$\sum_{m=0}^{\gamma} \hat{B}_{m,2} \hat{\mathbf{x}}(z_m) + \hat{C}_2 \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{y}} \quad (2.9b)$$

angegeben werden, mit $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_r)^T$ und in s polynomialen Matrizen $\hat{B}_{m,1} \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$, $\hat{B}_{m,2} \in \mathbb{R}[s]^{N \times n}$, $\hat{C}_1 \in \mathbb{R}[s]^{n \times r}$, $\hat{C}_2 \in \mathbb{R}[s]^{N \times r}$.

In der allgemeinen Lösung

$$\hat{\mathbf{x}}(z) = \hat{\Phi}(z) \hat{\mathbf{x}}(0) \quad (2.10)$$

von (2.8) bezeichnet $\hat{\Phi}(z) = e^{\hat{A}z}$ die Matrix-Exponentialfunktion. Setzt man die Lösung in (2.9) ein, so ergibt sich die in s und den Einträgen von $\hat{\Phi}(z_m)$ polynomiale Blockmatrix $\hat{P} \in \mathcal{R}^{(n+N) \times (n+r)}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\gamma} \hat{B}_{m,1} \hat{\Phi}(z_m) & \hat{C}_1 \\ \sum_{m=0}^{\gamma} \hat{B}_{m,2} \hat{\Phi}(z_m) & \hat{C}_2 \end{pmatrix}}_{\hat{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(0) \\ \hat{\mathbf{v}} \end{pmatrix}}_{\hat{\xi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

wobei $\mathcal{R}$ einen Polynomring in den Einträgen von $\hat{\Phi}(z_m)$, $m = 0, \dots, \gamma$ über dem Ring $\mathbb{R}[s]$ der Polynome in der komplexen Veränderlichen der Laplace-Transformation bezeichnet. Aufgrund der Annahme $N \geq 1 + r$ (vgl. (2.2)) weist $\hat{P}$ mehr Zeilen als Spalten auf. Daher existiert

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_{1,1} & \hat{U}_{1,2} \\ \hat{U}_{2,1} & \hat{U}_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_1 \in \mathcal{R}^{(n+r) \times (n+N)}, \hat{U}_2 \in \mathcal{R}^{(N-r) \times (n+N)}$$

mit einer linksteilerfremden Matrix $\hat{U}_{2,2}$ derart, dass

$$\hat{U} \hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{\hat{P}} \\ 0_{(N-r) \times (n+N)} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\hat{\hat{P}} \hat{\xi} = \hat{U}_{1,2} \hat{\mathbf{y}} \quad (2.12a)$$

$$0 = \hat{U}_{2,2} \hat{\mathbf{y}} \quad (2.12b)$$

gilt. Da $\mathcal{R}$ kein Bézout-Ring ist [Zer00], kann eine linksteilerfremde Matrix $\hat{U}_{2,2}$ zwar nicht immer zu einer unimodularen Matrix $\hat{U}$ ergänzt werden, auf die Bedeutung der

²Durch eine Einschränkung auf polynomiale Einträge ließe sich mit der Darstellung erster Ordnung nicht allgemein die Laplace-Transformation von (2.1a) darstellen (vgl. z.B. die normierte Wellengleichung mit Kelvin-Voigt-Dämpfung (z.B. [CLL98]): $w_{zzt} + w_{zz} = w_{tt}$).

Multiplikation mit einer nicht unimodularen Matrix $\hat{U}$, durch die (2.11) und (2.12) nicht äquivalent wäre, wird hier jedoch nicht weiter eingegangen (vgl. [KW13] für eine vergleichbare Diskussion).

Während (2.12a) im Wesentlichen den Anfangswert $\hat{\mathbf{x}}(0)$ und die unbekannten Größen in $\hat{\mathbf{v}}$ in Abhängigkeit von $\hat{\mathbf{y}}$ definiert, liegt mit (2.12b) eine Beziehung zwischen den Messsignalen vor. Diese im Folgenden als Messgleichungen bezeichneten $N - r$ Beziehungen lassen sich in der Form

$$\hat{D}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \quad \hat{D} \in \mathcal{R}^{(N-r) \times N} \quad (2.13)$$

angeben³. Die Gleichung ist damit polynomial in den Messgrößen $\hat{\mathbf{y}}$, der komplexen Veränderlichen s sowie den Einträgen $\hat{\phi}_{i,j}(z_m) = \mathbf{e}_i^T \hat{\Phi}(z_m) \mathbf{e}_j$ von $\hat{\Phi}(z_m)$, mit $\mathbf{e}_j$ dem Einheitsvektor mit einer Eins in der j -ten Zeile.

Definition 2.2 (Messgleichung). *Eine Messgleichung ist eine Gleichung der Form (2.13), in der die Einträge der Matrix $\hat{D}$ polynomial in all ihren Argumenten sind.*

Da die transzendenten Funktionen $\hat{\phi}_{i,j}(z_m)$ nichtlinear von den zu identifizierenden Parametern abhängen, muss als nächstes geklärt werden, wie sich diese aus den Messgleichungen extrahieren lassen. In dieser Arbeit soll dafür im sich anschließenden Abschnitt gezeigt werden, dass die Matrix-Exponentialfunktion $\hat{\Phi}$ einer Dgl. bzgl. s genügt und sich deren Einträge $\hat{\phi}_{i,j}$ daher systematisch aus (2.13) eliminieren lassen.

2.4 Aufstellen des Eliminationsproblems

Wie aus der Herleitung einer Identifikationsgleichung für die schwingende Saite hervorgeht, besteht eine wesentliche Aufgabe in der Elimination der dem Fundamentalsystem von (2.8) entsprechenden transzendenten Funktionen in der Lösung (2.10). Möglich ist dies stets unter Berücksichtigung jener Dgln., denen diese Funktionen bzgl. s genügen.

Für eine systematische Herleitung der Dgln. wird von der Darstellung erster Ordnung in (2.8) ausgegangen. Die zu $\hat{A}$ gehörende Matrix-Exponentialfunktion lässt sich unter Verwendung der Matrix $\hat{V}$ der Eigen- und Hauptvektoren von $\hat{A}$ und der Jordan-Matrix $\hat{J}$ in der Form

$$\hat{\Phi}(z) = e^{\hat{A}z} = \hat{V}e^{\hat{J}z}\hat{V}^{-1} \quad (2.14)$$

darstellen.

Um aus der Ableitung von (2.14) nach s ,

$$\hat{\Phi}'(z) = \hat{V}'e^{\hat{J}z}\hat{V}^{-1} + \hat{V}(e^{\hat{J}z})'\hat{V}^{-1} + \hat{V}e^{\hat{J}z}(\hat{V}^{-1})', \quad (2.15)$$

eine autonome Dgl. in $\hat{\Phi}$ zu erhalten, macht man sich zu Nutze, dass einerseits $\hat{V}^{-1}\hat{V}' + (\hat{V}^{-1})'\hat{V} = 0$ aufgrund der Regularität von $\hat{V}$ gilt und andererseits für jede quadratische

³Im Kontext der Gröbner-Basen (vgl. Abschnitt A.2) lassen sich derartige Beziehungen unter Verwendung des Buchberger-Algorithmus für ein aus den Gleichungen von (2.11) definiertes Ideal berechnen.

Matrix $\hat{M}$ mit analytischen Einträgen in s [Sni64, Wil67]

$$(e^{\hat{M}})' = \int_0^1 e^{\tau \hat{M}} \hat{M}' e^{(1-\tau)\hat{M}} d\tau.$$

Damit folgt für (2.15)

$$\hat{\Phi}'(z) = -\hat{V}(\hat{V}^{-1})'\hat{V}e^{\hat{J}z}\hat{V}^{-1} + \hat{V} \int_0^1 e^{\tau \hat{J}z} \hat{J}' z e^{(1-\tau)\hat{J}z} d\tau \hat{V}^{-1} - \hat{V} e^{\hat{J}z} \hat{V}^{-1} \hat{V}' \hat{V}^{-1}$$

bzw. unter Berücksichtigung der Definition (2.14) von $\hat{\Phi}$

$$\hat{\Phi}'(z) = -\hat{V}(\hat{V}^{-1})'\hat{\Phi}(z) + \hat{V} \int_0^1 e^{\tau \hat{J}z} \hat{J}' z e^{(1-\tau)\hat{J}z} d\tau \hat{V}^{-1} - \hat{\Phi}(z) \hat{V}' \hat{V}^{-1}.$$

Die Diagonalmatrix $\hat{J}'$ und die Block-Diagonalmatrix $e^{\tau \hat{J}z}$ kommutieren aufgrund ihrer speziellen Struktur. Damit führt das erneute Einsetzen von (2.14) auf die gesuchte Matrix-Dgl.

$$\hat{\Phi}'(z) = \hat{W} \hat{\Phi}(z) + z(\hat{A} \hat{W} + \hat{A}' - \hat{W} \hat{A}) \hat{\Phi}(z) - \hat{\Phi}(z) \hat{W} \quad (2.16)$$

mit $\hat{W} = \hat{V}' \hat{V}^{-1}$.

Basierend auf [RW07] ist im Anhang B.2 eine alternative Herleitung des Differentialgleichungssystems bzgl. s für die Fundamentallösungen angegeben (vgl. (B.16)). Die Herleitung geht zur Vereinfachung der Darstellung von einer skalaren verteilten Größe w in (2.1a) aus, also $q = 1$. Da in jeder Darstellung erster Ordnung wie in (2.8) (für die Laplace-Transformierte von (2.1a)) die Matrix $\hat{A}$ entsprechend

$$\hat{T}^{-1} \hat{A} \hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{F}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{F}_q \end{pmatrix}, \quad \hat{T} \in \mathbb{R}(s)^{n \times n} \quad (2.17)$$

transformiert werden kann [Ber09, Theorem 5.2.3], mit Matrizen

$$\hat{F}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\hat{f}_{i,0} & -\hat{f}_{i,1} & \cdots & \cdots & -\hat{f}_{i,n_i-1} \end{pmatrix}$$

in Frobenius-Form, stellt diese Vereinfachung keinerlei Beschränkung der Allgemeinheit dar. Tatsächlich ist eine Überführung von (2.16) auf die Form (B.16) möglich.

Dafür wird von $q = 1$ und $\hat{A} = \hat{F}_1$ ausgegangen. Da die Matrix $\hat{A}$ und ihr Exponential kommutieren, lassen sich die n^2 Gln. für die n^2 Einträge von $\hat{\Phi}$ in (2.16) und die n^2 Gln. in

$$\hat{A} \hat{\Phi}(z) = \hat{\Phi}(z) \hat{A} \quad (2.18)$$

zu n linear unabhängigen Gln. für n Komponenten von $\hat{\Phi}$ vereinfachen. Aufgrund der Frobenius-Form von $\hat{A}$, können wegen (2.18) alle Komponenten von $\hat{\Phi}$ in Abhängigkeit jener n der ersten Zeile dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1^T &= \mathbf{e}_1^T \hat{\Phi} \\ \hat{\phi}_{i+1}^T &= \hat{\phi}_i^T \hat{A} = \hat{\phi}_1^T \hat{A}^i, \quad i = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Als Ergebnis lässt sich (2.16) in der Form

$$\hat{P}\left(\frac{d}{ds}, z\right) \hat{\phi}_1(z) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

darstellen, mit der quadratischen Polynommatrix $\hat{P}\left(\frac{d}{ds}, z\right) \in \mathbb{R}(s)\left[\frac{d}{ds}, z\right]^{n \times n}$. Da der Vektor $\hat{S}$ in (B.16) der ersten Zeile $\hat{\phi}_1$ von $\hat{\Phi}$ entspricht, sind beide Darstellungen äquivalent, also bis auf die Multiplikation mit einer unimodularen Matrix von links identisch.

Für die im folgenden Abschnitt beschriebene systematisch Elimination der Einträge $\hat{\phi}_{i,j}(z_m)$ der Fundamentalmatrix aus den Messgleichungen (2.13) kann folglich entweder auf die Matrix-Dgl. (2.16) zurückgegriffen werden – unter Berücksichtigung der Kommutativität (2.18) – oder auf eine äquivalente Polynommatrix-Darstellung (2.19). Damit die Elimination auf eine in s bzw. s^{-1} polynomiale Identifikationsgleichung (2.3) führt (und somit eine einfache Interpretation im Zeitbereich zulässt), müssen die der Elimination zugrunde liegenden Gleichungen die gleiche Polynomialität aufweisen.

Die Messgleichungen (2.13) sind offensichtlich polynomial in s sowie den Einträgen $\hat{\phi}_{i,j}(z_m)$. Gleiches gilt für die in Anhang B.2 hergeleitete Polynommatrix. Hingegen werden in (2.16) aufgrund der Abhängigkeit von den Eigen- und Hauptvektoren in $\hat{V}$ die Einträge der Matrizen $\hat{W}$ allgemein irrationale Funktionen von s sein. Aus der Transformation (2.17) über $\mathbb{R}(s)$ in Block-Frobenius-Form wird jedoch klar, dass sich in Verallgemeinerung des Falls $q = 1$ in Anhang B.2 für jede $(n \times n)$ -Matrix $\hat{\Phi}(z) = e^{\hat{A}z}$ unter Berücksichtigung von (2.18) eine Polynommatrix-Darstellung der Form (2.19) für n Komponenten der Fundamentalmatrix angeben lässt. Folglich existiert für jedes System (2.1a) partieller Dgln. mit Randbedingungen (2.1b) und konzentrierten Messgrößen eine in s bzw. s^{-1} polynomiale Identifikationsgleichung (2.3).

Beispiel 4.1 (Schwingende Saite (Aufstellen des Eliminationsproblems))

Für die Laplace-Transformierte von (2.4a) kann eine Darstellung

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dz}(z) = \hat{A}\hat{\mathbf{x}}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 s^2 & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(z)$$

mit $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{w}, \frac{d\hat{w}}{dz})^T$ angegeben werden. Deren Lösung führt unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2.4b) auf die Messgleichung

$$\hat{y}_\ell = \mathbf{e}_1^T \hat{\Phi}(\ell) \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ ms^2 \hat{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

als Beziehung zwischen den Messsignalen in (2.4c). Die Matrix-Exponentialfunktion $\hat{\Phi}(\ell)$ genügt entsprechend (2.16) der Matrix-Dgl.

$$\hat{\Phi}'(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\ell}{s} \\ m\ell s & \frac{1}{s} \end{pmatrix} \hat{\Phi}(\ell) - \hat{\Phi}(\ell) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix},$$

bei einer Wahl von

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{m}}{2}s & -\frac{\sqrt{m}}{2}s \end{pmatrix}, \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} \sqrt{m}s & 0 \\ 0 & -\sqrt{m}s \end{pmatrix}.$$

Berücksichtigt man die Kommutativität von $\hat{A}$ und ihrem Matrix-Exponential, also

$$\hat{A}\hat{\Phi}(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 s^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{1,1}(\ell) & \hat{\phi}_{1,2}(\ell) \\ \hat{\phi}_{2,1}(\ell) & \hat{\phi}_{2,2}(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{1,1}(\ell) & \hat{\phi}_{1,2}(\ell) \\ \hat{\phi}_{2,1}(\ell) & \hat{\phi}_{2,2}(\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 s^2 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\Phi}(\ell)\hat{A}$$

lassen sich die vier Dgl. für die vier Komponenten von $\hat{\Phi}$ auf jene zwei reduzieren, die in der Messgleichung (2.20) auftreten und für die Elimination aus dieser benötigt werden:

$$\hat{\phi}'_{1,1}(\ell) = \mu^2 \ell s \hat{\phi}_{1,2}(\ell) \quad (2.21a)$$

$$\hat{\phi}'_{1,2}(\ell) = \frac{\ell}{s} \hat{\phi}_{1,1}(\ell) - \frac{1}{s} \hat{\phi}_{1,2}(\ell). \quad (2.21b)$$

2.5 Herleitung einer Identifikationsgleichung

Den Ausgangspunkt für die systematische Elimination der transzendenten Funktionen $\hat{\phi}_{i,j}(z_m)$ aus den Messgleichungen (2.13) stellen die Dgln. (2.16) sowie die Kommutativität entsprechend (2.18) dar. Da sich diese Gleichungen alternativ als ein (ggf. reduziertes) in $\hat{\phi}_{i,j}(z_m)$ lineares Gleichungssystem der Form (2.19) schreiben lassen, wie im vorangegangenen Abschnitt 2.4 gezeigt, wird hier von dieser Polynommatrix-Darstellung ausgegangen.

Definiert man mit

$$\hat{\psi} = \{\hat{\phi}_{i,j}(z_m) | i, j = 1, \dots, n \wedge m = 0, \dots, \gamma\}$$

die Menge aller zu eliminierenden Funktionen, dann lassen sich (2.19) sowie ggf. weitere polynomiale Gleichungen in $\hat{\psi}$ als multivariate differential-algebraische Gleichungen der Form

$$f_i(s, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\psi}, \hat{\mathbf{y}}', \hat{\psi}', \dots, \bar{\boldsymbol{\theta}}) = 0, \quad i = 1, \dots, \sigma \quad (2.22)$$

angeben, mit der Menge $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \{\{a_{i,j,k,l}\}, \{b_{i,j,k,l,m}\}, \{c_{i,\bar{k},\bar{l}}\}\}$ der Systemparameter aus (2.1). Im Folgenden werden die differentiellen Polynome f_i vereinfachend als

$$f_i(s, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\psi}, \bar{\boldsymbol{\theta}}), \quad i = 1, \dots, \sigma$$

geschrieben. Die unbekannten, konstanten Systemparameter $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ hängen im Gegensatz zu den zu eliminierenden Größen in $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ und den bekannten Messgrößen $\hat{\mathbf{y}}$ nicht von s ab, d.h. $\bar{\boldsymbol{\theta}}' = \mathbf{0}$.

Die Elimination von $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ lässt sich systematisch durch eine verallgemeinerte Polynomdivision (für differentielle Polynome) bewerkstelligen [LG94]. Man macht sich leicht klar, dass durch die Gültigkeit von (2.22) ebenfalls all jene Gleichungen erfüllt sind, die durch Ableiten nach s sowie Addition, Skalierung und Multiplikation der f_i daraus hervorgehen, beispielsweise

$$\frac{d}{ds} f_1(s, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) + (\bar{\theta}_1 + s^2 - 2\hat{y}_4) f_2(s, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) f_3(s, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) = 0.$$

So lassen sich durch geeignete Kombination der f_i sukzessive Gleichungen gewinnen, in denen die Elemente von $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ nicht mehr auftreten.

Sei $\mathbb{R}(s)\{s, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}\}$ ein differentieller Polynomring über dem differentiellen Körper $\mathbb{R}(s)$ der rationalen Ausdrücke in der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation mit reellen Koeffizienten und der Ableitung $\frac{d}{ds}$ (vgl. Abschnitt A.3). Dann erzeugt die Menge der differentiellen Polynome $f_i \in \mathbb{R}(s)\{\hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}\}$, $i = 1, \dots, \sigma$ ein differentielles Ideal⁴ $I = [f_1, \dots, f_\sigma]$. Vergleichbar mit dem Buchberger-Algorithmus lassen sich mit dem Ritt-Algorithmus sogenannte charakteristische Mengen für eine Monomordnung bestimmen [Rit50, Kol73]. Da hier die Größen in $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ zu eliminieren sind, wird

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} > \bar{\boldsymbol{\theta}} > \hat{\mathbf{y}} \quad (2.23)$$

definiert⁵, wobei für die Ableitungsordnung $\dots > x'' > x' > x$ gilt (entsprechend (A.4)).

Mit der Monomordnung (2.23) ergibt sich durch Nullsetzen der charakteristischen Mengen A_i des differentiellen Ideals I ein Gleichungssystem (vgl. Abschnitt A.3.1)

$$A_1(s, \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} \quad (2.24a)$$

$$A_2(s, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} \quad (2.24b)$$

$$A_3(s, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_1, \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} \quad (2.24c)$$

$$A_4(s, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_1, \hat{\boldsymbol{\psi}}_2, \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} \quad (2.24d)$$

$$\vdots$$

Sollten differentielle Polynome A_1 existieren, so kann anhand deren zugehöriger Darstellungen im Zeitbereich geprüft werden, ob konkrete, gegebene Trajektorien $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ die Gleichung $\mathcal{L}^{-1}\{A_1\} = \mathbf{0}$ erfüllen. Dies liefert einen Anhaltspunkt dafür, ob ein Systemmodell (2.1) ein reales System mit den Messsignalen $\mathbf{y}$ hinreichend gut abbildet

⁴Es wird (ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit) angenommen, dass alle differentiellen Ideale in dieser Arbeit Primideale sind. Insbesondere für das im folgenden Abschnitt definierte spezielle Ideal I^* prüft man leicht, dass dieses prim ist.

⁵Während sämtliche theoretischen Betrachtungen für eine beliebige Monomordnung gelten, wird in allen Beispielen in dieser Arbeit stets mit der lexikografischen Monomordnung gearbeitet, sofern nicht gegenteilig spezifiziert (siehe Definition A.2).

und damit eine Identifikation der Parameter $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ möglich ist. Noch wesentlicher sind die Polynome A_2 , die unmittelbar auf Identifikationsgleichungen der Form (2.3) bzw.

$$\bar{F}(s^{-1}, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

führen. Die Abhängigkeit von s^{-1} soll dabei hervorheben, dass es sich um einen in s^{-1} polynomialen Ausdruck handelt. Für die über dem differentiellen Körper $\mathbb{R}(s)$ definierten differentiellen Polynome kann eine solche Darstellung stets gefunden werden.

Bemerkung 5.1 (Komplexität der Elimination): *Die Gleichungen in (2.19) sind linear in den zu eliminierenden Größen $\hat{\boldsymbol{\psi}}$. Gleiches gilt folglich für die Menge der differentiellen Polynome f_i , von denen I erzeugt wird. Im Zusammenhang mit der Elimination der $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ könnte man in diesem Fall von linearer Eliminierbarkeit sprechen.*

Hingegen existieren allgemeiner auch polynomiale Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den im Wesentlichen den Fundamentallösungen einer gewöhnlichen Dgl. entsprechenden Größen $\hat{\boldsymbol{\psi}}$. So gilt für die Fundamentalmatrix $\hat{\Phi}$ der (ortsunabhängigen) Matrix $\hat{A}$ in der Darstellung (2.8) erster Ordnung stets die Liouvillesche Formel (vgl. [BSMM01])

$$\det \hat{\Phi}(z) = e^{Spur(\hat{A})}. \quad (2.26)$$

Man erkennt unmittelbar, dass der Term auf der linken Seite dieser Gleichung nicht linear in $\hat{\phi}_{i,j}(z_m)$ bzw. $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ ist. Es wird stark vermutet, dass diese und vergleichbare Abhängigkeitsbeziehungen nicht aus den Polynomen in (2.19) hervorgehen, also nicht im Ideal I liegen. Damit ist I nicht identisch zu einem Ideal, das $\det \hat{\Phi}(z) - e^{Spur(\hat{A})}$ enthält.

Die Eliminierbarkeit ist bei Berücksichtigung dieser polynomialen Beziehung nicht linear. Folglich steigt die Komplexität bei der Berechnung der charakteristischen Mengen (2.24) beträchtlich. Wie insbesondere das Beispiel der elektrischen Leitung in Abschnitt 4.2 zeigt, kann es im Rahmen der Identifikation dennoch von Vorteil sein, derartige polynomiale Abhängigkeitsbeziehungen zu berücksichtigen.

Auf der Basis der Identifikationsgleichungen (2.25) stellt sich nunmehr die Frage, ob sich sämtliche Systemparameter $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ aus beliebigen Trajektorien der Messsignale $\mathbf{y}$ bestimmen lassen. Für die Beantwortung dieser Frage soll im folgenden Abschnitt weiterhin mit der Repräsentation (2.25) der Identifikationsgleichung im Bildbereich der Laplace-Transformation gearbeitet werden, auch wenn eine analoge Betrachtung im Zeitbereich möglich und im Zusammenhang mit den Trajektorien der Messsignale mitunter naheliegender wäre.

Beispiel 5.2 (Schwingende Saite (Identifikationsgleichungen))

Dass eine mit Hilfe des Ritt-Algorithmus ermittelte Identifikationsgleichung abhängig von den der Elimination zu Grunde gelegten Polynome f_i bzw. dem zugehörigen differentiellen Ideal ist, kann leicht am Beispiel der schwingenden Saite erkannt werden.

Mit $\hat{\psi}_1 = \hat{\phi}_{1,1}(\ell)$, $\hat{\psi}_1 = \hat{\phi}_{1,2}(\ell)$ ergeben sich aus (2.20) und (2.21)

$$f_1 = \hat{\psi}'_1 - \mu^2 \ell s \hat{\psi}_2 \quad (2.27a)$$

$$f_2 = s \hat{\psi}'_2 - \ell \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2 \quad (2.27b)$$

$$f_3 = \hat{y}_\ell - \hat{\psi}_1 \hat{y}_0 - m s^2 \hat{\psi}_2 \hat{y}_0 \quad (2.27c)$$

$$f_4 = \hat{\psi}_1^2 - \mu^2 s^2 \hat{\psi}_2^2 - 1, \quad (2.27d)$$

wobei man mit f_4 die trigonometrische Identität

$$(\hat{\phi}_{1,1}(z))^2 - \mu^2 s (\hat{\phi}_{1,2}(z))^2 = 1$$

aus der Liouvilleschen Formel $\det \hat{\Phi} = e^{Spur(\hat{A})} = 1$ findet. Abhängig von der Definition des Ideals ergeben sich daraus unterschiedliche Beziehungen als Grundlagen für Identifikationsgleichungen⁶:

$$\begin{aligned} I_1 = [f_1, f_2, f_3] : \quad & F_1 = \ell m^2 \mu^2 s^2 \hat{b}_1 = 0 \\ I_2 = [f_2, f_3, f_4] : \quad & F_2 = m^3 s^4 (ms - \mu)(ms + \mu)(m^2 s^2 \hat{y}_0^2 + \mu^2 \hat{y}_\ell^2) \hat{b}_2 = 0 \\ I_3 = [f_1, f_3, f_4] : \quad & F_3 = \ell^2 m^3 \mu^4 s^3 (ms - \mu)(ms + \mu)(\hat{y}_\ell - \hat{y}_0)(\hat{y}_\ell + \hat{y}_0) \hat{b}_2 = 0 \\ I_4 = [f_1, f_2, f_3, f_4] : \quad & F_4 = \ell^2 m^2 \mu^2 s^2 \hat{b}_2 = 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 = (m + \ell \mu^2) & (\hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell'' - 2 \hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell' + 2 (\hat{y}_0')^2 \hat{y}_\ell - \hat{y}_0 \hat{y}_0'' \hat{y}_\ell) - \ell^2 \mu^2 (3m + \ell \mu^2 - m^2 \ell s^2) \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell \\ & - m^2 \ell (s^2 (\hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell'' - 2 \hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell' + 2 (\hat{y}_0')^2 \hat{y}_\ell - \hat{y}_0 \hat{y}_0'' \hat{y}_\ell) + 2s (\hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell - \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell') + 2 \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell) \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_2 = \ell^2 m^4 s^4 \hat{y}_0^4 - 2 \ell m^3 s^2 \hat{y}_0^4 + \mu^2 & ((\hat{y}_0')^2 \hat{y}_\ell^2 - 2 \hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell \hat{y}_\ell' + \hat{y}_0^2 (\hat{y}_\ell')^2) \\ & + \ell \mu^2 (2m + \ell \mu^2) (\hat{y}_0^4 - \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell^2) + m^2 \ell^2 \mu^2 s^2 (\hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell^2 - 2 \hat{y}_0^4) \\ & - m^2 (s^2 ((\hat{y}_0')^2 \hat{y}_\ell^2 - 2 \hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell \hat{y}_\ell' + \hat{y}_0^2 (\hat{y}_\ell')^2) + 2s (\hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell^2 - \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell \hat{y}_\ell') - \hat{y}_0^4 + \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell^2). \end{aligned} \quad (2.28b)$$

Für nicht verschwindende Systemparameter werden $\hat{b}_1 = 0$ und $\hat{b}_2 = 0$ von $F_1 = 0$ und $F_4 = 0$ impliziert. Man erkennt, dass $\hat{b}_1 = 0$ mit der in (2.7) hergeleiteten Gleichung übereinstimmt. Im Vergleich zu F_1 und F_4 weisen F_2 und F_3 eine größere Lösungsmenge an Systemparametern auf, die die zugehörigen Gleichungen für gegebene Messsignale erfüllen.

Das Beispiel unterstreicht die Beobachtung aus Bemerkung 5.1. Die Ideale I_2, I_3, I_4 , in denen das nichtlineare Polynom f_4 enthalten ist, weisen im Vergleich zu I_1 charakteristische Mengen bzw. eine Identifikationsgleichung höherer Komplexität auf.

Beispiel 5.3 (Schwingende Saite (Definition der zu eliminierenden Funktionen))

Welcher Zusammenhang zwischen der Definition der zu eliminierenden Funktionen

⁶Aufgrund der umfangreichen symbolischen Berechnungen werden hier lediglich die $A_2(s, \bar{\theta}, \hat{y}) = \mathbf{0}$ entsprechenden Gleichungen angegeben. Eine schrittweise Herleitung der charakteristischen Mengen kann am Beispiel des Transportbandes in Abschnitt 4.1.1 nachvollzogen werden.

(bzw. des zugehörigen Ideals) und einer aus deren Elimination resultierenden Identifikationsgleichung besteht, soll erneut am Beispiel der schwingenden Saite untersucht werden. Der Einfachheit halber seien die Messgrößen

$$\hat{y}_1 = \hat{w}(0), \quad \hat{y}_2 = \hat{w}(\ell), \quad \hat{y}_3 = \frac{d\hat{w}}{dz}(\ell)$$

bekannt.

In einem ersten Ansatz zur Herleitung einer Identifikationsgleichung wird das Fundamentalsystem

$$\hat{S}_1(z) = e^{\mu s z}, \quad \hat{S}_2(z) = e^{-\mu s z}$$

gewählt bzw. entsprechende Funktionen definiert. Folglich lässt sich die Lösung in Abhängigkeit der Randwerte bei $z = \ell$, also der bekannten Randgrößen, als

$$\hat{w}(z) = \frac{\hat{S}_2(z)\hat{S}_1(\ell) + \hat{S}_1(z)\hat{S}_2(\ell)}{2} \hat{w}(\ell) + \frac{\hat{S}_2(z)\hat{S}_1(\ell) - \hat{S}_1(z)\hat{S}_2(\ell)}{2\mu s} \frac{d\hat{w}}{dz}(\ell) \quad (2.29)$$

darstellen, woraus unmittelbar die Messgleichung als Beziehung zwischen $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$ und $\hat{y}_3$ folgt. Für die vier zu eliminierenden Funktionen $\hat{\psi}_1 = \hat{S}_1(0)$, $\hat{\psi}_2 = \hat{S}_2(0)$, $\hat{\psi}_3 = \hat{S}_1(\ell)$, $\hat{\psi}_4 = \hat{S}_2(\ell)$ ergibt sich aus der Messgleichung und den Dgln. der ψ_i bzgl. s das Gleichungssystem

$$2\mu s \hat{y}_1 = \mu s (\hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 + \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_4) \hat{y}_2 + (\hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 - \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_4) \hat{y}_3, \quad (2.30a)$$

$$\hat{\psi}'_1 = 0, \quad \hat{\psi}'_2 = 0, \quad \hat{\psi}_3 = \mu \ell \hat{\psi}_3, \quad \hat{\psi}_4 = -\mu \ell \hat{\psi}_4. \quad (2.30b)$$

Basierend auf der Lösung (2.29) empfiehlt sich die alternative Definition der Funktionen

$$\hat{T}_1(z) = \frac{\hat{S}_2(z)\hat{S}_1(\ell) + \hat{S}_1(z)\hat{S}_2(\ell)}{2}, \quad \hat{T}_2(z) = \frac{\hat{S}_2(z)\hat{S}_1(\ell) - \hat{S}_1(z)\hat{S}_2(\ell)}{2\mu s},$$

die ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden. Erneut stellt man fest, dass die Funktionen $\hat{\hat{\psi}}_1 = \hat{T}_1(0)$ und $\hat{\hat{\psi}}_2 = \hat{T}_2(0)$ in der resultierenden Messgleichung einem Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung genügen. Demnach müssen sie aus dem Gleichungssystem

$$\hat{y}_1 = \hat{\hat{\psi}}_1 \hat{y}_2 + \hat{\hat{\psi}}_2 \hat{y}_3, \quad \hat{\hat{\psi}}'_1 = \mu^2 \ell \hat{\hat{\psi}}_2, \quad s \hat{\hat{\psi}}'_2 = \ell \hat{\hat{\psi}}_1 - \hat{\hat{\psi}}_2 \quad (2.31)$$

eliminiert werden.

Mit Hilfe des Ritt-Algorithmus ergibt sich für ein auf der Basis von (2.31) definiertes differentielles Ideal

$$I_2 = [\hat{y}_1 - \hat{\hat{\psi}}_1 \hat{y}_2 - \hat{\hat{\psi}}_2 \hat{y}_3, \hat{\hat{\psi}}'_1 - \mu^2 \ell \hat{\hat{\psi}}_2, s \hat{\hat{\psi}}'_2 - \ell \hat{\hat{\psi}}_1 + \hat{\hat{\psi}}_2]$$

eine Identifikationsgleichung

$$\hat{F}_2(\mu, \ell, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) = 0,$$

wobei auf die Angabe der Abhängigkeit von den Ableitungen der $\hat{y}_i$ nach s verzichtet wurde. Hingegen weist eine entsprechende Identifikationsgleichung basierend auf (2.30) mit

$$I_1 = [2\mu s \hat{y}_1 - \mu s (\hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 + \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_4) \hat{y}_2 - (\hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 - \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_4) \hat{y}_3, \hat{\psi}_3 - \mu \ell \hat{\psi}_3, \hat{\psi}_4 + \mu \ell \hat{\psi}_4, \hat{\psi}'_1, \hat{\psi}'_2]$$

die faktorisierte Form

$$\hat{F}_1(\mu, \ell, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) = (\hat{f}_1(\mu, \ell, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3))^2 (\hat{f}_2(\mu, \ell, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3))^3 (\hat{F}_2(\mu, \ell, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3))^2 = 0$$

auf, mit $\hat{F}_2$ als einem der Faktoren. Da weder $\hat{f}_1$ noch $\hat{f}_2$ im Ideal I_2 enthalten sind, folgen $\hat{f}_1 \neq 0$ und $\hat{f}_2 \neq 0$.

Das Beispiel macht deutlich, dass die Komplexität einer Identifikationsgleichung stark mit der Definition des Ideals verknüpft ist, aus dessen charakteristischen Mengen sie hervorgeht.

2.6 Identifizierbarkeit

Zunächst macht man sich anhand des einfachen Beispiels

$$c_1 \hat{y}_1 + c_2 \hat{y}_2 + c_3 \hat{y}_3 = 0 \quad (2.32)$$

mit nicht verschwindenden Parametern klar, dass ausgehend von dieser Identifikationsgleichung lediglich zwei Quotienten der drei Parameter bestimmt werden können, z.B. c_2/c_1 und c_3/c_1 , da die Gleichung nicht normiert ist. Wird das Beispiel durch Setzen von $\hat{y}_2 = \hat{y}_3$ leicht modifiziert, so sind c_2 und c_3 nicht mehr unterscheidbar. Folglich lässt sich nur noch ein Parameter $\frac{c_2+c_3}{c_1}$ bestimmen.

Im ersten Schritt ist daher zu prüfen, welche Systemparameter oder Funktionen von Systemparametern identifizierbar sind. Es bezeichne dafür $\mathbf{p}$ einen Spaltenvektor mit allen in der Identifikationsgleichung (2.25) auftretenden Monomen der Systemparameter $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ und $\mathbf{Y}^T$ einen Zeilenvektor mit den auftretenden Monomen in s^{-1} sowie den Messgrößen $\hat{\mathbf{y}}$ und deren Ableitungen nach s derart, dass die Identifikationsgleichung als

$$\mathbf{Y}^T M \mathbf{p} = \mathbf{Y}^T U^{-1} H \mathbf{p} = 0$$

geschrieben werden kann. Dann ist M eine Matrix mit reellen Einträgen, die stets in Zeilen-Echelon-Form $H = UM$ transformiert werden kann [Mey00]. Durch diese Transformation folgen aus $H\mathbf{p}$ bzw. genauer nach Skalierung mit beispielsweise dem ersten Eintrag dieses Vektors die identifizierbaren Koeffizienten $\bar{\alpha}_i$ und mit $\mathbf{Y}^T U^{-1}$ die zugehörigen Faktoren als differentielle Polynome h_i derart, dass (2.25) in

$$0 = h_0(s^{-1}, \hat{\mathbf{y}}) + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \bar{\alpha}_i(\bar{\boldsymbol{\theta}}) h_i(s^{-1}, \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.33)$$

übergeht, mit $\text{Rang } M = n_\alpha + 1$. Ähnlich wie im Beispiel (2.32) sind auf der Basis dieser in $\bar{\alpha}_i$ affinen Identifikationsgleichung lediglich die in den Systemparametern $\bar{\boldsymbol{\theta}}$

rationalen Funktionen $\bar{\alpha}_i$ identifizierbar⁷. Da (2.33) ausgehend von einem spezifischen Ideal hergeleitet wird, hängt die Eigenschaft der Identifizierbarkeit von der Definition eines Ideal ab.

Die Menge der differentiellen Polynomen (vgl. (2.22)), die aus den Messgleichungen (2.13), den Dgln. (2.16) sowie der Kommutativitätsbeziehung (2.18) hervorgehen, erzeugt ein spezielles differentielles (Prim-)Ideal I^* . Für dieses lässt sich stets mindestens eine Gleichung der Form (2.33) herleiten.

Definition 2.3 (Algebraische Identifizierbarkeit). *Für das differentielle Ideal I^* werden die Funktionen $\bar{\alpha}_i$ der Parameter $\boldsymbol{\theta}$ in (2.33) als algebraisch identifizierbar bezeichnet.*

Die Definition der algebraische Identifizierbarkeit beschränkt sich damit auf spezielle Ideale. Deren Erzeugende sind linear in $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ und dessen Ableitungen nach s sind, sofern gleiches für die Messgleichungen (2.13) gilt. Es wird stark vermutet, dass keine polynomiale Abhängigkeitsbeziehung – wie beispielsweise (2.26) – zwischen $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ derart existiert, dass ausgehend von einem zugehörigen Ideal Parameter identifizierbar sind, die dies zuvor nicht waren. Die algebraische Identifizierbarkeit ist damit eine Eigenschaft des Systems (2.8)–(2.9) (bzw. (2.1)). Sie ist unabhängig von (speziellen) für die Identifikation verwendeten Trajektorien der Messsignale.

Tatsächlich macht man sich erneut anhand des einfachen Beispiels (2.32) leicht klar, dass aus speziellen Trajektorien $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ nicht alle algebraisch identifizierbaren Parameter ermittelt werden können. Für den Fall einer verschwindenden Trajektorie $t \mapsto y_2(t) = 0$ lässt sich lediglich c_3/c_1 bestimmen. Der Quotient c_2/c_1 kann jedoch für jede andere Trajektorie von y_2 ermittelt werden. Identifizierbarkeit hängt demnach – anders als die algebraische Identifizierbarkeit – von den Trajektorien der Messsignale ab.

Dieses Beispiel unterstreicht, dass eine unzureichende Erregung des Systems (2.1a) mit den Randbedingungen (2.1b) bzw. spezielle Trajektorien der Messgrößen eine Identifikation gewisser Systemparameter verhindern können, obwohl diese algebraisch identifizierbar sind. Im Folgenden wird daher stets von einer hinreichenden Erregung (engl. *persistence of excitation*) ausgegangen. Für eine mathematisch exakte Definition dieser Eigenschaft wird auf [LG94] verwiesen.

Definition 2.4 (Hinreichende Erregung). *Die Trajektorien $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ eines Systems (2.1) werden als hinreichend erregend bezeichnet, wenn sich auf ihrer Basis die rationalen Funktionen $\bar{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, n_\alpha$ in (2.33) identifizieren lassen.*

⁷Für das am Anfang des Abschnitts diskutierte Beispiel $c_1\hat{y}_1 + c_2\hat{y}_3 + c_3\hat{y}_3 = 0$ erkennt man aus

$$\mathbf{Y}^T M \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 & \hat{y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

dass M in diesem Fall bereits in Zeilen-Echelon-Form vorliegt. Folglich lässt sich die Gleichung als $\hat{y}_1 + \bar{\alpha}\hat{y}_3 = 0$ mit $\bar{\alpha} = \frac{c_2+c_3}{c_1}$ darstellen.

Wie genau die Berechnung und damit die Identifikation der $\bar{\alpha}_i$ erfolgt, wird später erörtert. Zunächst soll jedoch untersucht werden, welche der Systemparameter $\bar{\theta}$ überhaupt aus $\bar{\alpha}_i$ berechnet werden können.

Beispiel 6.1 (Schwingende Saite (Algebraisch identifizierbare Parameter))

Für die schwingende Saite wurden mit (2.28) zwei Identifikationsgleichungen hergeleitet (von den positiven Potenzen von s abgesehen). Diese gingen aus den charakteristischen Mengen von vier unterschiedlich definierten differentiellen Idealen $I_1, \dots, I_4$ hervor, die jeweils aus Kombinationen der vier die betrachtete schwingende Saite beschreibenden differentiellen Polynome $f_1, \dots, f_4$ erzeugt wurden.

Entsprechend (2.33) lässt sich die erste Identifikationsgleichung $\hat{b}_1 = 0$ in (2.28) beispielsweise als

$$0 = \hat{h}_0 + \underbrace{\frac{m + \ell\mu^2}{\ell m^2}}_{\bar{\alpha}_1} \hat{h}_1 + \underbrace{\frac{\ell\mu^2(3m + \ell\mu^2)}{m^2}}_{\bar{\alpha}_2} \hat{h}_2 + \underbrace{\ell^2\mu^2}_{\bar{\alpha}_3} \hat{h}_3 \quad (2.34)$$

darstellen, mit

$$\hat{h}_0 = -(\hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell'' - 2\hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell' + 2(\hat{y}_0')^2 \hat{y}_\ell - \hat{y}_0 \hat{y}_0'' \hat{y}_\ell) - 2s^{-1}(\hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell - \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell') - 2s^{-2} \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell \quad (2.35a)$$

$$\hat{h}_1 = s^{-2}(\hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell'' - 2\hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell' + 2(\hat{y}_0')^2 \hat{y}_\ell - \hat{y}_0 \hat{y}_0'' \hat{y}_\ell) \quad (2.35b)$$

$$\hat{h}_2 = -s^{-2} \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell \quad (2.35c)$$

$$\hat{h}_3 = \hat{y}_0^2 \hat{y}_\ell. \quad (2.35d)$$

In den drei algebraisch identifizierbaren Koeffizienten $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$ treten mit m, ℓ und μ sämtliche Systemparameter auf (vgl. Definition 2.3). Dass man diese dennoch nicht alle aus den $\bar{\alpha}_i$ bestimmen kann, wird durch die Substitution $\theta_1 = m/\mu, \theta_2 = \mu\ell$ in (2.34) deutlich:

$$0 = \hat{h}_0 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1^2 \theta_2} \hat{h}_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1^2} (3\theta_1 + \theta_2) \hat{h}_2 + \theta_2^2 \hat{h}_3. \quad (2.36)$$

Dass lediglich θ_1 und θ_2 algebraisch identifizierbar sind, wird bereits anhand der differentiellen Polynome $f_1, \dots, f_4$ in (2.27) deutlich. Nach einer Substitution $\hat{\psi}_2 = \mu\hat{\psi}$ lassen sich diese ausschließlich in Abhängigkeit der Parametern θ_1 und θ_2 darstellen. Diese Beobachtung unterstützt die Vermutung, dass die algebraische Identifizierbarkeit unabhängig von in $\hat{\psi}$ polynomialen Abhängigkeitsbeziehungen ist.

Entsprechend verifiziert man auch anhand der zweiten Identifikationsgleichung $\hat{b}_2 = 0$ in (2.28), also

$$0 = \hat{h}_0 + \underbrace{\ell^2 m^2}_{\bar{\alpha}_1} \hat{h}_1 + \underbrace{\ell(2m + \ell\mu^2)}_{\bar{\alpha}_2} \hat{h}_2 + \underbrace{\frac{m^2}{\mu^2}}_{\bar{\alpha}_3} \hat{h}_3 + \underbrace{\frac{\ell m^3}{\mu^2}}_{\bar{\alpha}_4} \hat{h}_4 + \underbrace{\frac{\ell^2 m^4}{\mu^2}}_{\bar{\alpha}_5} \hat{h}_5 \quad (2.37)$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{h}_0 &= -s^{-4}(\hat{y}_0^2(\hat{y}_\ell')^2 + (\hat{y}_0')^2\hat{y}_\ell^2 - 2\hat{y}_0\hat{y}_0'\hat{y}_\ell\hat{y}_\ell') \\
\hat{h}_1 &= s^{-2}(2\hat{y}_0^4 - \hat{y}_0^2\hat{y}_\ell^2) \\
\hat{h}_2 &= s^{-4}(\hat{y}_0^2\hat{y}_\ell^2 - \hat{y}_0^4) \\
\hat{h}_3 &= s^{-2}(\hat{y}_0^2(\hat{y}_\ell')^2 + (\hat{y}_0')^2\hat{y}_\ell^2 - 2\hat{y}_0\hat{y}_0'\hat{y}_\ell\hat{y}_\ell') - 2s^{-3}(\hat{y}_0^2\hat{y}_\ell\hat{y}_\ell' - \hat{y}_0\hat{y}_0'\hat{y}_\ell^2) - s^{-4}(\hat{y}_0^4 - \hat{y}_0^2\hat{y}_\ell^2) \\
\hat{h}_4 &= 2s^{-2}\hat{y}_0^4 \\
\hat{h}_5 &= -\hat{y}_0^4,
\end{aligned}$$

dass aus dieser tatsächlich nur θ_1 und θ_2 identifizierbar sind:

$$0 = \hat{h}_0 + \theta_1^2\theta_2^2\hat{h}_1 + \theta_2(2\theta_1 + \theta_2)\hat{h}_2 + \theta_1^2\hat{h}_3 + \theta_1^3\theta_2\hat{h}_4 + \theta_1^4\theta_2^2\hat{h}_5. \quad (2.38)$$

Das Beispiel illustriert, dass die Eigenschaft der algebraischen Identifizierbarkeit der Parameter einer Identifikationsgleichung sich bereits anhand der ein Ideal erzeugenden Polynome erkennen lässt.

Basierend auf der exemplarischen Betrachtung anhand der schwingenden Saite wird mit $\boldsymbol{\theta}$ eine Menge mit der minimalen Anzahl an Elementen $\theta_i = t_i(\bar{\boldsymbol{\theta}})$ als Funktion der Systemparameter derart definiert, dass entsprechend (2.33)

$$0 = h_0(s^{-1}, \hat{\mathbf{y}}) + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i(\boldsymbol{\theta}) h_i(s^{-1}, \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.39)$$

gilt. Für (2.25) folgt

$$F(s^{-1}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{y}}) = 0.$$

Die Menge $\boldsymbol{\theta}$ umfasst damit die algebraisch identifizierbaren Parameter, deren Kardinalität n_θ nicht größer als n_α sein kann, da anderenfalls keine minimale Anzahl an Elementen θ_i definiert wäre.

2.7 Anmerkung zum Fall inhomogener Anfangsbedingungen

Beim dem hier verfolgten algebraischen Zugang zur Parameteridentifikation von partiellen Dgln. treten in den Laplace-Transformierten der partiellen Dgln. (2.1a) stets die Anfangsprofile der verteilten Größen auf, wobei sie im Unterschied zur Behandlung gewöhnlicher Dgln. in [FSR03] nicht allgemein eliminiert werden können. Das stellt eine wesentliche Einschränkung des algebraischen Zugangs dar, da durch Nullsetzen der Anfangsbedingungen im inhomogenen Fall das Identifikationsergebnis erheblich verfälscht wird. Dies kann für einfache Beispiele rechnerisch und für aufwändigere Systeme simulativ bestätigt werden.

Sind die Anfangsbedingungen für die verteilten Größen in (2.1a) inhomogen, so ist die zugehörige bzgl. der Zeit algebraisierte Gl. im Gegensatz zu (2.10) nicht autonom. Ihre Lösung kann in der Form

$$\hat{\mathbf{x}}(z) = \hat{\Phi}(z - z_0)\hat{\mathbf{x}}(z_0) + \int_{z_0}^z \hat{\Phi}(z - \sigma)\hat{\mathbf{H}}(\sigma) d\sigma.$$

angegeben werden, wobei die Anfangsbedingungen durch die nicht weiter spezifizierte vektorielle Funktion $\hat{\mathbf{H}}$ Berücksichtigung finden. Zwar gilt weiterhin die Dgl. (2.16) bzgl. s für die Fundamentalmatrix $\hat{\Phi}$, der Verlust der Polynomialität der Lösung $z \mapsto \hat{\mathbf{x}}(z)$ führt jedoch dazu, dass die Elimination von $\hat{\Phi}$ nicht für beliebige, unspezifizierte Anfangsbedingungen möglich ist, wie das Beispiel einer einfachen Transportgleichung unterstreicht.

Beispiel 7.1 (Transportgleichung)

Als Lösung der Laplace-Transformierten einer einfachen Transportgleichung $\partial_z w + a\partial_t w = 0$ mit Transportgeschwindigkeit $\frac{1}{a}$ ergibt sich

$$\hat{w}(z) = \hat{w}(z_0)\hat{\Phi}(z - z_0) + a \int_{z_0}^z \hat{\Phi}(z - \sigma)w_0(\sigma) d\sigma,$$

mit dem Anfangsprofil $w_0(z) = w(z, 0)$, wobei die Fundamentallösung $\hat{\Phi}(z) = e^{-asz}$ der Dgl. $\hat{\Phi}'(z) = -az\hat{\Phi}(z)$ genügt. Durch Ableitung der Lösung nach s und partielle Integration folgt

$$\hat{w}'(z) = (\hat{w}'(z_0) - a(z - z_0)\hat{w}(z_0))\hat{\Phi}(z - z_0) - a^2 \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{\tau} \hat{\Phi}(z - \sigma)w_0(\sigma) d\sigma d\tau.$$

Man erkennt, dass sich in Gegenwart einer nicht weiter spezifizierten Funktion w_0 die Fundamentallösung $\hat{\Phi}$ nicht durch Kombination der Lösung $z \mapsto \hat{w}(z)$ und ihrer Ableitungen nach s eliminieren lässt.

Möglich wird die Elimination, wenn die inhomogenen Anfangsbedingungen in dem Sinn bekannt sind, dass sie einer linearen Dgl. bekannter Ordnung bzgl. z mit ggf. unbekannten Parametern genügen, wobei die unbekannten Parameter entweder identifiziert oder algebraisch eliminiert werden können. Diese Voraussetzung wird nicht nur durch in z polynomiale Approximationen der Anfangsprofile erfüllt, sondern insbesondere auch für stationäre Lösungen von (2.1a), die in vielen Fällen als Ausgangspunkt von Messungen vorliegen.

Da die Parameteridentifikation in Gegenwart inhomogener Anfangsbedingungen mit der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methode schnell sehr komplex wird, wie ein einfaches Beispiel in [RW07] unterstreicht, soll hier nicht weiter auf diesen Fall eingegangen werden. Stattdessen sei auf den in [KW13] im Rahmen der algebraischen Identifikation wieder aufgegriffenen Optimierungsansatz verwiesen, bei dem auf die Elimination der Fundamentallösungen verzichtet und stattdessen die Parameter der Messgleichungen (2.13) im Zeitbereich durch numerische Optimierung dieser Lösung bestimmt werden.

Darüber hinaus sei auf den Ansatz in [BRF07b] und [Bel10] für lineare Totzeitsysteme verwiesen, bei dem durch Faltung mit nahezu verschwindenden Funktionen die Anfangsbedingungen näherungsweise eliminiert werden. Eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes auf die hier betrachtete Systemklasse scheint jedoch nicht möglich.

Kapitel 3

Parameteridentifikation

Nachdem in Kapitel 2 ausgehend von einem System partieller Dgln. mit zugehörigen Randbedingungen und homogenen Anfangsbedingungen mit (2.33) eine einfache, polynomiale Beziehung in den konzentrierten Messsignalen und den zu identifizierenden Parametern hergeleitet wurde, stellt sich nunmehr die Frage, wie die Parameter θ_i auf der Grundlage dieser Gleichung

$$0 = \hat{h}_0 + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i(\boldsymbol{\theta}) \hat{h}_i \quad (3.1)$$

zu berechnen sind. Da die Identifikationsgleichung (3.1) im Allgemeinen unterbestimmt sowohl bzgl. $\boldsymbol{\theta}$ als auch bzgl. $\boldsymbol{\alpha}$ ist, werden zur Lösung des Parameterproblems weitere Gleichungen benötigt.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden daher zunächst weitere Gleichungen auf der Basis von (3.1) erzeugt. Für die Lösung des resultierenden Gleichungssystems kommen anschließend in Abschnitt 3.2 vier verschiedene Ansätze zum Einsatz, die in Abbildung 3.1 schematisch dargestellt sind. Darüber hinaus widmet sich Abschnitt 3.3 dem Einfluss von Messstörungen auf die Identifikation. Bevor in Abschnitt 3.5 eine kurzer Vergleich des algebraischen Zugangs mit verwandten Identifikationsmethoden erfolgt, sind in Abschnitt 3.4 wichtige Aspekte im Zusammenhang mit der Implementierung der Identifikationsalgorithmen zusammengefasst.

3.1 Erzeugen neuer Gleichungen

Für die Berechnung der Parameter θ_i auf der Basis der Identifikationsgleichung (2.39) kann auf Grundideen der algebraischen Identifikation aus [FSR03] für Systeme mit konzentrierten Parametern zurückgegriffen werden, also solcher, die durch gewöhnliche lineare Dgln. beschrieben werden.

In [FSR03] wurde dafür mit negativen Potenzen von s multipliziert, was einer Integration der Identifikationsgleichung im Zeitbereich gleichkommt und bei einer hinreichenden Erregung auf unabhängige Gleichungen führt. In dieser Arbeit soll der Zugang

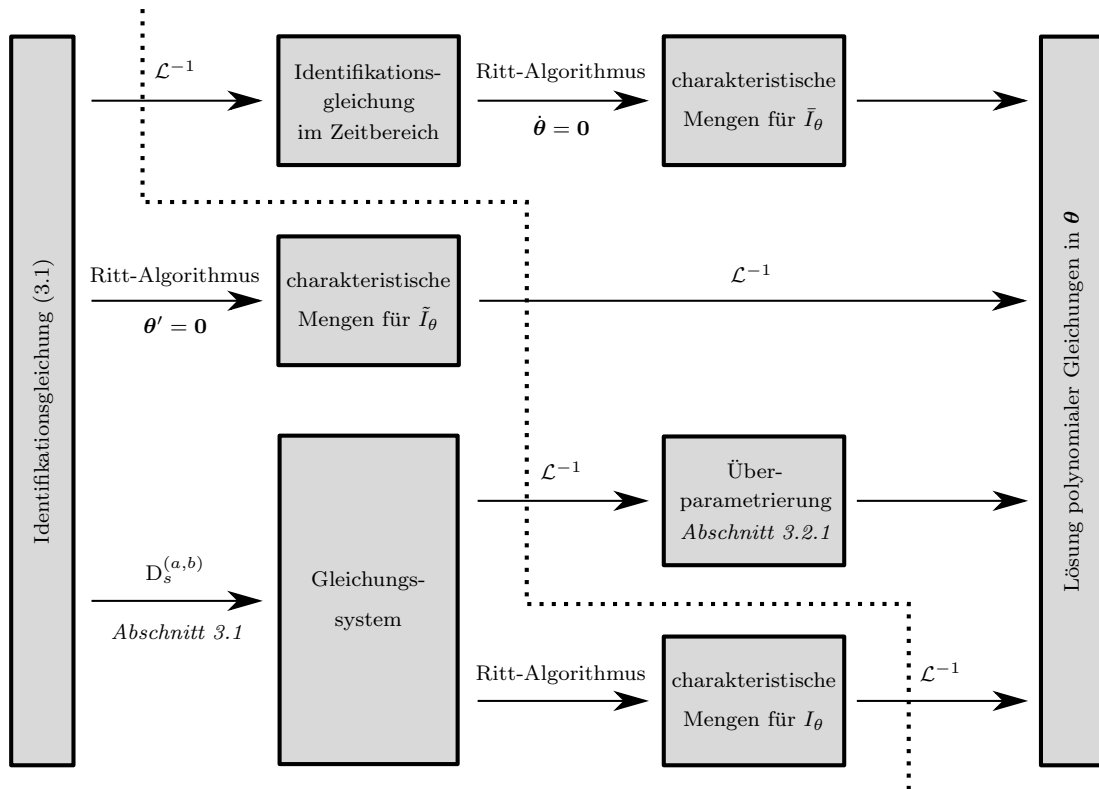


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der vier in dieser Arbeit diskutierten Vorgehensweisen zur Berechnung der Parameter θ auf der Basis einer (unterbestimmten) Identifikationsgleichung, wobei hier der vierte, der untere Ansatz bevorzugt wird.

aus [Mbo09] verfolgt werden, bei dem sich durch Anwendung eines Differentialoperators

$$D_s^{(a,b)} = s^{-b} \frac{d^a}{ds}, \quad a, b \in \mathbb{N}_0 \quad (3.2)$$

auf (3.1) im Zeitbereich neue Gleichungen

$$0 = h_0^{(a,b)}(t) + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i(\theta) h_i^{(a,b)}(t) \quad (3.3)$$

mit

$$h_i^{(a,b)}(t) = \frac{(-1)^a}{(b-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{b-1} \tau^a h_i(\tau) d\tau$$

generieren lassen. Hierbei besteht ein enger Zusammenhang mit der Methode der kleinsten Quadrate und es kann gezeigt werden, dass beide im Grenzübergang – bei Betrachtung einer gegen Unendlich gehenden Anzahl von Gleichungen des Typs (3.3) – identisch sind (siehe [Mbo09] oder auch [Knü15]).

Alternativ lassen sich unabhängige Gleichungen durch Anwendung des Dämpfungssatzes der Laplace-Transformation (vgl. (A.1)) generieren, also durch die Anwendung der Abbildung $s \mapsto s + a$ auf Gl. (3.1). Die Wahl des Parameters $a \in \mathbb{R}$ richtet sich nach dem Spektrum der Funktionen h_i , mit denen im Zeitbereich die Exponentialfunktion $t \mapsto e^{-at}$ multipliziert wird. Dieser Ansatz wurde beispielsweise in [BRF07a]

für Totzeitsysteme verfolgt und wird in Abschnitt 3.5.1 in einer exemplarischen Gegenüberstellung der Methode aus [BRF07a] und der in dieser Arbeit vorgestellten Identifikationsmethode näher erläutert. Zudem besteht ein enger Zusammenhang zum Ansatz in Abschnitt 3.4.2 zur Reduktion des numerischen Aufwands bei der Berechnung von Faltungsprodukten.

3.2 Algebraische Identifikation der Parameter

Im Gegensatz zu den endlichdimensionalen Systemen sind die Identifikationsgleichungen zumeist auch dann nichtlinear in den zu identifizierenden Parametern θ_i (vgl. z.B. Gln. (2.36) und (2.38)), wenn die zugrunde liegenden partiellen Dgln. und Randbedingungen linear in diesen Parametern sind.

Für die Berechnung der θ_i kommen unterschiedliche Zugänge in Frage. Auf zwei Ansätze, die im Zusammenhang mit den Fallstudien in den folgenden Abschnitten Anwendung finden, soll hier kurz eingegangen werden:

- Lösung eines linearen Gleichungssystems durch Überparametrierung,
- Lösung polynomialer Probleme unter Zuhilfenahme von Gröbner-Basen und charakteristischen Mengen.

3.2.1 Überparametrierung

Bei der in [RW07] vorgeschlagenen Überparametrierung werden die Ausdrücke $\alpha_i(\boldsymbol{\theta})$ in der Identifikationsgleichung (3.1) trotz ihrer polynomialen Abhängigkeit bedingt durch $\boldsymbol{\theta}$ als voneinander unabhängig aufgefasst (siehe auch [GRS12a]). Für die Formulierung eines in ihnen linearen, nicht unterbestimmten Gleichungssystems werden mindestens n_α Gleichungen benötigt.

Unter Verwendung von $\mathbb{N} \ni n \geq n_\alpha$ Gleichungen vom Typ (3.3) lässt sich ein überparametriertes, in

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = (\alpha_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \alpha_{n_\alpha}(\boldsymbol{\theta}))^T$$

lineares Gleichungssystem

$$M(t)\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{b}(t)$$

mit

$$M(t) = \begin{pmatrix} h_1^{(a_1, b_1)} & \dots & h_{n_\alpha}^{(a_1, b_1)} \\ h_1^{(a_2, b_2)} & \dots & h_{n_\alpha}^{(a_2, b_2)} \\ \vdots & & \vdots \\ h_1^{(a_n, b_n)} & \dots & h_{n_\alpha}^{(a_n, b_n)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} h_0^{(a_1, b_1)} \\ h_0^{(a_2, b_2)} \\ \vdots \\ h_0^{(a_n, b_n)} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

aufstellen. Damit die Zeilen von M paarweise unterschiedlich sind, muss $|a_i - a_j| + |b_i - b_j| \neq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gelten. Eine besonders gute Kondition¹ für M kann

¹Eine Matrix M verfügt über eine gute Kondition, falls das Produkt $\|M\| \|M^+\|$ der Normen von M und der Pseudo-Inversen M^+ von M näherungsweise eins beträgt [Mey00].

für

$$a_i + b_i = a_j + b_j, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

erreicht werden [Mbo09].

Für eine hinreichende Erregung (vgl. Definition 2.4) sind die Spalten von $M(t)$ linear unabhängig und die Matrix hat vollen Rang. Dann minimiert der Vektor

$$\boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -(M^T(t)M(t))^{-1}M^T(t)\mathbf{b}(t) \quad (3.6)$$

das Quadrat des Residuums $M(t)\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{b}(t)$ [Bjö96]. Auf der Grundlage von $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta})$ lassen sich anschließend mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus die gesuchten Parameter θ_i ermitteln.

Ausgehend von den in den Parametern θ_i rationalen, aber allgemein nicht polynomialen, Funktionen α_j mit $\alpha_j(\boldsymbol{\theta}) = \beta_j$ wird ein Ideal

$$\mathcal{I}_\theta = \langle \beta_1 \text{ denom } \alpha_1(\boldsymbol{\theta}) - \text{numer } \alpha_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \beta_{n_\alpha} \text{ denom } \alpha_{n_\alpha}(\boldsymbol{\theta}) - \text{numer } \alpha_{n_\alpha}(\boldsymbol{\theta}) \rangle$$

im Polynomring $\mathbb{R}[\beta_1, \dots, \beta_{n_\alpha}, \theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}]$ definiert². Für die Monomordnung

$$\theta_{n_\theta} > \dots > \theta_1 > \beta_{n_\alpha} > \dots > \beta_1$$

liefert der Buchberger-Algorithmus eine Gröbner-Basis

$$F_0(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0} \quad (3.7a)$$

$$F_1(\boldsymbol{\beta}, \theta_1) = \mathbf{0} \quad (3.7b)$$

$$\vdots$$

$$F_{n_\theta}(\boldsymbol{\beta}, \theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) = \mathbf{0}. \quad (3.7c)$$

Wegen $n_\theta \leq n_\alpha$, also da die Anzahl n_θ der Parameter θ_i aufgrund deren Definition in Abschnitt 2.6 nie die Anzahl n_α der Funktionen in diesen Parametern übersteigt, existieren alle Polynome F_i , $i = 1, \dots, n_\theta$. Damit lassen sich mit Hilfe von (3.6) die Gleichungen (3.7) sukzessive nach den (algebraisch) identifizierbaren Parametern θ_i auflösen. Man beachte, dass die Abhängigkeitsbeziehungen in F_0 nur für $n_\theta < n_\alpha$ existieren.

Der bisher beschriebene Zugang ist zwar für einfache Beispiele mit einer geringen Differenz $n_\beta - n_\theta$ als Grad der Überparametrierung praktikabel (vgl. die Totzeitsysteme in [BRF06, RW07], die hydraulische Leitung in [SGR13] oder die schwingende Saite in Beispiel 6.1), für umfangreichere Probleme ist die durch Überparametrierung entstehende Matrix M in (3.4) allerdings häufig schlecht konditioniert [RW07, GKRW12b]. Als eine mögliche Lösung dieses Problems wurde in [GKRW12b] am Beispiel eines schweren Seil mit Last ein Ansatz beschrieben, der unter Berücksichtigung der nur von den (überparametrierten) Koeffizienten $\alpha_i(\boldsymbol{\theta}) = \beta_i$ abhängenden Gleichungen (3.7a) den Nullraum der numerisch schlecht konditionierten Matrix M eingeschränkt. Auf diese Weise konnten die gesuchten Parameter θ_i bestimmt werden.

²Es bezeichnen numer $x = x_1$ den Zähler und denom $x = x_2$ den Nenner einer rationalen Funktion $x = x_1/x_2$.

3.2.2 Polynomiale Probleme

Die Identifikationsgleichung (3.1) ist rational, ihr Zähler polynomial in jedem der Parameter θ_i . Es liegt daher der Wunsch nahe, jedes θ_i als Lösung einer in diesem Parameter polynomialen Gleichung zu bestimmen, die ausschließlich von den bekannten Messgrößen $\mathbf{y}$ abhängt. Ähnlich wie in (3.7) im Zusammenhang mit der Überparametrierung kann dafür erneut von Eliminationsalgorithmen für polynomiale Probleme Gebrauch gemacht werden.

Definiert wird ein differentielles Ideal

$$\tilde{I}_\theta = [\text{numer}(\hat{h}_0 + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i(\boldsymbol{\theta}) \hat{h}_i), \frac{d\theta_1}{ds}, \dots, \frac{d\theta_{n_\theta}}{ds}]$$

mit Ableitung $\frac{d}{ds}$ im differentiellen Polynomring $\mathbb{R}(s)\{\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{n_\alpha}, \theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}\}$ basierend auf dem Zähler der Identifikationsgleichung (3.1) und der Tatsache, dass die Parameter θ_i konstant sind. Aus der Ordnung

$$\theta_{n_\theta} > \dots > \theta_1 > \hat{h}_{n_\alpha} > \dots > \hat{h}_1$$

ergeben sich unter Verwendung des Ritt-Algorithmus für das Ideal $\tilde{I}_\theta$ differentielle Polynome

$$\tilde{A}_0(\hat{h}_0, \dots, \hat{h}_{n_\alpha}) = \mathbf{0} \quad (3.8a)$$

$$\tilde{A}_1(\hat{h}_0, \dots, \hat{h}_{n_\alpha}, \theta_1) = \mathbf{0} \quad (3.8b)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{A}_{n_\theta}(\hat{h}_0, \dots, \hat{h}_{n_\alpha}, \theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) = \mathbf{0} \quad (3.8c)$$

als charakteristische Mengen. Sofern $\tilde{A}_0$ existiert, können konkrete Trajektorien $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ in die Gleichung $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{A}_0\} = 0$ eingesetzt werden. In Abhängigkeit des resultierenden Gleichungsfehlers kann auf diese Weise eine Aussage darüber getroffen werden, ob sich die Trajektorien für die Identifikation der Parameter θ_i unter Verwendung der $\tilde{A}_i$, $i = 1, \dots, n_\theta$ eignen.

Die inverse Laplace-Transformierte von (3.8b) liefert eine in θ_1 polynomiale Gleichung mit bekannten, von den Messsignalen abhängenden Koeffizienten. Deren Lösungen lassen sich zumindest numerisch leicht berechnen und können anschließend bei der Lösung von $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{A}_2\} = 0$ verwendet werden, der in θ_2 polynomialen Gleichung. So lassen sich sukzessive alle Parameter θ_i aus dem zugehörigen Polynom $\tilde{A}_i$ identifizieren. Dass tatsächlich alle $\tilde{A}_i$, $i = 1, \dots, n_\theta$ existieren, folgt aus der Definition einer minimalen Anzahl von Parametern θ_i (vgl. Abschnitt 2.6).

Ein Nachteil dieses Identifikationsansatzes besteht darin, dass in (3.8) im Gegensatz zu (3.1) Produkte der $\hat{h}_i$ sowie deren Ableitungen nach s auftreten. Im Zeitbereich resultiert das in einer wesentlichen Steigerung der Anzahl der in den Faltungsprodukten zu faltenden Faktoren und in diesem Zuge einer Erhöhung des numerischen Rechenaufwandes. Dem kann entgegengewirkt werden, indem die zuvor im Bildbereich der Laplace-Transformation durchgeführten Betrachtungen auf äquivalente Art und Weise in den Zeitbereich übertragen werden.

Dafür wird basierend auf der inversen Laplace-Transformation des Zählers der Identifikationsgleichung (3.1) und der Tatsache, dass die Parameter θ_i konstant sind, ein differentielles Ideal

$$\bar{I}_\theta = [\text{numer}(h_0 + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i(\boldsymbol{\theta}) h_i), \frac{d\theta_1}{dt}, \dots, \frac{d\theta_{n_\theta}}{dt}]$$

mit Ableitung $\frac{d}{dt}$ im differentiellen Polynomring $\mathbb{R}(s)\{h_1, \dots, h_{n_\alpha}, \theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}\}$ definiert. Erneut sei daran erinnert, dass die Funktionen h_i aufgrund ihrer Abhängigkeit von den Messgrößen $\mathbf{y}$ bekannt sind. Aus der Ordnung

$$\theta_{n_\theta} > \dots > \theta_1 > h_{n_\alpha} > \dots > h_1$$

ergibt sich für das differentielle Ideal $\bar{I}_\theta$

$$\bar{A}_0(h_0, \dots, h_{n_\alpha}) = \mathbf{0} \quad (3.9a)$$

$$\bar{A}_1(h_0, \dots, h_{n_\alpha}, \theta_1) = \mathbf{0} \quad (3.9b)$$

$$\vdots$$

$$\bar{A}_{n_\theta}(h_0, \dots, h_{n_\alpha}, \theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) = \mathbf{0}. \quad (3.9c)$$

Für die Berechnung der Parameter θ_i – wie im Zusammenhang mit (3.8) beschrieben – müssen zwar lediglich (einfache) Produkte der Faltungsprodukte in h_i ausgewertet werden, allerdings treten Zeitableitungen der h_i und damit der Messgrößen auf. Zwar wird vermutet, dass die Ableitungen durch Integration der Gln. (3.9) aufgrund der homogenen Anfangsbedingungen stets eliminiert werden können, dennoch hat sich ein dritter Ansatz als besonders geeignet erwiesen, der die Vorteile aus der Elimination der θ_i im Bildbereich und jener im Zeitbereich kombiniert.

Dafür werden zunächst $n_f \geq n_\theta$ Gleichungen vom Typ (3.3) auf Basis einer Identifikationsgleichung (3.1) generiert:

$$f_j(t) = h_0^{(a_j, b_j)}(t) + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i(\boldsymbol{\theta}) h_i^{(a_j, b_j)}(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n_f.$$

Mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus lässt sich für ein auf diesen Gleichungen definiertes Ideal³ $\mathcal{I}_\theta = \langle f_1, \dots, f_{n_f} \rangle$ eine Gröbner-Basis

$$F_0(h_0^{(a_1, b_1)}, \dots, h_{n_\alpha}^{(a_{n_f}, b_{n_f})}) = \mathbf{0} \quad (3.10a)$$

$$F_1(h_0^{(a_1, b_1)}, \dots, h_{n_\alpha}^{(a_{n_f}, b_{n_f})}, \theta_1) = \mathbf{0} \quad (3.10b)$$

$$\vdots$$

$$F_{n_\theta}(h_0^{(a_1, b_1)}, \dots, h_{n_\alpha}^{(a_{n_f}, b_{n_f})}, \theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) = \mathbf{0}. \quad (3.10c)$$

ermitteln. Wie im Fall von $\bar{I}_\theta$ sind für die Berechnung der Parameter θ_i lediglich Produkte von Faltungsprodukten auszuwerten.

³Das Ideal wird im Polynomring $\mathbb{R}[h_0^{(a_1, b_1)}, \dots, h_{n_\alpha}^{(a_1, b_1)}, \dots, h_{n_\alpha}^{(a_{n_f}, b_{n_f})}, \theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}]$ definiert.

Da $\mathcal{I}_\theta$ im Gegensatz zu $\bar{\mathcal{I}}_\theta$ kein differentielles Ideal ist, treten in den Gleichungen keine Ableitungen der Messsignale auf. Dieser Ansatz mit der Gröbner-Basis (3.10) wird daher im Folgenden favorisiert.

Bemerkung 2.1 (Lösungen einer polynomialen Gleichung): *Im Zusammenhang mit der Lösung der in θ_i polynomialen Gleichung stellt sich die Frage, welche deren Nullstellen dem gesuchten, tatsächlichen Systemparameter entspricht. Auch wenn diese Frage bisher nicht allgemein beantwortet werden konnte, wurde anhand zahlreicher Simulationsstudien beobachtet, dass ebenso wie in dem Beispiel am Ende dieses Abschnitts stets nur eine der Nullstelle zeitlich konstant ist. Da sämtliche Systemparameter als zeitunabhängig angesetzt wurden, muss diese Lösung der gesuchten entsprechen. Zudem besteht stets die Möglichkeit, entsprechend Abschnitt 3.1 neue Gleichungen aus der in θ_i polynomialen Gleichung zu generieren und durch Kombination der Gleichungen ein lineares bzw. affines Parameterproblem herzuleiten. Beispielsweise folgt durch Anwendung von Differentialoperator $D_s^{(a_1, b_1)}$ und $D_s^{(a_2, b_2)}$ (entsprechend (3.2)) auf eine quadratische Gleichung*

$$0 = \hat{h}_0 + \theta \hat{h}_1 + \theta^2 \hat{h}_2$$

und Kombination der resultierenden Ausdrücke in eine in θ affine Gleichung

$$0 = \hat{h}_0^{(a_1, b_1)} \hat{h}_2^{(a_2, b_2)} - \hat{h}_2^{(a_1, b_1)} \hat{h}_0^{(a_2, b_2)} + \theta (\hat{h}_1^{(a_1, b_1)} \hat{h}_2^{(a_2, b_2)} - \hat{h}_2^{(a_1, b_1)} \hat{h}_1^{(a_2, b_2)}).$$

Auch auf diese Weise werden die sich über die Zeit ändernden Lösungen eliminiert. (Für eine vergleichbare Fragestellung und umfangreichere allgemeingültige Diskussion wird auf Abschnitt 6.3 verwiesen.)

Beispiel 2.2 (Schwingende Saite (Lösungen einer polynomialen Gleichung))

Für die schwingende Saite mit Masse werde angenommen, dass die Länge ℓ und der Kehrwert μ der Ausbreitungsgeschwindigkeit bekannt sind, also lediglich m auf Basis der Auslenkungen der Enden der Saite zu identifizieren ist. In diesem Fall kann die Identifikationsgleichung (2.34) als Polynom zweiten Grades in dem gesuchten Parameter dargestellt werden,

$$0 = \hat{m}^2(\ell \hat{h}_0 + \ell^3 \mu^2 \hat{h}_3) + \hat{m}(\hat{h}_1 + 3\ell^2 \mu^2 \hat{h}_2) + \ell \mu^2 \hat{h}_1 + \ell^2 \mu^4 \hat{h}_2 \quad (3.11)$$

wobei m durch eine neue Größe $\hat{m}$ ersetzt wurde, um die Lösungen der Gleichung von dem tatsächlichen Systemparameter unterscheiden zu können. Zur Untersuchung der Nullstellen wird die Messgleichung (2.6) als Beziehung zwischen den Messgrößen $\hat{y}_\ell$ und $\hat{y}_0$ in (3.11) bzw. in die Definition der $\hat{h}_i$ in (2.35) eingesetzt:

$$\ell(m - \hat{m})\hat{y}_0^3 (e^{-\mu s \ell}(\ell \mu^2 + \ell \hat{m} \mu s + \hat{m}) + e^{\mu s \ell}(\ell \mu^2 - \ell \hat{m} \mu s + \hat{m})) = 0.$$

Die Nullstellen dieser in $\hat{m}$ quadratischen Gleichung liegen bei

$$\hat{m} \in \left\{ m, \frac{\ell \mu^2 (e^{\mu s \ell} + e^{-\mu s \ell})}{\ell \mu s (e^{\mu s \ell} - e^{-\mu s \ell}) - e^{\mu s \ell} - e^{-\mu s \ell}} \right\} = \left\{ m, \frac{\ell \mu^2 \hat{\phi}_{1,1}(\ell)}{\ell \mu^2 s^2 \hat{\phi}_{1,2}(\ell) - \hat{\phi}_{1,1}(\ell)} \right\}.$$

Ebenso wie aus der entsprechenden Lösungsmenge von (2.37) erkennt man, dass die einzig nicht von s abhängende und damit konstante Lösung $\hat{m} = m$ ist. Eine entsprechende Beobachtung kann für die Länge ℓ gemacht werden, wenn m und μ als bekannt vorausgesetzt werden.

3.2.3 Anmerkung zur Berechnung der Parameter

In der vorliegenden Arbeit werden die Gleichungen zur Berechnung der Parameter (z.B. (3.4) oder (3.10)) zu jedem Zeitpunkt gelöst. Damit ergeben sich zeitabhängige Schätzwerte für die konstanten Parameter θ . Da eine Abweichung zwischen den Schätzwerten und den tatsächlichen Systemparametern ausschließlich den in den Abschnitten 3.3 und 3.4 beschriebenen Effekten von Messstörungen und der Diskretisierung bei der Implementierung geschuldet sind – Identifizierbarkeit und ein ideales Modell vorausgesetzt – und der Schätzwert nach hinreichend langer Zeit dem tatsächlichen Wert entspricht, wird im Folgenden zumeist nicht symbolisch zwischen einem Schätzwert für θ und θ selbst unterschieden. Ein Parameter gilt als identifiziert, wenn ein Schätzwert über die Zeit (näherungsweise) konstant ist.

Alternativ zu einer punktwisen Lösung der Bestimmungsgleichungen (3.4) und (3.10) lässt sich ein einziger Schätzwert durch Minimierung des Gleichungsfehlers über ein Zeitintervall $[0, T]$ gewinnen (z.B. [Bel10]). So folgt beispielsweise aus der L^2 -Norm von (3.6) der zeitunabhängige Vektor

$$\alpha(\theta) = \int_0^T \left| (M^T(t)M(t))^{-1} M^T(t)b(t) \right|^2 dt.$$

Diese Berechnung umgeht die bei der punktwisen Lösung auftretenden Singularitäten, die einer (punktweise) schlechten Kondition von M geschuldet sind. Auch wenn dies hier keine Anwendung findet, macht man sich leicht klar, dass sich auf entsprechende Weise eine gleitende Mittelwertbildung bei der Berechnung der Parameter realisieren lässt.

3.3 Strukturierte und unstrukturierte Störungen der Messsignale

Im Rahmen der Parameteridentifikation auf der Basis von Messsignalen y ist zu beachten, dass ein nominales Nutzsignal (in realen Messungen) fast immer von ungewollten Störungen überlagert wird. In [FSR03, SRGRCRLJ14] illustrieren Beispiele endlicher Dimension, dass strukturierte Störungen wie beispielsweise ein konstanter Versatz oder harmonische Signalanteile unbekannter Amplitude bei der algebraischen Identifikation ebenso unterdrückt werden können wie Gaußssches weißes Rauschen (vgl. [Fli06] für einen mathematischen Hintergrund). Diese Ergebnisse lassen sich direkt auf die in dieser Arbeit betrachteten Systeme unendlicher Dimension übertragen. Da jedoch strukturierte Störungen die Komplexität einer Identifikationsgleichung erheblich erhöhen, wird die

Grundidee der Elimination lediglich am Beispiel der Transportgleichung in Abschnitt 4.1.3 veranschaulicht.

Im Gegensatz dazu wird Gaußssches weißes Rauschen, das in dieser Arbeit oftmals abkürzend nur als Rauschen bezeichnet wird, in nahezu allen Simulationsstudien zur Validierung der Robustheit der Algorithmen dienen. Das Signal-Rausch-Verhältnis⁴ (SNR) stellt dabei ein Maß für die Störung dar und ist für ein Signal $y = \bar{y} + n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ als das Verhältnis des quadratischen Mittels von Nutzsignal $\bar{y}$ und Rauschanteil n definiert [Sch91]:

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \text{SNR} = 20 \log_{10} \frac{\int_0^T (\bar{y}(t))^2 dt}{\int_0^T (n(t))^2 dt}.$$

Das weiße Rauschen einzelner Messsignale ist stets unkorreliert. Wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t n(\sigma) d\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma^k n(\sigma) d\sigma = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.12)$$

und folglich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma^k y(\sigma) d\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma^k \bar{y}(\sigma) d\sigma, \quad k \in \mathbb{Z}$$

lässt sich dieses mittelwertfreie Rauschen durch Integration einer Identifikationsgleichung (3.3) unterdrücken. Da die Koeffizienten $h_i^{(a,b)}$ Summen von Faltungsprodukten der Messsignale darstellen, muss entsprechend der Anzahl der zu faltenden Faktoren integriert werden, z.B.

$$\int_0^t \int_0^\sigma (y_1 * y_2)(\tau) d\tau d\sigma = \int_0^t (Y_1 * y_2)(\sigma) d\sigma = \int_0^t (y_1 * Y_2)(\sigma) d\sigma = (Y_1 * Y_2)(t).$$

mit $Y_i(t) = \int_0^t y_i(\sigma) d\sigma$, $i = 1, 2$.

3.4 Aspekte der Implementierung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zahlreiche Fallstudien theoretisch und simulativ untersucht (vgl. u.a. Kapitel 4). Die teilweise umfangreichen symbolischen Berechnungen erforderten die Zuhilfenahme von Computer-Algebra-Systemen. Sämtliche Algorithmen wurden allgemein und somit leicht auf andere Beispiele übertragbar in Maple[®] implementiert. Die Routinen ermöglichen einerseits die halbautomatische Herleitung einer Identifikationsgleichung (2.25) und andererseits die vollautomatische Erkennung der algebraisch identifizierbaren Parameter sowie die Überführung in die Struktur (2.3). Für den Buchberger-Algorithmus wurde auf das Maple[®]-Paket *Groebner* zurückgegriffen, für den Ritt-Algorithmus auf *CharSets* in der Version 2.2 (2003) von Dongming Wang [Wan95].

In Maple[®] wird zudem MATLAB[®]-Code für die zeitoptimale Berechnung der h_i in der Identifikationsgleichung (2.3) erzeugt, der sich direkt in eine vorhandene Umgebung

⁴ engl. *signal-to-noise ratio*

für die Identifikation der Parameter (z.B. durch Überparametrierung) einbinden lässt. Auf zwei im Zusammenhang mit der Implementierung der Identifikationsalgorithmen wesentliche Aspekte wird im Folgenden kurz eingegangen.

3.4.1 Diskretisierung

Für die numerische Umsetzung der Identifikationsalgorithmen in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2, also insbesondere der Identifikationsgleichungen (3.3), muss von der zeitkontinuierlichen Darstellung zu einer zeitdiskreten übergegangen werden. Das betrifft insbesondere die Integration und die Faltung. Seien dafür $f_c, g_c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ zeitkontinuierliche Funktionen, die (im Rahmen einer Messung) mit einer festen Schrittweite T abgetastet werden. Für die resultierenden (zeitdiskreten) Folgen f_d und g_d gilt dann

$$f_d[k] = f_c(kT), \quad g_d[k] = g_c(kT), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

mit $t = nT$.

Die (einseitige) Faltung

$$(f_c * g_c)(t) = \int_0^t f_c(t - \tau) g_c(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

geht unter Verwendung der Trapezregel in die zeitdiskrete Faltung

$$(f_d * g_d)[n] = T \sum_{k=0}^n f_d[n - k] g_d[k] - \frac{T}{2} (f_d[n] g_d[0] - f_d[0] g_d[n]) \quad (3.13)$$

mit $\lim_{T \rightarrow 0} (f_d * g_d)[n] = (f_c * g_c)(t)$ über. Entsprechend werden bei der numerischen Implementierung im Folgenden sämtliche Integrale mit Hilfe der Trapezregel approximiert:

$$\int_0^t f_c(\tau) d\tau \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T}{2} (f_d[k] + f_d[k+1]).$$

3.4.2 Asymptotische Approximation der Faltungsprodukte

Die Anzahl der arithmetischen Operationen zur Berechnung eines Faltungsprodukts zweier gleichlanger Signale steigt quadratisch mit deren Länge n , also $\mathcal{O}(n^2)$, wobei $\mathcal{O}$ das Landau-Symbol bezeichnet. Insbesondere bei einer Online-Identifikation kann das schnell zu Problemen führen.

Zwar lässt sich der numerische Aufwand bei der Berechnung der Faltungsprodukte über die schnelle Fourier-Transformation⁵ mit $\mathcal{O}(n \log n)$ erheblich reduzieren (z.B. [BSMM10]), er steigt jedoch weiterhin nichtlinear mit der Länge der Signale. Ein Ausweg besteht in einer Approximation der Faltungsprodukte (z.B. [Woi07, Definition 2.12]), durch die der Rechenaufwand auf $\mathcal{O}(n)$ sinkt. Von einer solchen Approximation wurde auch in [RW10] im Zusammenhang mit der Identifikation der Parameter eines

⁵engl. *fast Fourier transform (FFT)*

Wärmetauschers Gebrauch gemacht. Dabei wird eine Identifikationsgleichung mit einer Exponentialfunktion $t \mapsto e^{-\alpha t}$ multipliziert⁶, deren Parameter α relativ zur Amplitude der Messungen hinreichend klein gewählt werden muss [Knü15]. Durch anschließende Integration geht das Faltungsprodukt asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ in ein Produkt der integrierten Faktoren über.

Als Beweis wird ein Faltungsprodukt $u * y$ zweier Funktionen $u, y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer abklingenden Exponentialfunktion $t \mapsto e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$ multipliziert und über $[0, t]$ integriert. Dann gilt für den Grenzwert $t \rightarrow \infty$ entsprechend der Definition der Faltung

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\alpha \sigma} (u * y)(\sigma) d\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^\sigma u(\tau) y(\sigma - \tau) e^{-\alpha \sigma} d\tau d\sigma \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^\sigma u^\alpha(\tau) y^\alpha(\sigma - \tau) d\tau d\sigma, \end{aligned}$$

mit $u^\alpha(t) = u(t)e^{-\alpha t}$, $y^\alpha(t) = y(t)e^{-\alpha t}$. Spaltet man das innere Integral auf zwei Intervalle $[0, t]$ und $[\sigma, t]$ auf,

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left[\int_0^\sigma u^\alpha(\tau) y^\alpha(\sigma - \tau) d\tau - \int_\sigma^t u^\alpha(\tau) y^\alpha(\sigma - \tau) d\tau \right] d\sigma,$$

so wird deutlich, dass jener Anteil über $[\sigma, t]$ aufgrund der linksseitig beschränkten Träger von u und y identisch Null ist. Mit Hilfe des Satzes von Fubini kann die Reihenfolge der Integration vertauscht und zu uneigentlichen Integralen übergegangen werden, die Existenz der Integrale vorausgesetzt [Heu92]:

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty u^\alpha(\tau) y^\alpha(\sigma - \tau) d\sigma d\tau.$$

Dann folgt

$$I = \int_0^\infty u^\alpha(\tau) \int_0^\infty y^\alpha(t - \tau) d\sigma d\tau = \int_0^\infty u^\alpha(\tau) d\tau \int_0^\infty y^\alpha(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}$$

und es ist bewiesen, dass die Faltung zweier Funktionen u^α und y^α mit linksseitig beschränktem Träger und exponentiell beschränktem Wachstum asymptotisch dem Produkt von deren Integralen entspricht.

Die auf der Basis einer derart approximierten Identifikationsgleichung identifizierten Parameter konvergieren (lediglich) für große Zeiten gegen den tatsächlichen Wert; hingegen war die Identifikation bei Berechnung der Faltungsprodukte zuvor theoretisch nahezu unmittelbar möglich.

Eine Schwierigkeit besteht in der Wahl des Parameters α . Zwar muss er hinreichend klein gewählt werden, um in Abhängigkeit der Amplitude der Messsignale die Existenz der Integrale zu gewährleisten, allerdings führen vergleichsweise kleine Werte α auf eine langsame Konvergenz der Schätzwerte. Umgekehrt resultieren große Werte α in einer starken Dämpfung der Signale, was aufgrund der für die partiellen Dgl. vorausgesetzten homogenen Anfangsbedingungen insbesondere im Zusammenhang mit signifikanten Totzeiten eine Identifikation verhindern kann.

⁶Das entspricht der Abbildung $s \mapsto s + \alpha$ (vgl. Abschnitt 3.1).

3.5 Alternative, nicht-approximative Identifikationsmethoden in der Literatur

Die in dieser Arbeit vorgestellte algebraische Methode steht in engem Zusammenhang zu zwei alternativen, ebenfalls nicht-approximativen Identifikationsmethoden für lineare Systeme mit verteilten Parameter. Eine erste Methode in Abschnitt 3.5.1 ist zwar auf Totzeitsysteme beschränkt – die alternativ durch Transportgleichungen als partielle Dgl. erster Ordnung mit geeigneten Randbedingungen beschrieben werden können – stimmt für diese jedoch mit der algebraischen Methode überein. Der Zugang in Abschnitt 3.5.2 unterliegt keiner derartigen Beschränkung der Systemklasse.

3.5.1 Ein Zugang für Totzeitsysteme mittels Distributionen

Die Multiplikation von Messgrößen mit unbeschränkten Funktionen – genauer Polynomen – wie sie in den Identifikationsgleichungen (vgl. (3.1)) aufgrund deren Herleitung in Kapitel 2 durch Ableitung nach s im Bildbereich auftreten, führt zu einer Verstärkung von Rauschen und reduziert die Robustheit der Parameteridentifikation gegenüber Einflüssen vernachlässigter dynamischer Effekte [BRF07a]. Um dies zu vermeiden, wird in [BRF07a] für die Klasse der Totzeitsysteme vorgeschlagen, die Messgrößen stattdessen mit (bekannten) Exponentialfunktionen zu multiplizieren (vgl. Dämpfungssatz (A.1) der Laplace-Transformation). Anstelle der Laplace-Transformation wird dabei direkt im Zeitbereich mit Distributionen gearbeitet. Auch wenn dieser Zugang nicht auf alle Systeme der Form (2.1a) anwendbar ist, soll er hier kurz am Beispiel eines verzögerten Integrators

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= u(t - \tau) = (\delta_\tau * u)(t) \\ &= \int_0^t \delta_\tau(\sigma) u(t - \sigma) d\sigma\end{aligned}\tag{3.14}$$

aus [BRF07a] mit dem unbekannten und zu identifizierenden Parameter τ dargestellt und in Beziehung zu dem hier diskutierten Vorgehen gesetzt werden. Es wird von homogenen Anfangsbedingungen ausgegangen.

Die Multiplikation der Systemgleichung (3.14) mit der Exponentialfunktion $\eta(t) = e^{-\gamma t}$ mit bekanntem $\gamma > 0$ führt auf eine Beziehung, in der der gesuchte Parameter τ nicht mehr nur im Argument des Eingangs u auftritt:

$$\begin{aligned}\eta(t)\dot{y}(t) &= \eta(t)(\delta_\tau * u)(t) = e^{-\gamma\tau}(\delta_\tau * (\eta u))(t) \\ &= e^{-\gamma\tau} \int_0^t \delta_\tau(\sigma) \eta(t - \sigma) u(t - \sigma) d\sigma.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Die Faltung von (3.14) mit $e^{-\gamma\tau}\eta u$ und (3.15) mit u führt nach dem Gleichsetzen beider Ausdrücke auf

$$e^{-\gamma\tau}(\eta u) * \dot{y} = u * (\eta \dot{y}).\tag{3.16}$$

Zur Vermeidung von Ableitungen der Messgrößen u und y wird abschließend integriert und nach dem gesuchten Parameter aufgelöst:

$$e^{-\gamma\tau} = \frac{(u * (\eta y))(t) + \gamma \int_0^t (u * (\eta y))(\sigma) d\sigma}{((\eta u) * y)(t)}. \quad (3.17)$$

Simulationsergebnisse für die Identifikation von τ in [BRF07a] belegen eine Robustheit gegenüber Rauschen. Dabei scheint die Wahl des Dämpfungsparmeters γ ebenso wie in Abschnitt 3.4.2 zumindest von den Signalen u und y selbst sowie deren Signal-Rausch-Verhältnisse abzuhängen.

Alternativ zur Anwendung der Distributionentheorie lässt sich (3.17) auch unter Verwendung der Laplace-Transformation herleiten. Entsprechend des Dämpfungssatzes (A.1) der Laplace-Transformation entspricht die Multiplikation der Systemgleichung (3.14) mit einer Exponentialfunktion $e^{-\gamma t}$ in (3.15) der Laplace-Transformierten von (3.14) mit $s \mapsto s + \gamma$:

$$(s + \gamma)\hat{y}(s + \gamma) = e^{-\tau(s+\gamma)}\hat{u}(s + \gamma).$$

Durch Kombination der bei s sowie $s + \gamma$ ausgewerteten Laplace-Transformierten lässt sich $e^{-\tau s}$ eliminieren, was auf die Laplace-Transformierte von (3.16) führt:

$$se^{-\tau\gamma}\hat{u}(s + \gamma)\hat{y}(s) = (s + \gamma)\hat{y}(s + \gamma)\hat{u}(s).$$

Demnach unterscheiden sich die Zugänge in Abschnitt 2.5 und [BRF07a] methodisch maßgeblich dadurch, dass für ersteren linear unabhängige Gleichungen durch Ableitung nach s gewonnen werden, während letzterer diese durch Auswertung für unterschiedliche Argumente s erreicht.

Es wird vermutet, dass der Zugang aus [BRF07a] (zumindest) auf solche Systeme der Form (2.8) angewandt werden kann, für die sämtliche Eigenwerte der Systemmatrix $\hat{A}$ proportional zur komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation sind, also Systeme mit konzentrierten und speziellen verteilten Totzeiten.

3.5.2 Identifikation auf der Basis einer Messgleichung

Der Ansatz in [KW13, Knü15] setzt auf den Messgleichungen (2.13) auf, wobei anstelle der Elimination der darin auftretenden Fundamentallösungen $\hat{\phi}_{i,j}$ die Beziehung zwischen den Messsignalen in den Zeitbereich zurück transformiert wird. Beispielsweise ergibt sich zwischen zwei Messsignalen y_1 und y_2 qualitativ

$$\mathbf{0} = O_1(\boldsymbol{\theta}) * y_1 - O_2(\boldsymbol{\theta}) * y_2$$

mit (Ultra-)Distributionen O_1 und O_2 (vgl. [KW13]). Diese Beziehung ist im Allgemeinen nichtlinear in den gesuchten Parametern $\boldsymbol{\theta}$ und kann neben Totzeiten und Prädiktionen auch Ableitungen der Messsignale enthalten. Letztere machen eine Regularisierung der Messsignale durch die Projektion auf ein Orthogonalsystem erforderlich (vgl. [Knü15]). Wie in der vergleichbaren Methode in [CWG71] besteht die Grundidee

darin, die gesuchten Parameter durch die keineswegs triviale Minimierung des Gleichungsfehlers

$$e(\cdot, \boldsymbol{\theta}) = O_1(\boldsymbol{\theta}) * y_1 - O_2(\boldsymbol{\theta}) * y_2$$

zu ermitteln.

Der komplexen numerischen Berechnung steht der Vorteil gegenüber, dass dieser Ansatz problemlos mit inhomogenen Anfangsbedingungen klarkommt (vgl. Abschnitt 2.7).

Kapitel 4

Fallstudien für lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird die zuvor dargestellte Methoden zur Parameteridentifikation auf typische lineare partielle Dgln. mit konstanten Koeffizienten angewandt. Beginnend mit dem einfachsten Beispiel einer Transportgleichung wird mit einer elektrischen Leitung eine Wellengleichung mit Dämpfung diskutiert. Als Beispiel für eine partielle Dgl. vierter Ordnung bzgl. des Ortes dient schließlich ein Euler-Bernoulli-Balken. Zumeist stehen Simulationdaten zur Illustration der Ergebnisse zur Verfügung. Für Ergebnisse zur algebraischen Identifikation eines Wärmeleitungsproblems wird auf [RW07, RW08a] verwiesen, für einen Wärmetauscher auf [RW10].

4.1 Ein Transportproblem

Bei dem in Abb. 4.1 skizzierten Transportprozess wird ein Gut mit konstanter Geschwindigkeit ν auf einem Band der Länge ℓ befördert. Die Höhe des Guts $w(z, t)$ hängt sowohl vom Ort $z \in [0, \ell]$ als auch von der Zeit t ab und genügt der Transportgleichung

$$\nu \partial_z w(z, t) + \partial_t w(z, t) = 0. \quad (4.1)$$

Mit

$$y_0(t) = w(0, t), \quad y_\ell(t) = w(\ell, t) \quad (4.2)$$

stehen zwei konzentrierte Messgrößen zur Verfügung, die jeweils die Höhe des Guts an den Enden bezeichnen, grundsätzlich aber an jeder beliebigen Stelle auf dem Intervall $[0, \ell]$ positioniert sein können. Im Zusammenhang mit der Lösung der Transportgleichung kann die Beziehung zur Definition von y_0 dabei als Randbedingung interpretiert werden. Für die Identifikation der unbekannten Parameter ℓ und ν spielt dies jedoch keine Rolle.

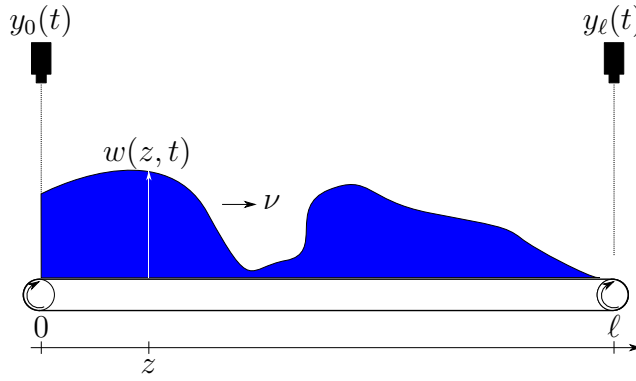


Abbildung 4.1: Skizze eines Transportbandes mit Sensorik.

4.1.1 Herleitung einer Identifikationsgleichung

Zunächst wird die Laplace-Transformierte von (4.1) bei homogenen Anfangsbedingungen ermittelt, also ausgehend von einem leeren Transportband¹. Sie kann als

$$\frac{d\hat{x}}{dz}(z) = -\frac{s}{\nu}\hat{x}(z) \quad (4.3)$$

mit $\hat{x} = \hat{w}$ dargestellt werden. Die Fundamentallösung $\Phi(z) = e^{-\frac{s}{\nu}z}$ genügt entsprechend (2.16) der Dgl. bzgl. s

$$\hat{\Phi}'(z) = -\frac{z}{\nu}\hat{\Phi}(z), \quad (4.4)$$

was sich in diesem Fall für die Exponentialfunktion leicht verifizieren lässt. Zudem ergibt sich aus der Lösung von (4.3) die Messgleichung

$$\hat{y}_\ell = \hat{\Phi}(\ell)\hat{y}_0 \quad (4.5)$$

als Beziehung zwischen den Höhen des Transportguts bei $z = 0$ und bei $z = \ell$.

Zur Herleitung einer Identifikationsgleichung mit Hilfe des Ritt-Algorithmus und den charakteristischen Mengen (vgl. Abschnitt A.3.1) definiert man basierend auf (4.4) und (4.5) mit $\hat{\psi} = \hat{\Phi}(\ell)$ das differentielle Ideal

$$I = [f_1, f_2] = [\nu\hat{\psi}' + \ell\hat{\psi}, \hat{y}_\ell - \hat{\psi}\hat{y}_0].$$

Wegen (2.23) mit $\hat{\psi} > \hat{y}_\ell > \hat{y}_0$ müssen f_1 und f_2 derart durch Multiplikation, Addition und Ableitung kombiniert werden, dass $\hat{\psi}$ nicht mehr auftritt. Da die Ordnung bzgl. $\hat{\psi}$ des Leitterms $\text{LT}(f_1) = \hat{\psi}'$ größer ist als jene von $\text{LT}(f_2) = -\hat{\psi}\hat{y}_0$, wird f_2 nach s abgeleitet. Das zugehörige S -Polynom

$$S(f_1, f_2') = \hat{\psi}(\nu\hat{y}_0' - \ell\hat{y}_0) - \nu\hat{y}_\ell' =: f_3$$

weist bzgl. $\hat{\psi}$ die Ordnung null und den Grad eins auf. Folglich ergibt sich mit

$$S(f_2, f_3) = \ell\hat{y}_0\hat{y}_\ell + \nu(\hat{y}_0\hat{y}_\ell' - \hat{y}_0'\hat{y}_\ell)$$

¹Zumindest jedoch muss das Gut eine bekannte konstante Höhe w_0 über der gesamten Länge des Bandes aufweisen, also $z \mapsto w(z, 0) = w_0$ eine stationäre Lösung von (4.1) sein.

ein von $\hat{\psi}$ unabhängiges Polynom², und durch Nullsetzen die Identifikationsgleichung

$$\ell \hat{y}_0 \hat{y}_\ell + \nu(\hat{y}_0 \hat{y}'_\ell - \hat{y}'_0 \hat{y}_\ell) = 0, \quad (4.6)$$

die in diesem einfachen Fall auch durch Einsetzen von $\hat{\Phi}(\ell)$ aus (4.5) in (4.4) hergeleitet werden hätte können.

Aus (4.6) ist zu erkennen, dass sich aus den Messsignalen lediglich der Quotient aus der Länge ℓ des Transportbandes (bzw. dem Abstand der Messpunkte) und der Transportgeschwindigkeit ν identifizieren lässt, also die Totzeit

$$\tau = \theta = \frac{\ell}{\nu} = \frac{y_0 * (\bar{t}y_\ell) - (\bar{t}y_0) * y_\ell}{y_0 * y_\ell} \quad \text{für} \quad (y_0 * y_\ell)(t) \neq 0. \quad (4.7)$$

Entsprechend hätten die Polynome im Ideal I bereits in Abhängigkeit von τ anstelle von ν und ℓ formuliert werden können.

4.1.2 Simulationsergebnisse und asymptotische Approximation der Faltungsprodukte

Exemplarische Simulationstrajektorien für y_0 und y_ℓ sowie die aus (4.7) identifizierte Totzeit mit $\tau = 2$ s können Abbildung 4.2 entnommen werden. Aufgrund der homogenen Anfangsbedingungen $y_\ell(t) = 0$, $t \in [0, 2]$ s ist eine Identifikation erst für $t > 2$ s möglich. Grundsätzlich kann die Totzeit aus den gegebenen (ungestörten) Trajektorien dieses Totzeitsystems natürlich direkt als jener Zeitpunkt abgelesen werden, für den $y_\ell(t) \neq 0$ gilt. Die Simulation unterstreicht jedoch, dass, sobald der Parameter für $t > 2$ s identifizierbar ist, mit der vorgeschlagenen Methode der berechnete Parameter exakt mit dem tatsächlichen Parameter übereinstimmt.

Im Gegensatz dazu lässt sich aus den durch mittelwertfreies Rauschen überlagerten Trajektorien der Messsignale³ in Abbildung 4.3 nicht unmittelbar die Totzeit als zeitlicher Versatz zwischen y_0 und y_ℓ ablesen. Für die Identifikation von τ wurde (4.7) zur Glättung des Schätzwerts einfach integriert. Trotz eines signifikanten Signal-Rausch-Verhältnisses von 5 dB weist der auf der Basis dieser Signale identifizierte Schätzwert für die Totzeit einen relativen Fehler von weniger als einem Prozent bzgl. τ auf.

Auch wenn es sich bei dem betrachteten Transportband um ein sehr einfaches Identifikationsproblem handelt, wurde zum Vergleich mit (4.7) die asymptotische Approximation der Faltungsprodukte nach Abschnitt 3.4.2 auf (4.7) angewandt:

$$\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t y_0^\alpha(\tau) d\tau \int_0^t \sigma y_\ell^\alpha(\sigma) d\sigma - \int_0^t \tau y_0^\alpha(\tau) d\tau \int_0^t y_\ell^\alpha(\sigma) d\sigma}{\int_0^t y_0^\alpha(\tau) d\tau \int_0^t y_\ell^\alpha(\sigma) d\sigma}. \quad (4.8)$$

Die zugehörigen, aus den zuvor in Abbildung 4.2a verwendeten Trajektorien berechneten Größen $y_0^\alpha(t) = e^{-\alpha t} y_0(t)$ und $y_\ell^\alpha(t) = e^{-\alpha t} y_\ell(t)$ (bei einer Wahl von $\alpha = 1.5$ 1/s) sowie der Schätzwert für die Totzeit sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der auf Basis von (4.8) berechnete Schätzwert tatsächlich für große Zeiten

²Die charakteristischen Mengen sind $A_1(\hat{y}_0, \hat{y}_\ell) = S(f_2, f_3)$ und $A_2(\hat{y}_0, \hat{y}_\ell, \hat{\psi}) = f_2$.

³Die nominalen Zeitverläufe von y_0 und y_ℓ ohne Rauschen entsprechen jenen in Abbildung 4.2a.

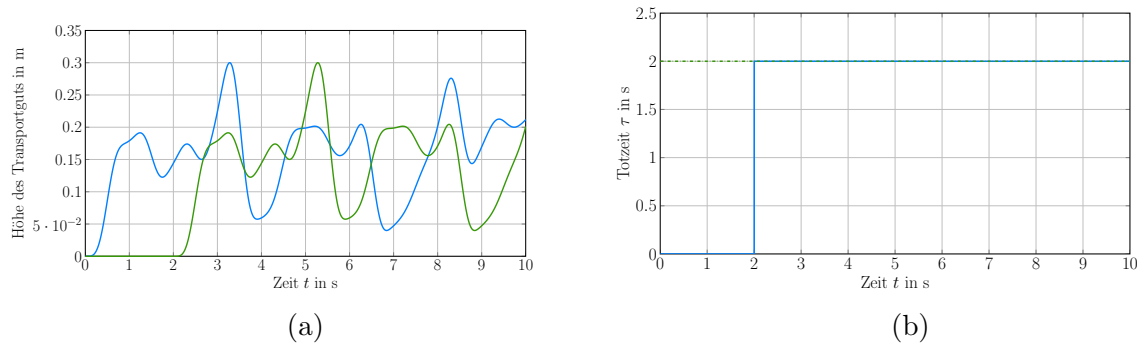


Abbildung 4.2: Identifikation von τ mittels (4.7): (a) Trajektorien von y_0 (blau) und y_ℓ (grün), (b) geschätzte Totzeit (blau) und tatsächliche Totzeit (grün).

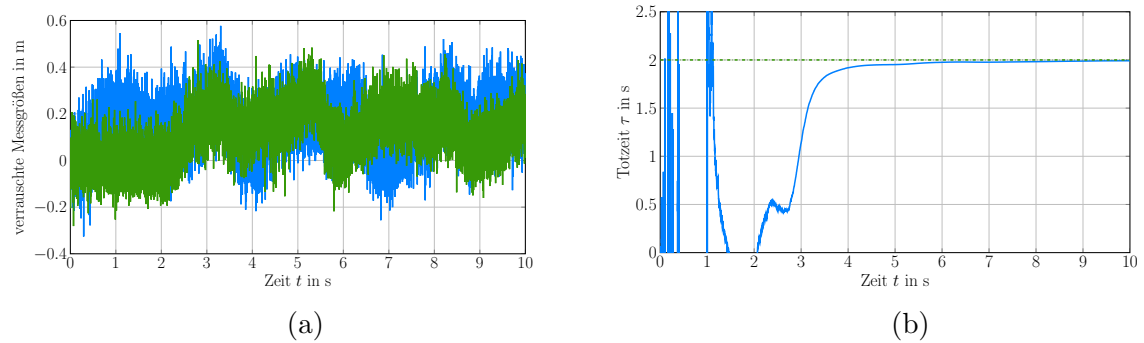


Abbildung 4.3: Identifikation von τ in Gegenwart von Rauschen mittels der einfach integrierten Gleichung (4.7) zur Glättung des Schätzwerts: (a) verrauschte Trajektorien von y_0 (blau) und y_ℓ (grün), (b) geschätzte Totzeit (blau) und tatsächliche Totzeit (grün).

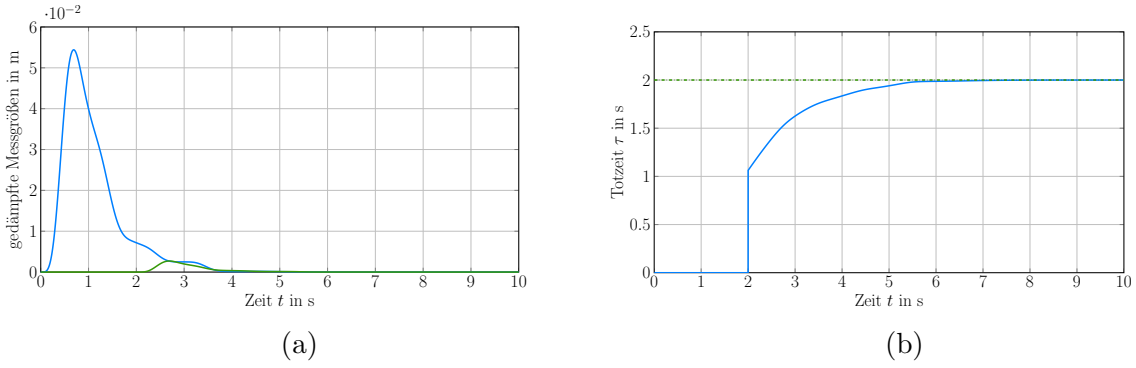


Abbildung 4.4: Asymptotische Identifikation von τ mittels (4.8): (a) Trajektorien von y_0^α (blau) und y_ℓ^α (grün), (b) geschätzte Totzeit (blau) und tatsächliche Totzeit (grün).

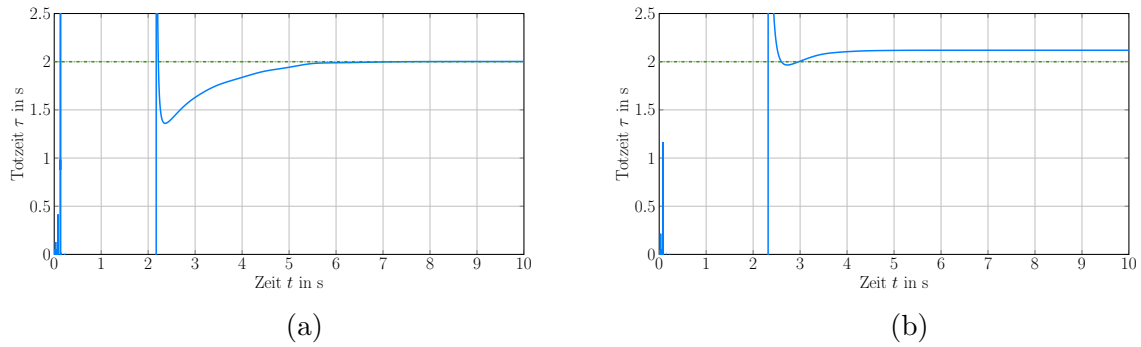


Abbildung 4.5: Asymptotische Identifikation von τ mittels (4.8): Vergleich zwischen der geschätzten Totzeit (blau) und der tatsächlichen Totzeit (grün) bei einer Wahl von $\alpha = 1.5$ 1/s in (a) und $\alpha = 3$ 1/s in (b).

gegen die Totzeit $\tau = 2$ s konvergiert. In diesem Zusammenhang sei jedoch auf die im Vergleich zu y_0 und y_ℓ deutlich kleineren Amplituden von y_0^α und y_ℓ^α hingewiesen, die bereits nach kurzer Zeit näherungsweise Null sind und damit die Identifikation der Totzeit erschweren.

Besonders gut wird die bereits in Abschnitt 3.4.2 angedeutete Problematik bei der Wahl von α in Gegenwart von Rauschen deutlich. Bereits ein Signal-Rausch-Verhältnis von 60 dB führt in diesem Beispiel dazu, dass die Totzeit zwar für $\alpha = 1.5$ 1/s korrekt identifiziert wird, nicht aber für die doppelte Dämpfung $\alpha = 3$ 1/s (vgl. Abbildung 4.5).

4.1.3 Störung der Messsignale

Am Beispiel des Transportbandes soll exemplarisch dargestellt werden, wie sich strukturierte und unstrukturierte Störungen von Messsignalen bei der algebraischen Identifikation berücksichtigen und auf diese Weise unterdrücken lassen (vgl. Abschnitt 3.3). Dafür seien die Messgröße y_0 aus (4.2) durch Gaußssches weißes Rauschen $t \mapsto n(t)$ überlagert, jene bei $z = \ell$ durch einen unbekannten konstanten Anteil γ :

$$\hat{w}(0) = \hat{y}_0 - \hat{n}, \quad \hat{w}(\ell) = \hat{y}_\ell - \frac{\gamma}{s}.$$

Aus der Lösung von (4.3) folgt damit die Messgleichung

$$\hat{y}_\ell - \frac{\gamma}{s} = \hat{\Phi}(\ell)(\hat{y}_0 - \hat{n}).$$

Da der Parameter γ unbekannt ist, könnte er ebenfalls algebraisch identifiziert werden [SRGRCRLJ14]. Hier soll stattdessen genutzt werden, dass die strukturierte Störung mit $\frac{d}{ds}s\frac{\gamma}{s} = 0$ einer Dgl. bzgl. s genügt und sich durch Anwendung des entsprechenden Differentialoperators auf die Messgleichung aus dieser eliminieren lässt. Unter Berücksichtigung der Dgl. (4.4) für die Exponentialfunktion $\hat{\Phi}(\ell)$ ergibt sich mit

$$0 = s\hat{y}'_\ell + \hat{y}_\ell + \hat{\Phi}(\ell)(s\theta(\hat{y}_0 - \hat{n}) - s(\hat{y}'_0 - \hat{n}') - \hat{y}_0 + \hat{n}) \quad (4.9)$$

(und $\theta = \tau$) eine von γ unabhängige Beziehung.

Aus (4.9) lässt sich durch Elimination von $\hat{\Phi}(\ell)$ eine in θ quadratische Gleichung

$$0 = \hat{h}_0 + \theta\hat{h}_1 + \theta^2\hat{h}_2$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= -(s\hat{y}''_\ell - 2\hat{y}'_\ell)(\hat{y}_0 - \hat{n}) - (s^2\hat{y}''_\ell - 2\hat{y}_\ell)(\hat{y}'_0 - \hat{n}') + s(s\hat{y}'_\ell + \hat{y}_\ell)(\hat{y}''_0 - \hat{n}'') \\ \hat{h}_1 &= (s^2\hat{y}''_\ell - 2\hat{y}_\ell)(\hat{y}_0 - \hat{n}) - 2s(s\hat{y}'_\ell + \hat{y}_\ell)(\hat{y}'_0 - \hat{n}') \\ \hat{h}_2 &= s(s\hat{y}'_\ell + \hat{y}_\ell)(\hat{y}_0 - \hat{n}) \end{aligned}$$

herleiten. Da entsprechend (3.12) für das Rauschen $s^{-1}\frac{d^k\hat{n}}{ds^k} = 0$ gilt, $k \in \mathbb{Z}$, folgt durch Multiplikation mit s^{-3} die Identifikationsgleichung

$$0 = \hat{\hat{h}}_0 + \theta\hat{\hat{h}}_1 + \theta^2\hat{\hat{h}}_2$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\hat{h}}_0 &= -s^{-2}\hat{y}_0(\hat{y}''_\ell - 2s^{-1}\hat{y}'_\ell) - s^{-1}\hat{y}'_0(\hat{y}''_\ell - 2s^{-2}\hat{y}_\ell) + s^{-1}\hat{y}''_0(\hat{y}'_\ell + s^{-1}\hat{y}_\ell) \\ \hat{\hat{h}}_1 &= s^{-1}\hat{y}_0(\hat{y}''_\ell - 2s^{-2}\hat{y}_\ell) - 2s^{-1}\hat{y}'_0(\hat{y}'_\ell + s^{-1}\hat{y}_\ell) \\ \hat{\hat{h}}_2 &= s^{-1}\hat{y}_0(\hat{y}'_\ell + s^{-1}\hat{y}_\ell). \end{aligned}$$

Da jedes $\hat{y}_0$ in den $\hat{\hat{h}}_i$ mit negativen Potenzen von s multipliziert ist, folgt, dass in einer zugehörigen Darstellung im Zeitbereich die verrauschte Messung y_0 nur in integrierter Form auftritt, wodurch der mittelwertfreie Rauschanteil unterdrückt wird. Auf die Angabe von Simulationsergebnissen wird an dieser Stelle verzichtet.

4.2 Eine elektrische Leitung

Die als homogen betrachtete zweiadrige elektrische Leitung in Form eines Koaxialkabels weist über die Länge ℓ konstante Werte für den Widerstandsbelag R , den Leitwertbelag G , den Kapazitätsbelag C und den Induktivitätsbelag L auf (vgl. Abb. 4.6). Die

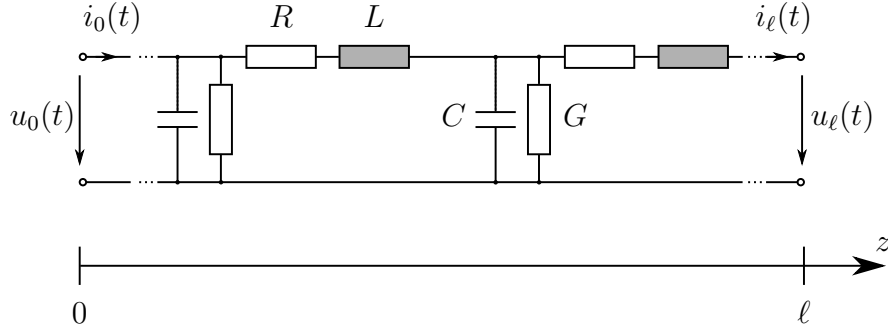


Abbildung 4.6: Skizze einer zweiadrigen elektrischen Leitung.

Änderung der Spannung $u(z, t)$ und des Stroms $i(z, t)$ über dem Ort $z \in [0, \ell]$ und der Zeit t wird durch die Telegraphengleichungen

$$\partial_z i(z, t) + C \partial_t u(z, t) + G u(z, t) = 0 \quad (4.10a)$$

$$\partial_z u(z, t) + L \partial_t i(z, t) + R i(z, t) = 0 \quad (4.10b)$$

beschrieben. Da für die sich anschließende Identifikation der Leitungsbeläge von der Messung sämtlicher Randgrößen⁴

$$u_0(t) = u(0, t), \quad u_\ell(t) = u(\ell, t), \quad i_0(t) = i(0, t), \quad i_\ell(t) = i(\ell, t) \quad (4.11)$$

ausgegangen wird, werden etwaige (zusätzliche) Randbedingungen nicht benötigt. Vielmehr spiegeln sie sich bereits in (4.11) wider. Das Modell wird durch homogene Anfangsbedingungen vervollständigt.

4.2.1 Herleitung einer Identifikationsgleichung

Für die Herleitung einer Identifikationsgleichung wird unter Berücksichtigung der Homogenität der Anfangsbedingungen die Laplace-Transformation auf die Telegraphengleichungen angewandt und die Lösung des daraus hervorgehenden gewöhnlichen Differentialgleichungssystems berechnet:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}(z) \\ \hat{Z}\hat{i}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\hat{\Gamma}z) & -\sinh(\hat{\Gamma}z) \\ -\sinh(\hat{\Gamma}z) & \cosh(\hat{\Gamma}z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}(0) \\ \hat{Z}\hat{i}(0) \end{pmatrix}$$

mit

$$\hat{\Gamma} = \sqrt{(R + sL)(G + sC)}, \quad \hat{Z} = \sqrt{\frac{R + sL}{G + sC}}.$$

Aus der Lösung bei $z = \ell$ ergibt sich eine Beziehung zwischen den Messgrößen in (4.11), die nach den hyperbolischen Funktionen

$$\cosh(\hat{\Gamma}z) = \frac{\hat{u}_0 \hat{u}_\ell - Z^2(s) \hat{i}_0 \hat{i}_\ell}{\hat{u}_0^2 - Z^2(s) \hat{i}_0^2}, \quad \sinh(\hat{\Gamma}z) = \frac{\hat{i}_0 \hat{u}_\ell - \hat{u}_0 \hat{i}_\ell}{\hat{u}_0^2 - Z^2(s) \hat{i}_0^2}$$

⁴Man beachte, dass die Leitung grundsätzlich eine Länge größer als ℓ aufweisen darf. Es wird lediglich davon ausgegangen, dass an zwei beliebigen Stellen des Kabels die Spannung zwischen Innen- und Außenleiter sowie der Strom im Innenleiter gemessen werden.

aufgelöst werden kann, falls die Leitung nicht reflexionsfrei abgeschlossen ist⁵. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die hyperbolische Identität

$$\cosh^2(\hat{\Gamma}z) - \sinh^2(\hat{\Gamma}z) = 1$$

ergibt sich die Identifikationsgleichung

$$(Gs^{-1} + C)(\hat{u}_\ell^2 - \hat{u}_0^2) - (Rs^{-1} + L)(\hat{i}_\ell^2 - \hat{i}_0^2) = 0. \quad (4.12)$$

In dieser sind lediglich drei Quotienten der Leitungsbeläge identifizierbar. Eine Division durch den Kapazitätsbelag C führt auf eine normierte Gleichung und ermöglicht im Zeitbereich beispielsweise aus

$$\begin{pmatrix} I_0 & I_1 & -U_1 \\ I_1 & I_2 & -U_2 \\ I_2 & I_3 & -U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L/C \\ R/C \\ G/C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

mit $U_k(t) = \int_0^t U_{k-1}(\tau) d\tau$, $I_k(t) = \int_0^t I_{k-1}(\tau) d\tau$, $k \in \{1, 2, 3\}$ und

$$U_0 = u_\ell * u_\ell - u_0 * u_0, \quad I_0 = i_\ell * i_\ell - i_0 * i_0$$

die Identifikation der Impedanz $\sqrt{\frac{L}{C}}$ sowie des Widerstandsbelags R und des Leitwertbelags G , die Kenntnis von C vorausgesetzt.

Das gleiche Ergebnis (4.12) lässt sich auch systematisch entsprechend der Elimination in Kapitel 2 herleiten. Dafür wird eine Darstellung

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dz}(z) = \hat{A}\hat{\mathbf{x}}(z) = \begin{pmatrix} 0 & -(Cs + G) \\ -(Ls + R) & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(z)$$

erster Ordnung mit $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{i}, \hat{u})^T$ für die Laplace-Transformierte von (4.10) eingeführt, wobei sich die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_\ell \\ \hat{u}_\ell \end{pmatrix} = \hat{\Phi}(\ell) \begin{pmatrix} \hat{i}_0 \\ \hat{u}_0 \end{pmatrix} \quad (4.14a)$$

zwischen den Messgrößen ergibt. Das Matrix-Exponential $\hat{\Phi}(\ell) = e^{\hat{A}\ell}$ genügt der Dgl.

$$\hat{\Phi}'(\ell) = \hat{\Phi}(\ell) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{CR - GL}{(Ls + R)(Cs + G)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{(2CLs + CR + GL)\ell}{Ls + R} \\ \frac{1}{2} \frac{(2CLs + CR + GL)\ell}{Cs + G} & \frac{1}{2} \frac{CR - GL}{(Ls + R)(Cs + G)} \end{pmatrix} \hat{\Phi}(\ell) \quad (4.14b)$$

und kommutiert mit $\hat{A}$ selbst:

$$\hat{\Phi}(\ell)\hat{A} = \hat{A}\hat{\Phi}(\ell). \quad (4.14c)$$

Für die Wronski-Determinante von $\hat{A}$ gilt die Formel von Liouville [BSMM101]

$$\det \hat{\Phi}(\ell) = 1. \quad (4.14d)$$

⁵Bei angepasster Leitungsimpedanz am Rand breiten sich die Wellen nur in einer Richtung mit $\hat{u}(z) = \pm \hat{Z}\hat{i}(z)$ aus.

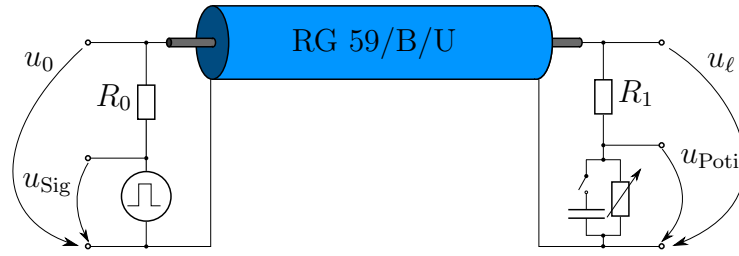


Abbildung 4.7: Aufbau zur Messung (bzw. Berechnung) der Spannungen und Ströme am Koaxialkabel RG 59/B/U.

Aus (4.14) lässt sich $\hat{\Phi}(\ell)$ bzw. lassen sich die vier Einträge der Matrix leicht eliminieren. Die bereits zuvor ermittelte Identifikationsgleichung (4.12) geht dabei aus den charakteristischen Mengen eines basierend auf (4.14a), (4.14c) und (4.14d) definierten differentiellen Ideals $I = [f_1, \dots, f_5]$ mit

$$\begin{aligned} f_1 &= \hat{i}_\ell - \hat{\phi}_{1,1}(\ell)\hat{i}_0 - \hat{\phi}_{1,2}(\ell)\hat{u}_0 \\ f_2 &= \hat{u}_\ell - \hat{\phi}_{2,1}(\ell)\hat{i}_0 - \hat{\phi}_{2,2}(\ell)\hat{u}_0 \\ f_3 &= \hat{\phi}_{1,1}(\ell) - \hat{\phi}_{2,2}(\ell) \\ f_4 &= (Ls + R)\hat{\phi}_{1,2}(\ell) - (Cs + G)\hat{\phi}_{2,1}(\ell) \\ f_5 &= \hat{\phi}_{1,1}(\ell)\hat{\phi}_{2,2}(\ell) - \hat{\phi}_{1,2}(\ell)\hat{\phi}_{2,1}(\ell) - 1 \end{aligned}$$

hervor.

Es sei bemerkt, dass die Länge ℓ nicht als Parameter in den Polynomen $f_1, \dots, f_5$ des Ideals I auftritt. Folglich gilt gleiches für die aus den charakteristischen Mengen von I hervorgehende Identifikationsgleichung (4.12), und die Länge ist nicht identifizierbar. Über die algebraische Identifizierbarkeit kann auf der Basis von I jedoch keine Aussage getroffen, da sich diese Eigenschaft aus dem speziellen Ideal I^* entsprechend Definition 2.3 ableitet. Hier stellt man fest, dass zwar nicht die Länge ℓ selbst, wohl aber ein skaliertes Parameter $L\ell$ algebraisch identifizierbar ist. Falls ℓ bzw. $L\ell$ geschätzt werden soll, muss der Ritt-Algorithmus auf ein Ideal $\bar{I} = [f_1, \dots, f_6]$ angewandt werden, das zumindest eine der vier skalaren Gln. in (4.14b) enthält, z.B.

$$f_6 = 2(Ls + R)\hat{\phi}'_{1,1}(\ell) + \ell(2CLs + CR + GL)\hat{\phi}'_{2,1}(\ell).$$

4.2.2 Simulations- und Messergebnisse

Zur Untersuchung der praktischen Anwendbarkeit wurden Messungen an einem Koaxialkabel durchgeführt. An einem 50 m langen Koaxialkabel vom Typ RG 59/B/U mit den in Tabelle 4.1 angegebenen, für die Identifikation wesentlichen Parametern wurden dafür jeweils zwei Spannungen an den Enden des Kabels gemessen (vgl. Messaufbau in Abb. 4.7), auf Basis derer sich die als Messsignale definierten Größen in (4.11) berechnen lassen.

Von einem stationären Regime ausgehend wurde die elektrische Leitung zum Zwecke der Parameteridentifikation mit einer Rechteckschwingung der Frequenz 1333 kHz angeregt und die in Abb. 4.8 dargestellten Messsignale mit 1250 MHz abgetastet. Für die

Parameter	Wert	Einheit
Länge ℓ	50	m
Wellenwiderstand Impedanz $\sqrt{\frac{L}{C}}$	75 ± 3	Ω
Kapazitätsbelag C	67	pF/m

Tabelle 4.1: Parameter des Koaxialkabels RG 59/B/U laut Datenblatt.

Berechnung der Leitungsparameter entsprechend (4.13) ergaben sich unter Verwendung des Kapazitätsbelags C aus Tabelle 4.1 Schätzwerte für $\sqrt{\frac{L}{C}}$, R und G , wie Abb. 4.9 zu entnehmen ist, wobei die Gleichung (4.13) hier achtfach zusätzlich integriert wurde, um den Einfluss des Rauschens zu reduzieren. Es ist zu erkennen, dass sich zumindest für die Leitungsimpedanz und den Widerstandsbelag konstante und damit (eigentlich) vertrauenswürdige Werte ergeben. Die Leitungsimpedanz liegt jedoch außerhalb des im Datenblatt angegebenen Bereichs und auch der Widerstandsbelag scheint zu hoch. Für den Leitwertbelag kann kein konstanter Wert identifiziert werden. Der driftende Schätzwert deutet an dieser Stelle auf eine geringe Sensitivität des Systemverhaltens bzgl. einer Variation des Leitwertbelags hin.

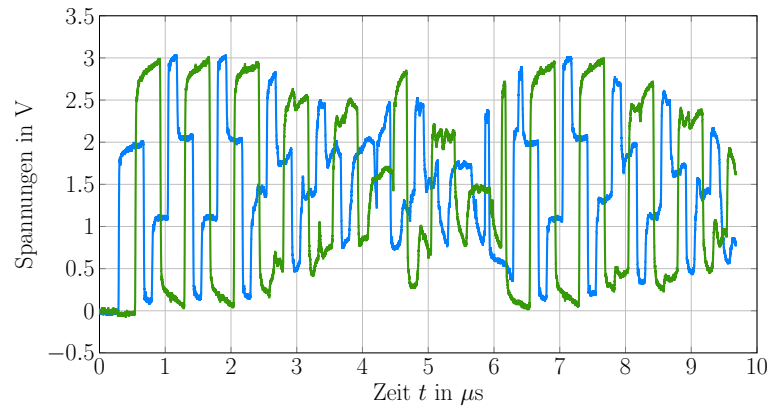
Aus diesen Gründen wurde eine Simulation auf Basis der identifizierten Parameter durchgeführt, mit den arithmetischen Mittelwerten

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = 78.6 \, \Omega, \quad R = 0.53 \, \Omega/\text{m}, \quad G = 0.6 \, \mu\text{S}/\text{m} \quad (4.15)$$

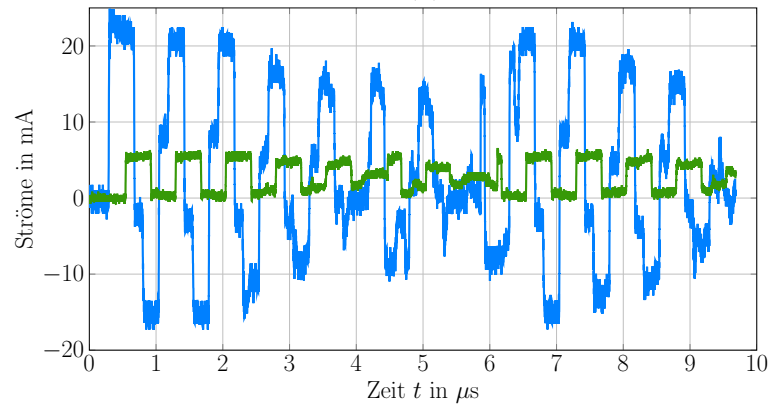
der letzten 100 Schätzwerte eines jeden Parameters. Für die Simulation, in der die Trajektorien von Spannung und Strom bei $z = 0$ für ein gegebenes Paar entsprechender Trajektorien bei $z = \ell$ aus der Lösung der Telegraphengleichung (4.10) exakt berechnet werden, wurde die Länge ℓ der Leitung und der Kapazitätsbelag C als bekannt angenommen. Für die Validierung diente der Ausschnitt einer Messung, bei der das Koaxialkabel mit einer Frequenz von 1750 kHz angeregt und mit 2500 MHz abgetastet wurde. Der Vergleich zwischen den gemessenen und den auf Basis der identifizierten Leitungsparameter simulierten Trajektorien von u_0 und i_0 in Abb. 4.10 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung sowohl in den (quasi-)stationären Bereichen als auch in den dynamischen. Die Simulation validiert damit die identifizierten Parameter in (4.15), auch wenn diese von den Nominalwerten des Datenblatts abweichen.

4.2.3 Eine gestörte elektrische Leitung

Ein weiteres interessantes Anwendungsgebiet der algebraischen Identifikationsmethode eröffnet sich in der Detektion und Lokalisierung von Störungen. Für die elektrische Leitung soll diese Möglichkeit am Beispiel einer defekten Isolierung zwischen Innen- und Außenleiter eines Koaxialkabels kurz skizziert werden. Zur Vereinfachung der sich anschließenden Berechnungen sei die Leitung als verlustfrei angenommen, sodass in den Telegraphengleichungen (4.10) $R = G = 0$ gilt. Eine entsprechende elektrische



(a)



(b)

Abbildung 4.8: Trajektorien der Messsignale: Spannungen u_0 (blau) und u_ℓ (grün) in (a), Ströme i_0 (blau) und i_ℓ (grün) in (b).

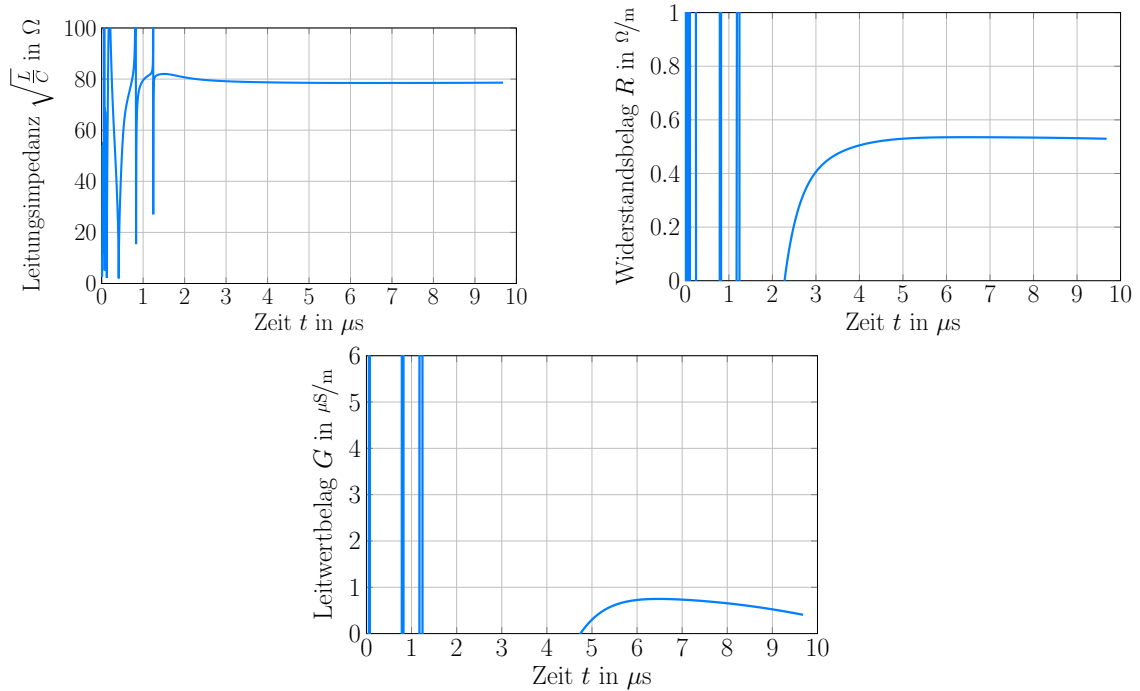
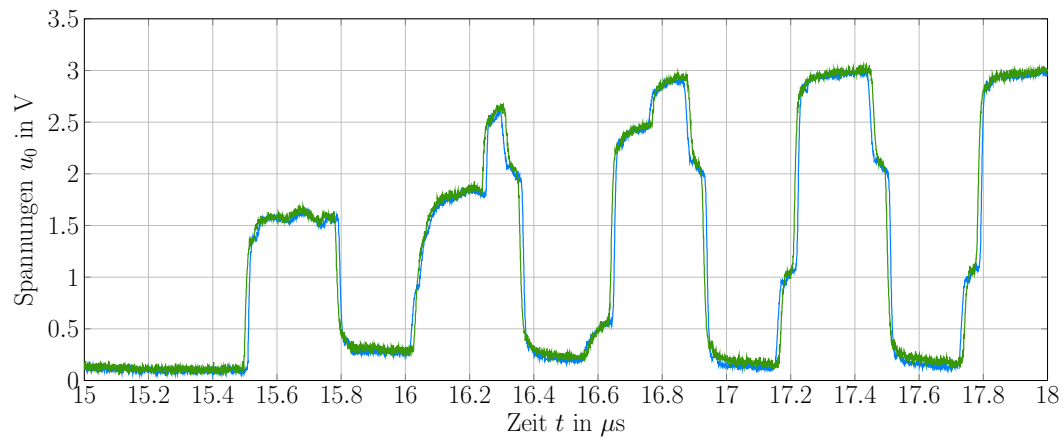
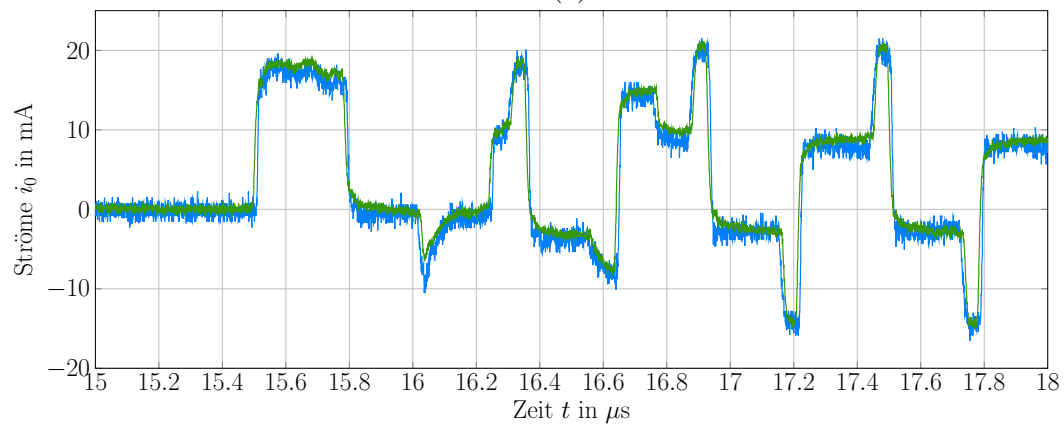


Abbildung 4.9: Aus den Messsignalen in Abb. 4.8 identifizierte Leitungsparameter.



(a)



(b)

Abbildung 4.10: Vergleich zwischen gemessenen (blau) und auf Basis der identifizierten Leitungsparameter simulierten Trajektorien (grün) von Spannung und Strom bei $z = \ell$.

Leitung der Gesamtlänge ℓ lässt sich abschnittsweise, getrennt durch den unbekannten Ort $z = \ell_0$ der Störung durch die partiellen Dgln.

$$\partial_z i_1(z, t) + C \partial_t u_1(z, t) = 0, \quad \partial_z u_1(z, t) + L \partial_t i_1(z, t) = 0, \quad z \in [0, \ell_0) \quad (4.16a)$$

$$\partial_z i_2(z, t) + C \partial_t u_2(z, t) = 0, \quad \partial_z u_2(z, t) + L \partial_t i_2(z, t) = 0, \quad z \in (\ell_0, \ell] \quad (4.16b)$$

modellieren. Die beiden Segmente sind über die Randbedingungen

$$u_1(\ell_0, t) = u_2(\ell_0, t) \quad (4.17a)$$

$$i_1(\ell_0, t) = i_2(\ell_0, t) + G_{\ell_0} u_2(\ell_0, t) \quad (4.17b)$$

an der Störstelle gekoppelt, wobei der unbekannte Leitwert G_{ℓ_0} im ungestörten Fall gegen Null geht. Erneut sind die Anfangsbedingungen homogen.

In Folge der vorangegangenen Betrachtungen, also der Identifikation im ungestörten Fall, wird davon ausgegangen, dass bis auf den Leitwert G_{ℓ_0} und die Position ℓ_0 sämtliche Leitungsparameter bekannt sind, insbesondere die Impedanz $\sqrt{\frac{L}{C}}$, der Kapazitätsbelags C und die Länge ℓ . Zur Identifikation der Störstelle stehen weiterhin die Messungen von Spannung und Strom bei $z = 0$ und $z = \ell$ entsprechend (4.11) zur Verfügung.

Analog zum ungestörten Fall wird aus der Laplace-Transformierten von (4.16) unter Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen die Lösung des Randwertproblems berechnet, aus dem sich mit

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_\ell \\ Z \hat{i}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\hat{\Gamma}(\ell - \ell_0)) & -\sinh(\hat{\Gamma}(\ell - \ell_0)) \\ -\sinh(\hat{\Gamma}(\ell - \ell_0)) & \cosh(\hat{\Gamma}(\ell - \ell_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G_{\ell_0} Z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\hat{\Gamma}\ell) & -\sinh(\hat{\Gamma}\ell) \\ -\sinh(\hat{\Gamma}\ell) & \cosh(\hat{\Gamma}\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ Z \hat{i}_0 \end{pmatrix}$$

eine Beziehung zwischen den vier Messgrößen ergibt, mit $\hat{\Gamma} = s\sqrt{LC}$, $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Die erste und zweite Ableitung dieser Gleichung nach s ermöglicht die Elimination der Fundamentallösungen in Form der vier hyperbolischen Funktionen und führt auf eine Identifikationsgleichung der Form

$$\hat{h}_0 + \ell_0 \hat{h}_1 + \ell_0^2 \hat{h}_2 = 0, \quad (4.18)$$

wobei die Größen $\hat{h}_i$ polynomial sind in den Messgrößen (und deren Ableitungen nach s) sowie den Parametern Z , C und ℓ .

Das elektrische Netzwerk (4.16), (4.17) wurde über die Methode der Charakteristiken simuliert, wobei für beide Leitungssegmente eine Impedanz von $Z = 75 \Omega$ und ein Kapazitätsbelag von $C = 67 \text{ pF/m}$ gewählt wurden. Als Anregung für die 100 m lange Leitung mit einer Störstelle in Form des Leitwerts $G = 1 \text{ mS}$ bei $\ell_0 = 17 \text{ m}$ diente ein periodisches Signal mit der Frequenz 3400 kHz. Die zugehörigen mit einer Frequenz von 1990 MHz abgetasteten Trajektorien der vier Randgrößen u_0 , u_ℓ , i_0 , i_ℓ sowie der Schätzwert für ℓ_0 können Abb. 4.11 entnommen werden, wobei für letzteren nur die

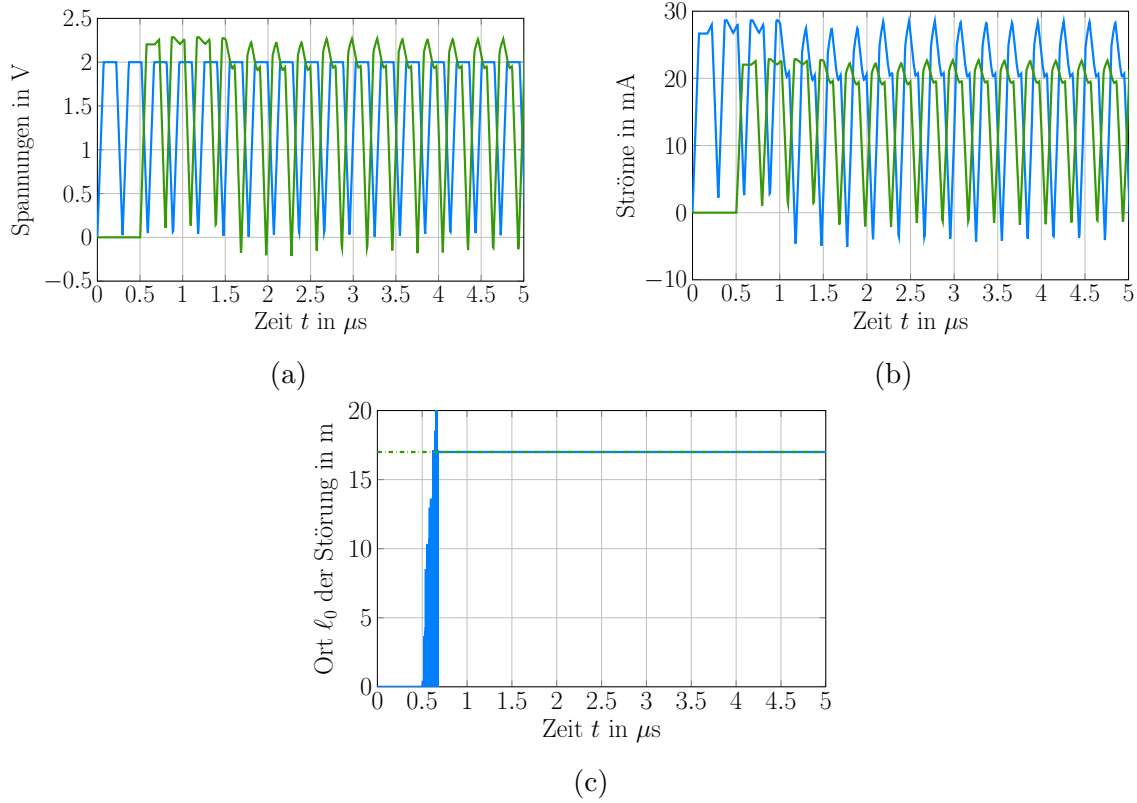


Abbildung 4.11: Simulationsergebnisse zur Lokalisierung einer Störstelle auf einer elektrischen Leitung: u_0 (blau) und u_ℓ (grün) in (a), i_0 (blau) und i_ℓ (grün) in (b), einzig für $t > 1$ µs zeitlich konstante Lösung von (4.18) als Schätzwert für ℓ_0 in (c).

(nach hinreichend langer Zeit) konstante der zwei Lösungen von (4.18) dargestellt ist. Man erkennt, dass wegen $u_\ell(t) = i_\ell(t) = 0$ für $t \in [0, 0.5]$ µs eine Identifikation erst für $t > 0.5$ µs möglich ist, anschließend jedoch der Schätzwert nahezu unmittelbar mit dem tatsächlichen Systemparameter exakt übereinstimmt.

Dass nur im Fall einer Störstelle die Identifikationsgleichung (4.18) deren Position als Lösung liefert, konnte anhand weiterer Simulationen einer ungestörten Leitung verifiziert werden. In diesem Fall entspricht die (einzig) zeitlich konstante Lösung von (4.18) der Leitungslänge ℓ .

4.3 Ein Euler-Bernoulli-Balken

Betrachtet wird ein einseitig eingespannter Euler-Bernoulli-Balken der Länge $L > 0$, dessen Auslenkung $w(z, t)$ der partiellen Dgl.

$$EI \partial_z^4 w(z, t) + A \rho \partial_z^2 w(z, t) = 0 \quad (4.19)$$

genügt. Es bezeichnen die konstanten Parameter E , I , A und ρ den Elastizitätsmodul, das (relevante) Flächenträgheitsmoment, die Querschnittsfläche und die flächenbezogene Dichte des homogenen Balkens. Im Beispiel werden Randbedingungen

$$w(0, t) = 0, \quad \partial_z w(0, t) = 0, \quad \partial_z^2 w(L, t) = 0, \quad \partial_z^3 w(L, t) = F(t) \quad (4.20)$$

betrachtet. Für die Identifikation des einzigen in (4.19) auftretenden Parameters $\alpha = \frac{A\rho}{EI}$ unter Verwendung der Messgrößen $F(t)$ und $y(t) = w(L, t)$ wird von homogenen Anfangsbedingungen ausgegangen.

Basierend auf einer Darstellung

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dz} = \hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha s^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.21)$$

erster Ordnung mit $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{w}, \frac{d\hat{w}}{dz}, \frac{d^2\hat{w}}{dz^2}, \frac{d^3\hat{w}}{dz^3})^T$ für die Laplace-Transformierte von (4.19) lässt sich entsprechend (2.16) eine Dgl. für die Matrix-Exponentialfunktion $\hat{\Phi}(z) = e^{\hat{A}z}$ bzgl. s angeben:

$$\hat{\Phi}'(z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{z}{2s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2s} & \frac{z}{2s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{z}{2s} \\ -\alpha \frac{sz}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2s} \end{pmatrix} \hat{\Phi}(z) + \hat{\Phi}(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2s} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

wobei für die Matrix $\hat{V}$ der Eigenvektoren und die Jordan-Matrix $\hat{J}$ als

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (-\alpha s^2)^{\frac{1}{4}} & -j(-\alpha s^2)^{\frac{1}{4}} & j(-\alpha s^2)^{\frac{1}{4}} & -(-\alpha s^2)^{\frac{1}{4}} \\ (-\alpha s^2)^{\frac{1}{2}} & -(-\alpha s^2)^{\frac{1}{2}} & -(-\alpha s^2)^{\frac{1}{2}} & (-\alpha s^2)^{\frac{1}{2}} \\ (-\alpha s^2)^{\frac{3}{4}} & j(-\alpha s^2)^{\frac{3}{4}} & -j(-\alpha s^2)^{\frac{3}{4}} & -(-\alpha s^2)^{\frac{3}{4}} \end{pmatrix}$$

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} (-\alpha s^2)^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j(-\alpha s^2)^{\frac{1}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j(-\alpha s^2)^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(-\alpha s^2)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

gewählt wurden.

Die Messgleichung als Beziehung zwischen $\hat{F}$ und $\hat{y}$ lässt sich ausgehend von der Lösung $\hat{\mathbf{x}}(z) = \hat{\Phi}(L - z)\hat{\mathbf{x}}(L)$ mit

$$\hat{w}(z) = \hat{\phi}_{1,1}(L - z)\hat{w}(L) + \hat{\phi}_{1,2}(L - z)\frac{d\hat{w}}{dz}(L) + \hat{\phi}_{1,3}(L - z)\frac{d^2\hat{w}}{dz^2}(L) + \hat{\phi}_{1,4}(L - z)\frac{d^3\hat{w}}{dz^3}(L)$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen (4.20) ermitteln:

$$\alpha^2 s^2 (\alpha^2 s^2 \hat{\phi}_{1,1}^2(L) + \hat{\phi}_{1,2}(L)\hat{\phi}_{1,4}(L))\hat{y} = (\alpha^2 s^2 \hat{\phi}_{1,1}(L)\hat{\phi}_{1,2}(L) + \hat{\phi}_{1,3}(L)\hat{\phi}_{1,4}(L))\hat{F}. \quad (4.23)$$

Die Herleitung einer Identifikationsgleichung erfordert die Elimination der vier Fundamentallösungen $\hat{\phi}_{1,i}$ mit Hilfe von (4.22). Eine solche Gleichung lässt mit Hilfe des

Ritt-Algorithmus für das differentielle Ideal $I = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$ mit

$$f_1 = 2\hat{\psi}'_1 - \alpha s L \hat{\psi}_4 \quad (4.24a)$$

$$f_2 = 2s\hat{\psi}'_2 + \hat{\psi}_2 + L\hat{\psi}_1 \quad (4.24b)$$

$$f_3 = 2s\hat{\psi}'_3 + 2\hat{\psi}_3 + L\hat{\psi}_2 \quad (4.24c)$$

$$f_4 = 2s\hat{\psi}'_4 + 3\hat{\psi}_4 + L\hat{\psi}_3 \quad (4.24d)$$

$$f_5 = \alpha^2 s^2 (\alpha^2 s^2 \hat{\psi}_1^2 + \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_4) \hat{y} - (\alpha^2 s^2 \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4) \hat{F} \quad (4.24e)$$

ermitteln, wobei sich die Beziehungen $f_1, \dots, f_4$ für die Ableitungen von $\hat{\psi}_i = \hat{\phi}_{1,i}(L)$ nach s aus (4.22) unter Berücksichtigung von $\hat{A}\hat{\Phi} = \hat{\Phi}\hat{A}$ ergeben.

Da es aufgrund der symbolischen Komplexität des Problems bisher nicht möglich war, unter Verwendung des Maple[®]-Pakets *CharSets* die charakteristischen Mengen für I zu ermitteln, soll ein alternativer Zugang zur Elimination der $\hat{\psi}_i$ verfolgt werden. Motiviert durch die in der Messgleichung auftretenden Produkte $\hat{\psi}_i \hat{\psi}_j$ werden mit

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= \psi_1^2, & \bar{\psi}_2 &= \psi_1 \psi_2, & \bar{\psi}_3 &= \psi_1 \psi_3, & \bar{\psi}_4 &= \psi_1 \psi_4, & \bar{\psi}_5 &= \psi_2^2, \\ \bar{\psi}_6 &= \psi_2 \psi_3, & \bar{\psi}_7 &= \psi_2 \psi_4, & \bar{\psi}_8 &= \psi_3^2, & \bar{\psi}_9 &= \psi_3 \psi_4 \end{aligned}$$

neun neue Funktionen definiert. Von den $n(n+1)/2 = 10$ unterschiedlichen Kombinationen $\psi_i \psi_j$, mit $n = 4$ der Dimension von $\hat{A}$, entfällt dabei $\bar{\psi}_{10}$ wegen $-2\bar{\psi}_3 + \bar{\psi}_5 - \alpha s^2 \bar{\psi}_{10} = 0$. Dieser Sachverhalt wird auch auf der Basis der Fundamentallösungen von (4.21) ersichtlich, da die multiplikative Kombination der vier trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen aufgrund der jeweiligen Identitätsbeziehungen auf acht unabhängige Produkte und eine Konstante führt. Im Gegensatz zu (4.24) sind die daraus hervorgehenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= 2s\hat{\psi}'_1 - 2\alpha L s^2 \hat{\psi}_4 \\ \bar{f}_2 &= 2s\hat{\psi}'_2 + L\hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2 - \alpha L s^2 \hat{\psi}_7 \\ \bar{f}_3 &= 2s\hat{\psi}'_3 + L\hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_3 - \alpha L s^2 \hat{\psi}_9 \\ \bar{f}_4 &= 2s\hat{\psi}'_4 + 3L\hat{\psi}_3 + 3\hat{\psi}_4 + L\hat{\psi}_5 \\ \bar{f}_5 &= 2s\hat{\psi}'_5 + 2L\hat{\psi}_2 + 2\hat{\psi}_5 \\ \bar{f}_6 &= 2s\hat{\psi}'_6 + L\hat{\psi}_3 + L\hat{\psi}_5 + 3\hat{\psi}_6 \\ \bar{f}_7 &= 2s\hat{\psi}'_7 + L\hat{\psi}_4 + L\hat{\psi}_6 + 4\hat{\psi}_7 \\ \bar{f}_8 &= 2s\hat{\psi}'_8 + 2L\hat{\psi}_6 + 4\hat{\psi}_8 \\ \bar{f}_9 &= 2s\hat{\psi}'_9 + L\hat{\psi}_7 + L\hat{\psi}_8 + 5\hat{\psi}_9 \\ \bar{f}_{10} &= \alpha^2 s^2 (\alpha^2 s^2 \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_7) \hat{y} - (\alpha^2 s^2 \hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_9) \hat{F} \end{aligned}$$

linear in $\hat{\psi}_i$. Auch für das Ideal $[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{10}]$ konnten mit dem *CharSets*-Paket nicht die charakteristischen Mengen ermittelt werden. Da für die Identifikation aber nicht alle diese Mengen benötigt werden, sondern lediglich jene, die sich im letzten Schritt

des Eliminationsalgorithmus ergibt, soll an diesem Beispiel eine alternative Herleitung einer Identifikationsgleichung beschrieben werden.

Aufgrund der Linearität der Messgleichung (4.23) bzgl. $\hat{\psi}_i$, kann diese als

$$\begin{pmatrix} \alpha^4 s^4 \hat{y} & -\alpha^2 s^2 \hat{F} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 s^2 \hat{y} & 0 & -\hat{F} \end{pmatrix} \hat{\psi} = 0$$

mit $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_9)^T$ geschrieben werden. Dann ergibt sich daraus durch k -faches Ableiten, $k = 0, \dots, 8$ ein homogenes Gleichungssystem

$$\hat{M} \hat{\psi} = \mathbf{0}$$

mit einer quadratischen Matrix $\hat{M}$, deren Einträge polynomial im Parameter α , der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation sowie den Messgrößen $\hat{y}$, $\hat{F}$ und deren Ableitung nach s sind. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Elemente von $\hat{\psi}$ muss $\hat{M}$ singulär sein. Die Determinante von $\hat{M}$ führt damit auf eine Identifikationsgleichung (nach Multiplikation mit s^{-k} , $k \in \mathbb{N}$ derart, dass keine positiven Potenzen der komplexen Veränderlichen mehr auftreten):

$$s^{-k} \det \hat{M} = 0. \quad (4.25)$$

Da in der Identifikationsgleichung (4.25) neunfache Produkte der Messgrößen $\hat{F}$, $\hat{y}$ und deren Ableitungen nach s auftreten – entsprechend der rechenintensiven Faltung von jeweils neun Faktoren im Zeitbereich – wurde dieses Ergebnis bisher noch nicht weiter simulativ untersucht⁶.

⁶Für erste Simulationsstudien lässt sich die Komplexität der Identifikationsgleichung erheblich durch die Hinzunahme weiterer Messgrößen vereinfachen, insbesondere bei Messung sämtlicher Größen an einem Rand, z.B.

$$\hat{y}_0 = \hat{w}(0), \quad \hat{y}_1 = \hat{w}(L), \quad \hat{y}_2 = \frac{d\hat{w}}{dz}(L), \quad \hat{y}_3 = \frac{d^2\hat{w}}{dz^2}(L), \quad \hat{y}_4 = \frac{d^3\hat{w}}{dz^3}(L).$$

Kapitel 5

Algebraische Identifikation für lineare partielle Differentialgleichungen mit ortsabhängigen Koeffizienten

Die Herleitung von Beziehungen zwischen den Messgrößen für Systeme mit ortsabhängigen Koeffizienten erfolgt analog zum Fall konstanter Koeffizienten in Kapitel 2. Die zur Vereinfachung dieser Beziehungen erforderlichen algebraischen Umformungen sind jedoch wesentlich anspruchsvoller. Während es für lineare partielle Dgl. mit konstanten Koeffizienten möglich war, einen durchgehenden Algorithmus für die vorgeschlagene algebraische Parameteridentifikation anzugeben, ergibt sich im Fall ortsabhängiger Koeffizienten insbesondere bei der Lösungsberechnung ein natürlicher, fundamentaler Unterschied. Für die Systeme, die sich für letztere Klasse im Bildbereich ergeben, ist es im Allgemeinen nicht-trivial ein Fundamentalsystem zu konstruieren [Heu95]. Da die Kenntnis der Lösung für diese Art der Parameteridentifikation notwendig ist, beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Untersuchung von Beispielen mit bekannter Lösung. Die Bestimmung der Parameter basierend auf einer Identifikationsgleichung unterscheidet sich nicht vom Fall mit konstanten Koeffizienten.

Zunächst soll ein schweres Seil in unterschiedlichen Konfigurationen einen intuitiven Zugang für die Identifikation von Parametern in Systemen mit ortsabhängigen Koeffizienten geben (vgl. [GKRW12a, GKRW12b, GKRW12c]), bevor weitere, teils abstrakte Beispiele gewisse Muster und Systematiken aufzeigen.

5.1 Ein schweres Seil

Das Modell des schweren Seils stellt im regelungstechnischen Kontext ein klassisches Beispiel für ein System dar, dessen Dynamik durch eine partielle Dgl. mit ortsabhängigen Koeffizienten beschrieben wird (siehe z.B. [DNC00, PR01]).

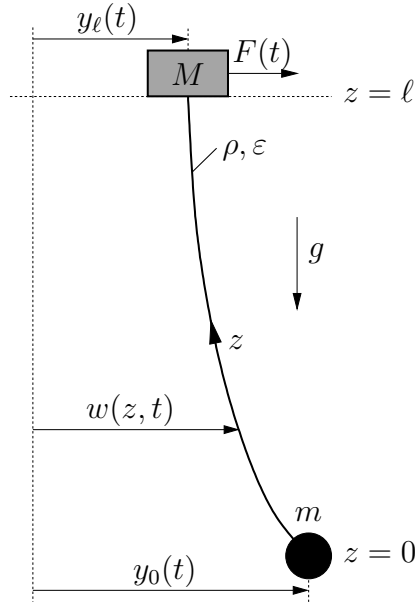


Abbildung 5.1: Skizze des schweren Seils mit Last.

5.1.1 Modell und Lösung

Hier wird ein homogenes Seil der Länge ℓ mit konstanter Querschnittsfläche und der Liniendichte ρ betrachtet, das sich im Schwerfeld der Erde bewegt (vgl. Skizze in Abbildung 5.1). Im Unterschied zu klassischen Betrachtungen wird durch den Proportionalitätsfaktor ε eine durch [Ban92] motivierte Kelvin-Voigt-Dämpfung modelliert, durch die den Reibungseffekten im Inneren des Seils Rechnung getragen werden soll. Mit der krummlinigen Koordinate z entlang des Seils bezeichnet $w(z, t)$ die horizontale Position eines Punktes relativ zu einer festen vertikalen Referenz zum Zeitpunkt t . Am unteren Ende des Seils, bei $z = 0$, kann eine punktförmige Last der Masse m befestigt sein. Für kleine Auslenkungen wird das dynamische Verhalten durch

$$\varepsilon(Pw_{zt})_z + (Pw_z)_z - \rho w_{tt} = 0, \quad z \in [0, \ell], \quad t \geq 0 \quad (5.1)$$

beschrieben, wobei $P(z) = g(\rho z + m)$ die Kraft im Seil und g die Erdbeschleunigung bezeichnen.

Das obere Ende des Seils ist an einem horizontal beweglichen Wagen der Masse M befestigt, an dem parallel zur Bewegungsrichtung eine Kraft F angreift. Die horizontale Position $w(\ell, t) = y_\ell(t)$ des Wagens genügt der Bewegungsgleichung

$$P(\ell)(\varepsilon w_{zt}(\ell, t) + w_z(\ell, t)) + Mw_{tt}(\ell, t) = F(t). \quad (5.2a)$$

Entsprechend führt eine Kräftebilanz am unteren Seilende auf

$$P(0)(\varepsilon w_{zt}(0, t) + w_z(0, t)) - mw_{tt}(0, t) = 0. \quad (5.2b)$$

Neben diesen beiden Randbedingungen wird das Modell durch homogene Anfangsbedingungen

$$w(z, 0) = 0, \quad w_t(z, 0) = 0$$

vervollständigt.

Analog zu den Betrachtungen in Kapitel 2 wird in einem ersten Schritt (5.1) mit Hilfe der Laplace-Transformation in eine gewöhnliche Dgl. mit ortsabhängigen Koeffizienten überführt:

$$g(1 + \varepsilon s) \left((\rho z + m) \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(z) + \rho \frac{d \hat{w}}{dz}(z) \right) - \rho s^2 \hat{w}(z) = 0. \quad (5.3)$$

Die für den Fall mit Kelvin-Voigt-Dämpfung modifizierte klassische Koordinatentransformation (vgl. [PR01])

$$x = \hat{f}(z) = \sqrt{\frac{P(z)}{\rho(1 + \varepsilon s)}} = 2s \sqrt{\frac{\rho z + m}{g\rho(1 + \varepsilon s)}} \quad (5.4)$$

überführt anschließend (5.3) in die modifizierte Bessel-Gleichung nullter Ordnung:

$$x^2 \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2}(x) + x \frac{d \bar{w}}{dx}(x) - x^2 \bar{w}(x) = 0.$$

In deren bekannter Lösung

$$\bar{w}(x) = \hat{C}_1 I_0(x) + \hat{C}_2 K_0(x)$$

für $x \neq 0$, bzw.

$$\hat{w}(z) = \hat{C}_1 I_0(\hat{f}(z)) + \hat{C}_2 K_0(\hat{f}(z)) \quad (5.5)$$

in den ursprünglichen Koordinaten, bezeichnen I_0 und K_0 die modifizierten Bessel-Funktionen nullter Ordnung und erster bzw. zweiter Art. Die Operatoren $\hat{C}_1$ und $\hat{C}_2$ hängen von den Randbedingungen ab, auf die anschließend in den konkreten Fallstudien eingegangen wird.

5.1.2 Fall 1: Identifikation im Fall ohne Last und ohne Kelvin-Voigt-Dämpfung

Im einfachsten, mit $\varepsilon = 0$ reibungsfreien Fall, wie auch in [GKRW12a] und [GKRW12b] betrachtet, hängt bei $z = 0$ keine Last am Seil, d.h. $m = 0$. So ergibt sich durch Auswertung der Lösung (5.5) am unteren Seilende¹ $\hat{C}_2 = 0$; die Randbedingung (5.2b) wird trivial. Allerdings folgt aus (5.5) unmittelbar $w_z(0, t) = 0$, sodass das System durch

$$gz \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(z) + g \frac{d \hat{w}}{dz}(z) - s^2 \hat{w}(z) = 0 \quad (5.6a)$$

$$P(\ell) \frac{d \hat{w}}{dz}(\ell) + M s^2 \hat{w}(\ell) = \hat{F} \quad (5.6b)$$

$$\hat{w}_z(0) = 0 \quad (5.6c)$$

beschrieben wird.

¹ Anderenfalls wäre die Auslenkung $\hat{w}(0)$ unendlich groß.

Es wird angenommen, dass die Kraft F unbekannt ist und stattdessen die horizontale Position an beiden Enden gemessen wird, d.h. die Randgrößen

$$\hat{y}_0 = \hat{w}(0), \quad \hat{y}_\ell = \hat{w}(\ell).$$

Da somit die Position des Wagens bekannt ist, wird der Identifikationsalgorithmus unabhängig von der zugehörigen Randbedingung (5.6b) sein, womit weder die Liniendichte ρ noch die Masse M des Wagens unter diesen Voraussetzungen algebraisch identifizierbar sind². Durch Auswertung der Definitionen von $\hat{y}_0$ und $\hat{y}_\ell$ im Lösungsansatz (5.5) wird aus der Messgleichung

$$\hat{y}_\ell = I_0(\theta s) \hat{y}_0 \quad (5.7)$$

ersichtlich, dass lediglich der zur Vereinfachung der Notation eingeführte Parameter

$$\theta = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

algebraisch identifizierbar ist, also bei bekannter Erdbeschleunigung die Seillänge ℓ .

Eine Identifikationsgleichung leitet sich durch Anwendung des Ritt-Algorithmus auf das sich aus (5.7) sowie den Dgln. für $\hat{\psi}_1 = I_0(\theta s)$ und $\hat{\psi}_2 = I_1(\theta s)$ (vgl. Anhang A.4) zusammensetzende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \hat{y}_\ell &= \hat{\psi}_1 \hat{y}_0 \\ \hat{\psi}_1' &= \theta \hat{\psi}_2 \\ s \hat{\psi}_2' &= \theta s \hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2 \end{aligned}$$

her:

$$\hat{y}_0(\hat{y}_0 \hat{y}_\ell'' - \hat{y}_0'' \hat{y}_\ell) + (s^{-1} \hat{y}_0 - 2 \hat{y}_0')(\hat{y}_0 \hat{y}_\ell' - \hat{y}_0' \hat{y}_\ell) = \theta^2 \hat{y}_0 \hat{y}_0' \hat{y}_\ell.$$

Daraus ergibt sich für die Identifikation der Länge

$$\ell = \frac{g}{4} \theta^2 = \frac{g}{4} \frac{y_{num}(t)}{y_{denom}(t)}, \quad (5.8)$$

im Zeitbereich (falls $y_{denom}(t) \neq 0$) mit

$$\begin{aligned} y_{num}(t) &= (v_0 * v_0 * \bar{t}^2 v_1)(t) - (v_0 * \bar{t}^2 v_0 * v_1)(t) - 2(\bar{t} v_0 * v_0 * \bar{t} v_1)(t) \\ &\quad + 2(\bar{t} v_0 * \bar{t} v_0 * v_1)(t) + \int_0^t (v_0 * \bar{t} v_0 * v_1 - v_0 * v_0 * \bar{t} v_1)(\sigma) d\sigma \\ y_{denom}(t) &= (v_0 * v_0 * v_1)(t), \end{aligned}$$

wobei $\bar{t} : t \mapsto t$ erneut die identische Abbildung bezeichnet. Der Parameter kann offensichtlich aus beliebigen Trajektorien der Messgrößen, also bei beliebiger Bewegung des Seils, ermittelt werden, solange $y_{denom}(t) \neq 0$ gilt.

²Steht die Kraft F anstelle einer der anderen Messgrößen y_0 und y_ℓ zur Verfügung (oder zusätzlich zu diesen), so lässt sich (bei Kenntnis von g) zusätzlich zur Länge ℓ des Seils zumindest ein Verhältnis der Masse M des Wagens und der Liniendichte ρ des Seils identifizieren.

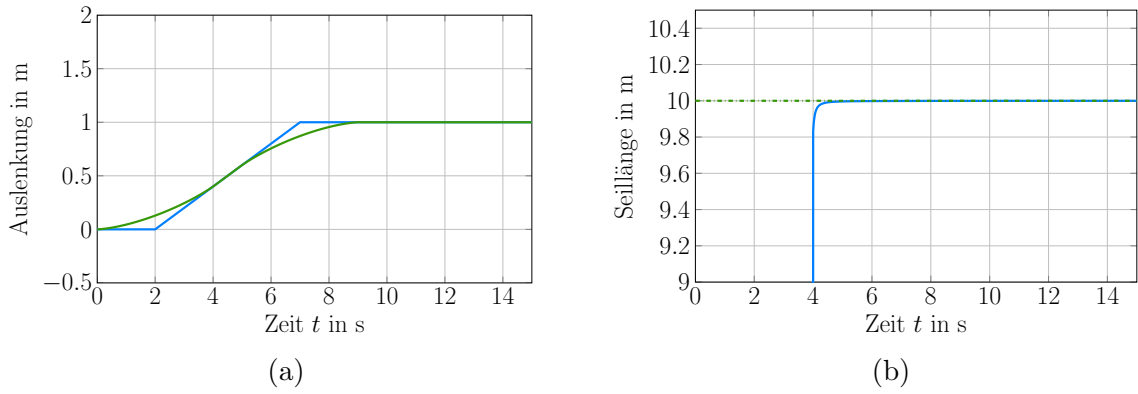


Abbildung 5.2: Identifikation der Seillänge: (a) Auslenkung y_0 vom unteren Seilende (blau) und y_l vom oberen Ende (grün), (b) mit (5.8) berechnete Seillänge (blau) im Vergleich mit der tatsächlichen Länge (grün).

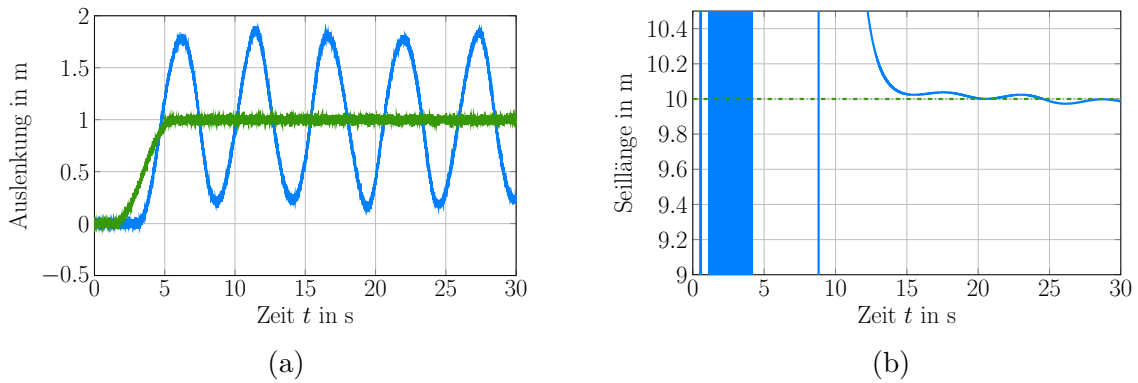


Abbildung 5.3: Identifikation der Seillänge in Gegenwart von mittelwertfreiem Rauschen: (a) Auslenkung y_0 vom unteren Seilende (blau) und y_l vom oberen Ende (grün), (b) mit (5.8) berechnete Seillänge (blau) im Vergleich mit der tatsächlichen Länge (grün).

Zur Verifikation von (5.8) wurde die Lösung von (5.1) bzw. die inverse Laplace-Transformierte von (5.7) simuliert (vgl. z.B. [PR01]). Die Ergebnisse in Abb. 5.2 lassen klar erkennen, dass aufgrund der homogenen Anfangsbedingungen mit $y_0(t) = 0$, $t \in [0, 2]$ s eine Identifikation erst für $t \geq 4$ s möglich ist. Dass die tatsächliche für die Simulation verwendete Seillänge von $\ell = 10$ m nicht unmittelbar für $t = 4$ s identifiziert wird, ist numerischen Fehlern bei der Integration und Faltung der mit einer Schrittweite von 5 ms abgetasteten Messsignale geschuldet.

Zur Prüfung der Robustheit der Identifikation wurden den Trajektorien vom oberen und unteren Seilende weißes Rauschen mit einem Signal-Rausch-Verhältnis von 35 dB überlagert. Die zugehörige identifizierte Seillänge ist in Abb. 5.3 dargestellt. Im Gegensatz zum rauschfreien Fall kam hierfür eine Simulation des Seils durch modale Approximation (mit den ersten 20 Moden) zum Einsatz, um auch auf diese Weise die Robustheit in der Berechnung von ℓ zu testen. Zwar wäre für die in der Simulation gewählten und mit einer Schrittweite von 5 ms abgetasteten Trajektorien von y_0 und y_l theoretisch eine Identifikation der Seillänge für $t \geq 9$ s möglich, aufgrund des Rauschens, der modalen Approximation und erneut numerischer Fehler gelingt dies aber

erst ab $t \approx 15$ s. Während im Fall ohne Rauschen der Schätzwert identisch mit der tatsächlichen Länge ℓ war, ist hier eine leichte Oszillation mit der Frequenz der Schwingung des unteren Seilendes zu erkennen. Der Fehler bei der Identifikation liegt jedoch deutlich unterhalb von einem Prozent.

5.1.3 Fall 2: Identifikation im Fall mit Last und ohne Kelvin-Voigt-Dämpfung

Ist am unteren Ende des reibungsfreien Seils mit $\varepsilon = 0$ eine Last der Masse m befestigt (vgl. [GKRW12a, GKRW12b]), so ergibt sich aus (5.1) und (5.2) das Randwertproblem

$$g(\rho z + m) \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(z) + g\rho \frac{d\hat{w}}{dz}(z) - \rho s^2 \hat{w}(z) = 0 \quad (5.9a)$$

$$P(\ell) \frac{d\hat{w}}{dz}(\ell) + Ms^2 \hat{w}(\ell) = \hat{F} \quad (5.9b)$$

$$P(0) \frac{d\hat{w}}{dz}(0) - ms^2 \hat{w}(0) = 0. \quad (5.9c)$$

Wie im Fall ohne Last wird angenommen, dass die Kraft F unbekannt ist und stattdessen die horizontale Positionen beider Seilenden gemessen werden:

$$\hat{y}_0 = \hat{w}(0), \quad \hat{y}_\ell = \hat{w}(\ell).$$

Ausgehend von der allgemeinen Lösung (5.5) für (5.9a) mit $\hat{f}(z) = 2s\sqrt{\frac{\rho z + m}{g\rho}}$, die sich alternativ unter Berücksichtigung der Identität (A.10) als

$$\begin{aligned} \hat{w}(z) = & \underbrace{\left[I_0(\hat{f}(z)) K_1(\hat{f}(0)) + K_0(\hat{f}(z)) I_1(\hat{f}(0)) \right]}_{\hat{S}_1(z)} \hat{f}(0) \hat{w}(0) \\ & + \underbrace{\left[I_0(\hat{f}(z)) K_0(\hat{f}(0)) - K_0(\hat{f}(z)) I_0(\hat{f}(0)) \right]}_{\hat{S}_2(z)} \frac{\hat{f}(0)}{\frac{d\hat{f}}{dz}(0)} \frac{d\hat{w}}{dz}(0) \end{aligned} \quad (5.10)$$

in Abhängigkeit der Randwerte von $\hat{w}$ bei $z = 0$ darstellen lässt, ergibt sich die Messgleichung

$$\begin{aligned} \hat{y}_\ell = & \left[I_0(\hat{f}(\ell)) K_1(\hat{f}(0)) + K_0(\hat{f}(\ell)) I_1(\hat{f}(0)) \right] \hat{f}(0) \hat{y}_0 \\ & + \left[I_0(\hat{f}(\ell)) K_0(\hat{f}(0)) - K_0(\hat{f}(\ell)) I_0(\hat{f}(0)) \right] \frac{\hat{f}^2(0)}{2} \hat{y}_0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

als Beziehung zwischen den beiden Messgrößen.

Zur Herleitung einer Identifikationsgleichung müssen die acht einem Differentialgleichungssystem achter Ordnung bzgl. s genügenden Bessel-Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= I_0(\hat{f}(0)), & \hat{\psi}_2 &= I_1(\hat{f}(0)), & \hat{\psi}_3 &= K_0(\hat{f}(0)), & \hat{\psi}_4 &= K_1(\hat{f}(0)) \\ \hat{\psi}_5 &= I_0(\hat{f}(\ell)), & \hat{\psi}_6 &= I_1(\hat{f}(\ell)), & \hat{\psi}_7 &= K_0(\hat{f}(\ell)), & \hat{\psi}_8 &= K_1(\hat{f}(\ell)) \end{aligned}$$

aus (5.11) eliminiert werden. Erneut lassen sich dafür die Dgln. aus Anhang A.4 nutzen. Äquivalent zu der Betrachtung für die schwingende Saite in Beispiel 5.3 ist das auf diese Weise formulierte Eliminationsproblem mit der Messgleichung

$$\hat{y}_\ell = (\hat{\psi}_5\hat{\psi}_4 + \hat{\psi}_7\hat{\psi}_2)\hat{f}(0)\hat{y}_0 + (\hat{\psi}_5\hat{\psi}_3 - \hat{\psi}_7\hat{\psi}_1)\frac{\hat{f}^2(0)}{2}\hat{y}_0$$

und einem Differentialgleichungssystem achter Ordnung bzgl. s für $\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_8$ unnötig komplex. Vielmehr sollte berücksichtigt werden, dass die Fundamentallösungen $\hat{S}_1$ und $\hat{S}_2$ in (5.10) ebenfalls Dgln. zweiter Ordnung sowohl bzgl. z als auch s erfüllen. Die Definition neuer Größen

$$\hat{T}_1 = I_0(\hat{f}(\ell))K_0(\hat{f}(0)) - K_0(\hat{f}(\ell))I_0(\hat{f}(0)) \quad (5.12a)$$

$$\hat{T}_2 = \left(I_0(\hat{f}(\ell))K_1(\hat{f}(0)) + K_0(\hat{f}(\ell))I_1(\hat{f}(0)) \right) \hat{f}(0) \quad (5.12b)$$

$$\hat{T}_3 = \left(I_1(\hat{f}(\ell))K_1(\hat{f}(0)) - K_1(\hat{f}(\ell))I_1(\hat{f}(0)) \right) \hat{f}(0)\hat{f}(\ell) \quad (5.12c)$$

$$\hat{T}_4 = \left(I_1(\hat{f}(\ell))K_0(\hat{f}(0)) + K_1(\hat{f}(\ell))I_0(\hat{f}(0)) \right) \hat{f}(\ell) \quad (5.12d)$$

führt auf besonders schöne Differentialgleichungen bzgl. s :

$$s\hat{T}'_1 = -\hat{T}_2 + \hat{T}_4 \quad (5.13a)$$

$$s\hat{T}'_2 = -f^2(0)\hat{T}_1 + \hat{T}_3 \quad (5.13b)$$

$$s\hat{T}'_3 = f^2(\ell)\hat{T}_2 - f^2(0)\hat{T}_4 \quad (5.13c)$$

$$s\hat{T}'_4 = f^2(\ell)\hat{T}_1 - \hat{T}_3. \quad (5.13d)$$

Eine alternative Herleitung dieser Dgln., die nicht explizit von der Kenntnis der Lösung Gebrauch macht, findet sich in Anhang B.3. Zusammen mit der Messgleichung (5.11) ergibt sich das differentielle Ideal $I = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$ mit

$$\begin{aligned} f_1 &= \hat{y}_\ell - \hat{T}_2\hat{y}_0 - 2s^2\theta_1\hat{T}_1\hat{y}_0 \\ f_2 &= s\hat{T}'_1 + \hat{T}_2 - \hat{T}_4 \\ f_3 &= s\hat{T}'_2 + 4s^2\theta_1\hat{T}_1 - \hat{T}_3 \\ f_4 &= s\hat{T}'_3 - 4s^2(\theta_1 + \theta_2)\hat{T}_2 + 4s^2\theta_1\hat{T}_4 \\ f_5 &= s\hat{T}'_4 - 4s^2(\theta_1 + \theta_2)\hat{T}_1 + \hat{T}_3, \end{aligned}$$

wobei mit $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) = (\frac{m}{g\rho}, \frac{\ell}{g})$ bereits die beiden algebraisch identifizierbaren Parameter ersetzt wurden³. Unter Verwendung des Ritt-Algorithmus ergibt sich nach Elimination der $\hat{T}_i$ die Identifikationsgleichung

$$0 = \hat{h}_0 + \theta_1\hat{h}_1 + \theta_2\hat{h}_2 + \theta_2^2\hat{h}_3 + \theta_2^3\hat{h}_4 + \theta_1\theta_2\hat{h}_5. \quad (5.14)$$

³Ebenso wie im Fall ohne Last mit dem Quotient ℓ/g hängt in Gegenwart einer Last die Lösung des Systems, also das dynamische Verhalten, lediglich von den Parametern θ_1 und θ_2 als Funktionen der Systemparameter m , ρ , g und ℓ ab.

Auf die Angabe der etwas länglichen Ausdrücke $\hat{h}_i$ wird an dieser Stelle verzichtet. Wesentlich ist, dass für ihre Berechnung im Zeitbereich Faltungsprodukte mit fünf Faktoren auszuwerten sind.

Im Gegensatz zur Lösung des Parameterproblems in (5.14) durch Überparametrierung wie in [GKRW12a, GKRW12b] soll hier alternativ ein Zugang aus Abschnitt 3.2.2 verfolgt werden, der unter dem Hintergrund der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Methoden der Differentialalgebra natürlicher erscheint. Da die Identifikation der beiden Parameter θ_1 und θ_2 mindestens zwei Gleichungen erfordert, werden Differentialoperatoren $D_s^{(a_1, b_1)}$ und $D_s^{(a_2, b_2)}$ entsprechend (3.2) auf (5.14) angewandt, wodurch sich im Zeitbereich das Gleichungssystem

$$0 = h_0^{(a_1, b_1)} + \theta_1 h_1^{(a_1, b_1)} + \theta_2 h_2^{(a_1, b_1)} + \theta_2^2 h_3^{(a_1, b_1)} + \theta_2^3 h_4^{(a_1, b_1)} + \theta_1 \theta_2 h_5^{(a_1, b_1)} \quad (5.15a)$$

$$0 = h_0^{(a_2, b_2)} + \theta_1 h_1^{(a_2, b_2)} + \theta_2 h_2^{(a_2, b_2)} + \theta_2^2 h_3^{(a_2, b_2)} + \theta_2^3 h_4^{(a_2, b_2)} + \theta_1 \theta_2 h_5^{(a_2, b_2)} \quad (5.15b)$$

ergibt. Da die Gleichungen affin in θ_1 sind, lässt sich dieser Parameter durch Linearkombination beider eliminieren. Aus dem resultierenden Polynom

$$0 = \bar{h}_0 + \theta_2 \bar{h}_1 + \theta_2^2 \bar{h}_2 + \theta_2^3 \bar{h}_3 + \theta_2^4 \bar{h}_4 \quad (5.16)$$

vierten Grades mit

$$\bar{h}_0 = h_1^{(a_1, b_1)} h_0^{(a_2, b_2)} - h_0^{(a_1, b_1)} h_1^{(a_2, b_2)} \quad (5.17a)$$

$$\bar{h}_1 = h_1^{(a_1, b_1)} h_2^{(a_2, b_2)} - h_2^{(a_1, b_1)} h_1^{(a_2, b_2)} - h_0^{(a_1, b_1)} h_5^{(a_2, b_2)} + h_5^{(a_1, b_1)} h_0^{(a_2, b_2)} \quad (5.17b)$$

$$\bar{h}_2 = h_1^{(a_1, b_1)} h_3^{(a_2, b_2)} - h_3^{(a_1, b_1)} h_1^{(a_2, b_2)} - h_2^{(a_1, b_1)} h_5^{(a_2, b_2)} + h_5^{(a_1, b_1)} h_2^{(a_2, b_2)} \quad (5.17c)$$

$$\bar{h}_3 = h_1^{(a_1, b_1)} h_4^{(a_2, b_2)} - h_4^{(a_1, b_1)} h_1^{(a_2, b_2)} - h_3^{(a_1, b_1)} h_5^{(a_2, b_2)} + h_5^{(a_1, b_1)} h_3^{(a_2, b_2)} \quad (5.17d)$$

$$\bar{h}_4 = h_5^{(a_1, b_1)} h_4^{(a_2, b_2)} - h_4^{(a_1, b_1)} h_5^{(a_2, b_2)} \quad (5.17e)$$

ergeben sich vier Schätzwerte für θ_2 , auf Basis derer sich mit (5.15a) (oder (5.15b)) ein zugehöriger Wert

$$\theta_1 = - \frac{h_0^{(a_1, b_1)} + \theta_2 h_2^{(a_1, b_1)} + \theta_2^2 h_3^{(a_1, b_1)} + \theta_2^3 h_4^{(a_1, b_1)}}{h_1^{(a_1, b_1)} + \theta_2 h_5^{(a_1, b_1)}} \quad (5.18)$$

berechnen lässt.

Eine zur Verifikation von (5.16) und (5.18) durchgeführte Simulation des schweren Seils mit Last (durch modale Approximation) verwendet die in Tabelle 5.1 dargestellten Parameter, sowie die entsprechend (3.5) einfachste Wahl $(a_1, b_1) = (1, 0)$, $(a_2, b_2) = (0, 1)$. Die Ergebnisse für eine Überführung des oberen Seilendes zwischen zwei Positionen bei Oszillation des unteren Seilendes in der Endposition finden sich in Abbildung 5.4. Aus den vier Lösungen von (5.16) und zugehörigen Schätzwerten entsprechend (5.18) ist zu erkennen, dass genau eine der Nullstellen über die Zeit konstant ist. (Da lediglich die Realteile der vier Lösungen abgebildet sind, können an einigen Stellen Bifurkationen der Lösungen beobachtet werden.) Die (konstanten) Schätzwerte für θ_1 und θ_2 stimmen für $t > 8$ s trotz der modalen Approximation des System durch lediglich 10 Moden mit den tatsächlichen Systemparametern überein, von Singularitäten abgesehen.

Parameter	Wert	Einheit
Seillänge ℓ	2	m
Last m	5	kg
Liniendichte ρ	3	kg/m
Kelvin-Voigt-Dämpfung ε	0	s
Erdbeschleunigung g	9.81	m/s ²
Schrittweite	0.01	s
Anzahl Moden	10	—

Tabelle 5.1: Simulationsparameter.

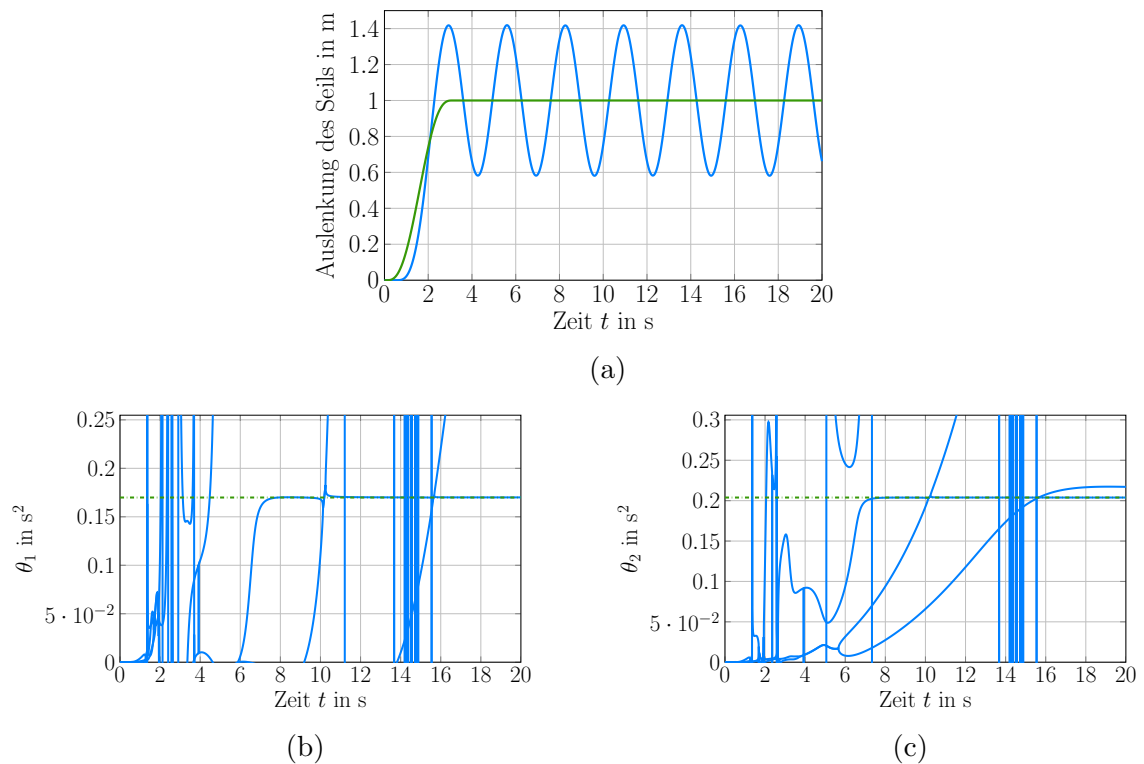


Abbildung 5.4: Schweres Seil mit Last: (a) Trajektorien der Auslenkung y_0 (blau) und y_ℓ (grün), (b-c) aus (5.16) und (5.18) berechnete Parameter (blau) im Vergleich zu den tatsächlichen Werten (grün).

5.1.4 Fall 3: Identifikation im Fall ohne Last und mit Kelvin-Voigt-Dämpfung

Das schwere Seil mit Kelvin-Voigt-Dämpfung entsprechend (5.1) ist ein Beispiel für eine Dgl., deren höchste Ableitung sich als Mischableitung nach dem Ort z und der Zeit t darstellt⁴. Für den Fall ohne Last ergibt sich aus (5.1) und (5.2) das Randwertproblem

$$g(1 + \varepsilon s) \left(\rho z \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(z) + \rho \frac{d\hat{w}}{dz}(z) \right) - \rho s^2 \hat{w}(z) = 0 \quad (5.19a)$$

$$P(\ell)(1 + \varepsilon s) \frac{d\hat{w}}{dz}(\ell) + Ms^2 \hat{w}(\ell) = \hat{F} \quad (5.19b)$$

$$\frac{d\hat{w}}{dz}(0) = 0, \quad (5.19c)$$

wobei die Bedingung an den Gradienten bei $z = 0$ wie im Fall ohne Reibung in Abschnitt 5.1.2 erneut aus der Forderung einer endlichen Auslenkung $\hat{w}(0)$ folgt.

Für dieses System wurden in [GKRW12c] die Dämpfung ε und die Seillänge ℓ aus der Kenntnis der Position $t \mapsto w(\ell, t)$ und des Gradienten $t \mapsto w_z(\ell, t)$, der aufgrund der linearisierten Betrachtung kleiner Auslenkungen dem Winkel bei $z = \ell$ entspricht, identifiziert. Im Gegensatz dazu dienen hier die Auslenkungen

$$\hat{y}_0 = \hat{w}(0), \quad \hat{y}_\ell = \hat{w}(\ell)$$

als Messgrößen, wie bereits in den vorangegangenen Fallstudien. Aus der allgemeinen Lösung (5.5) ergibt sich für das Randwertproblem (5.19) die Beziehung

$$\hat{y}_\ell = I_0(\hat{f}(\ell)) \hat{y}_0 \quad (5.20)$$

zwischen den beiden Messgrößen, wobei $\hat{f}(\ell)$ entsprechend der Koordinatentransformation (5.4) als

$$\hat{f}(\ell) = 2s \sqrt{\frac{\ell}{g(1 + \varepsilon s)}}$$

definiert ist.

Da die modifizierte Bessel-Funktion I_0 einer Dgl. zweiter Ordnung genügt, lässt sich diese leicht aus der Messgleichung eliminieren und damit eine Identifikationsgleichung

$$0 = \hat{h}_0 + \theta_2 \hat{h}_1 + \theta_1 \hat{h}_2 + \theta_1 \theta_2 \hat{h}_3 + \theta_1^2 \hat{h}_4 + \theta_1^2 \theta_2 \hat{h}_5 + \theta_1^3 \hat{h}_6 + \theta_1^3 \theta_2 \hat{h}_7 + \theta_1^4 \hat{h}_8 \quad (5.21)$$

für die Parameter $(\theta_1, \theta_2) = (\varepsilon, \frac{\ell}{g})$ herleiten. Wie im Fall mit Last und ohne Dämpfung ist diese Identifikationsgleichung affin in θ_2 . Entsprechend lässt sich aus dem durch Anwendung von Differentialoperatoren $D_s^{(a_1, b_1)}$ und $D_s^{(a_2, b_2)}$ resultierenden Gleichungssystem eine in θ_1 polynomiale Gleichung siebten Grades der Form

$$0 = \bar{h}_0 + \theta_1 \bar{h}_1 + \theta_1^2 \bar{h}_2 + \theta_1^3 \bar{h}_3 + \theta_1^4 \bar{h}_4 + \theta_1^5 \bar{h}_5 + \theta_1^6 \bar{h}_6 + \theta_1^7 \bar{h}_7 \quad (5.22)$$

⁴Dessen Laplace-Transformierte motiviert folglich die Wahl von $\hat{A} \in \mathbb{R}(s)^{n \times n}$ (und nicht $\hat{A} \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$) in (2.8) im Kontext partieller Dgl'n. mit konstanten Koeffizienten.

Parameter	Wert	Einheit
Seillänge ℓ	10	m
Last m	0	kg
Liniendichte ρ	5	kg/m
Kelvin-Voigt-Dämpfung ε	0.1	s
Erdbeschleunigung g	9.81	m/s ²
Schrittweite	0.01	s
Anzahl Moden	30	–

Tabelle 5.2: Simulationsparameter.

gewinnen, wobei auf eine Angabe der $\bar{h}_i$ in Abhängigkeit von $\hat{h}_j^{(a_1, b_1)}$ und $\hat{h}_j^{(a_2, b_2)}$ wie in (5.17) verzichtet wird. Zu jeder der Nullstellen als Schätzwerte für θ_1 ergibt sich ein zugehöriger Wert für θ_2 aus (5.21).

Erneut erfolgte eine Verifikation der Identifikation von θ_1 und θ_2 auf Basis von (5.21) anhand von Simulationsstudien. Exemplarisch sind die Ergebnisse für eine Simulation des schweren Seils mit Kelvin-Voigt-Dämpfung (durch modale Approximation) mit den Parametern in Tabelle 5.2 sowie $(a_1, b_1) = (1, 0)$, $(a_2, b_2) = (0, 1)$ in Abbildung 5.5 dargestellt. Von den sieben Nullstellen von (5.22) ist dabei nur eine zeitlich konstant. Darüber hinaus ist aus den abgebildeten Ausschnitten zu erkennen, dass lediglich eine der sieben Nullstellen von (5.22) positiv ist. Die Auswahl der dem (positiven) Systemparameter entsprechenden Nullstelle ist damit sehr einfach. Beide Parameter werden nahezu exakt richtig identifiziert.

Auf die Identifikation der Dämpfung ε in Gegenwart einer angehängten Last wurde kurz in [GKRW12c] eingegangen. Da das Vorgehen für die Identifikation der Systemparameter sich lediglich in der symbolischen Komplexität von den bisher betrachteten Fällen unterscheidet, wird auf diese Konstellation nicht weiter eingegangen.

5.2 Eine ringförmige, elastische Platte

Ein weiteres Beispiel für ein System mit ortsabhängigen Koeffizienten ist eine dünne elastische Platte, wie in Abb. 5.6 schematisch skizziert. Die dünne ringförmige Platte mit Innenradius r_i und Außenradius r_a weist eine im Vergleich zu ihrem Durchmesser vernachlässigbare Höhe h auf. Entsprechend der Betrachtung in [WR04] sei die vertikale Auslenkung $w(r, t)$ der Platte am Ort r zum Zeitpunkt t unabhängig vom (Azimuth-)Winkel der Platte, wodurch das System zu einem örtlich eindimensionales Problem wird⁵. Da die Betrachtung auf kleine Auslenkungen beschränkt ist, entspricht $w(r, t)$ zugleich dem Winkel zwischen der Platte und der Vertikalen. Die sich aus der Kirchhoffschen Gleichung unter Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit ergebende

⁵Für umfangreichere Betrachtung zum Modell und dessen Herleitung sei auf die verwandten Arbeiten [RW06] und [RW08b] und die darin angegebenen Referenzen verwiesen.

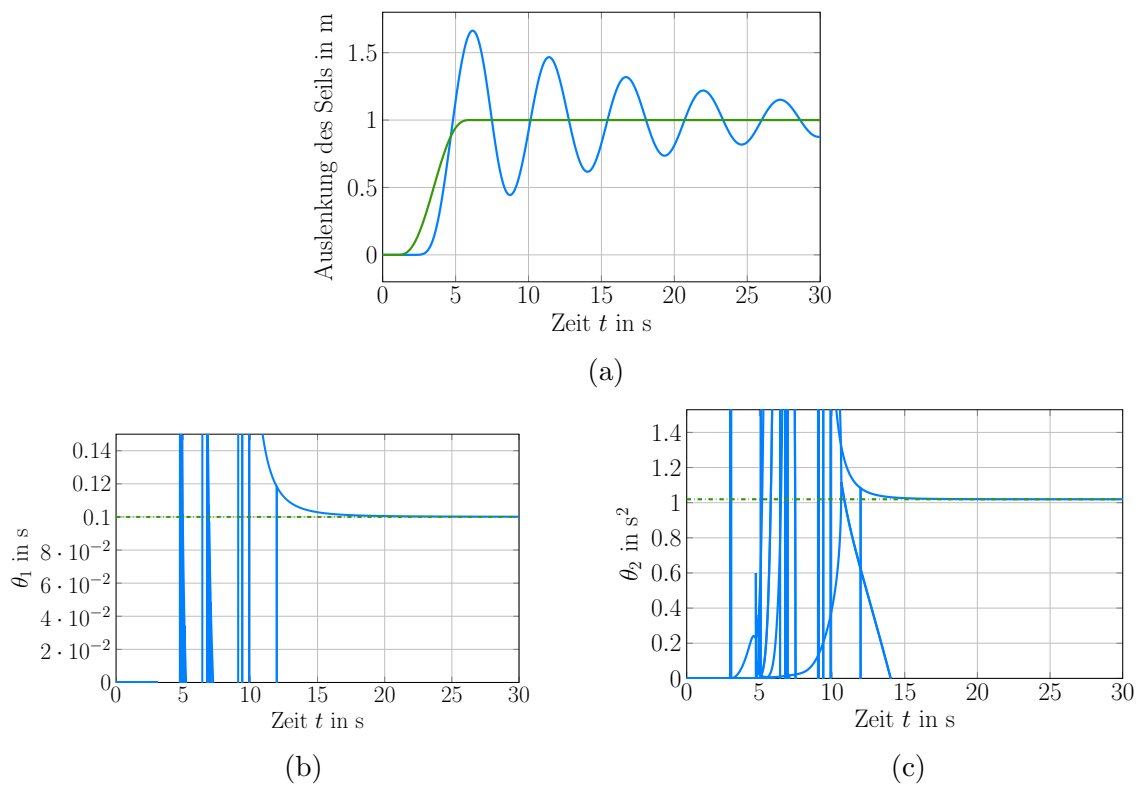


Abbildung 5.5: Schweres Seil mit Kelvin-Voigt-Dämpfung: (a) Trajektorien der Auslenkung y_0 (blau) und y_ℓ (grün), (b-c) basierend auf (5.21) berechnete Parameter (blau) im Vergleich zu den tatsächlichen Werten (grün).

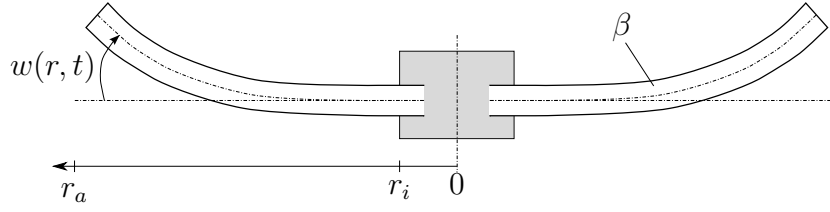


Abbildung 5.6: Schematisches Darstellung des Schnitts einer ringförmigen, elastischen Platte.

partielle Dgl.

$$\Delta^2 w + \beta^2 \partial_t^2 w = 0, \quad \Delta = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) \quad (5.23)$$

für die Auslenkung w der Platte kann als Analogon zum Euler-Bernoulli-Balken in Abschnitt 4.3 angesehen werden. Es bezeichnet $\beta^2 = \frac{\rho h}{D}$ das Verhältnis aus Dichte ρ , Höhe h und Steifigkeit D der Platte. Für die innen fest eingespannte Platte, an deren äußerem Rand über einen Stelleingriff u sowohl ein Moment als auch eine Kraft eingeprägt werden, ergeben sich die Randbedingungen aus [WR04]

$$w(r_i, t) = 0 \quad (5.24a)$$

$$\partial_r w(r_i, t) = 0 \quad (5.24b)$$

$$\Delta w(r_a, t) - (1 - \nu) \frac{1}{r_a} \partial_r w(r_a, t) = k_m u(t) \quad (5.24c)$$

$$\partial_r \Delta w(r_a, t) = k_f u(t), \quad (5.24d)$$

mit der Poissonzahl ν und den Proportionalitätsfaktoren k_m, k_f .

Man erkennt leicht, dass sich der Differentialoperator in (5.23) mit

$$\Delta^2 + \beta^2 \partial_t^2 = (\Delta + j\beta \partial_t)(\Delta - j\beta \partial_t)$$

in zwei Bessel-Operatoren (vgl. schweres Seil in Abschnitt 5.1) faktorisieren lässt. Entsprechend bilden die Bessel-Funktionen

$$\hat{J}_0(\sqrt{j\beta s}), \quad \hat{Y}_0(\sqrt{j\beta s}), \quad \hat{I}_0(\sqrt{j\beta s}), \quad \hat{K}_0(\sqrt{j\beta s}), \quad (5.25)$$

ein Fundamentalsystem für die durch Laplace-Transformation aus (5.23) hervorgehende gewöhnliche Dgl. und genügen jeweils autonomen Dgln. zweiter Ordnung bzgl. s (vgl. Anhang A.4). Da gleiches für die Fundamentallösungen $\hat{\phi}_{1,k}$, $k = 1, \dots, 4$ in

$$\hat{w}(r) = \hat{\phi}_{1,1}(r - r_i) \hat{w}(r_i) + \hat{\phi}_{1,2}(r - r_i) \frac{d\hat{w}}{dz}(r_i) + \hat{\phi}_{1,3}(r - r_i) \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(r_i) + \hat{\phi}_{1,4}(r - r_i) \frac{d^3 \hat{w}}{dz^3}(r_i) \quad (5.26)$$

gelten muss, erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}'_1 \\ \bar{\psi}'_2 \\ \bar{\psi}'_3 \\ \bar{\psi}'_4 \\ \bar{\psi}'_5 \\ \bar{\psi}'_6 \\ \bar{\psi}'_7 \\ \bar{\psi}'_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s} & 0 & 0 & -\frac{\beta^2(r^2-r_i^2)}{4} & 0 & -\frac{\beta^2(r^2+5r_i^2)}{4r_i} & \beta^2 r_i s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r^2-r_i^2}{4r_i s^2} & -\frac{r_i}{s} & -\frac{r^2+r_i^2}{4r_i^2 s^2} & -\frac{2}{s} & \frac{r^2+r_i^2}{4r_i^3 s^2} & 0 & \frac{(r_i^2-r^2)(2+\beta^2 r_i^4 s^2)}{4r_i^4 s^2} & \frac{1}{r_i^2 s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{r^2-r_i^2}{4s^2} & 0 & \frac{r^2-3r_i^2}{4r_i s^2} & -\frac{r_i}{s} & -\frac{r^2+5r_i^2}{4r_i^2 s^2} & -\frac{3}{s} & \frac{r^2-r_i^2}{2r_i^3 s^2} & -\frac{1}{r_i s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{r^2-r_i^2}{4s^2} & 0 & -\frac{r^2+3r_i^2}{4r_i s^2} & -\frac{r_i}{s} & \frac{r^2-r_i^2}{2r_i^2 s^2} & \frac{2}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_3 \\ \bar{\psi}_4 \\ \bar{\psi}_5 \\ \bar{\psi}_6 \\ \bar{\psi}_7 \\ \bar{\psi}_8 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

mit $\bar{\psi}_{2k-1} = \hat{\phi}_{1,k}$, $k = 1, \dots, 4$, wobei zur Vereinfachung der Darstellung auf die Angabe des Arguments $r - r_i$ von $\bar{\psi}_k$ verzichtet wurde.

Für die Identifikation der Parameter β , r_i , r_a , ν , k_m und k_f des Systems – Identifizierbarkeit vorausgesetzt – werden mit der Laplace-Transformierten von (5.24) die Randwerte in der Lösung (5.26) bestimmt. Basierend auf der Messung des Stelleingriffs $\hat{u}$ und der Auslenkung $\hat{w}(r_a)$ am äußeren Rand der Platte ergibt sich daraus eine polynomiale Gl. in den Messgrößen, den Systemparametern und $\hat{\psi}_k = \bar{\psi}_k(r_a - r_i)$, $k = 1, \dots, 8$:

$$\begin{aligned} 0 = & ((\hat{\psi}_7 \hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_5 \hat{\psi}_4) r_a r_i^3 - (2\hat{\psi}_5 \hat{\psi}_8 + \hat{\psi}_6 \hat{\psi}_7) r_a r_i + 2\hat{\psi}_8 \hat{\psi}_7 r_a + (\hat{\psi}_4 \hat{\psi}_7 + \hat{\psi}_5 \hat{\psi}_6) r_a r_i^2) k_m \hat{u} \\ & + ((\hat{\psi}_5 \hat{\psi}_3 - \hat{\psi}_7 \hat{\psi}_1) r_a + (\hat{\psi}_5 \hat{\psi}_8 - \hat{\psi}_6 \hat{\psi}_7) (\nu - 1)) r_i^3 - ((\hat{\psi}_3 \hat{\psi}_7 + \hat{\psi}_5^2) r_i^2 + 2\hat{\psi}_7^2 - 3\hat{\psi}_5 \hat{\psi}_7 r_i) r_a) k_f \hat{u} \\ & + ((\hat{\psi}_1 \hat{\psi}_4 - \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3) r_a r_i^3 + (\hat{\psi}_4 \hat{\psi}_6 - \hat{\psi}_8 \hat{\psi}_2) (\nu - 1) r_i^3 + ((2\hat{\psi}_1 \hat{\psi}_8 - 2\hat{\psi}_7 \hat{\psi}_2) r_a + 3\hat{\psi}_8 \hat{\psi}_6 (\nu - 1)) r_i \\ & + (\hat{\psi}_2 \hat{\psi}_5 - \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_6) r_a r_i^2 - (\hat{\psi}_4 \hat{\psi}_8 + \hat{\psi}_6^2) (\nu - 1) r_i^2 - 2\hat{\psi}_8^2 (\nu - 1)) \hat{y}. \end{aligned}$$

Auf die in diesem Fall umfangreiche Elimination der $\hat{\psi}_k$ unter Verwendung von (5.27) wird nicht weiter eingegangen.

5.3 Allgemeine Beobachtungen und weitere Beispiele

Die betrachteten Beispiele des schweren Seils (mit und ohne Last) sowie der ringförmigen, elastischen Platte werfen eine für die Herleitung einer Identifikationsgleichung wichtige Frage auf: Wie lassen sich die Dgln. herleiten, denen die Fundamentallösungen bzgl. der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation genügen? Wesentlich ist dabei insbesondere die Ordnung derartiger Dgln. Anhand der Beispiele wurde beobachtet, dass die Fundamentallösungen sowohl für das schwere Seil als System zweiter Ordnung bzgl. z als auch für die ringförmige Platte mit der doppelten Ordnung (bzgl. z) jeweils Dgln. zweiter Ordnung bzgl. s genügen. Als Ursache erkennt man, dass sich der

Differentialoperator (5.25) der Platte in zwei Differentialoperatoren zweiter Ordnung bzgl. z faktorisieren lässt.

Mit der Frage der Faktorisierung von Differentialoperatoren haben sich bereits G. Frobenius, E. Landau und G. Mammanna zu Beginn des 20. Jahrhunderts beschäftigt. Exemplarisch sei hier auf die Arbeiten [Ber07] und [Fak99] verweisen, die zudem eine umfangreiche Liste weiterführender Referenzen zum Thema enthalten. Hier soll anhand zweier (abstrakter) gewöhnlicher Dgln. die Bedeutung im Zusammenhang mit der vorgestellten Identifikationsmethode hervorgehoben werden.

Für die Dgl.

$$\frac{d^3 \hat{w}}{dz^3}(z) + 2a^2 s^2 z^2 \frac{d \hat{w}}{dz}(z) + 2a^2 s^2 z \hat{w}(z) = 0 \quad (5.28)$$

dritter Ordnung (vgl. [Kam48, Gl. (3.15)]) ist mit den speziellen Lösungen

$$\hat{J}_{1/4}(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}asz^2), \quad \hat{J}_{1/4}(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}asz^2)\hat{K}_{1/4}(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}asz^2), \quad \hat{K}_{1/4}^2(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}asz^2)$$

ein Fundamentalsystem bekannt. Da der zur Dgl. gehörende Differentialoperator irreduzibel ist [Fak99], genügen die Fundamentallösungen zwar (5.28) aber keiner Dgl. niedrigerer Ordnung. Ebenso stellt man nach einigen Umformungen fest, dass sie ebenso jeweils eine Dgl. dritter Ordnung bzgl. s erfüllen, jedoch keine Dgl. niedrigerer Ordnung. Folglich ergäbe sich für die drei Fundamentallösungen ein Differentialgleichungssystem neunter Ordnung, mit Hilfe dessen sich die Fundamentallösungen aus einer etwaigen Messgleichung im Rahmen der Parameteridentifikation eliminieren ließen.

In einem zweiten Beispiel wird die Dgl.

$$(z+1)^N \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(z) - (f(s))^2 \hat{w}(z) = 0 \quad (5.29)$$

zweiter Ordnung in Abhängigkeit des Polynomgrads $N \in \mathbb{N}_0$ untersucht, deren Fundamentallösung hypergeometrische Funktionen sind [Kam48]. Insbesondere ergeben sich

$$N = 0 : \quad e^{f(s)z}, \quad e^{-f(s)z} \quad (5.30a)$$

$$N = 1 : \quad \sqrt{z+1} I_1(2f(s)\sqrt{z+1}), \quad \sqrt{z+1} K_1(2f(s)\sqrt{z+1}) \quad (5.30b)$$

$$N = 2 : \quad (z+1)^{\frac{1+\sqrt{1+4(f(s))^2}}{2}}, \quad (z+1)^{\frac{1-\sqrt{1+4(f(s))^2}}{2}} \quad (5.30c)$$

$$N = 3 : \quad \sqrt{z+1} I_1\left(\frac{2f(s)}{\sqrt{z+1}}\right), \quad \sqrt{z+1} K_1\left(\frac{2f(s)}{\sqrt{z+1}}\right) \quad (5.30d)$$

$$N = 4 : \quad (z+1) \sinh\left(\frac{f(s)}{z+1}\right), \quad (z+1) \cosh\left(\frac{f(s)}{z+1}\right). \quad (5.30e)$$

Die Fundamentallösungen für $N \in \{0, 2, 4\}$ unterscheiden sich wesentlich von jenen für $N \in \{1, 3\}$. Sie genügen Dgln. erster Ordnung bzgl. z mit ortsabhängigen (komplexen) Koeffizienten, wohingegen die speziellen Lösungen im Fall $N \in \{1, 3\}$ nur derartige Dgln. zweiter Ordnung erfüllen. Entsprechend ist der Differentialoperator in (5.29) irreduzibel für die betrachteten ungeradzahlgigen Grade und lässt sich faktorisieren für $N = 0$ als

$$\frac{d^2}{dz^2} - (f(s))^2 = \left[\frac{d}{dz} - f(s) \right] \left[\frac{d}{dz} + f(s) \right],$$

für $N = 2$ als

$$(z+1)^2 \frac{d^2}{dz^2} - (f(s))^2 = \left[(z+1) \frac{d}{dz} - \frac{1}{2} + \hat{c} \tanh(\hat{c} \ln(z+1)) \right] \\ \cdot \left[(z+1) \frac{d}{dz} - \frac{1}{2} - \hat{c} \tanh(\hat{c} \ln(z+1)) \right]$$

mit $\hat{c} = \frac{\sqrt{1+4(f(s))^2}}{2}$ und für $N = 4$ als

$$(z+1)^4 \frac{d^2}{dz^2} - (f(s))^2 = \left[(z+1)^2 \frac{d}{dz} - z - 1 + f(s) \right] \left[(z+1)^2 \frac{d}{dz} - z - 1 - f(s) \right],$$

wobei der Fall $N = 0$ auf den hier weniger interessanten Fall einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten führt.

Ebenso wie bei allen bisher betrachteten Systemen sowohl mit konstanten als auch mit ortsabhängigen Koeffizienten verifiziert man für (5.30) leicht, dass die Dgln., denen die Fundamentallösungen bzgl. z und s genügen, jeweils die gleiche Ordnung aufweisen. Daher wird vermutet, dass die minimale Ordnung einer Dgl., der eine Fundamentallösung bzgl. s genügt, mit der Ordnung des zugehörigen Faktors des faktorisierten Differentialoperators übereinstimmt.

Im Rahmen der algebraischen Identifikation und der notwendigen Elimination der Fundamentallösungen aus einer Messgleichung ist damit die Ordnung der Dgln. der Fundamentallösungen bzgl. der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation bekannt. Folglich können Aussagen über die Komplexität und Struktur einer als Ergebnis der Elimination hervorgehenden Identifikationsgleichung sowie insbesondere die minimale Anzahl der zu faltenden Faktoren getroffen werden (vgl. beispielsweise den Euler-Bernoulli-Balken in Abschnitt 4.3).

Kapitel 6

Anwendung der algebraischen Identifikation auf weitere Systemklassen

Über die linearen eindimensionalen partiellen Dgln. mit konstanten und ortsabhängigen Koeffizienten hinaus fasst dieses Kapitel diverse Anwendungen der algebraischen Identifikation auf weitere Systemklassen zusammen. Mit einer hydraulischen Leitung wird der Zugang zunächst auf ein örtlich zweidimensionales System angewandt. Es wird an Beispielen illustriert, dass sich in fraktionalen Systemen sowohl deren nicht-ganzzahlige Ableitungsordnungen (bzgl. der Zeit) algebraisch identifizieren lassen als auch die übrigen Systemparameter. In Verallgemeinerung dessen wird gezeigt, dass sich die Ordnung gewöhnlicher Dgln. in Form von Eingangs-Ausgangs-Gleichungen ohne Eingangsableitungen eindeutig aus den Verläufen von Eingang und Ausgang berechnen lässt. Abschließende Bemerkungen zu nichtlinearen und örtlich mehrdimensionalen partiellen Dgln. sind eher als Ausblick zu verstehen.

6.1 Eine hydraulische Leitung

Die Besonderheit der hier betrachteten hydraulischen Leitung, bei der eine Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr strömt, besteht darin, dass ihr Modell zunächst örtlich zweidimensionale partielle Dgln. enthält. Die Ausnutzung von Symmetrien und die Darstellung in speziellen (und für die Untersuchung vorteilhaften) Systemgrößen ermöglicht jedoch die Überführung auf ein (eindimensionales) Randwertproblem, das jedoch im Unterschied zur Darstellung erster Ordnung in (2.8) irrationale Faktoren in s aufweist. Dennoch wird es auch hier möglich sein, durch Elimination der irrationalen Ausdrücke eine in s polynomiale Identifikationsgleichung herzuleiten.

Dieser Abschnitt betrachtet die Identifikation für ein Leitungsmodell mit frequenzabhängiger Reibung und folgt dabei im Wesentlichen [GRS12a], bzw. der ihr zu Grunde liegenden Arbeit [GRS12b]. Darüber hinaus findet sich in [SGR13] eine Gegenüberstellung der Identifikation der Parameter dreier Modelle für eine hydraulische Leitung,

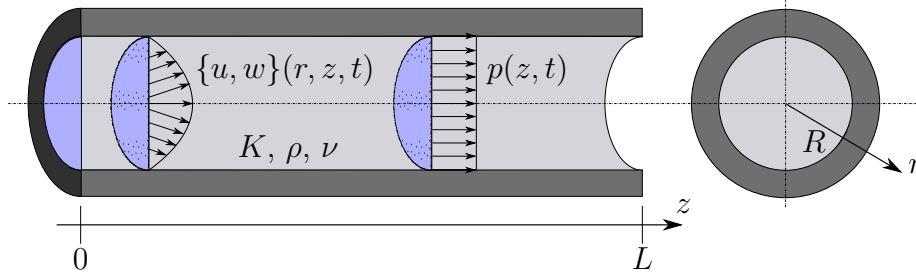


Abbildung 6.1: Skizze einer hydraulischen Leitung.

einschließlich jenem mit frequenzabhängiger Reibung, die deren transientes Verhalten jeweils unterschiedlich genau abbilden.

6.1.1 Mathematisches Modell

Das hier für die in Abb. 6.1 skizzierte hydraulische Leitung verwendete Modell mit frequenzabhängiger Reibung geht auf [DO64] zurück. Es geht von der Annahme aus, dass die Wand des Rohrs starr ist und seine kreisförmige Schnittfläche einen konstanten Radius R aufweist. Darüber hinaus wird angenommen, dass die Strömung im Rohr laminar ist und jegliche konvektiven Komponenten aufgrund der kleinen Mach-Zahl vernachlässigt werden können. Für eine umfangreichere Modellierung sowie Diskussion und Bewertung der verschiedenen Annahmen wird auf [DO64] und [SD86] verwiesen.

Unter Ausnutzung von Rohrsymmetrien ergeben sich für die Strömungsgeschwindigkeiten $u(r, z, t)$ und $w(r, z, t)$ in axialer bzw. radialer Richtung sowie den über den Querschnitt des Rohrs konstanten Druck $p(z, t)$ die Impulsbilanz in axialer Richtung

$$\partial_z p(z, t) + \left(\partial_t - \nu \partial_r^2 - \frac{\nu}{r} \partial_r \right) \rho u(r, z, t) = 0 \quad (6.1a)$$

sowie die Massenbilanz

$$\frac{1}{K} \partial_t p(z, t) + \left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) w(r, z, t) + \partial_z u(r, z, t) = 0 \quad (6.1b)$$

mit der radialen Koordinate $r \in [0, R]$, der axialen Koordinate $z \in [0, L]$ und der Zeit $t \geq 0$. Die konstanten Parameter K , ρ und ν bezeichnen den Kompressionsmodul der Flüssigkeit, dessen Dichte und kinematische Viskosität. Es sei bemerkt, dass die Impulsbilanz in radialer Richtung wegen $u \gg w$ vernachlässigt werden konnte, ebenso wie die Energiegleichung aufgrund der nur geringen Fluktuationen der Temperatur.

Ausgehend von einem stationären Strömungszustand bei $t = 0$, also homogenen Anfangsbedingungen für die als Abweichungen von stationären Werten definierten verteilten Größen, ergibt die Laplace-Transformation von (6.1)

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{s}{\nu} \right) \hat{u}(r, z) = \frac{1}{\rho \nu} \frac{d\hat{p}}{dz}(z) \quad (6.2a)$$

$$\frac{s}{K} \hat{p}(z) + \left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) \hat{w}(r, z) + \partial_z \hat{u}(r, z) = 0. \quad (6.2b)$$

In diesen weiterhin partiellen Dgln. erkennt man in (6.2a) einen auf $\hat{u}$ bzgl. der radialen Koordinate wirkenden Bessel-Operator. Unter der Annahme einer verschwindenden Geschwindigkeit am Leitungsrand $r = R$, d.h. $\hat{u}(R, z) = 0$, und der Forderung einer endlichen Lösung in der Mitte des Rohrs, korrespondierend zu $\partial_r \hat{u}(0, z) = 0$, folgt daraus die Lösung [DO64]

$$\hat{u}(r, z) = \left(\frac{I_0(r\sqrt{\frac{s}{\nu}})}{I_0(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})} - 1 \right) \frac{1}{\rho s} \frac{d\hat{p}}{dz}(z). \quad (6.3)$$

Nachdem damit die Strömungsgeschwindigkeit in axialer Richtung als Funktion des Druckgradienten vorliegt, treten nur noch Ableitungen der radialen Komponente $\hat{w}$ bzgl. r auf. Aufgrund der Rohrsymmetrie entfallen diese jedoch, wenn zu einer Darstellung mit Volumenströmen anstelle von Strömungsgeschwindigkeiten übergegangen wird.

Da die Messung des Volumenstroms

$$q(z, t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} u(r, z, t) r d\phi dr$$

technisch einfacher ist als jene des Geschwindigkeitsprofils des Fluids über den gesamten Querschnitt des Rohres, lässt sich eine für die folgende Identifikation vorteilhaftere Systembeschreibung

$$\frac{d\hat{p}}{dz}(z) = -s \frac{\rho}{\pi R^2} \frac{I_0(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})}{I_2(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})} \hat{q}(z) \quad (6.4a)$$

$$\frac{d\hat{q}}{dz}(z) = -s \frac{\pi R^2}{K} \hat{p}(z) \quad (6.4b)$$

für (6.3) und (6.2b) durch Integration dieser Gln. über die radiale Koordinate unter Berücksichtigung von $\hat{w}(R, z) = 0$ angeben. Somit liegt (aufgrund der angenommenen Symmetrien) ein System gewöhnlicher Dgln. für die örtlich zweidimensionalen partiellen Dgln. (6.1) vor.

6.1.2 Herleitung einer Identifikationsgleichung

Im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen liegt mit (6.4) ein System vor, dessen Koeffizienten irrational in s sind. Es wird daher vermutet, dass ein analoges Vorgehen zu Kapitel 2 auf eine Gleichung mit irrationalen Ausdrücken führt.

Für die Identifikation der Leitungsparameter wird davon ausgegangen, dass sämtliche Randwerte, also der Druck und der Volumenstrom bei $z = 0$ und $z = L$, gemessen werden¹:

$$\hat{p}_0 = \hat{p}(0), \quad \hat{q}_0 = \hat{q}(0), \quad \hat{p}_L = \hat{p}(L), \quad \hat{q}_L = \hat{q}(L). \quad (6.5)$$

Die Identifikation ist damit unabhängig von spezifischen Randbedingungen, weshalb auf sie im Zusammenhang mit der Herleitung des Randwertproblems (6.4) nicht weiter

¹In [GRS12a] ist die Identifikation für jenen Fall betrachtet, dass lediglich die Drücke $\hat{p}(0)$ und $\hat{p}(L)$ zur Verfügung stehen, aber keine Messung des Volumenstroms.

eingegangen wurde. Darüber hinaus wird angenommen, dass die Leitungsgeometrie, also die Länge L und der Radius R bekannt sind. Als unbekannte und (sofern möglich) zu identifizierende Parameter verbleiben die Dichte ρ , der Kompressionsmodul K und die Viskosität ν .

Aus der Lösung

$$\begin{pmatrix} \hat{p}(z) \\ \hat{Z}\hat{q}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\hat{\Gamma}z) & -\sinh(\hat{\Gamma}z) \\ -\sinh(\hat{\Gamma}z) & \cosh(\hat{\Gamma}z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}(0) \\ \hat{Z}\hat{q}(0) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

von (6.4) mit

$$\hat{\Gamma} = s\sqrt{\frac{\rho}{K}}\sqrt{\frac{I_0(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})}{I_2(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})}}, \quad \hat{Z} = \frac{\sqrt{\rho K}}{\pi R^2}\sqrt{\frac{I_0(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})}{I_2(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})}}$$

ergibt sich unmittelbar eine Beziehung zwischen den vier Messgrößen in (6.5). Anstelle der Ableitung dieser Gln. nach s werden zur Erhaltung von Symmetrien die hyperbolischen Funktionen unter Verwendung der hyperbolischen Identität

$$(\cosh(\hat{\Gamma}z))^2 - (\sinh(\hat{\Gamma}z))^2 = 1$$

(analog zur elektrischen Leitung in Abschnitt 4.2) eliminiert. Man beobachtet, dass (6.6) nur dann nach den hyperbolischen Funktionen aufgelöst werden kann, wenn $\hat{p}^2(z) - \hat{Z}^2\hat{q}^2(z) \neq 0$ gilt, wovon im Folgenden ohne wesentliche Einschränkungen der Allgemeinheit ausgegangen wird. Die Annahme ist erfüllt, wenn die Leitung nicht reflexionsfrei abgeschlossen ist, da sich bei angepasster Leitungsimpedanz am Rand die Wellen in nur eine Richtung mit $\hat{p}(z) = \pm \hat{Z}\hat{q}(z)$ ausbreiten. So folgt aus der hyperbolischen Identität

$$(\hat{p}_L^2 - \hat{p}_0^2) - \underbrace{\frac{\rho K}{\pi^2 R^4}}_{Z_0^2} \underbrace{\frac{I_0(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})}{I_2(R\sqrt{\frac{s}{\nu}})}}_{\hat{\zeta}} (\hat{q}_L^2 - \hat{q}_0^2) = 0, \quad (6.7)$$

wobei Z_0 die charakteristische Leitungsimpedanz bezeichnet.

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Beispielen treten in (6.7) mit $\hat{\zeta}$, einem Quotient modifizierter Bessel-Funktionen, weiterhin in s irrationale Ausdrücke auf. Macht man sich jedoch zu Nutze, dass $\hat{\zeta}$ mit der Riccati-Gl.

$$4s\frac{\nu}{R^2}\hat{\zeta}' + s\hat{\zeta}^2 - \left(2s + 4\frac{\nu}{R^2}\right)\hat{\zeta} + s = 0$$

einer in $\hat{\zeta}$ (und seiner Ableitung) polynomialen Dgl. genügt, folgt durch Einsetzen von (6.7) die Identifikationsgleichung

$$0 = \hat{h}_0 + Z_0^4\hat{h}_1 + Z_0^2\frac{\nu}{R^2}\hat{h}_2 + Z_0^2\hat{h}_3 \quad (6.8)$$

mit

$$\hat{h}_0 = \hat{P}^2, \quad \hat{h}_1 = \hat{Q}^2, \quad \hat{h}_2 = 4(\hat{P}'\hat{Q} - \hat{P}\hat{Q}' - s^{-1}\hat{P}\hat{Q}), \quad \hat{h}_3 = -2\hat{P}\hat{Q}$$

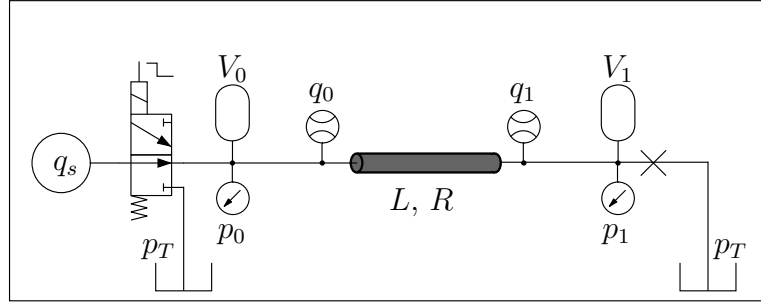


Abbildung 6.2: Simulationsmodell für die hydraulische Leitung.

und $\hat{P} = \hat{p}_L^2 - \hat{p}_0^2$, $\hat{Q} = \hat{q}_L^2 - \hat{q}_0^2$. Die Identifikationsgleichung ist polynomial in den (algebraisch) identifizierbaren Parametern $\theta_1 = Z_0^2$ und $\theta_2 = \nu/R^2$. Bei bekanntem Radius R sind damit sowohl die Viskosität ν als auch mit der Leitungsimpedanz Z_0 das Produkt aus Dichte ρ und Kompressionsmodul K aus den Trajektorien der Randgrößen (6.5) identifizierbar.

Für die Bestimmung der Parameter θ_1 und θ_2 aus (6.8) wurden $n = 6$ Gln. der Form

$$0 = h_0^{(\alpha,\beta)}(t) + \theta_1^2 h_1^{(\alpha,\beta)}(t) + \theta_1 \theta_2 h_2^{(\alpha,\beta)}(t) + \theta_1 h_3^{(\alpha,\beta)}(t)$$

entsprechend Abschnitt 3.1 generiert und das resultierende Gleichungssystem durch Überparametrierung gelöst².

6.1.3 Simulationsergebnisse

Zur Validierung von (6.8) wurden mit Hilfe der hydroLib-Toolbox Simulationen mit MATLAB®/Simulink® durchgeführt. Die Toolbox von [Man12] stellt dabei ein Modell der betrachteten hydraulischen Leitung basierend auf der Zielke-Suzuki-Simulationsmethode zur Verfügung [Zie66, STS91]. Das in Abb. 6.2 dargestellte Simulationssystem wird von einer Quelle mit dem konstanten Volumenstrom q_s angesteuert, das durch ein als PT₂-Glied modelliertes 3-2-Wege-Ventil mit einer Schaltzeit von 20 ms mit der Leitung verbunden ist. Weitere Simulationsparameter finden sich in Tabelle 6.1.

Durch das Schließen des Ventils erfahren der Volumenstrom und der Druck im Rohr zum Zeitpunkt $t = 0.1$ s eine Anregung aus ihrem stationären Regime. Die zugehörigen Trajektorien der vier Messgrößen (zuzüglich des stationären Anfangswertes) sowie die darauf basierend berechneten Schätzwerte für den Kompressionsmodul K und die Viskosität ν können Abb. 6.3 entnommen werden. Man erkennt, dass die Schätzwerte für die Parameter nahezu unmittelbar ab $t = 0.4$ s mit den tatsächlichen Werten übereinstimmen. Eine frühere Identifikation ist aufgrund der vierfachen Faltung in (6.8) nicht möglich, da das Ventil für $0 \leq t \leq 0.1$ s geschlossen ist und somit $p_0(t) = p_L(t) = q_0(t) = q_L(t) = 0$ auf diesem Intervall gilt.

²Im Wesentlichen wurden $(a_i, b_i) = (6-i, 6+i)$, $i = 1, \dots, 6$ gewählt, um einerseits (5.2) zu erfüllen und andererseits durch die mindestens siebenfache Integration der h_i eine hohe Unterdrückung von weißem Rauschen zu erreichen.

Parameter	Wert	Einheit
Länge L	20	m
Radius R	$7.5 \cdot 10^{-3}$	m
Eigenwerte des Ventils	$70\pi(-1 \pm j)$	s^{-1}
kinematische Viskosität ν	$34 \cdot 10^{-6}$	m^2/s
Dichte ρ	860	kg/m^3
Kompressionsmodul K	$1.4 \cdot 10^9$	N/m^2
Volumenstrom q_s	20	l/min
nominaler Volumenstrom durch Blende	20	l/min
nominaler Druckabfall über Blende	15	bar
Tankdruck p_T	15	bar
Totvolumina V_0, V_1	1	l

Tabelle 6.1: Simulationsparameter.

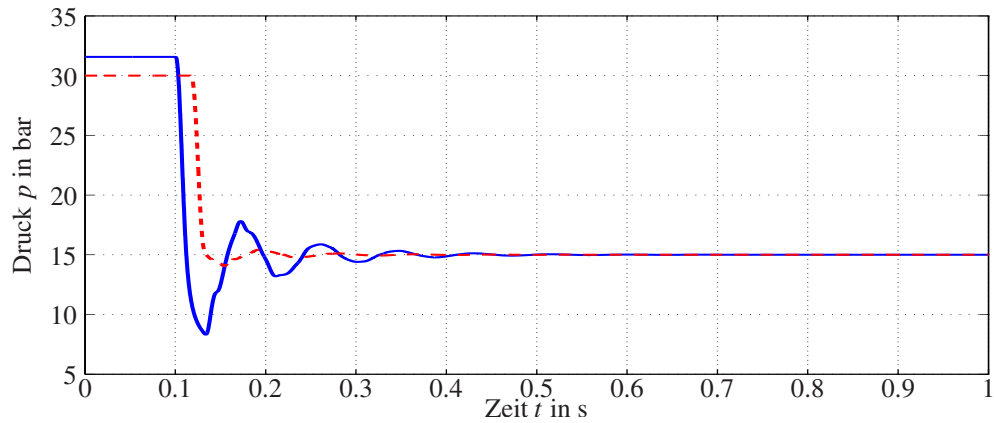
Da in einer experimentellen Umgebung die betrachteten Messsignale meist durch einen nicht geringen Rauschanteil gestört sind, wird den nominalen Messsignalen in einer zweiten Simulation mittelwertfreies weißes Rauschen mit einem Signal-Rausch-Verhältnis von 35 dB hinzugefügt. In Abb. 6.4 ist zu erkennen, dass trotz der negativen Wirkung der signifikanten Rauschamplitude sehr passable Schätzwerte für die Parameter erzielt werden können. Dass im Vergleich zum rauschfreien Fall die Schätzwerte bereits für $t > 0.2$ s zur Verfügung stehen, begründet sich durch das frühere Schließen des Ventils.

6.2 Lineare fraktionale Systeme

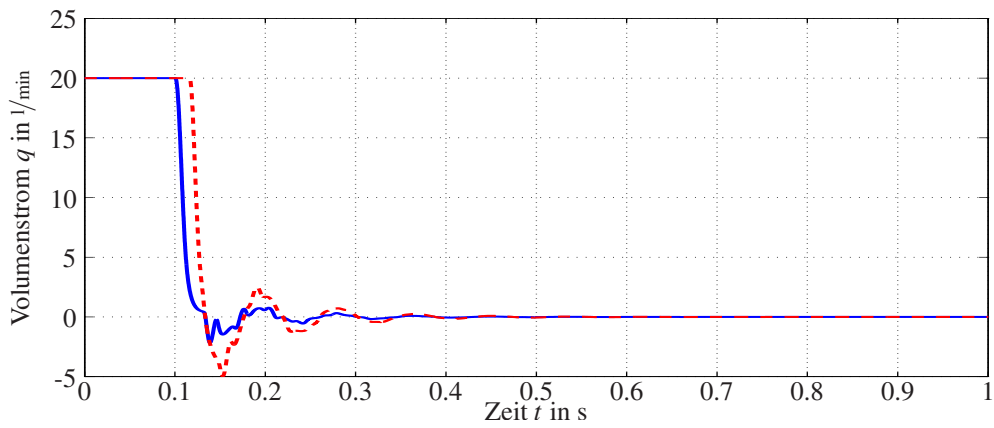
Fraktionale Systeme, also solche mit nicht-ganzzahligen Ableitungsordnungen³ (im hiesigen Kontext nach der Zeit), haben in den letzten Jahren verstärkt Interesse auf sich gezogen, insbesondere für die Modellierung von visko-elastischen Materialien (z.B. Polymeren) und Batterien. Während die meisten dieser Modelle empirischer Natur sind und ihre Validierung (lediglich) durch eine Identifikation der im Vergleich zu einem Ansatz mit ganzzahligen Ableitungen wenigen Modellparameter erfolgt, existieren auch Beispiele fraktionaler Systeme, die aus einer physikalisch basierten Modellbildung hervorgehen. Eine der ersten mathematischen Modellierungen findet sich in [TB84], wo die Lösung einer Diffusionsgleichung für ein Newtonsches Fluid auf halboffenem Gebiet auf ein fraktionales System der Ordnung $1/2$ führt.

Im Folgenden werden zunächst einige einführende Bemerkungen zu Definitionen fraktionaler Ableitungen angegeben, die anschließend für die algebraische Identifika-

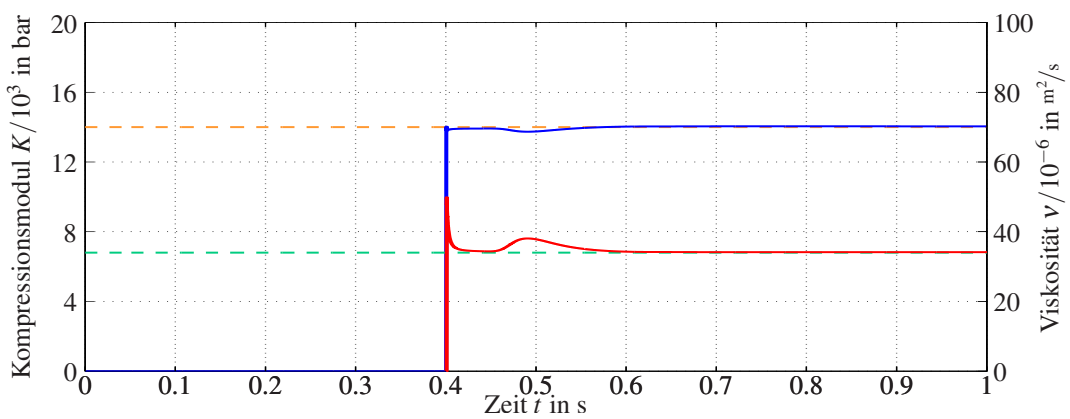
³Die Bezeichnung *fraktional* ist historisch begründet. Eine fraktionale Ableitung kann allgemeiner reeller oder sogar komplexer Ordnung sein.



(a) Trajektorien der Drücke p_0 (blau, durchgezogen) und p_L (rot, gestrichelt) – zuzüglich des stationären Anfangswertes.

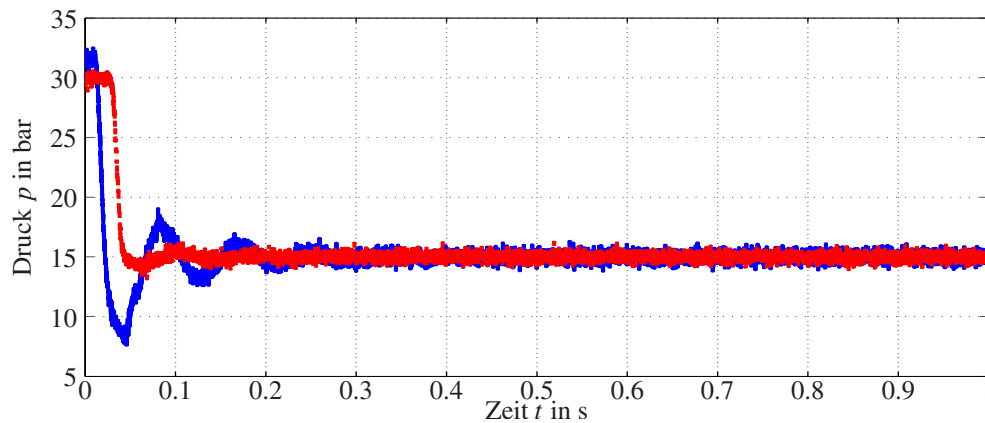


(b) Trajektorien der Volumenströme q_0 (blau, durchgezogen) und q_L (rot, gestrichelt) – zuzüglich des stationären Anfangswertes.

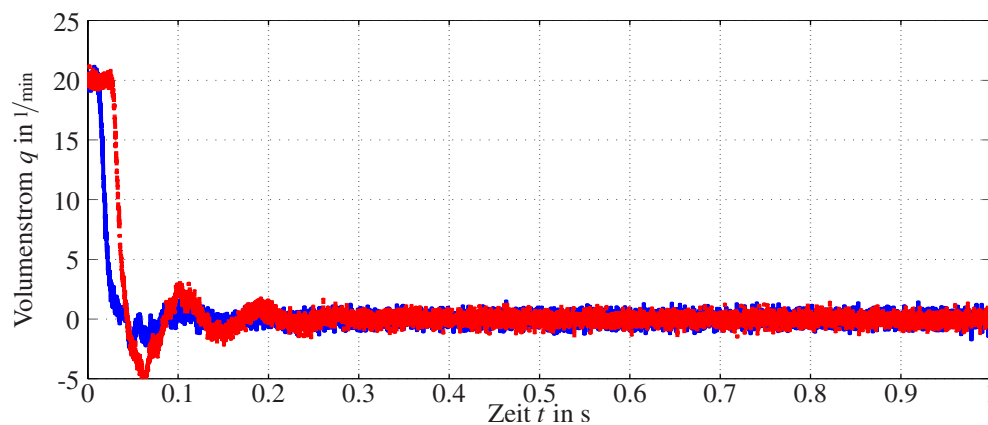


(c) Schätzwerte für den Kompressionsmodul K (blau) und die Viskosität ν (rot).

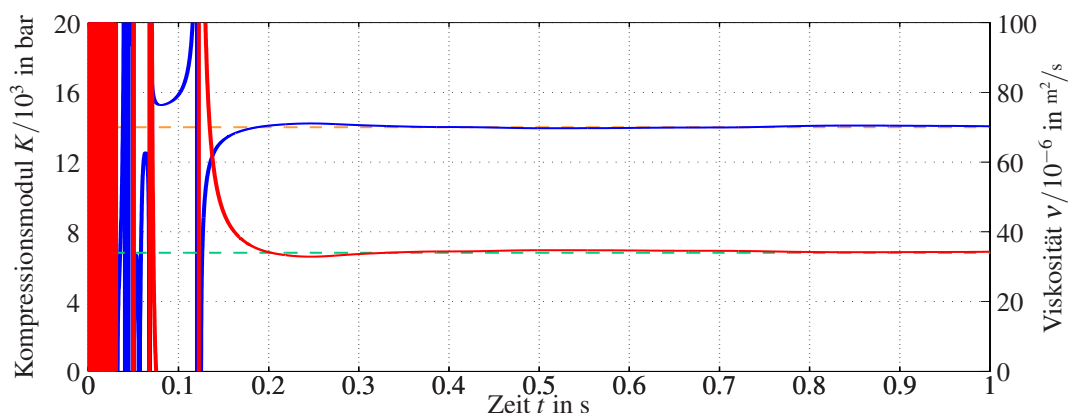
Abbildung 6.3: Identifikation basierend auf simulierten Trajektorien.



(a) Trajektorien der Drücke p_0 (blau, durchgezogen) und p_L (rot, gestrichelt) – zuzüglich des stationären Anfangswertes.



(b) Trajektorien der Volumenströme q_0 (blau, durchgezogen) und q_L (rot, gestrichelt) – zuzüglich des stationären Anfangswertes.



(c) Schätzwerte für den Kompressionsmodul K (blau) und die Viskosität ν (rot).

Abbildung 6.4: Identifikation basierend auf simulierten und von mittelwertfreiem weißen Rauschen überlagerten Trajektorien.

tion der Ableitungsordnung und der übrigen Systemparameter benötigt werden. Der vorgestellte Ansatz, der sowohl für ein Beispiel mit konzentrierten als auch für eines mit verteilten Parametern diskutiert wird, ist das einzige bekannte parametrische Verfahren, das ohne Approximation des fraktionalen Systems auskommend die Identifikation sämtlicher Systemparameter einschließlich der Ableitungsordnung ermöglicht [GR12, GR13]. Als Beispiele für alternative, wenn auch nicht gleichwertige, Verfahren seien die fraktionale Zustandsvariablenfilterung (eng. *state variable filter*) aus [COPB01] genannt, das die Kenntnis der Ordnung voraussetzt, die Approximation der fraktionalen Ableitung durch FEM in [SG02] oder die auf einer modalen Approximation basierende Frequenzgangmethode in [KL09]. Ein ausführlicherer Überblick über Identifikationsmethoden findet sich in [MVNO07].

6.2.1 Mathematische und systemtheoretische Grundlagen

Die mathematischen Definitionen und systemtheoretischen Grundlagen in diesem Abschnitt entstammen den Büchern [Pod99] und [OS74] sowie dem einführenden Aufsatz [GM97].

Die am weitesten verbreitete der zahlreichen Definitionen für fraktionale Ableitungen geht auf B. Riemann und J. Liouville zurück und wird ihnen zu Ehren als Riemann-Liouville-Definition bezeichnet. Ausgangspunkt ist das (linksseitige) fraktionale Integral, das als natürliche Erweiterung der n -fachen Integration einer Funktion f basierend auf der Cauchy-Formel

$$\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \cdots d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau, \quad n \in \mathbb{N},$$

mit der Gamma-Funktion Γ , als

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0$$

für reelle Integrationsordnungen $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ definiert ist⁴. Aus der Forderung, dass die fraktionale Ableitung D_t^α der linksinverse Operator von J_t^α sein soll, also $D_t^\alpha J_t^\alpha f = f$, folgt die Riemann-Liouville-Definition

$$D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu-\alpha)} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \int_0^t \frac{f(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha+1-\nu}} d\sigma, & \nu-1 < \alpha < \nu \\ \frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t), & \alpha = \nu \end{cases} \quad (6.9a)$$

mit der Ableitungsordnung $\alpha \in (\nu-1, \nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$. Eine alternative Definition wurde von M. Caputo eingeführt:

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(\nu)}(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha+1-\nu}} d\sigma, & \nu-1 < \alpha < \nu \\ \frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t), & \alpha = \nu. \end{cases} \quad (6.9b)$$

⁴Im Gegensatz zu allgemeineren Definitionen wurde die untere Integrationsgrenze zu Null gewählt

Die mathematischen Bestimmungsgleichungen machen deutlich, dass die fraktionale Ableitung einer Funktion zu einem Zeitpunkt t von Funktionswerten auf dem Intervall $[0, t]$ abhängt. Dieser globalere Charakter, der sich wesentlich von herkömmlichen, ganzzahligen Ableitungen unterscheidet, bei denen die Ableitung an einem Punkt lediglich von benachbarten Punkten abhängt, hat dazu geführt, dass fraktionalen Systemen eine Art „Gedächtnis“ zugeschrieben wird, was sie nicht nur für die Modellierung von Polymeren und Batterien als besonders geeignet erscheinen lässt. Die die Systeme beschreibenden Gln. sind Funktional-Differentialgleichungen.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Riemann-Liouville-Ableitung und der Caputo-Ableitung besteht in der Definition zugehöriger Anfangsbedingungen. Hier wird auf die klassische Definition nach [OS74] zurückgegriffen, auch wenn Ergebnisse in den letzten Jahren (z.B. [LH08, TMSO12]) zeigen, dass diese die Anfangsbedingungen nicht allgemein hinreichend gut berücksichtigen. (Eine Erweiterung der algebraischen Identifikation auf die aus diesen neuen Erkenntnissen hervorgehenden Definitionen ist noch zu untersuchen.) So gelten für die Laplace-Transformierten von (6.9a) und (6.9b)

$$D_t^\alpha f = \left[s^\alpha \hat{f} - \sum_{k=0}^{\nu-1} D_t^k J_t^{\nu-\alpha} f(0) s^{\nu-1-k} \right], \quad \nu - 1 < \alpha \leq \nu, \nu \in \mathbb{N} \quad (6.10a)$$

$${}^C D_t^\alpha f = \left[s^\alpha \hat{f} - \sum_{k=0}^{\nu-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-1-k} \right], \quad \nu - 1 < \alpha \leq \nu, \nu \in \mathbb{N}, \quad (6.10b)$$

wobei $J_t^{\nu-\alpha} f(0)$ der rechtsseitige Grenzwert von $J_t^{\nu-\alpha} f(t)$ für $t \rightarrow 0$ ist. Für homogene Anfangsbedingungen sind beide offensichtlich identisch.

6.2.2 Ein System mit einer fraktionalen Ableitung

Als Beispiel für ein System mit fraktionaler Zeitableitung dient das empirische Modell

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (6.11)$$

eines visko-elastischen Materials (z.B. [Bag83]), das oftmals aufgrund der drei es beschreibenden Parameter E_0 , E_1 und α als verallgemeinertes 3-Parameter-Voigt-Modell bezeichnet wird. Darin ergibt sich die Spannung σ aus der Superposition eines elastischen Anteils $E_0 \varepsilon$ und eines visko-elastischen Anteils, der von der fraktionalen Ableitung der Ordnung α der Dehnung ε abhängt. Für die Identifikation der drei Parameter wird angenommen, dass die Trajektorien der Messsignale der Spannung σ und der Dehnung ε bekannt sind.

Wird zunächst von homogenen Anfangsbedingungen ausgegangen, so lautet die Laplace-Transformierte von (6.11)

$$\hat{\sigma} = E_0 \hat{\varepsilon} + E_1 s^\alpha \hat{\varepsilon}. \quad (6.12)$$

Um eine in α polynomiale Gl. zu erhalten, wird nach s abgeleitet und durch Kombination mit (6.12) s^α eliminiert. Die resultierende Identifikationsgleichung

$$(\hat{\varepsilon}' + \alpha s^{-1} \hat{\varepsilon})(\hat{\sigma} - E_0 \hat{\varepsilon}) = \hat{\varepsilon}(\hat{\sigma}' - E_0 \hat{\varepsilon}') \quad (6.13)$$

ist polynomial in s^{-1} , den Parametern E_0 und α sowie den Messsignalen und ihren Ableitungen nach s . Soll lediglich die Systemordnung α identifiziert werden, so kann durch Kombination von (6.13) und dessen Ableitung nach s der Parameter E_0 eliminiert werden:

$$\alpha s^{-1} \hat{\varepsilon}(\hat{\varepsilon} \hat{\sigma}' - \hat{\varepsilon}' \hat{\sigma}) = (s^{-1} \hat{\varepsilon} - 2\hat{\varepsilon}')(\hat{\varepsilon} \hat{\sigma}' - \hat{\varepsilon}' \hat{\sigma}) + \hat{\varepsilon}(\hat{\varepsilon} \hat{\sigma}'' - \hat{\varepsilon}'' \hat{\sigma}).$$

Die Interpretation dieser in α affinen Gleichung im Zeitbereich ist direkt möglich und erfordert keinerlei fraktionale Ableitungen oder Integrale.

Alternativ ergibt sich aus der Darstellung von (6.13) und der mit s^{-1} multiplizierten Gl. im Zeitbereich ein in α und αE_0 lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -\int_0^t (\varepsilon * \sigma)(\tau) d\tau & \int_0^t (\varepsilon * \varepsilon)(\tau) d\tau \\ -\int_0^t (t - \tau)(\varepsilon * \sigma)(\tau) d\tau & \int_0^t (t - \tau)(\varepsilon * \varepsilon)(\tau) d\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon * \bar{t}\sigma - \bar{t}\varepsilon * \sigma)(t) \\ \int_0^t (\varepsilon * \bar{t}\sigma - \bar{t}\varepsilon * \sigma)(\tau) d\tau \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

in dem die Mehrfachintegrale mittels partieller Integration durch Einfachintegrale dargestellt wurden. Erneut bezeichnet $\bar{t} : t \mapsto t$ die identische Abbildung. Da die Determinante der Matrix in (6.14) für alle nicht verschwindenden Signale $t \mapsto \sigma(t)$ und $t \mapsto \varepsilon(t)$ regulär ist – mit der Ausnahme einzelner singulärer Punkte – lassen sich Schätzwerte für E_0 und α gewinnen. Basierend darauf lässt sich der verbleibende Parameter E_1 unmittelbar aus (6.11) berechnen:

$$E_1 = \frac{\int_0^t \sigma(\tau) d\tau - E_0 \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau}{J_t^{1-\alpha} \varepsilon(t)}. \quad (6.15)$$

Für die zur Validierung der Ergebnisse erforderliche Simulation des Systems (6.11), d.h. zur Generierung der Trajektorien der Messsignale, wurde die fraktionale Ableitung D_t^α entsprechend des FEM-Ansatzes aus [SG02] approximiert:

$$D_t^\alpha f(t) \approx \left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} A_{k+1} f(t - k \frac{t}{N}) \quad (6.16)$$

mit $N \in \mathbb{N}$ der Anzahl der Stützstellen und

$$A_{k+1} = \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k + 1)} = \frac{k - 1 + \alpha}{k} A_k.$$

Der Ansatz basiert dabei auf der Grünwald-Letnikov-Definition der fraktionalen Ableitung, die insbesondere im Zusammenhang mit der diskreten Approximation der Ableitung hilfreich ist und für eine große Klasse an Funktionen mit der Riemann-Liouville-Definition übereinstimmt [SG02].

Die für die Simulation gewählten Parameter $E_0 = 814 \text{ kN/m}^2$, $E_1 = 73.1 \text{ s}^\alpha \text{ kN/m}^2$ und $\alpha = 0.528$ wurden [Bag83] entnommen und beschreiben Butadien-Kautschuk. Die Trajektorien in Abb. 6.5 ergaben sich für eine relativ geringe Schrittweite von 10^{-5} s , um eine möglichst gute Approximation des fraktionalen Systems zu gewährleisten. Für

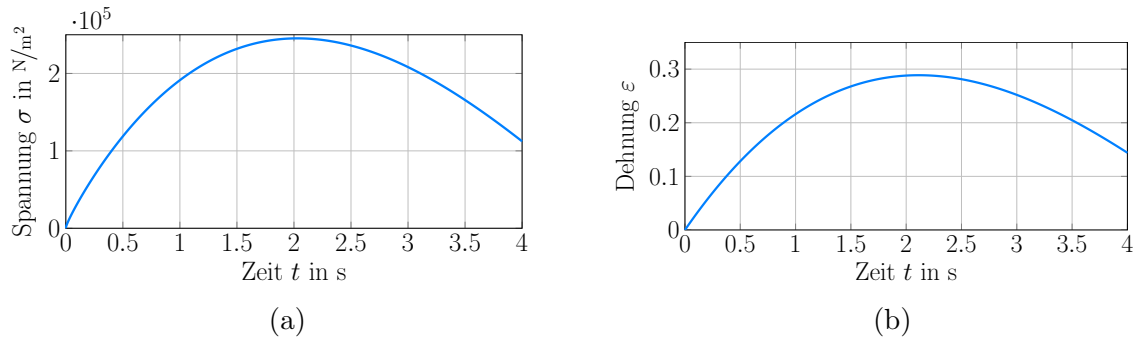


Abbildung 6.5: Trajektorien von Spannung σ in (a) und Dehnung ε in (b).

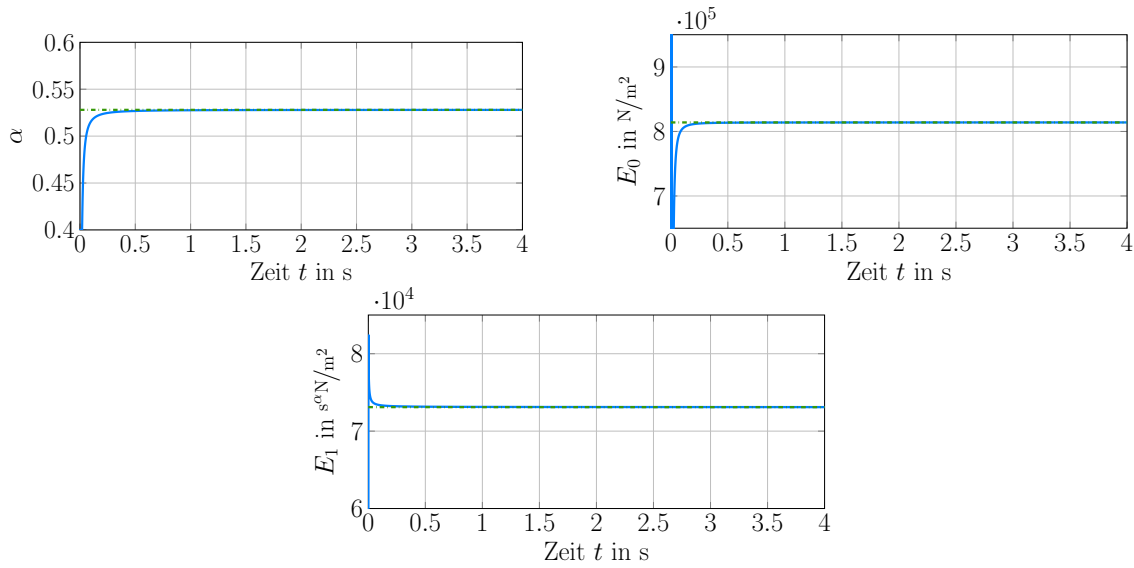


Abbildung 6.6: Unter Verwendung von (6.14) und (6.15) identifizierte Parameter (blau) im Vergleich zum tatsächlichen Wert (grün).

die Identifikation der drei Systemparameter unter Verwendung von (6.14) und (6.15), wobei das für die Berechnung von E_1 benötigte fraktionale Integral mittels (6.16) mit $J_t^{1-\alpha} f = D_t^{\alpha-1} f$ genähert wurde, wurde hingegen nur jeder hundertste simulierte Wert verwendet; es wurde also mit der Schrittweite von 10^{-3} s gearbeitet. Die in Abb. 6.6 zu beobachtende (nur) asymptotische Konvergenz der Schätzwerte gegen den tatsächlichen Wert im Modell ist hauptsächlich der Approximation der fraktionalen Ableitung bei der Generierung der Messsignale geschuldet und kann durch weitere Reduktion der Schrittweite in der Simulation erheblich verbessert werden.

Zum Vergleich mit den nominellen Ergebnissen wurde die Identifikation unter Verwendung von durch mittelwertfreies weißes Rauschen überlagerten Messsignalen durchgeführt, mit einem Signal-Rausch-Verhältnis von 37 dB. Wie zuvor in anderen Beispielen beobachtet werden konnte, konvergieren die Schätzwerte im gestörten Fall erst später gegen den tatsächlichen Wert. Um dem entgegenzuwirken, wurde in diesem Fall die Schrittweite auf $2 \cdot 10^{-4}$ s reduziert. Die entsprechenden Trajektorien von Spannung

σ und Dehnung ε können Abb. 6.7 entnommen werden. Bei der Berechnung von α und E_0 entsprechend (6.14) wurde dieses Gleichungssystem zudem ein weiteres Mal integriert, um den Einfluss des mittelwertfreien Rauschens besser unterdrücken zu können und damit eine Glättung der Schätzwerte zu erreichen. Die Abweichungen der identifizierten Parameter von deren tatsächlichen Werten liegen unterhalb von einem Prozent. Wie aus Abb. 6.8 zu erkennen ist, weist lediglich der Schätzwert für E_1 eine signifikante Rauschamplitude auf, die der Berechnungsvorschrift (6.15) unter Verwendung der verrauschten Messsignale geschuldet ist.

Als nächstes soll noch der Fall inhomogener Anfangsbedingungen entsprechend der Definitionen in (6.10) kurz theoretisch untersucht werden.

Riemann-Liouville-Definition

Für nicht-verschwindende Anfangswerte folgt aus der Laplace-Transformation der Systemgleichung (6.11) entsprechend (6.16)

$$\hat{\sigma} = E_0 \hat{\varepsilon} + E_1 (s^\alpha \hat{\varepsilon} - J_t^{1-\alpha} \varepsilon(0)), \quad (6.17)$$

da für die Ordnung $\alpha \in (0, 1)$ gilt. Die unbekannte und nur schwer interpretierbare Anfangsbedingung $J_t^{1-\alpha} \varepsilon(0)$ kann entweder eliminiert oder zusätzlich zu den drei Systemparametern identifiziert werden. Für letzteren Ansatz lässt sich, ebenso wie im Fall homogener Anfangsbedingungen, s^α mit Hilfe von (6.17) und dessen Ableitung

$$\hat{\sigma}' = E_0 \hat{\varepsilon}' + E_1 (\hat{\varepsilon}' + \alpha s^{-1} \hat{\varepsilon}) s^\alpha \quad (6.18)$$

nach s eliminieren:

$$(\hat{\varepsilon}' + \alpha s^{-1} \hat{\varepsilon}) (\hat{\sigma} + E_1 J_t^{1-\alpha} \varepsilon(0) - E_0 \hat{\varepsilon}) = \hat{\varepsilon} (\hat{\sigma}' - E_0 \hat{\varepsilon}').$$

Alternativ zu dieser Identifikationsgleichung, mit der sich letztlich Schätzwerte für α , E_0 , und $E_1 J_t^{1-\alpha} \varepsilon(0)$ sowie unter Berücksichtigung von (6.17) für E_1 gewinnen lassen, lässt sich auf Basis der ersten Ableitung der Laplace-Transformierten (6.17) nach s eine von der Anfangsbedingung unabhängige Identifikationsgleichung herleiten, da $J_t^{1-\alpha} \varepsilon(0)$ in (6.18) nicht mehr auftritt. Die Elimination von s^α unter Verwendung von (6.18) und seiner Ableitung nach s führt auf die gesuchte Identifikationsgleichung:

$$(\hat{\varepsilon}'' + 2\alpha s^{-1} \hat{\varepsilon}' + \alpha(\alpha - 1) s^{-2} \hat{\varepsilon}) (\hat{\sigma}' - E_0 \hat{\varepsilon}') = (\hat{\varepsilon}' + \alpha s^{-1} \hat{\varepsilon}) (\hat{\sigma}'' - E_0 \hat{\varepsilon}'').$$

Caputo-Definition

Die Herangehensweise ändert sich leicht, wenn in der Systemgleichung (6.11) die fraktionale Ableitung D_t^α nach Riemann und Liouville durch jene nach Caputo, also ${}^C D_t^\alpha$, ersetzt wird. Aus der korrespondierenden Laplace-Transformierten

$$\hat{\sigma} = E_0 \hat{\varepsilon} + E_1 (s^\alpha \hat{\varepsilon} - \varepsilon(0) s^{\alpha-1}) \quad (6.19)$$

ist zu erkennen, dass der Anfangswert $\varepsilon(0)$ im Unterschied zur vorangegangenen Betrachtung nicht einfach durch Ableiten nach s entfällt. Vielmehr kann dieser leicht

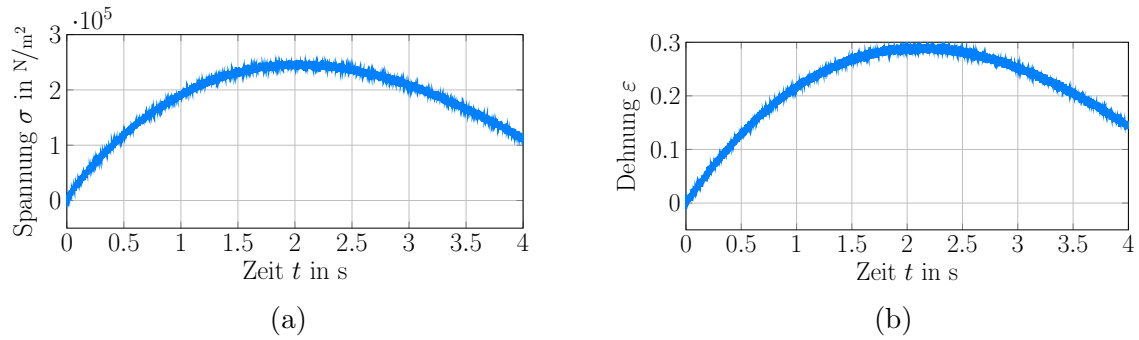


Abbildung 6.7: Trajektorien von Spannung σ in (a) und Dehnung ε in (b) überlagert durch mittelwertfreies weißes Rauschen.

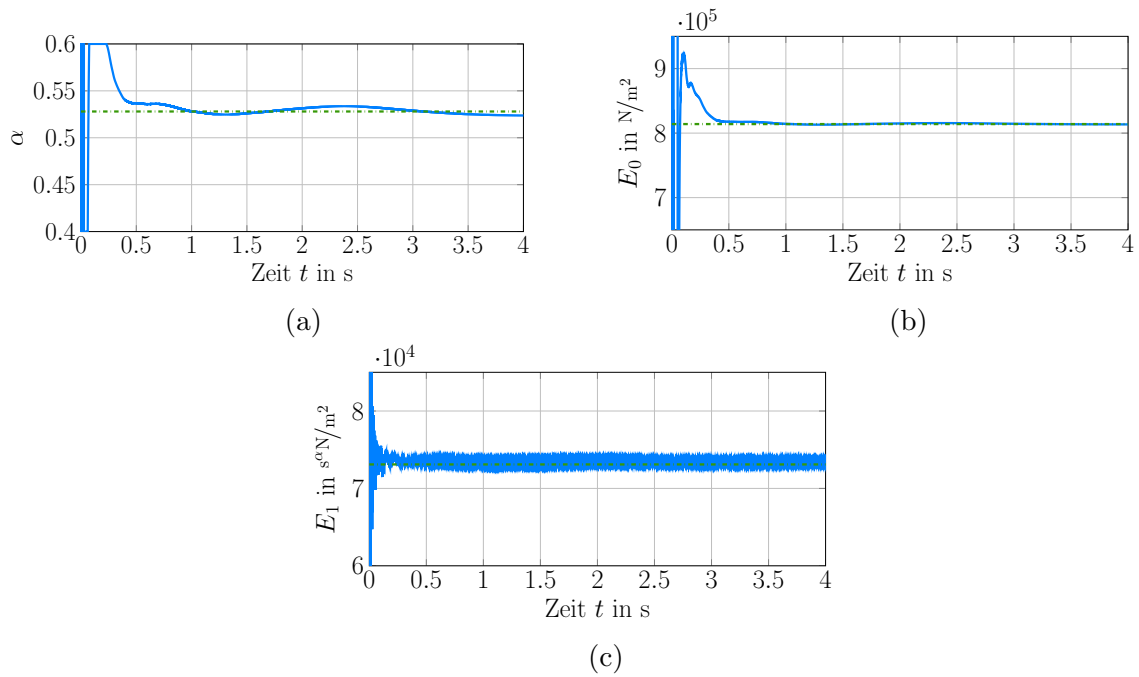


Abbildung 6.8: Unter Verwendung des integrierten Gleichungssystems (6.14) und (6.15) identifizierte Parameter (blau) im Vergleich zum tatsächlichen Wert (grün).

interpretierbare Wert aufgrund der Kenntnis des Messsignals $t \mapsto \varepsilon(t)$ als bekannt angenommen werden. Dann ergibt sich eine Identifikationsgleichung durch geeignete Kombination von (6.19) und seiner Ableitung

$$\hat{\sigma}' = E_0 \hat{\varepsilon}' + E_1 (s^\alpha (\hat{\varepsilon}' + \alpha s^{-1} \hat{\varepsilon}) - (\alpha - 1) s^{-1} \varepsilon(0) s^{\alpha-1}) \quad (6.20)$$

nach s derart, dass s^α nicht mehr auftritt:

$$(\hat{\sigma}' \hat{\varepsilon} - \hat{\sigma} \hat{\varepsilon}') = (\varepsilon(0)(1 - \alpha) s^{-2} + \alpha s^{-1} \hat{\varepsilon}) (\hat{\sigma} - E_0 \hat{\varepsilon}) + \varepsilon(0) s^{-1} (\hat{\sigma}' - E_0 \hat{\varepsilon}').$$

Ob auf Basis dieser Gleichung der eigentlich bekannte Wert für $\varepsilon(0)$ einfach eingesetzt oder zusammen mit den übrigen Parametern identifiziert wird, wird letztlich durch einen konkreten Anwendungsfall bestimmt. Soll die Identifikationsgleichung ausdrücklich unabhängig von einem ggf. durch Rauschen überlagerten Anfangswert des Messsignals sein, so lässt sich beispielsweise durch Addition der mit $(1 - \alpha) s^{-1}$ multiplizierten Gl. (6.19) zu deren mit s multiplizierten Ableitung (6.20) die von $\varepsilon(0)$ unabhängige Beziehung

$$(1 - \alpha) \hat{\sigma} + s \hat{\sigma}' = E_0 (1 - \alpha) \hat{\varepsilon} + E_0 s \hat{\varepsilon}' + E_1 s^\alpha (\hat{\varepsilon} + s \hat{\varepsilon}')$$

gewinnen. Davon ausgehend lässt sich durch Ableiten nach s abermals s^α eliminieren, und es folgt letztlich die Identifikationsgleichung

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}' \hat{\varepsilon}'' - \hat{\sigma}'' \hat{\varepsilon}' + s^{-1} (\hat{\sigma} \hat{\varepsilon}'' - \hat{\sigma}'' \hat{\varepsilon}) + s^{-2} (2 - \alpha) (\hat{\sigma} \hat{\varepsilon}' - \hat{\sigma}' \hat{\varepsilon}) \\ = -\alpha s^{-1} (2 \hat{\varepsilon}' + s^{-1} \hat{\varepsilon}) (\hat{\sigma}' - E_0 \hat{\varepsilon}') + \alpha s^{-1} (\hat{\varepsilon}'' + \alpha s^{-1} \hat{\varepsilon}' + (\alpha - 1) s^{-2} \hat{\varepsilon}) (\hat{\sigma} - E_0 \hat{\varepsilon}) \end{aligned}$$

in den Parametern α und E_0 .

6.2.3 Allgemeine Bemerkungen zur Identifikation von Parameter in Systemen endlicher Dimension mit fraktionalen Zeitableitungen

Basierend auf ersten Erkenntnissen aus [GR13] soll das grundsätzliche Vorgehen für die Identifikation der Parameter in fraktionalen Systemen skizziert werden. Auf eine detaillierte Beschreibung der allgemeinen Herangehensweise wird an dieser Stelle verzichtet, da insbesondere Fragen der algebraischen Identifizierbarkeit bisher nicht endgültig geklärt werden konnten.

Ausgangspunkt ist eine Eingangs-Ausgangs-Gleichung

$$(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 D_t^{\bar{\alpha}_1} + \dots + \bar{a}_n D_t^{\bar{\alpha}_n}) y(t) = (\bar{b}_0 + \bar{b}_1 D_t^{\bar{\alpha}_{n+1}} + \dots + \bar{b}_m D_t^{\bar{\alpha}_{n+m}}) u(t) \quad (6.21)$$

mit den Messsignalen u und y . Zumindest einige der Koeffizienten $\bar{a}_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ und $\bar{b}_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, m$ sowie der nicht zwangsläufig fraktionalen⁵ Ableitungsordnungen $\bar{\alpha}_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, n + m$ seien unbekannt und sollen daher ausschließlich unter Verwendung der Messsignale identifiziert werden.

⁵vgl. Abschnitt 6.3

In der Laplace-Transformierten

$$(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s^{\bar{\alpha}_1} + \dots + \bar{a}_n s^{\bar{\alpha}_n}) \hat{y} = (\bar{b}_0 + \bar{b}_1 s^{\bar{\alpha}_{n+1}} + \dots + \bar{b}_m s^{\bar{\alpha}_{n+m}}) \hat{u} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu} c_i s^{i-1}}_{\text{(I)}} + \underbrace{\sum_{j=0}^r \sum_{i=1}^{\nu} c_{j,i} s^{-i} s^{\alpha_j}}_{\text{(II)}} \quad (6.22)$$

von (6.21) sind mit (I) strukturell die Anfangsbedingungen nach Riemann und Liouville berücksichtigt, mit (II) jene nach Caputo, wobei je nach Wahl der c_i , $c_{j,i}$ nur eine oder keine der Mengen an Anfangswerten zum Tragen kommen.

Analog zum 3-Parameter-Voigt-Modell lassen sich zunächst die unbekannten Anfangsbedingungen durch mehrfaches Ableiten nach s und geeignete Linearkombination dieser Gleichungen eliminieren, um auf diese Weise die Anzahl der zu identifizierenden Parameter zu reduzieren. Anschließend wird durch sukzessives Ableiten der resultierenden Gleichung nach s ein Gleichungssystem erstellt, das die Elimination der unbekannten Potenzen $s^{\bar{\alpha}_i}$, $i = 1, \dots, n + m$ der komplexen Veränderlichen erlaubt. Als Ergebnis verbleibt eine Gleichung, die nach Multiplikation mit s^{-k} , k hinreichend groß, polynomial in s^{-1} , den Messgrößen $\hat{u}$ und $\hat{y}$ und deren Ableitungen nach s sowie den unbekannten Ableitungsordnungen α_i und ggf. den Koeffizienten $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ ist, also eine Identifikationsgleichung. Die Frage, ob sich auf Basis dieser Identifikationsgleichung tatsächlich sämtliche unbekannten Systemparameter identifizieren lassen, bleibt bisher allgemein unbeantwortet.

Bemerkung 2.1 (Systeme mit verteilten fraktionalen Ableitungen): *Systeme mit verteilten fraktionalen Ableitungen wurden erstmals von M. Caputo in dem Gedanken vorgeschlagen, ein lineares zeitinvariantes System basierend auf einem beobachteten Eingangs-Ausgangs-Verhalten und einem konstruierten Frequenzgang zu modellieren [JCP12]. Die Definition einer solchen verteilten fraktionalen Ableitung ergibt sich dabei als Verallgemeinerung von (6.9a) zu*

$$D_t^{g(\alpha)} f(t) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} g(\alpha) D_t^\alpha f(t) d\alpha,$$

mit der Gewichtsfunktion $[\gamma_1, \gamma_2] \ni \alpha \mapsto g(\alpha)$. Im Rahmen der Identifikation lassen sich die Parameter auch in derartigen Systemen bestimmen, sofern eine Struktur der Gewichtsfunktion bekannt ist, also beispielsweise ein Polynom bekannten Grades in α , das g auf dem ggf. unbekannten Intervall $[\gamma_1, \gamma_2]$ beschreibt. Die Koeffizienten des Polynoms, die Intervallgrenzen, sowie weitere Systemparameter können algebraisch identifiziert werden.

6.2.4 Ein System unendlicher Dimension mit einer fraktionalen Zeitableitung

Fraktionale (wie auch ganzzahlige) Ableitungsordnungen bzgl. der Zeit lassen sich ebenfalls in linearen partiellen Dgl'n. mit der algebraischen Methode identifizieren.

Während auf einen allgemeinen Formalismus an dieser Stelle verzichtet werden soll, wird die grundsätzliche Vorgehensweise am Beispiel einer Diffusions-Wellen-Gleichung (z.B. [Pod99])

$$v^2 \partial_z^2 w(z, t) = D_t^\alpha w(z, t), \quad \alpha \in (0, 2] \quad (6.23)$$

deutlich, die für $\alpha = 1$ eine Diffusionsgleichung mit Diffusionskoeffizient v^2 ist, für $\alpha = 2$ eine Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit v und insbesondere für Werte $\alpha \in (1, 2)$ eine Mischform beider. Motiviert wird diese Systemgleichung beispielsweise durch Phänomene in der Signalübertragung auf langen Leitungen unbekannter Charakteristik, für die aufgrund ihrer Ausdehnung angenommen werden kann, dass ein Rand im Unendlichen liegt, d.h. sich ein halboffenes Gebiet für die Ortsvariable z ergibt. Die Wahl einer fraktionalen Ordnung für die Zeitableitung spiegelt dabei erneut den Gedanken wider, ein empirisches Modell mit wenigen Parametern für die Beschreibung komplexer dynamischer Verhalten zu verwenden. Im Gegensatz zu den Systemen in Abschnitt 6.2.3 ist jedoch keine physikalisch fundierte mathematische Modellbildung bekannt, die auf das Modell (6.23) führt.

Für die Identifikation von α wird die notwendige Annahme homogener Anfangsbedingungen getroffen, wobei es in diesem Kontext irrelevant ist, ob es sich abhängig von α um eine oder zwei Anfangsbedingungen handelt. Als Messsignale stehen die konzentrierten Größen

$$w(0, t) = u(t), \quad w(L, t) = y(t) \quad (6.24a)$$

zur Verfügung, wobei u als Signaleintrag auf die Leitung und damit als eine (von zwei) Randbedingungen für (6.23) interpretiert werden kann. Damit eine beschränkte Lösung für w auf dem halboffenen Gebiet $z \in [0, \infty)$ existiert, folgt als zweite Bedingung

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w(z, t) = 0. \quad (6.24b)$$

Aus der Laplace-Transformierten

$$v^2 \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(z) = s^\alpha \hat{w}(z), \quad \alpha \in (0, 2]$$

der Systemgleichung (6.23) ergibt sich unter Berücksichtigung von (6.24) eine Beziehung

$$\hat{y} = \hat{u} \exp\left(-\frac{L}{v} s^{\alpha/2}\right) \quad (6.25)$$

zwischen den beiden Messsignalen. Die darin auftretende Exponentialfunktion genügt einer Dgl. erster Ordnung bzgl. s . Folglich ergibt sich aus der Kombination von (6.25) und seiner ersten Ableitung nach s

$$\hat{y} \hat{u}' - \hat{y}' \hat{u} = \frac{\alpha}{2} \frac{L}{v} s^{-1} s^{\alpha/2} \hat{y} \hat{u}. \quad (6.26)$$

Der gesuchte Parameter α tritt hierin noch als Exponent der komplexen Veränderlichen auf. Erneut lässt sich aus (6.26) und seiner ersten Ableitung nach s der betreffende Term $s^{\alpha/2}$ eliminieren. Mit

$$\hat{y}^2 ((\hat{u}')^2 - s^{-1} \hat{u} \hat{u}' - \hat{u} \hat{u}'') - \hat{u}^2 ((\hat{y}')^2 - s^{-1} \hat{y} \hat{y}' - \hat{y} \hat{y}'') = \frac{\alpha}{2} s^{-1} \hat{y} \hat{u} (\hat{y}' \hat{u} - \hat{y} \hat{u}')$$

erhält man eine Identifikationsgleichung, die affin in der zu bestimmenden Ableitungsordnung α ist. Für die Berechnung der Ordnung müssen im Zeitbereich lediglich Faltungsprodukte (mit jeweils vier Faktoren) der konzentrierten Messsignale ausgewertet werden. Es sei bemerkt, dass sich ausgehend von einem Schätzwert für α in einem zweiten Schritt auch der Quotient L/v auf Basis von (6.26) identifizieren lässt.

6.3 Endlichdimensionale Systeme unbekannter Ordnung

Ausgehend von den Ergebnissen in Abschnitt 6.2 ist es offensichtlich, dass eine Identifikation der Systemordnung nicht nur für fraktionale sondern auch für ganzzahlige Ableitungsordnungen möglich ist. Aus diesem Grund soll hier die Identifikation für endlichdimensionale Systeme der Form

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = u(t), \quad a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_0 \quad (6.27)$$

diskutiert werden, wobei sowohl die Systemparameter a_i , $i = 0, \dots, n$ als auch die Systemordnung n unbekannt sind. Eine Bemerkung zu Systemen mit Eingangsableitungen $u^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$ findet sich am Ende dieses Abschnitts. Auf die Ermittlung der Ordnung einer partiellen Dgl. bzgl. der Zeit wird nicht explizit eingegangen, da es sich um eine analoge Betrachtung zu Abschnitt 6.2.4 handelt.

Neben den Signalen u und y ist für die Identifikation lediglich eine obere Schranke $N \geq n$ für die Ordnung verfügbar. Es wird davon ausgegangen, dass keine Dgl. der Form (6.27) mit einer Ordnung $\bar{n} < n$ existiert, die von den Trajektorien $t \mapsto u(t)$ und $t \mapsto y(t)$ erfüllt wird. Andernfalls wäre es aufgrund der unzureichenden Anregung lediglich möglich, $\bar{n}$ und nicht die tatsächliche Systemordnung zu identifizieren. Zudem beschränkt sich dieser Abschnitt der Einfachheit halber auf homogene Anfangsbedingungen, auch wenn dies keine notwendige Voraussetzung ist.

6.3.1 Herleitung einer Identifikationsgleichung

In einem ersten Schritt wird für die Laplace-Transformierte von (6.27)

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = \frac{\hat{u}}{\hat{y}} =: \hat{x} \quad (6.28)$$

ein struktureller Ansatz

$$\sum_{i=0}^N \alpha_{\sigma-i} s^{\sigma-i} = \alpha_{\sigma} s^{\sigma} + \alpha_{\sigma-1} s^{\sigma-1} + \dots + \alpha_{\sigma-N} s^{\sigma-N} = \frac{\hat{u}}{\hat{y}} = \hat{x} \quad (6.29)$$

gewählt. Wegen $N \geq n$ lässt sich damit stets für geeignete, ggf. verschwindende, Parameter α_i das tatsächliche System mit den Koeffizienten a_i abbilden.

Um eine polynomiale Gl. in dem zu identifizierenden Parameter σ zu erhalten, soll durch Ableitung von (6.29) nach s die unbekannte Potenz s^σ eliminiert werden. Dafür lassen sich (6.29) und seine erste Ableitung nach s^σ auflösen und gleichsetzen. Die resultierende Gl. ist polynomial in der Ordnung σ und den Systemparametern α_i . Für die in jedem Fall unbekannten α_i – ansonsten wäre unmittelbar die Ordnung bekannt – ergibt sich im Allgemeinen ein komplexes polynomiales Identifikationsproblem, weshalb stattdessen eine von den Parametern unabhängige Identifikationsgleichung hergeleitet werden soll. Dafür wird (6.29) als linear in den unbekannten und zu eliminierenden Faktoren $\alpha_i s^i$ aufgefasst und k -fach, $k = 1, \dots, N$ nach s abgeleitet:

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(k)} &= \sum_{i=0}^N \alpha_{\sigma-i} s^{\sigma-i-k} \frac{(\sigma-i)!}{(\sigma-i-k)!} = \sum_{i=0}^N \alpha_{\sigma-i} s^{\sigma-i-k} \prod_{j=0}^{k-1} (\sigma-i-j) \\ &= \sum_{i=0}^N \alpha_{\sigma-i} s^{\sigma-i-k} \sum_{j=0}^k S(k, j) (\sigma-i)^j = \sum_{j=0}^k S(k, j) \sum_{i=0}^N (\sigma-i)^j \alpha_{\sigma-i} s^{\sigma-i-k}.\end{aligned}\quad (6.30)$$

Es bezeichnen $S(k, j)$ die Stirling-Zahlen erster Art⁶ [AS64, S. 824].

Aus den Ableitungen der Ordnungen $0, \dots, N$ von $\hat{x}$ ergibt sich ein Gleichungssystem für $\alpha_i s^i$, das sich in der faktorisierten Darstellung

$$\text{diag}(1, s^{-1}, \dots, s^{-N}) T V \mathbf{s} = \mathbf{x} \quad (6.31)$$

mit Vektoren der Länge $N+1$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \alpha_\sigma s^\sigma \\ \alpha_{\sigma-1} s^{\sigma-1} \\ \vdots \\ \alpha_{\sigma-N} s^{\sigma-N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}' \\ \vdots \\ \hat{x}^{(N)} \end{pmatrix}$$

angeben lässt. Es sind

$$T = (S(i, j))_{i=0, \dots, N; j=0, \dots, N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & S(2, 1) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & S(N, 1) & \dots & S(N, N-1) & 1 \end{pmatrix}$$

⁶Die Stirling-Zahlen erster Art sind die Koeffizienten des Polynoms in σ

$$\prod_{i=0}^{N-1} (\sigma - i) = \sum_{i=0}^N S(N, i) \sigma^i.$$

eine Stirling-Matrix mit den Stirling-Zahlen erster Art [LT02] und

$$V = (\lambda_j^i)_{i=0,\dots,N; j=0,\dots,N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sigma & \sigma - 1 & \sigma - 2 & \cdots & \sigma - N \\ \sigma^2 & (\sigma - 1)^2 & (\sigma - 2)^2 & \cdots & (\sigma - N)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^N & (\sigma - 1)^N & (\sigma - 2)^N & \cdots & (\sigma - N)^N \end{pmatrix}$$

eine Vandermonde-Matrix mit $\lambda_j = (\sigma - j)$ [Ber09, Fact 5.16.3].

Aufgrund der Regularität der Matrizen mit $\det T = 1$ und

$$\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{0 \leq i < j \leq N} (j - i) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

(vgl. [Ber09, Fact 5.16.3]) lässt sich (6.31) nach den unbekannten Potenzen in $\mathbf{s}$ auflösen. Unter Verwendung der $(N + 1)$ -ten Ableitung von $\hat{x}$ entsprechend (6.30) folgt daraus

$$0 = \sum_{i=0}^{N+1} (-1)^i \binom{N+1}{i} s^i \hat{x}^{(i)} \prod_{k=i}^N (\sigma - k). \quad (6.32)$$

Berücksichtigt man, dass es sich bei $\hat{x}$ um den Quotienten aus Eingang $\hat{u}$ und Ausgang $\hat{y}$ handelt, so führt das Nullsetzen des Zählers von (6.32) auf eine Identifikationsgleichung für die Systemordnung:

$$0 = s^{-N-1} \hat{y}^{N+2} \sum_{i=0}^{N+1} (-1)^i \binom{N+1}{i} s^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \hat{u}^{(j)} \left(\frac{1}{\hat{y}} \right)^{(i-j)} \prod_{k=i}^N (\sigma - k). \quad (6.33)$$

Diese ist polynomial in σ , s^{-1} sowie den Messgrößen $\hat{u}$ und $\hat{y}$ und deren Ableitungen nach s .

6.3.2 Lösungen der Identifikationsgleichung

Offensichtlich handelt es sich bei der Identifikationsgleichung (6.33) um eine in dem gesuchten Parameter σ polynomiale Gleichung. Auch wenn die numerische Lösung, d.h. die Berechnung der Nullstellen, keine große Schwierigkeit darstellt, so stellt sich die Frage nach der Bedeutung der $N + 1$ Lösungen, bzw. wie und ob sich die gesuchte Systemordnung eindeutig daraus ermitteln lässt.

Zur Klärung dieser Problematik wird $\hat{x}$ entsprechend der (tatsächlichen) Systemgleichung (6.28) in die Gl. (6.32) eingesetzt, die die gleichen Nullstellen wie die Identifikationsgleichung (6.33) aufweist. Da es sich um ein System der Ordnung n handelt, gilt $\hat{x}^{(n+1)} = 0$, und es folgt

$$0 = \underbrace{\prod_{k=n}^N (\sigma - k)}_{(I)} \underbrace{\sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N+1}{i} s^i \hat{x}^{(i)} \prod_{k=i}^{n-1} (\sigma - k)}_{(II)}. \quad (6.34)$$

Man erkennt, dass die Gleichung $N - n + 1$ Nullstellen in (I) aufweist, die nicht von s abhängen, also im Zeitbereich auf konstante, ganzzahlige Lösungen für σ führen. Die kleinste Nullstelle entspricht dabei genau der gesuchten Systemordnung n . Dass es sich ebenso bei allen anderen ganzzahligen Werten $n + 1, n + 2, \dots, N$ bis einschließlich der oberen Schranke N um Nullstellen handelt, ist dem Ansatz (6.29) geschuldet. Beispielsweise wäre im Ansatz für $\sigma = n$ der Koeffizient α_σ verschieden von Null und für $\sigma = n + 1$ identisch Null.

Die verbleibenden n Nullstellen von (6.34) hängen explizit von s ab, korrespondierenden also im Zeitbereich zu nicht-konstanten Lösungen. Dass in (II) keine weiteren nicht von s abhängenden Nullstellen enthalten sind, wird bei Betrachtung der Ableitung von (II) nach der komplexen Veränderlichen erkennbar, da eine nicht von s abhängende Nullstelle von (II) auch eine Lösung der Ableitung sein müsste. Entsprechendes gilt für die n -te Ableitung von $0 = \text{(II)}$, die sich mit der Leibniz-Regel zu

$$0 = \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N+1}{i} \prod_{k=i}^N (\sigma - k) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{d^j}{ds} (s^i) \frac{d^{n-j}}{ds} (\hat{x}^{(i)})$$

ergibt, bzw. wegen $\frac{d^j}{ds} (s^i) = 0$ für $j \geq i + 1$ und $\hat{x}^{(n+1)} = 0$ als

$$0 = \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N+1}{i} \prod_{k=i}^N (\sigma - k) \binom{n}{i} i! \hat{x}^{(n)} = \hat{x}^{(n)} \prod_{k=0}^N (\sigma - n - k)$$

geschrieben werden kann. (Eine weitere Ableitung nach s würde auf $0 = 0$ führen und damit keine Aussagekraft aufweisen.) Da die Nullstellen $\sigma = N + i$, $i = 1, \dots, n$ dieser n -ten Ableitung von (II) keine Lösungen der Identifikationsgleichung (6.32) sein können (vgl. (6.29)), ist gezeigt, dass die einzigen nicht von s abhängenden Lösungen bei $\sigma = i$, $i = n, \dots, N$ liegen. Somit entspricht tatsächlich die kleinste konstante Lösung der Identifikationsgleichung (6.33) der gesuchten Systemordnung $\sigma = n$.

6.3.3 Beispiele

Exemplarisch sei der Fall betrachtet, dass (ausgehend von homogenen Anfangswerten) Trajektorien $t \mapsto u(t)$ und $t \mapsto y(t)$ für ein System der Form (6.27) mit maximaler Ordnung $N = 3$ vorliegen. Entsprechend (6.29) wird für die Identifikation der Systemordnung der strukturelle Ansatz

$$(\alpha_\sigma s^\sigma + \alpha_{\sigma-1} s^{\sigma-1} + \alpha_{\sigma-2} s^{\sigma-2} + \alpha_{\sigma-3} s^{\sigma-3}) \hat{y} = \hat{u}$$

gewählt. Die Elimination der vier unbekannten Potenzen s^σ , $s^{\sigma-1}$, $s^{\sigma-2}$ und $s^{\sigma-3}$ unter Verwendung der Ableitung des Ansatzes nach s führt auf eine Identifikationsgleichung der Form

$$\sigma^4 \hat{h}_4 + \sigma^3 \hat{h}_3 + \sigma^2 \hat{h}_2 + \sigma \hat{h}_1 + \hat{h}_0 = 0, \quad (6.35)$$

wobei die bekannten Größen h_i , die Faltungsprodukte von fünf Faktoren enthalten, eindeutig durch (6.35) definiert sind.

Exemplarisch wurden die vier Lösungen der polynomialen Gl. (6.35) auf Basis simulierter Trajektorien für den Eingang u der drei Systeme

$$\dot{y}(t) + y(t) = 5u(t) \quad (6.36a)$$

$$\ddot{y}(t) + 500\dot{y}(t) = u(t) \quad (6.36b)$$

$$-3y^{(3)}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = 8u(t) \quad (6.36c)$$

mit jeweils identisch gewählter Trajektorie für den Ausgang y untersucht. Sie können den Abbildungen 6.9–6.11 entnommen werden. Die farbliche Kennzeichnung der identifizierten Werte für σ basiert auf einer Sortierung der Lösungen nach ihrer Größe zu jedem Zeitpunkt t . Man beachte, dass zu Beginn die identifizierte Systemordnung (wie auch die anderen Lösungen der polynomialen Gl. (6.35)) für einige wenige Zeitschritte nicht konstant sind. Dies ist numerischen Problemen im Zusammenhang mit der Faltung und Integration der Signale geschuldet.

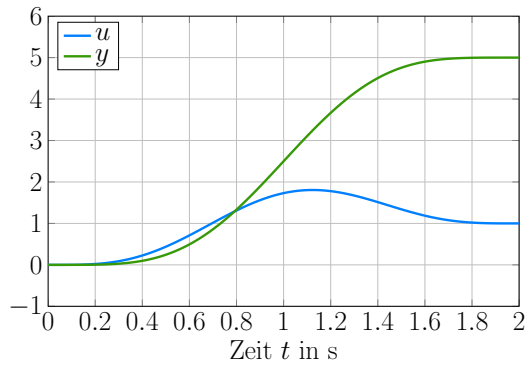
Sowohl für das stabile System (6.36a) als auch für das instabile System (6.36c) erkennt man, dass die kleinste konstante Lösung σ der tatsächlichen Systemordnung n entspricht. Für das System zweiter Ordnung (6.36b) ergibt sich aufgrund dessen integrierenden Verhaltens eine nicht-konstante Lösung $\sigma < n$, die (aufgrund der Stabilität des Systems) gegen Eins konvergiert. Die kleinste konstante Lösung entspricht auch hier der Systemordnung n .

Bemerkung 3.1 (Rauschen und Störungen): *In den Simulationen wurden weder den Messsignalen überlagertes mittelwertfreies Rauschen noch strukturierte Störungen wie ein konstanter Versatz auf y oder u betrachtet. Während letzteres bei bekannter Struktur grundsätzlich berücksichtigt werden kann (vgl. [FSR03]), führt der Einfluss von mittelwertfreiem Rauschen – auch nach Filterung – auf eine asymptotische Näherung der Nullstellen von (I) in (6.34) an ihre eigentlich konstanten Werte. Damit wird die Auswahl der richtigen Lösung $\sigma = n$ der Identifikationsgleichung (6.33) insbesondere für stabile Systeme erheblich erschwert. (Stabile Systeme (vgl. Abb. 6.10) verfügen im Gegensatz zu instabilen Systemen (vgl. Abb. 6.9) ggf. über Lösungen σ , die gegen einen Wert konvergieren, der kleiner ist als die Systemordnung n .)*

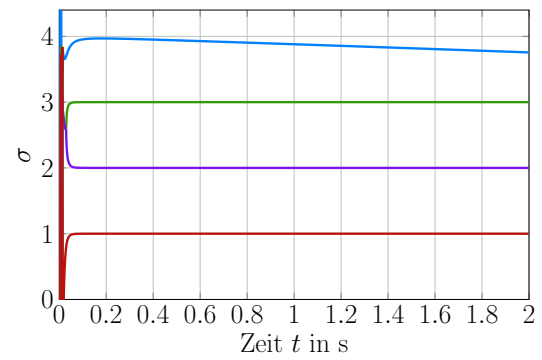
Bemerkung 3.2 (Systeme mit Eingangsableitungen): *Treten in Verallgemeinerung von (6.27) Ableitungen des Eingangs u auf, also*

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t), \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0, n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (6.37)$$

so lassen sich auch bei Kenntnis von oberen Schranken für die Ordnungen n bzgl. des Ausgangs und m bzgl. des Eingangs diese Ordnungen nicht eindeutig aus den Trajektorien $t \mapsto u(t)$ und $t \mapsto y(t)$ identifizieren. Vielmehr lässt sich lediglich die Differenzordnung $n - m$ ermitteln, da äquivalent zu einer Identifikation der Koeffizienten a_i, b_j eine Normierung der Systemgleichung erforderlich ist, eine Normierung, die in (6.27) wegen $m = 1$ gegeben war. Bei der im Gegensatz zum Fall ohne Eingangsableitungen

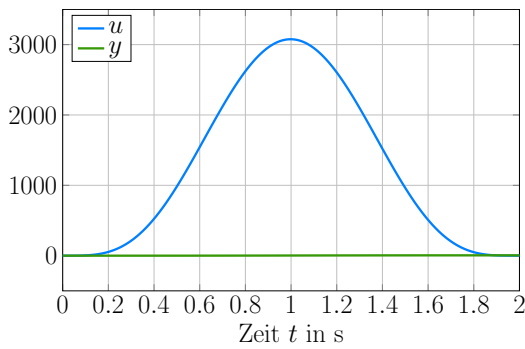


(a)

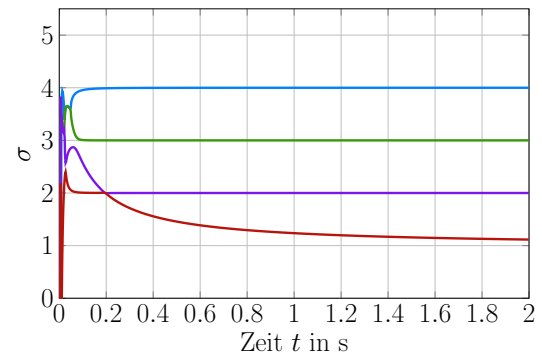


(b)

Abbildung 6.9: System erster Ordnung (6.36a): (a) Trajektorien von Eingang u (blau) und Ausgang y (grün), (b) Lösungen σ von (6.35).

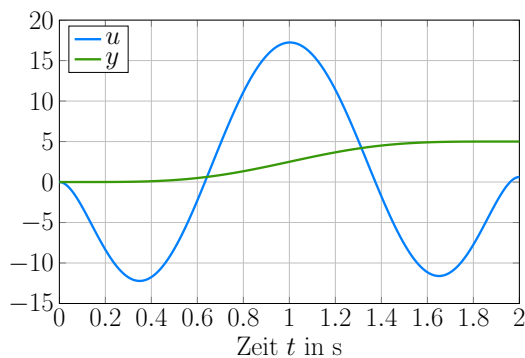


(a)

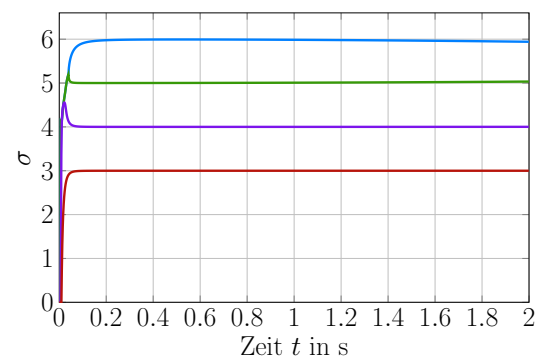


(b)

Abbildung 6.10: System zweiter Ordnung (6.36b): (a) Trajektorien von Eingang u (blau) und Ausgang y (grün), (b) Lösungen σ von (6.35).



(a)



(b)

Abbildung 6.11: System dritter Ordnung (6.36c): (a) Trajektorien von Eingang u (blau) und Ausgang y (grün), (b) Lösungen σ von (6.35).

deutlich umfangreicheren Identifikation der Differenzordnung von (6.37) ist es dabei ggf. vorteilhaft, gleichzeitig zumindest einige der Parameter a_i , b_j zu schätzen. Weitere Anmerkungen zu Systemen mit Eingangsableitungen lassen sich aus Abschnitt 6.2.3 bzw. [GR13] (im Zusammenhang mit fraktionalen Systemen) ableiten.

6.4 Bemerkung zu nichtlinearen Systemen

Im Allgemeinen lässt sich die vorgeschlagene Identifikationsmethode nicht auf nichtlineare partielle Dgl. anwenden, da die benötigte Lösung für die verteilten Größen nicht immer bekannt oder eindeutig ist. Dennoch existieren Spezialfälle (mit bekannter Lösung), in denen eine Identifikation der Systemparameter möglich ist. Als Beispiel dafür diene das Transportproblem

$$\partial_z w(z, t) + c \partial_t w(z, t) = \frac{a}{(w(z, t))^2}, \quad (6.38)$$

mit den konstanten Parametern a und c . Für homogene Anfangsbedingungen⁷ lautet dessen Lösung

$$w(z, t) = \sqrt[3]{3az + (w(0, t - cz))^3}, \quad t \geq cz.$$

Ausgehend von Messgrößen $w(0, t) = y_0(t)$ und $w(1, t) = y(t)$ erkennt man, dass es sich bei der Lösung um ein lineares Totzeitsystem bzgl. $\bar{y}_0 = y_0^3$ und $\bar{y}_1 = y_1^3$ handelt:

$$\bar{y}_1(t) = 3a + \bar{y}_0(t - c), \quad t \geq c.$$

Eine Identifikation der Parameter a und c ist ausgehend von dieser Beziehung mit der algebraischen Methode trotz der Nichtlinearität in (6.38) direkt möglich.

Begründen lässt sich diese Beobachtung durch die Äquivalenz von (6.38) über die (nichtlineare) Transformation $\bar{w} = w^3$ zur linearen partiellen Dgl.

$$\partial_z \bar{w}(z, t) + c \partial_t \bar{w}(z, t) = 3a.$$

Die Identifikation der Parameter a und c setzt auf der Lösung der aus der Laplace-Transformation hervorgehenden inhomogenen Dgl. – mit unbekannter Inhomogenität $3a$ – und der daraus resultierenden Beziehung

$$\hat{y}_1 = e^{-cs} \hat{y}_0 - \frac{3a}{cs^2} (e^{-cs} - 1)$$

zwischen den bekannten Größen $\hat{y}_0$ und $\hat{y}_1$ als Funktionen der Messgrößen auf. Einfache Ableitung nach s und Elimination der Exponentialfunktion e^{-cs} liefert die Identifikationsgleichung

$$c^2 \hat{y}_0 \hat{y}_1 - 3acs^{-2} (\hat{y}_0 + \hat{y}_1) - c(\hat{y}_0' \hat{y}_1 - \hat{y}_0 \hat{y}_1') + 9a^2 s^{-4} + 3as^{-2} (\hat{y}_0' - \hat{y}_1' + 2s^{-1}(\hat{y}_0 + \hat{y}_1)) = 0.$$

⁷Diese Annahme ist für das System (6.38) insofern fragwürdig, als $z \mapsto w(z, 0) = 0$ keine Lösung der partiellen Dgl. darstellt. Die Annahme homogener Anfangsbedingungen soll dennoch aufrecht erhalten werden, da es sich um ein akademisches Beispiel zur Illustration anderweitiger, davon unabhängiger Aspekte handelt.

Das Beispiel motiviert die Vermutung, dass sich die Parameter all jener nichtlinearen partiellen Dgl. ebenfalls mit der algebraischen Methode identifizieren lassen, die über eine Transformation (mit bekannten Parametern) der verteilten Größe äquivalent zu einer linearen partiellen Dgl. sind.

6.5 Bemerkung zu örtlich mehrdimensionalen Systemen

Mit der hydraulischen Leitung wurde in Abschnitt 6.1 grundsätzlich bereits ein örtlich zweidimensionales System betrachtet. Allerdings ergab sich unter Berücksichtigung der Rohrsymmetrien und durch die Darstellung in Drücken und Volumenströmen in (6.4) ein örtlich eindimensionales Randwertproblem. Anhand eines Beispiels soll hier vielmehr ein Ansatz illustriert werden, der auch ohne derart begünstigende Umstände die Identifikation von Parametern mehrdimensionaler Probleme ermöglicht.

Als Beispiel diene das zweidimensionale Transportproblem

$$\partial_x w(x, y, t) + \alpha \partial_y w(x, y, t) + \beta \partial_t w(x, y, t) = 0 \quad (6.39)$$

in den Ortskoordinaten $x \in [0, L_x]$ und $y \in [0, L_y]$ sowie der Zeit $t \geq 0$, mit konstanten Parametern $\alpha, \beta > 0$ und der homogenen Anfangsbedingung $w(x, y, 0) = 0$. Das Profil des Randes bei $x = 0$ sei entsprechend

$$w(0, y, t) = \varphi(y, t)$$

vorgegeben. Die Lösung des zugehörigen Randwertproblems lautet dann

$$w(x, y, t) = \varphi(y - \alpha x, t - \beta x), \quad t > \beta x, (y - \alpha x) \in [0, L_y]$$

bzw.

$$\hat{w}(x, y) = e^{-\beta s x} \hat{\varphi}(y - \alpha x) \quad (6.40)$$

für dessen Laplace-Transformierte.

Da die den Rand bei $x = 0$ beschreibende Funktion φ aufgrund ihres verteilten Charakters unbekannt ist, müssen konzentrierte Messgrößen derart gewählt werden, dass sich φ eliminieren lässt. Man erkennt, dass dies bei einer Wahl von

$$\hat{y}_1 = \hat{w}(1, \alpha) = e^{-\beta s} \hat{\varphi}(0), \quad \hat{y}_2 = \hat{w}(0, 0) = \hat{\varphi}(0)$$

möglich ist und auf die einfache Totzeitgleichung

$$\hat{y}_1 = e^{-\beta s} \hat{y}_2$$

führt. Nach Elimination der Exponentialfunktionen lässt sich daraus β mit Hilfe von $\hat{y}_1$ und $\hat{y}_2$ identifizieren. Die Identifikation von β setzt jedoch die Kenntnis von α voraus, da sich $\hat{y}_1$ abhängig von diesem Parameter definiert. (Analog ist eine Identifikation von α bei Kenntnis von β ausgehend von $w(x, 0, t) = \psi(x, t)$ möglich.)

Letztlich wird bei dieser Betrachtung ausgenutzt, dass beide konzentrierte Messungen auf einer Charakteristik der örtlich zweidimensionalen partiellen Dgl. (6.39) liegen. Entlang dieser Charakteristik reduziert sich das Problem auf eine örtlich eindimensionale partielle Dgl. [CH66], wodurch erneut die Methoden aus Kapitel 2 Anwendung finden. Die Transformation der Koordinaten in die charakteristischen Richtungen setzt dabei ggf. die Kenntnis eines Teils der Systemparameter voraus.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein algebraischer Zugang zur Identifikation von Parametern in linearen Systemen unendlicher Dimension mit konzentrierten Messgrößen untersucht. Ausgehend von dem algebraischen Zugang in [RW07] für Totzeitsysteme und lineare partielle Dgln. zweiter Ordnung gelang die Verallgemeinerung der Methode auf partielle Dgln. beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für ein System partieller Dgln. mit geeigneten Randbedingungen und Messgrößen konnte als eines der zentralen Ergebnisse ein Algorithmus für die Herleitung von Identifikationsgleichungen als polynomiale Gleichungen in den unbekannten Parametern mit Koeffizienten, die ausschließlich von den Messgrößen abhängen, angegeben werden. Dieser nutzt neben der Laplace-Transformation Methoden der Differentialalgebra wie den Ritt-Algorithmus, um ausgehend von der Lösung des Randwertproblems im Bildbereich die transzendenten Funktionen der komplexen Veränderlichen der Laplace-Transformation zu eliminieren. Der Ritt-Algorithmus sowie der Buchberger-Algorithmus zur Ermittlung einer Gröbner-Basis wurden zudem im Zusammenhang mit der Berechnung der Parameter auf der Basis der polynomialen Identifikationsgleichungen eingesetzt.

Da eine äquivalente Vorgehensweise für lineare partielle Dgln. mit ortsabhängigen Koeffizienten die Kenntnis der Lösung des zugehörigen Randwertproblems voraussetzt, konnte nur unter dieser Annahme der algebraische Zugang zur Identifikation auf diese Systemklasse erweitert werden. Während die wesentlichen Schritte zur Herleitung einer Identifikationsgleichung identisch zum Fall konstanter Koeffizienten sind, gestalteten sich die erforderlichen algebraischen Umformungen zur Elimination der transzendenten Funktionen wesentlich anspruchsvoller.

Die Verwendung der Lösung (des Randwertproblems) und der Verzicht auf jegliche Approximationen des unendlichdimensionalen Systems unterscheidet die algebraische Methode wesentlich von anderen Ansätzen zur Identifikation der Parameter örtlich verteilter Systeme. So stellt eine Identifikationsgleichung eine exakte Beziehung zwischen den Systemparametern und den konzentrierten Messgrößen dar. Eine Approximation wird lediglich für die zeitdiskrete Implementierung der Algorithmen erforderlich. Als Abgrenzung von anderen Identifikationsansätzen ließe sich die algebraische Methode in Analogie zur Regelung von Systemen mit verteilten Parametern als *late-lumping* charakterisieren.

Eine wenn auch häufig erfüllte Restriktion der Methode besteht in der Forderung nach homogenen Anfangsbedingungen. Aber auch der hohe symbolische Rechenaufwands bei der zur Herleitung von Identifikationsgleichungen eingesetzten Berechnung der charakteristischen Mengen mit dem Ritt-Algorithmus stellt für komplexere Systeme ein Problem dar. Während sich die Mengen formal stets angeben lassen und ihre Existenz gesichert ist, scheitern vorhandene Rechenprogramme schnell an der symbolischen Komplexität. Im Zusammenhang mit dem Euler-Bernoulli-Balken wurde daher ein alternativer Ansatz vorgeschlagen, der auf die Berechnung der charakteristischen Mengen verzichten kann, bisher jedoch nicht durchgehend systematisch formuliert werden konnte.

In Erweiterung der linearen partiellen Dgln. konnten im vorangegangenen Kapitel zahlreiche Möglichkeiten der Anwendung der untersuchten Ansätze auf weitere Klassen von Systemen gezeigt werden. Mit fraktionalen Systemen, d.h. Systemen mit nicht-ganzzahligen Ableitungsordnungen, gelang eine Übertragung auf eine Systemklasse, die in den letzten Jahren stark an Bedeutung gewonnen hat. Im Gegensatz zu anderen Ansätzen war es möglich, die fraktionalen Ableitungsordnungen und die Systemparameter sowohl in gewöhnlichen als auch in partiellen (Funktional-)Differentialgleichungen zu identifizieren. Als Verallgemeinerung der Identifikation nicht-ganzzahliger Ableitungsordnungen konnte für gewöhnliche Dgln. in Form von Eingangs-Ausgangs-Gleichungen ohne Eingangsableitungen gezeigt werden, dass sich deren Ordnung eindeutig aus den gemessenen Verläufen von Eingang und Ausgang berechnen lässt.

Schließlich ermöglichte die Ausnutzung von Symmetrien der betrachteten hydraulischen Leitung die Anwendung des algebraischen Zugangs auf eine partielle Dgl. mit zwei Veränderlichen im Ort. Das Beispiel der elektrischen Leitung mit Störstelle, in dem die Störung als eine Randbedingung gekoppelter Telegraphengleichungen modelliert wurde, illustrierte zudem die Anwendbarkeit des Zugangs auf den Bereich der Fehlerdetektion und Fehlerlokalisierung im Zusammenhang mit partiellen Dgln. Da diese Bereiche für Systeme mit verteilten Parametern bisher wenig erforscht sind, sollte die algebraische Methode auch in diesem Kontext weiterentwickelt werden.

Die zahlreichen Simulationsstudien sowie die experimentelle Untersuchung eines Koaxialkabels (insbesondere in Gegenwart von Gaußschem weißen Rauschen) unterstreichen das große Potential der algebraischen Identifikation. In Hinblick auf die praktische Anwendbarkeit des Zugangs bleiben jedoch einige numerische und experimentelle Aspekte offen:

- Wie genau wirkt sich die Diskretisierung der Faltungsprodukte und der Integrale auf die Identifikation aus? Die Frage steht in engem Zusammenhang mit der Wahl der Abtastrate der Messsignale (bzw. der Schrittweite in Simulationen). Eine geringere Abtastfrequenz scheint dazu zu führen, dass sich ein Parameter langsamer dem zugehörigen tatsächlichen Wert nähert und erst später identifiziert werden kann.
- Kann ähnlich wie für die endlichdimensionalen Systeme unbekannter Ordnung in Abschnitt 6.3 gezeigt werden, dass eine in einem zu identifizierenden Parameter

polynomiale Gleichung stets nur eine zeitlich konstante Lösung aufweist? Dies ist Voraussetzung für die Auswahl der richtigen, dem tatsächlichen Systemparameter entsprechenden Lösung der Gleichung. Dabei ist zu klären, was insbesondere in Gegenwart von weißem Rauschen als konstant bezeichnet werden kann.

- Welche Trajektorien der Messgrößen eignen sich besonders gut für die Identifikation der Systemparameter? In Simulationen wurde häufig beobachtet, dass Signale mit Nulldurchgängen bei der Berechnung der Parameter zu Singularitäten führen und sich grundsätzlich weniger gut für die Identifikation eignen.
- Warum lassen sich manche Systemparameter schneller und besser identifizieren als andere und (wie) kann dem entgegengewirkt werden? Beispielsweise konnte bei der elektrischen Leitung die Impedanz schneller bestimmt werden als der Widerstandsbelag und der Leitwertbelag. Hier besteht ein Zusammenhang zur Sensitivität der Systemlösung bzgl. der jeweiligen Parameter.
- Inwiefern ist die algebraische Methode robust gegenüber Modellunbestimmtheiten? Erste Ergebnisse bei der experimentellen Identifikation der Länge eines schweren Seils entsprechend Abschnitt 5.1.2 deuten darauf hin, dass diese trotz der sichtbaren Dämpfung bei der Seilschwingung auch ohne Berücksichtigung von Reibung im Seil identifiziert werden kann. Eine mathematische Analyse steht jedoch aus.

Die Klärung zumindest eines Teils all dieser offenen Fragen ist Voraussetzung für den Erfolg weiterer praktischer Untersuchungen. Bis dahin steht zumindest ein theoretisch mächtiger und in dieser Form einzigartiger Ansatz zur Identifikation von Parametern örtlich verteilter Systeme zur Verfügung.

Anhang A

Mathematischer Hintergrund

Dieser Anhang fasst wesentliche mathematische Definitionen und Sätze der Laplace-Transformation sowie der kommutativen Algebra und Differentialalgebra zusammen, die in der vorliegenden Arbeit genutzt werden.

A.1 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist eine Integraltransformation und wird für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(t) = 0$, $t < 0$ durch

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

definiert [Doe70], sofern das Integral existiert¹. Für die inverse Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{st} F(s) ds = f(t)$$

auch als Rücktransformation in den Zeitbereich bezeichnet, gilt $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f\}\} = f$.

Zu den wesentlichen Eigenschaften der Laplace-Transformation gehört die Beziehung

$$sF(s) = \int_0^\infty sf(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{df}{dt}(t)e^{-st} dt - [f(t)e^{-st}]_0^\infty = \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}(s) + f(0),$$

wobei insbesondere im Fall eines homogenen Anfangswertes $f(0) = 0$ der Ableitungsoperator $\frac{d}{dt}$ bei der Transformation lediglich durch die komplexe Veränderliche s der

¹In der vorliegenden Arbeit dient die Laplace-Transformation lediglich als ein die Darstellung vereinfachendes Hilfsmittel. Grundsätzlich könnte auf sie verzichtet werden. Daher wird auf die Frage der Existenz der Laplace-Transformierten F als Bild von f nicht weiter eingegangen, sondern diese im Folgenden stets vorausgesetzt. Ebenfalls im Kontext der algebraischen Parameteridentifikation kam in [RW07] die Operatorenrechnung nach Mikusiński zum Einsatz [Mik83], die im Wesentlichen mit den Betrachtungen im Zusammenhang mit der Laplace-Transformation übereinstimmt, aber auf Existenzforderungen für die Integraltransformation verzichten kann. Um die vorgestellte Identifikationsmethode leichter zugänglich zu halten, wird dennoch mit der allgemein bekannten Laplace-Transformation gearbeitet.

Laplace-Transformation ersetzt wird. Für die Ableitung nach s gilt

$$\frac{d}{ds}F(s) = \int_0^\infty f(t) \frac{d}{ds}e^{-st} dt = \mathcal{L}\{-\bar{t}f\}(s)$$

mit der identischen Abbildung $\bar{t} : t \mapsto t$.

Für die Verschiebung $s \mapsto s + a$ im Bildbereich ergibt sich

$$F(s + a) = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t} dt = \mathcal{L}\{e^{-a\bar{t}}f\}(s), \quad a \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.1})$$

Der Faltungssatz besagt, dass die Laplace-Transformation der Faltung zweier Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dem Produkt deren Laplace-Transformierter entspricht:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}.$$

Man zeigt mit Hilfe der Definition der Faltung, durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Transformation der Integrationsvariable, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\}(s) &= \int_0^\infty \int_0^\sigma f(\tau)g(\sigma - \tau)e^{-s\sigma} d\tau d\sigma \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} \int_\tau^\infty g(\sigma - \tau)e^{-s(\sigma - \tau)} d\sigma d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} \int_0^\infty g(\alpha)e^{-s\alpha} d\alpha d\tau = F(s)G(s) \end{aligned}$$

gilt.

Im Folgenden gilt grundsätzlich $\hat{f} = f(s)$. Dabei kann $\hat{f}$ sowohl die Laplace-Transformierte von f bezeichnen als auch eine beliebige Funktion der komplexen Veränderlichen s der Laplace-Transformation. Die leichte mathematische Unkorrektheit wird für eine übersichtlichere Darstellung der Abhängigkeit eines Ausdrucks von s in Kauf genommen. Die jeweilige Bedeutung ergibt sich stets aus dem Kontext. Mit $\hat{f}' = \frac{d\hat{f}}{ds}$ wird die Ableitung einer Funktion nach s gekennzeichnet.

A.2 Kommutative Algebra

Eine (endliche) Linearkombination

$$p_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad a_{\alpha_i} \in k, \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.2})$$

von Monomen $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ mit dem Totalgrad α ist ein Polynom in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ mit Koeffizienten a_{α_i} aus dem Körper k . Es bezeichnet $k[x_1, \dots, x_n]$ die Menge aller Polynome in $x_1, \dots, x_n$ mit Koeffizienten aus k .

Definition A.1 (Ideal [CLO97]). *Eine Untermenge $\mathcal{I} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ wird als Ideal bezeichnet, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- (i) $0 \in \mathcal{I}$,

(ii) falls $f, g \in \mathcal{I}$, dann $f + g \in \mathcal{I}$,

(iii) falls $f \in \mathcal{I}$ und $h \in k[x_1, \dots, x_n]$, dann $hf \in \mathcal{I}$.

Falls $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$, dann ist $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ein Ideal von $k[x_1, \dots, x_n]$ und wird als von $f_1, \dots, f_s$ erzeugt bezeichnet. Entsprechend dem Hilbertschen Basisatz verfügt jedes Ideal $\mathcal{I} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ über eine endliche Anzahl von Generatoren [CLO97], d.h. $\mathcal{I} = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ für Generatoren $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{I}$.

Ein bedeutendes Erzeugendensystem ist die sogenannte Gröbner-Basis [CLO97]. Sie lässt sich systematisch mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus berechnen, der den für univariate Polynome bekannten Euklidischen Divisionsalgorithmus verallgemeinert.

A.2.1 Gröbner-Basen

Bevor über einen Divisionsalgorithmus für die Polynome (A.2) über $k[x_1, \dots, x_n]$ gesprochen werden kann, muss eine Monomordnung festgelegt werden. Während die Ordnung für Polynome mit $n = 1$ in einer Variable (ohne explizite Nennung) stets

$$\dots > x^{m+1} > x^m > \dots > x^2 > x > 1$$

lautet, ergeben sich für multivariate Polynome zusätzliche Freiheitsgrade.

Definition A.2 (Auswahl von Monomordnungen [For91, CLO97]). *Es seien $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ Elemente aus $\mathbb{N}_0^n$ mit Totalgraden $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$.*

(i) *Für die lexikografische Ordnung gilt*

$$\alpha >_{\text{plex}} \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists j : \alpha_j > \beta_j, \quad \forall i < j : \alpha_i = \beta_i.$$

Es ist $x^\alpha >_{\text{plex}} x^\beta$, falls $\alpha >_{\text{plex}} \beta$.

(ii) *Für die Totalgradordnung oder graduierte lexikografische Ordnung gilt*

$$\alpha >_{\text{grlex}} \beta \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| > |\beta| \quad \vee \quad (|\alpha| = |\beta| \quad \wedge \quad \alpha >_{\text{plex}} \beta).$$

Es ist $x^\alpha >_{\text{grlex}} x^\beta$, falls $\alpha >_{\text{grlex}} \beta$.

Die Monomordnungen lassen sich auf Polynome aus $k[x_1, \dots, x_n]$ anwenden, indem die Terme der Polynome in eindeutiger Weise geordnet werden.

Ihre Bezeichnung verdankt die lexikografische Ordnung dem starken Zusammenhang mit der alphabetischen Reihenfolge, da oftmals x, y und z anstelle von x_1, x_2 und x_3 verwendet werden. Beispielweise gelten $xy^2 >_{\text{plex}} y^3z^4$ und $x^3y^2z^4 >_{\text{plex}} x^3y^2z$ oder auch $nerven >_{\text{plex}} nervig$. Im Gegensatz dazu ergibt sich für die Totalgradordnung $y^3z^4 >_{\text{grlex}} xy^2$, aber weiterhin $x^3y^2z^4 >_{\text{grlex}} x^3y^2z$ und $nerven >_{\text{grlex}} nervig$.

B. Buchberger begründet 1965 in seiner Dissertation [Buc65] die Theorie der Gröbner-Basen². Sie stellen ein endliches Erzeugendensystem dar, das eine besonders einfache Lösung des Idealzugehörigkeitsproblems zulässt, also der Frage, ob ein Polynom zu einem Ideal gehört. Ein Polynom $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ gehört zu einem Ideal $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$ im gleichen Polynomring, d.h. $f \in \mathcal{I}$, falls

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s, \quad a_i \in k[x_1, \dots, x_n], i = 1, \dots, s.$$

Es bezeichne $LT(f)$ den Leitterm eines Polynoms f , d.h. das bzgl. einer Monomordnung größte (oder führende) Monom mit seinem zugehörigen Koeffizienten.

Definition A.3 (Gröbner-Basis [CLO97]). *Für eine feste Monomordnung wird eine endliche Menge $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ eines Ideals $\mathcal{I}$ als Gröbner-Basis bezeichnet, falls für jedes Element $f \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ ein g_i existiert, dessen Leitterm den Leitterm von f teilt:*

$$LT(f) = a LT(g_i), \quad a \in k[x_1, \dots, x_n].$$

Das bedeutet, dass eine Menge $G \subset \mathcal{I}$ dann und nur dann eine Gröbner-Basis von $\mathcal{I}$ ist, wenn der Leitterm eines jeden Elements aus $\mathcal{I}$ durch einen der $LT(g_i)$ teilbar ist. Für eine besonders anschauliche, kompakte Einführung in die Theorie der Gröbner-Basen sei auf [For92] verwiesen.

A.2.2 Buchberger-Algorithmus

Der erstmals in [Buc65] vorgeschlagene Buchberger-Algorithmus ist ein Verfahren zur Berechnung einer Gröbner-Basis für ein Ideal in einem Polynomring. Dabei wird eine Menge an Generatoren um weitere Polynome aus dem Ideal erweitert. Der Buchberger-Algorithmus kann dabei als Verallgemeinerung des Gaußschen Eliminationsverfahrens und des Euklidischen Divisionsalgorithmus angesehen werden, da er in Spezialfällen äquivalent zu einem der beiden ist.

Definition A.4 (Rest). *Es bezeichnet $\bar{f}^F$ den Rest der Division eines Polynoms f durch ein geordnetes Tupel $F = (f_1, \dots, f_s)$:*

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + \bar{f}^F,$$

mit Polynomen $a_1, \dots, a_s$.

Definition A.5 (S -Polynom). *Das S -Polynom zweier Polynome f und g ist definiert als*

$$S(f, g) = \frac{kgV(LT(f), LT(g))}{LT(f)} f - \frac{kgV(LT(f), LT(g))}{LT(g)} g,$$

wobei $kgV(LT(f), LT(g))$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $LT(f)$ und $LT(g)$ bezeichnet.

²Die Bezeichnung geht auf seinen Doktorvater W. Gröbner zurück.

Sei $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$ ein Ideal in einem Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$. Dann lässt sich eine Gröbner-Basis algorithmisch in einer endlichen Anzahl an Schritten konstruieren. Als Ausgangspunkt dient dem Algorithmus $F = (f_1, \dots, f_s)$. Im ersten Schritt wird $G = F$ initialisiert. Dann werden für jedes Paar $\{p, q\}$, $p \neq q$ aus G das S -Polynom $\sigma = S(p, q)$ und der Rest $r = \bar{\sigma}^G$ bzgl. G berechnet. Im Fall $r \neq 0$ wird der Rest der Menge $G = G \cup \{r\}$ hinzugefügt, wobei wegen $p, q, r \in G$ stets $G \subset \mathcal{I}$ gilt. Diese Schritte werden so lange wiederholt, bis keine neuen Elemente mehr zu G hinzukommen. Das Ergebnis $G = (g_1, \dots, g_t)$ ist eine Gröbner-Basis des Ideals $\mathcal{I}$, mit der Eigenschaft $F \subset G$. Ein Beweis dafür, dass der Algorithmus tatsächlich nach endlich vielen Iterationen terminiert, kann beispielsweise in [CLO97] gefunden werden.

A.2.3 Charakteristische Mengen

Charakteristischen Mengen sind ein von Joseph F. Ritt in [Rit50] eingeführtes und von Wen-Tsun Wu in [Wu86] weiter entwickeltes konstruktives Hilfsmittel für die Verallgemeinerung des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf multivariate Polynome. Als Alternative zur Theorie der Gröbner-Basen³ zeichnen sich die charakteristischen Mengen durch die geringere Komplexität in der Berechnung aus [For91]. Im Gegensatz zu Gröbner-Basen bilden sie jedoch nicht allgemein ein Erzeugendensystem [Kol73]. Darüber hinaus besteht ein noch größerer Nachteil darin, dass charakteristische Mengen nur für Primideale berechnet werden können, also für solche, für die aus $ab \in \mathcal{I}$ entweder $a \in \mathcal{I}$ oder $b \in \mathcal{I}$ folgt [For91].

Für eine Monomordnung $x_n > \dots > x_1$ lassen sich charakteristische Mengen als Polynome

$$A_1(x_1), A_2(x_1, x_2), \dots, A_n(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{A.3})$$

angeben, wobei der Grad von A_i bzgl. x_i größer ist als die Grade von $A_{i+1}, \dots, A_n$ bzgl. x_i . Man beachte, dass eine charakteristische Menge für ein Ideal über $k[x_1, \dots, x_n]$ nicht mehr als n Elemente enthalten kann [For91]. Die mit dem Buchberger-Algorithmus verwandte Berechnung der triangulären Struktur (A.3) soll hier nicht weiter diskutiert werden. Es wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

A.3 Differentialalgebra

Die (gewöhnliche) Differentialalgebra verallgemeinert im vorliegenden Kontext die kommutative Algebra aus Abschnitt A.2 durch die Hinzunahme einer einzigen Ableitung (vgl. [Rit50, Kol73] als Standardwerke der Differentialalgebra und [For91, LG94, DF91] im Rahmen der Identifikation).

³Das Konzept der charakteristischen Mengen ist vollkommen unabhängig von jenem der Gröbner-Basen, auch wenn letztere zu deren Berechnung verwendet werden können [For91]. Aus diesem Grund werden die charakteristischen Mengen mitunter auch als Pseudo-Gröbner-Basen bezeichnet (z.B. [Blu08]).

Definition A.6 (Ableitung [Kol73]). *Eine Ableitung ist ein Operator $\partial : R \rightarrow R$ derart, dass alle Elemente $a, b \in R$ eines kommutativen Rings R mit Einselement die Eigenschaften*

$$\partial(a + b) = \partial a + \partial b, \quad \partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$$

erfüllen.

Ein Ring mit einer einzigen, gewöhnlichen Ableitung ∂ wird als differentieller Ring bezeichnet, ein Körper mit entsprechender Ableitung $\partial : k \rightarrow k$ als differentieller Körper.

Sei $k\{x_1, \dots, x_n\}$ ein differentieller Polynomring, der die Menge aller differentiellen Polynome in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_s$ mit Koeffizienten aus dem differentiellen Körper k umfasst. Dann wird das in $k\{x_1, \dots, x_n\}$ durch eine Menge $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ differentieller Polynome $f_1, \dots, f_n$ erzeugte differentielle Ideal mit $I = [F]$ bezeichnet.

A.3.1 Ritt-Algorithmus und charakteristische Mengen

Wie in [LG94] soll auch hier im Kontext der Parameteridentifikation die Betrachtung auf Primideale beschränkt werden – dies stellt hier keine (echte) Einschränkung dar. Auch wenn diese Idealeigenschaft nie gezeigt wird, prüft man leicht für alle in dieser Arbeit auftretenden differentiellen Ideale, dass diese prim sind. Insbesondere gilt das für das in Abschnitt 2.6 definierte spezielle Ideal I^* .

Der Ritt-Algorithmus ermittelt für eine Menge differentieller Polynome basierend auf einer Monomordnung die charakteristischen Mengen [Rit50, Kol73]. Für die differentiellen Polynome definieren sich Monomordnungen entsprechend Definition A.2, wobei für $x_n > \dots > x_1$ stets

$$\dots > \partial^2 x_n > \partial x_n > x_n > \dots > \partial^2 x_1 > \partial x_1 > x_1 \quad (\text{A.4})$$

gelte. Die charakteristischen Mengen eines differentiellen Ideals I mit der Ordnung (A.4) lassen sich entsprechend (A.3) in der Form

$$A_1(x_1), A_2(x_1, x_2), \dots, A_n(x_1, \dots, x_n)$$

darstellen, wobei die Leiterteile der differentiellen Polynome A_i von ∂ -Ableitungen von x_i abhängen. Im Unterschied zu Abschnitt A.2.3 müssen zur Berechnung der charakteristischen Mengen die Elemente $f_1, \dots, f_s$ eines differentiellen Ideals mit ∂ abgeleitet werden.

A.4 Eigenschaften der Bessel-Funktionen

Die folgenden Eigenschaften der Bessel-Funktionen sind [AS64] entnommen.

Die Bessel-Funktionen erster Art genügen den Dgln.

$$\frac{dJ_0}{dx}(x) = -J_1(x) \quad (\text{A.5a})$$

$$\frac{dJ_1}{dx}(x) = J_0(x) - \frac{1}{x}J_1(x), \quad (\text{A.5b})$$

jene zweiter Art den Dgln.

$$\frac{dY_0}{dx}(x) = -Y_1(x) \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{dY_1}{dx}(x) = Y_0(x) - \frac{1}{x}Y_1(x). \quad (\text{A.6b})$$

Als Wronski-Determinante für die Bessel-Funktionen ergibt sich

$$J_1(x)Y_0(x) - Y_1(x)J_0(x) = \frac{2}{\pi x} \neq 0. \quad (\text{A.7})$$

Die modifizierten Bessel-Funktionen erster Art genügen den Dgln.

$$\frac{dI_0}{dx}(x) = I_1(x) \quad (\text{A.8a})$$

$$\frac{dI_1}{dx}(x) = I_0(x) - \frac{1}{x}I_1(x), \quad (\text{A.8b})$$

jene zweiter Art den Dgln.

$$\frac{dK_0}{dx}(x) = -K_1(x) \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{dK_1}{dx}(x) = -K_0(x) - \frac{1}{x}K_1(x). \quad (\text{A.9b})$$

Als Wronski-Determinante für die modifizierten Bessel-Funktionen ergibt sich

$$K_1(x)I_0(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x} \neq 0. \quad (\text{A.10})$$

Anhang B

Alternative Herleitung der Differentialgleichungen der Fundamentallösungen bezüglich der komplexen Veränderlichen der Laplace-Transformation

In [RW07] wurden am Beispiel einer partiellen Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zwei Methoden zur Herleitung der Dgln. der Fundamentallösungen bzgl. s des zugehörigen Randwertproblems vorgeschlagen, die als Grundlage für deren Elimination zur Herleitung einer Identifikationsgleichung dienen. Während der als „indirekte Methode“ bezeichnete Ansatz im Grundgedanken der systematischen Herleitung in Abschnitt 2.4 entspricht, wird bei der „direkten Methode“ die partielle Dgl. unter Verwendung zweidimensionaler Operatorenrechnung nach Mikusiński [Mik83] in eine algebraische überführt und algebraischen Manipulationen unterzogen.

Der in [RW07] erhoffte Vorteil der letzteren Methode, keine explizite Kenntnis der Lösung zu benötigen, stellte sich leider als Trugschluss heraus. Wie in Abschnitt B.1 dargestellt, wird bei der Herleitung der Dgln. für die Fundamentallösungen vielmehr eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit der geometrischen Vielfachheit der Eigenwerte des Randwertproblems notwendig. Eine leicht modifizierte Herangehensweise ermöglicht dennoch eine Verallgemeinerung des Ansatzes auf Gln. höherer Ordnung (vgl. Abschnitt B.2).

Der Vollständigkeit halber findet sich zudem in Abschnitt B.3 die Herleitung der Dgln. der Fundamentallösungen für das schwere Seil, also einer partiellen Dgl. mit ortsabhängigen Koeffizienten, unter Verwendung der „direkten Methode“.

Für die folgenden mathematischen Betrachtungen wird anstelle der Mikusiński-Operatoren von der wiederholten Anwendung der Laplace-Transformation sowohl bzgl. der Zeit t als auch des Ortes z Gebrauch gemacht. Es sei zudem bemerkt, dass grundsätzlich auf die Laplace-Transformation bzgl. z und die damit verbundene Algebraisierung des Randwertproblems hätte verzichtet werden können, da offensichtlich äquiva-

lente Rechenoperationen für die zugehörigen gewöhnlichen Dgl. existieren. Dennoch wurde sie zur besseren Vergleichbarkeit mit [RW07] beibehalten.

B.1 Fallunterscheidung in Abhängigkeit der Vielfachheit der Eigenwerte

Entsprechend [RW07] wird die aus einer partiellen Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch Laplace-Transformation resultierende gewöhnliche Dgl.

$$\hat{L}_2 \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2}(z) + \hat{L}_1 \frac{d\hat{w}}{dz}(z) + \hat{L}_0 \hat{w}(z) = 0 \quad (\text{B.1})$$

mit $\hat{L}_0, \hat{L}_1, \hat{L}_2 \in \mathbb{R}[s]$, $\hat{L}_2 \neq 0$ betrachtet (unter der Annahme homogener Anfangsbedingungen), deren Lösung in der Form

$$\hat{w}(z) = \hat{S}_1(z) \hat{w}(0) + \hat{S}_2(z) \frac{d\hat{w}}{dz}(0) \quad (\text{B.2})$$

geschrieben werden kann. Erneute Laplace-Transformation von (B.1) bzgl. des Ortes z führt dann auf die algebraische Gl.

$$\underbrace{(\hat{L}_2 p^2 + \hat{L}_1 p + \hat{L}_0)}_L \hat{w} - \hat{L}_2 \frac{d\hat{w}}{dz}(0) - (\hat{L}_2 p + \hat{L}_1) \hat{w}(0) = 0,$$

mit $\hat{w} = \mathcal{L}_z\{\hat{w}\}(p) = \int_0^\infty \hat{w}(z) e^{-pz} dz$. Setzt man darin die Transformierte der Lösung (B.2) ein, so folgt, dass die Fundamentallösungen $\hat{S}_1, \hat{S}_2$ den Beziehungen

$$L\hat{S}_1 = \hat{L}_1 + p\hat{L}_2, \quad (\text{B.3a})$$

$$L\hat{S}_2 = \hat{L}_2 \quad (\text{B.3b})$$

genügen. Um Dgln. für $\hat{S}_i$, $i = 1, 2$ bzgl. s herzuleiten, müssen – grob gesprochen – (B.3) nach s und p abgeleitet und derart miteinander kombiniert werden, dass keine Potenzen von p mehr auftreten, die bei der inversen Transformation $\mathcal{L}_z^{-1}$ zu Ableitungen nach dem Ort z führen würden. Der auf $\hat{w}$ angewandte Operator L als Polynom in p soll dabei zunächst nicht aufgelöst werden, sondern letztlich durch einfache Division eliminiert werden.

Es folgt durch Subtraktion der mit $p + \hat{L}_1/\hat{L}_2$ multiplizierten Gleichung (B.3b) von (B.3a) und Division durch L

$$p\hat{S}_2 = \hat{S}_1 - \frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2} \hat{S}_2. \quad (\text{B.4a})$$

Somit gilt

$$L\hat{S}_2 = (p^2 \hat{L}_2 + p\hat{L}_1 + \hat{L}_0) \hat{S}_2 = p\hat{L}_2 \hat{S}_1 + \hat{L}_0 \hat{S}_2 = \hat{L}_2,$$

und es folgt

$$p\hat{S}_1 = 1 - \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_2}\hat{S}_2. \quad (\text{B.4b})$$

Durch Ableiten von (B.3) nach p und s ergeben sich unter Verwendung von (B.4) zur rekursiven Substitution der Produkte von $p^k\hat{S}_i$, $k = 1, 2$, $i = 1, 2$

$$L(D_p\hat{S}_1 + \hat{S}_2) = -\hat{L}_1\hat{S}_1 + 2\hat{L}_0\hat{S}_2 \quad (\text{B.5a})$$

$$LD_p\hat{S}_2 = -2\hat{L}_2\hat{S}_1 + \hat{L}_1\hat{S}_2 \quad (\text{B.5b})$$

$$L\hat{S}'_1 = \left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_0\right)\hat{S}_1 - \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_2}\left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_1\right)\hat{S}_2 \quad (\text{B.5c})$$

$$L\hat{S}'_2 = \left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_1\right)\hat{S}_1 + \left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_0 - \frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2}\left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_1\right)\right)\hat{S}_2, \quad (\text{B.5d})$$

mit D_p der Ableitung nach p . Zudem wurden nicht von $\hat{S}_i$ abhängende Summanden ebenfalls mit Hilfe der Beziehungen (B.4) ersetzt, die als Gleichungssystem für p^0 und p^1 aufgefasst werden können:

$$\begin{aligned} 1 &= L\frac{1}{\hat{L}_2}\hat{S}_2 \\ p &= L\frac{1}{\hat{L}_2}\left(\hat{S}_1 - \hat{S}_2\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2}\right). \end{aligned}$$

In [RW07] werden (B.5a) und (B.5b) nach $\hat{S}_1$ und $\hat{S}_2$ aufgelöst:

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= L\frac{\hat{L}_1(D_p\hat{S}_1 + \hat{S}_2) - 2\hat{L}_0D_p\hat{S}_2}{4\hat{L}_0\hat{L}_2 - \hat{L}_1^2} \\ \hat{S}_2 &= L\frac{2\hat{L}_2(D_p\hat{S}_1 + \hat{S}_2) - \hat{L}_1D_p\hat{S}_2}{4\hat{L}_0\hat{L}_2 - \hat{L}_1^2}. \end{aligned}$$

Man erkennt jedoch, dass dies nur für $4\hat{L}_0\hat{L}_2 - \hat{L}_1^2 \neq 0$ möglich ist, also unter der Annahme unterschiedlicher Eigenwerte von (B.1). In diesem Fall können diese Ausdrücke in (B.5c) und (B.5d) eingesetzt und die so entstehenden Gleichungen durch L dividiert werden:

$$\begin{aligned} (4\hat{L}_0\hat{L}_2 - \hat{L}_1^2)\hat{S}'_1 &= \left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_0\right)\left(\hat{L}_1(D_p\hat{S}_1 + \hat{S}_2) - 2\hat{L}_0D_p\hat{S}_2\right) \\ &\quad - \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_2}\left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_1\right)\left(2\hat{L}_2(D_p\hat{S}_1 + \hat{S}_2) - \hat{L}_1D_p\hat{S}_2\right) \\ (4\hat{L}_0\hat{L}_2 - \hat{L}_1^2)\hat{S}'_2 &= \left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_1\right)\left(\hat{L}_1(D_p\hat{S}_1 + \hat{S}_2) - 2\hat{L}_0D_p\hat{S}_2\right) \\ &\quad + \left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_0 - \frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2}\left(\hat{L}'_2\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2} - \hat{L}'_1\right)\right)\left(2\hat{L}_2(D_p\hat{S}_1 + \hat{S}_2) - \hat{L}_1D_p\hat{S}_2\right). \end{aligned}$$

Durch Anwendung der inversen Laplace-Transformation bzgl. des Ortes ergeben sich daraus die gesuchten Dgln. für $\hat{S}_i(z)$, $i = 1, 2$ bzgl. s , auf deren Angabe hier verzichtet wird.

Im Fall eines doppelten Eigenwerts sind die rechten Seiten der vier Gln. in (B.5) jeweils Vielfache voneinander, weshalb nicht nach $\hat{S}_1$ und $\hat{S}_2$ aufgelöst werden kann. Das Gleichungssystem (B.5) vereinfacht sich also zu

$$L \left(D_p \hat{S}_1 + \hat{S}_2 \right) = -\hat{L}_1 \hat{S}_1 + 2\hat{L}_0 \hat{S}_2 \quad (\text{B.6a})$$

$$L D_p \hat{S}_2 = \frac{\hat{L}_1}{2\hat{L}_0} \left(-\hat{L}_1 \hat{S}_1 + 2\hat{L}_0 \hat{S}_2 \right) \quad (\text{B.6b})$$

$$L \hat{S}'_1 = 2 \left(\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1} \right)' \left(-\hat{L}_1 \hat{S}_1 + 2\hat{L}_0 \hat{S}_2 \right) \quad (\text{B.6c})$$

$$L \hat{S}'_2 = \frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_0} \left(\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1} \right)' \left(-\hat{L}_1 \hat{S}_1 + 2\hat{L}_0 \hat{S}_2 \right). \quad (\text{B.6d})$$

Die lineare Abhängigkeit kann als

$$\left(1 + z \frac{2\hat{L}_0}{\hat{L}_1} \right) \hat{S}_2(z) = z \hat{S}_1(z)$$

dargestellt werden und korrespondiert zu den Fundamentallösungen $\hat{S}_1(z) = e^{-\hat{\lambda}z} + \hat{\lambda}ze^{-\hat{\lambda}z}$ und $\hat{S}_2(z) = ze^{-\hat{\lambda}z}$ mit $\hat{\lambda} = \frac{2\hat{L}_0}{\hat{L}_1}$, die sich im Fall eines doppelten Eigenwerts ergeben.

Paarweises Gleichsetzen in (B.6), bzw. allgemeiner Transformation der rechtsseitigen Matrix vor dem Vektor mit $\hat{S}_1$ und $\hat{S}_2$ in Zeilen-Echelon-Form [Mey00] und Division der letzten drei Gln. durch L führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= D_p \hat{S}_1 + \hat{S}_2 - 2 \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1} D_p \hat{S}_2 \\ \hat{S}'_1 &= 2 \left(\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1} \right)' \left(D_p \hat{S}_1 + \hat{S}_2 \right) \\ \hat{S}'_2 &= \frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_0} \left(\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1} \right)' \left(D_p \hat{S}_1 + \hat{S}_2 \right), \end{aligned}$$

also durch inverse Laplace-Transformation $\mathcal{L}_z^{-1}$ erneut auf Dgln. für $\hat{S}_i(z)$, $i = 1, 2$ bzgl. s . Man beobachtet, dass es sich hier – im Unterschied zum Fall einfacher Eigenwerte – lediglich um ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung bzgl. s handelt, da die drei Gln. $\mathbb{R}(s)[\frac{d}{ds}, z]$ -linear abhängig sind. Eine äquivalente Darstellung ist beispielsweise mit

$$\begin{pmatrix} -z & 1 + 2z \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1} \\ \frac{d}{ds} + 2z \left(\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1} \right)' & -2 \left(\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1} \right)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{S}_1(z) \\ \hat{S}_2(z) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.7})$$

gefunden. Dennoch lassen sich unter Verwendung dieser Gln. die Fundamentallösungen aus einer Messgleichung (2.20) eliminieren.

B.2 Allgemeine Herleitung

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Herleitung lässt sich auf partielle (bzw. durch Laplace-Transformation resultierende gewöhnliche) Differentialgleichungssysteme beliebiger Ordnung systematisch anwenden. Da jedes System gekoppelter Dgln. in q Größen durch Transformation in q autonome Dgln. aufgespalten werden kann (vgl. (2.17) bzw. [Ber09, Theorem 5.2.3]), beschränkt sich die folgende allgemeine Herleitung auf eine (skalare) Dgl. n -ter Ordnung. Zudem dient diese Betrachtung im Wesentlichen als alternative Herleitung der Dgln. (2.16) für die Fundamentallösungen bzgl. s und zeigt, dass ein reduziertes Differentialgleichungssystem für n Größen rational in s ist.

Die Laplace-Transformierte einer partiellen Dgl. n -ter Ordnung bzgl. des Ortes z kann für homogene Anfangsbedingungen in der Form

$$\sum_{i=0}^n \hat{L}_i \frac{d^i \hat{w}}{dz^i}(z) = 0 \quad (\text{B.8})$$

mit $\hat{L}_n \neq 0$ angegeben werden, mit polynomialen Koeffizienten $\hat{L}_i \in \mathbb{R}[s]$. Ihre Lösung lässt sich in Abhängigkeit der Randwerte bei $z = 0$ als

$$\hat{w}(z) = \sum_{i=1}^n \hat{S}_i(z) \frac{d^{i-1} \hat{w}}{dz^{i-1}}(0) \quad (\text{B.9})$$

darstellen, wobei die n Ansatzfunktionen $\hat{S}_i$ ein Fundamentalsystem bilden.

Die Anwendung von $\mathcal{L}_z$ auf (B.8) führt auf eine algebraische Gleichung. Zusammen mit (B.9) ergeben sich aus der Forderung, dass für eine allgemeine Gültigkeit der Gleichung die Faktoren vor den Anfangswerten $\frac{d^i \hat{w}}{dz^i}(0)$ verschwinden müssen, die Beziehungen

$$L \hat{S}_i = \sum_{k=i}^n \hat{L}_k p^{k-i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{B.10})$$

mit $L = \sum_{k=0}^n \hat{L}_k p^k$ und $\hat{L}_n \neq 0$. Durch paarweises Gleichsetzen der Gleichungen für i und $i-1$ beginnend für $i = n$ entsprechend

$$\begin{aligned} (\hat{L}_{n-1} + \hat{L}_n p) L \hat{S}_n &= \hat{L}_n L \hat{S}_{n-1} \\ (\hat{L}_{n-2} + \hat{L}_{n-1} p + \hat{L}_n p^2) L \hat{S}_{n-1} &= (\hat{L}_{n-1} + \hat{L}_n p) L \hat{S}_{n-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

leiten sich nach Division durch L und rekursives Ersetzen der Potenzen von p die folgenden Beziehungen zwischen den Fundamentallösungen ab:

$$p \hat{S}_i = \hat{S}_{i-1} - \frac{\hat{L}_{i-1}}{\hat{L}_n} \hat{S}_n, \quad i = 1, \dots, n, \quad \hat{S}_0 = 1. \quad (\text{B.11})$$

Diese Gleichungen können direkt als Dgln. erster Ordnung bzgl. z für die Operatorfunktionen $\hat{S}_i(z)$ interpretiert werden. Um die Dgln. der Operatorenfunktionen in s

herzuleiten, werden des Weiteren jene Gleichungen benötigt, die sich durch Ableiten von (B.10) nach p einerseits¹,

$$L(D_p \hat{S}_i) = \sum_{k=i+1}^n (k-i) \hat{L}_k p^{k-i-1} - \sum_{k=1}^n k \hat{L}_k p^{k-1} \hat{S}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{B.12})$$

und nach s andererseits,

$$L\hat{S}'_i = \sum_{k=i}^n \hat{L}'_k p^{k-i} - \sum_{k=0}^n \hat{L}'_k p^k \hat{S}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{B.13})$$

ergeben.

Aus der vektoriellen Darstellung von (B.10)

$$L \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{L}_n & \cdots & \hat{L}_2 & \hat{L}_1 \\ 0 & \ddots & & \hat{L}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{L}_n \end{pmatrix}}_{\hat{M}_L} \begin{pmatrix} p^{n-1} \\ \vdots \\ p \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

erkennt man, dass aufgrund der Regularität von $\hat{M}_L$ nach den Potenzen von p aufgelöst werden kann. Unter Verwendung von (B.11), in vektorieller Darstellung

$$p \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_n} \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\frac{\hat{L}_{n-2}}{\hat{L}_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\frac{\hat{L}_{n-1}}{\hat{L}_n} \end{pmatrix}}_{\hat{F}_L^T} \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{n-1} \\ \vdots \\ p \\ 1 \end{pmatrix},$$

lassen sich in einem ersten Schritt die Produkte $p^k \hat{S}_i$ in den zu (B.12) und (B.13) korrespondierenden Beziehungen

$$L \begin{pmatrix} D_p \hat{S}_1 \\ D_p \hat{S}_2 \\ \vdots \\ D_p \hat{S}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (n-1)\hat{L}_n & \cdots & 2\hat{L}_3 & \hat{L}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 2\hat{L}_3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & (n-1)\hat{L}_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{n-1} \\ \vdots \\ p \\ 1 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n k \hat{L}_k p^{k-1} \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} \hat{S}'_1 \\ \hat{S}'_2 \\ \vdots \\ \hat{S}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{L}'_n & \cdots & \hat{L}'_2 & \hat{L}'_1 \\ 0 & \ddots & & \hat{L}'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{L}'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{n-1} \\ \vdots \\ p \\ 1 \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^n \hat{L}'_k p^k \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix}$$

¹Es bezeichnet weiterhin D_p die Ableitung nach p .

ersetzen. In den resultierenden $2n$ Gln. werden anschließend die Potenzen von p mit Hilfe von (B.14) ersetzt:

$$\mathbf{L} \left[\begin{pmatrix} D_p \hat{S}_1 \\ D_p \hat{S}_2 \\ \vdots \\ D_p \hat{S}_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \hat{L}_n & \cdots & \hat{L}_3 & \hat{L}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \hat{L}_3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \hat{L}_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{N}_L} \hat{M}_L^{-1} \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} \right] = \underbrace{- \sum_{k=1}^n k \hat{L}_k (\hat{F}_L^T)^{k-1}}_{\hat{M}_1} \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathbf{L} \begin{pmatrix} \hat{S}'_1 \\ \hat{S}'_2 \\ \vdots \\ \hat{S}'_n \end{pmatrix} = \underbrace{- \sum_{k=0}^n \hat{L}'_k (\hat{F}_L^T)^k}_{\hat{M}_2} \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.15b})$$

Die gesuchten Dgln. für die Fundamentallösungen $\hat{S}_i$ bzgl. s ergeben sich beispielsweise durch Transformation der Matrix $(\hat{M}_1^T, \hat{M}_2^T)^T$ auf Zeilen-Echelon Form

$$T_P \hat{T}_L \begin{pmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \\ \hline 0_{(2n-m) \times m} & & & & 0_{(2n-m) \times (n-m)} & & & \end{array} \right)$$

mit $m \leq n$, wobei T_P eine Permutationsmatrix und $\hat{T}_L \in \mathbb{R}(s)^{2n \times 2n}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale bezeichnen. Entsprechend ergibt sich bei Anwendung der Transformation $T_P \hat{T}_L$ auf (B.15) und Division der letzten $(2n-m)$ -Zeilen (mit einer Null auf der rechten Seite) durch $\mathbf{L}$ eine Darstellung

$$(0_{(2n-m) \times m} \quad I_{2n-m}) T_P \hat{T}_L \begin{pmatrix} I_n D_p + \hat{N}_L \hat{M}_L^{-1} \\ I_n D_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Nach Anwendung der inversen Laplace-Transformation $\mathcal{L}_z^{-1}$ und Streichen der in jedem Fall $n-m$ über $\mathbb{R}(s)[\frac{d}{ds}, z]$ linear abhängigen Gln. ergibt sich

$$\hat{P}(\frac{d}{ds}, z) \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{0} \quad (\text{B.16})$$

mit der quadratischen Polynommatrix $\hat{P}(\frac{d}{ds}, z) \in \mathbb{R}(s)[\frac{d}{ds}, z]^{n \times n}$ und $\hat{\mathbf{S}}$ dem Vektor mit den n Fundamentallösungen $\hat{S}_i$ aus dem Lösungsansatz (B.9).

Um die transzendenten Funktionen $\hat{S}_i$ aus den Messgleichungen (2.13) mit Hilfe von (B.16) eliminieren zu können, muss $\hat{P}$ vollen Rang n aufweisen. Dass diese Forderung ebenso wie beim System zweiter Ordnung in Abschnitt B.1 (vgl. bspw. (B.7)) allgemein erfüllt ist, kann unter Annahme des Gegenteils gezeigt werden: Wäre $\hat{P}$ singulär und damit (B.16) nicht autonom, so wäre die Lösung $s \mapsto \hat{\mathbf{S}}$ nicht eindeutig festgelegt. Vielmehr wären die Trajektorien von $n - \text{Rang } \hat{P}$ Größen frei, was jedoch in Widerspruch zu den über den Lösungsansatz (B.9) eindeutig bestimmten Trajektorien der Fundamentallösungen steht.

B.3 Schweres Seil als Beispiel für ein System mit ortsabhängigen Koeffizienten

Die „direkte Methode“ aus [RW07] lässt sich auch auf partielle Dgln. mit ortsabhängigen Koeffizienten übertragen. Hier sollen daher am Beispiel des schweren Seils ohne Dämpfung, also mit $\varepsilon = 0$, die Dgln. (5.13) der Hilfsoperatoren $\hat{T}_i$, $i = 1, \dots, 4$ bzgl. s hergeleitet werden.

Dafür wird auf die Systemgleichung (5.1) die Laplace-Transformation zunächst bzgl. der Zeit t (mit homogenen Anfangsbedingungen) und anschließend bzgl. des Ortes z angewandt:

$$\underbrace{(gp^2(m - \rho D_p) - g\rho p - \rho s^2)}_L \hat{w} - mg \frac{d\hat{w}}{dz}(0) - mgp\hat{w}(0) = 0.$$

Ausgehend von der allgemeinen Lösung

$$\hat{w}(z) = \hat{S}_1(z)\hat{w}(0) + \hat{S}_2(z)\frac{d\hat{w}}{dz}(0) \quad (\text{B.17})$$

des Randwertproblems genügen die Operatoren $\hat{S}_1$ und $\hat{S}_2$ den Gln.

$$L\hat{S}_1 = mgp \quad (\text{B.18a})$$

$$L\hat{S}_2 = mg. \quad (\text{B.18b})$$

Entsprechend der vorangegangenen Betrachtung für partielle Dgln. mit konstanten Koeffizienten, lassen sich auch hier Rekursionsbeziehungen für die Potenzen von p angeben:

$$2gp(m - \rho D_p)\hat{S}_1 = 2g\rho\hat{S}_1 + g\rho s\hat{S}_1' + 2\rho s^2\hat{S}_2 + 2mg \quad (\text{B.19a})$$

$$2p(m - \rho D_p)\hat{S}_2 = 2m\hat{S}_1 + 2\rho\hat{S}_2 + \rho s\hat{S}_2'. \quad (\text{B.19b})$$

Deren Herleitung ist jedoch nicht trivial. So folgt (B.19b) aus der Kombination der von (B.18) abgeleiteten Gln.

$$pL\hat{\hat{S}}_2 = L(p\hat{\hat{S}}_2) + g\rho p^2\hat{\hat{S}}_2 = L\hat{\hat{S}}_1 \quad (\text{B.20a})$$

$$pL(D_p\hat{\hat{S}}_2) = L(pD_p\hat{\hat{S}}_2) + g\rho p^2D_p\hat{\hat{S}}_2 = -(2gp^2(m - \rho D_p) - g\rho p)\hat{\hat{S}}_2 \quad (\text{B.20b})$$

$$(L\hat{\hat{S}}_2)' = L\hat{\hat{S}}_2' - 2\rho s\hat{\hat{S}}_2 = 0. \quad (\text{B.20c})$$

Ersetzt man in der gewichteten Summe von (B.20a) multipliziert mit $-m$ und (B.20b) multipliziert mit ρ das Monom p^2 unter Verwendung von L und anschließend alle Ausdrücke ohne den Differentialoperator L mit Hilfe von (B.20c), so verbleibt eine Gl., auf die L angewandt wird. Dies impliziert (B.19b). Eine analoge Betrachtung für $\hat{\hat{S}}_1$ führt unter Berücksichtigung von

$$Lmg = mg^2p^2 - mg^2\rho p - mg\rho s^2 = mg^2p^2 - g\rho L\hat{\hat{S}}_1 - \rho s^2L\hat{\hat{S}}_2$$

auf (B.19a).

Die sich durch Ableitung von (B.18) nach s und p ergebenden sechs Gln.

$$D_p(L\hat{\hat{S}}_1) = (2gp(m - \rho D_p) - \rho g)\hat{\hat{S}}_1 + L(D_p\hat{\hat{S}}_1) = L\hat{\hat{S}}_2$$

$$D_p(L\hat{\hat{S}}_2) = (2gp(m - \rho D_p) - \rho g)\hat{\hat{S}}_2 + L(D_p\hat{\hat{S}}_2) = 0$$

$$(L\hat{\hat{S}}_i)' = -2\rho s\hat{\hat{S}}_i' + L\hat{\hat{S}}_i' = 0, \quad i = 1, 2$$

$$(L\hat{\hat{S}}_i)'' = -2\rho\hat{\hat{S}}_i - 4\rho s\hat{\hat{S}}_i' + L\hat{\hat{S}}_i'' = 0, \quad i = 1, 2$$

ermöglichen es gemeinsam mit (B.18) selbst, die Ausdrücke in (B.19) derart zu ersetzen, dass der Differentialoperator L ausgeklammert werden kann, was

$$gs\hat{\hat{S}}_1'' + (4s^2 + g)\hat{\hat{S}}_1' + 4s(1 + D_p)\hat{\hat{S}}_1 = 0$$

$$\rho gs\hat{\hat{S}}_2'' + g(4m + \rho)\hat{\hat{S}}_2' + 4\rho sD_p\hat{\hat{S}}_2 = 0$$

impliziert. Aus der Anwendung der inversen Laplace-Transformation bzgl. p folgt das Differentialgleichungssystem

$$gs\hat{\hat{S}}_1'' + (4s^2 + g)\hat{\hat{S}}_1' + 4s(1 - z)\hat{\hat{S}}_1 = 0$$

$$\rho gs\hat{\hat{S}}_2'' + g(4m + \rho)\hat{\hat{S}}_2' - 4\rho sz\hat{\hat{S}}_2 = 0$$

zweiter Ordnung, das mit $\hat{S}_1 = \hat{T}_2$, $\hat{S}_2 = \frac{2m}{\rho}\hat{T}_1$ gemäß der Definition von $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ in (B.17) und $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ in (5.12) äquivalent zu jenem in (5.13) ist.

Literaturverzeichnis

- [AS64] ABRAMOWITZ, M. und I. STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1964.
- [Bag83] BAGLEY, R.L.: *A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity*. J. Rheol., 27(3):201–210, 1983.
- [Ban92] BANKS, H.T.: *Control and estimation in distributed parameter systems*, Band 11. SIAM, 1992.
- [Bel10] BELKOURA, L.: *Identifiability and algebraic identification of time delay systems*. 2010.
- [Ber07] BERKOVICH, L.M.: *Method of factorization of ordinary differential operators and some of its applications*. Appl. Anal. Discrete Math., 1:122–149, 2007.
- [Ber09] BERNSTEIN, D.S.: *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton University Press, 2009.
- [Bjö96] BJÖRCK, A.: *Numerical Methods for Least Squares Problems*. SIAM, 1996.
- [Blu08] BLUHM, H.: *Gröbnerbasen in gewöhnlichen differentiellen Polynomringen*. Doktorarbeit, 2008.
- [BRF06] BELKOURA, L., J.-P. RICHARD und M. FLIESS: *On-line identification of systems with delayed inputs*. In: *Proc. 17th Symp. Math. Theory Networks Syst. (MTNS)*, 2006.
- [BRF07a] BELKOURA, L., J.-P. RICHARD und M. FLIESS: *A convolution approach for delay system identification*. In: *Proc. 17th IFAC World Congress, Seoul, South Korea*, 2007.
- [BRF07b] BELKOURA, L., J.-P. RICHARD und M. FLIESS: *Real time identification of delay systems*. In: *7th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Nantes, France*, 2007.

- [BRF09] BELKOURA, L., J.-P. RICHARD und M. FLIESS: *Parameters estimation of systems with delayed and structured entries*. Automatica, 45:1117–1125, 2009.
- [BSDR97] BAUMEISTER, J., W. SCONDO, M.A. DEMETRIOU und I.G. ROSEN: *On-line parameter estimation for infinite-dimensional dynamical systems*. SIAM J. Control Optim., 35:678–713, 1997.
- [BSMMI01] BRONSTEIN, I.N., K.A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 5. Auflage, 2001.
- [Buc65] BUCHBERGER, B.: *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal*. Doktorarbeit, Universität Innsbruck, 1965.
- [CB02] COCA, D. und S.A. BILLINGS: *Identification of finite dimensional models of infinite dimensional dynamical systems*. Automatica, 38:1851–1865, 2002.
- [CH66] COURANT, R. und D. HILBERT: *Methods of mathematical physics, Vol. 2*. Wiley, 1966.
- [CLL98] CHEN, S., K. LIU und Z. LIU: *Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin-Voigt damping*. SIAM J. Appl. Math., 59:651–668, 1998.
- [CLO97] COX, D., J. LITTLE und D. O'SHEA: *Ideals, varieties, and algorithms*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1997.
- [COPB01] COIS, O., A. OUSTALOUP, T. POINOT und J.-L. BATTAGLIA: *Fractional state variable filter for system identification by fractional model*. In: *Proc. 6th European Control Conference (ECC'2001)*, September 2001.
- [CWG71] CARPENTER, W.T., M.J. WOZNY und R.E. GOODSON: *Distributed parameter identification using the method of characteristics*. J. Dyn. Syst. Meas. Contr., 93:73–78, 1971.
- [DF91] DIOP, S. und M. FLIESS: *Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories*. In: *Proc. 34th IEEE Conference on Decision & Control, Brighton, England, December 1991*, Seiten 714–719, 1991.
- [DNC00] D'ANDRÉA-NOVEL, B. und J.M. CORON: *Exponential stabilization of an overhead crane with flexible cable via a back-stepping approach*. Automatica, 36:587–593, 2000.

- [DO64] D'SOUZA, A.F. und R. OLDENBURGER: *Dynamic Response of Fluid Lines*. J. Basic Eng., 86:589–598, 1964.
- [Doe70] DOETSCH, G.: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Birkhäuser, 2. Auflage, 1970.
- [DR94] DEMETRIOU, M.A. und I.G. ROSEN: *Adaptive identification of second-order distributed parameter systems*. Inverse Probl., 10:261–294, 1994.
- [Fak99] FAKLER, W.: *Algebraische Algorithmen zur Lösung von linearen Differentialgleichungen*. Teubner, 1999.
- [Fli06] FLIESS, M.: *Analyse non standard du bruit*. Compt. Rendus Math., 342:797–802, 2006.
- [For91] FORSMAN, K.: *Constructive Commutative Algebra in Nonlinear Control Theory*. Doktorarbeit, Linköping University, 1991.
- [For92] FORSMAN, K.: *The hitch hiker's guide to Gröbner bases: commutative algebra for amateurs*. Technischer Bericht, 1992.
- [FSR03] FLIESS, M. und H. SIRA-RAMIREZ: *An algebraic framework for linear identification*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 9:151–168, 2003.
- [GKRW12a] GEHRING, N., T. KNÜPPEL, J. RUDOLPH und F. WOITTENNEK: *Algebraic identification of heavy rope parameters*. In: *Proc. 16th IFAC Symposium on System Identification*, Seiten 161–166, July 2012.
- [GKRW12b] GEHRING, N., T. KNÜPPEL, J. RUDOLPH und F. WOITTENNEK: *Algebraische Methoden zur Parameteridentifikation für das schwere Seil*. at – Automatisierungstechnik, 60:514–521, 2012.
- [GKRW12c] GEHRING, N., T. KNÜPPEL, J. RUDOLPH und F. WOITTENNEK: *Parameter identification for a heavy rope with internal damping*. Proc. Appl. Math. Mech., 12:725–726, 2012.
- [GM97] GORENFLO, R. und F. MAINARDI: *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*. In: CARPINTERI, A. und F. MAINARDI (Herausgeber): *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Seiten 223–276. Springer-Verlag, 1997.
- [GR95] GAY, D.H. und W.H. RAY: *Identification and control of distributed parameter systems by means of the singular value decomposition*. Chem. Eng. Sci., 50:1519–1539, 1995.

- [GR12] GEHRING, N. und J. RUDOLPH: *Ein algebraischer Zugang zur Identifikation in linearen Systemen mit fraktionalen Ableitungen*. In: *Unterlagen zur Tagung des GMA-Fachausschusses 1.30 „Modellbildung, Identifikation und Simulation in der Automatisierungstechnik“*, 2012.
- [GR13] GEHRING, N. und J. RUDOLPH: *An Algebraic Approach for Identification of Linear Systems with Fractional Derivatives*. ArXiv e-prints, 2013.
- [GRS12a] GEHRING, N., J. RUDOLPH und C. STAUCH: *Algebraic identification of fluid parameters using transmission line dynamics*. In: *Proc. 13th Mechatronics Forum International Conference*, Seiten 930–935, September 2012.
- [GRS12b] GEHRING, N., J. RUDOLPH und C. STAUCH: *Identification of transmission line parameters using algebraic methods*. In: *PAMM - Proc. in Appl. Mathem. and Mechanics*, Band 12, Seiten 727–728, 2012.
- [Heu92] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner, 1992.
- [Heu95] HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner, 3. Auflage, 1995.
- [JCP12] JIAO, Z., Y.Q. CHEN und I. PODLUBNY: *Distributed-order dynamic systems: stability, simulation, applications and perspectives*. Springer-Verlag, 2012.
- [Kam48] KAMKE, E.: *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1*. Chelsea Publishing Company, 1948.
- [KL09] KIM, S.-Y. und D.-H. LEE: *Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs*. J. Sound Vib., 324:570–586, 2009.
- [Knü15] KNÜPPEL, T.: *Numerische Aspekte der Parameteridentifikation für Systeme mit verteilten Parametern*. Technischer Bericht, TU Dresden, 2015.
- [Kol73] KOLCHIN, E.R.: *Differential Algebra and Algebraic Groups*. Academic Press, 1973.
- [KS08] KRSTIC, M. und A. SMYSHLYAEV: *Boundary control of pdes*. 2008.
- [Kub77] KUBRUSLY, C.S.: *Distributed parameter system identification: A survey*. Int. J. Contr., 26:509–535, 1977.
- [KW13] KNÜPPEL, T. und F. WOITTENNEK: *Ein Beitrag zur Parameteridentifikation in örtlich verteilten Systemen*. at – Automatisierungstechnik, 61:521–532, 2013.

- [LG94] LJUNG, L. und T. GLAD: *Global identifiability for arbitrary model parametrizations*. Automatica, 30:265–276, 1994.
- [LH08] LORENZO, C.F. und T.T. HARTLEY: *Initialization of fractional-order operators and fractional differential equations*. J. Comput. Non-linear Dynam., 3:021101, 2008.
- [Lju87] LJUNG, L.: *System identification*. Prentice Hall, 1987.
- [LT02] LAKSHMIKANTHAM, V. und D. TRIGIANTE: *Theory of difference equations: numerical methods and applications*. CRC Press, 2002.
- [Man12] MANHARTSGRUBER, B.: *hydroLib V3.1.0 beta5*. <http://www.jku.at/imh/content/e139944>, 2012.
- [Mbo09] MBOUP, M.: *Parameter estimation for signals described by differential equations*. Appl. Anal., 88:29–52, 2009.
- [Mey00] MEYER, C.D.: *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, 2000.
- [Mik83] MIKUSIŃSKI, J.: *Operational Calculus*. Pergamon, Oxford & PWN, 1983.
- [MVNO07] MALTI, R., S. VICTOR, V. NICOLAS und A. OUSTALOUP: *System identification using fractional models: State of the art*. In: *Proc. ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE2007)*, Seiten 295–304, September 2007.
- [OB00] ORLOV, Y. und J. BENTSMAN: *Adaptive distributed parameter systems identification with enforceable identifiability conditions and reduced-order spatial differentiation*. IEEE Trans. Autom. Control, 45:203–216, 2000.
- [OS74] OLDHAM, K.B. und J. SPANIER: *The Fractional Calculus*. Academic Press, 1974.
- [PG66] PERDREAUVILLE, F.J. und R.E. GOODSON: *Identification of systems described by partial differential equations*. J. Basic Eng., Seiten 463–468, 1966.
- [PG76] POLIS, M.P. und R.E. GOODSON: *Parameter identification in distributed systems: a synthesizing overview*. Proc. IEEE, 64:45–61, 1976.
- [Pod99] PODLUBNY, I.: *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.

- [PR01] PETIT, N. und P. ROUCHON: *Flatness of heavy chain systems*. SIAM J. Control Optim., 40:475–495, 2001.
- [Rit50] RITT, J.F.: *Differential Algebra*. American Mathematical Society, 1950.
- [Rud03a] RUDOLPH, J.: *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Shaker Verlag, 2003.
- [Rud03b] RUDOLPH, J.: *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems*. Shaker Verlag, 2003.
- [RW06] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Trajektorienplanung für die Steuerung gewisser linearer Systeme mit verteilten Parametern*. at – Automatisierungstechnik, (54):228–239, 2006.
- [RW07] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Ein algebraischer Zugang zur Parameteridentifikation in linearen unendlichdimensionalen Systemen*. at – Automatisierungstechnik, 55:457–467, 2007.
- [RW08a] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *An algebraic approach to parameter identification in linear infinite dimensional systems*. In: *Proc. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Seiten 332–337, June 2008.
- [RW08b] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Motion planning and open loop control design for linear distributed parameter systems with lumped controls*. Int. J. Contr., 81:457–474, 2008.
- [RW10] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Identification de paramètres d’un modèle d’échangeurs de chaleur*. In: *Actes Conf. Int. Francophone d’Automatique*, 2010.
- [Sch91] SCHARF, L.L.: *Statistical signal processing*. Addison-Wesley, 1991.
- [SD86] STECKI, J.S. und D.C. DAVIS: *Fluid transmission lines - distributed parameter models. Part 1: A review of the state of the art*. Proc. IME J. Power Energ., 200:215–228, 1986.
- [SG02] SCHMIDT, A. und L. GAUL: *Application of fractional calculus to viscoelastically damped structures in the finite element method*. In: *Proc. Int. Conf. on Structural Dynamics Modelling (SDM)*, Seiten 297–306, June 2002.
- [SGR13] STAUCH, C., N. GEHRING und J. RUDOLPH: *Algebraic parameter identification for infinite dimensional fluid transmission line models*. Proc. IME J. Syst. Contr. Eng., 227:732–742, 2013.

- [Shi54] SHINBROT, M.: *On the analysis of linear and nonlinear dynamical systems from transient-response data*. Technischer Bericht, NACA, 1954.
- [Sni64] SNIDER, R.F.: *Perturbation variation methods for a quantum Boltzmann equation*. J. Math. Phys., 5:1580–1587, 1964.
- [SRGRCRLJ14] SIRA-RAMÍREZ, H., C. GARCÍA-RODRÉGUEZ, J. CORTÉS-ROMERO und A. LUVIANO-JUÁREZ: *Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems*. Wiley, 2014.
- [STS91] SUZUKI, K., T. TAKETOMI und S. SATO: *Improving Zielke's method of simulating frequency-dependent friction in laminar liquid pipe flow*. J. Fluids Eng., 113:569–573, 1991.
- [TB84] TORVIK, P.J. und R.L. BAGLEY: *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*. J. Appl. Mech., 51:294–298, 1984.
- [TMSO12] TRIGEASSOU, J.C., N. MAAMRI, J. SABATIER und A. OUSTALOU: *Transients of fractional-order integrator and derivatives*. Signal, Image and Video Processing, 60:1–14, 2012.
- [Wan95] WANG, D.: *An Implementation of the Characteristic Set Method in Maple*. In: PFALZGRAF, J. und D. WANG (Herausgeber): *Automated Practical Reasoning*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Seiten 187–201. Springer-Verlag, 1995.
- [Wil67] WILCOX, R.M.: *Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics*. J. Math. Phys., 8:962–982, 1967.
- [Woi07] WOITTENNEK, F.: *Beiträge zum Steuerungsentwurf für lineare, örtlich verteilte Systeme mit konzentrierten Stelleingriffen*. Shaker Verlag, 2007.
- [WR04] WOITTENNEK, F. und J. RUDOLPH: *Motion planning for a circular elastic plate*. Proc. Appl. Math. Mech., Seiten 149–150, 2004.
- [Wu86] WU, W.-T.: *Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometries*. J. Automat. Reas., 2:221–252, 1986.
- [Zer00] ZERZ, E.: *Topics in Multidimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, 2000.
- [Zie66] ZIELKE, W.: *Frequency-dependent friction in transient pipe flow*. Doktorarbeit, University of Michigan, 1966.