

Viskoelastische Turbulenz:

Lineare Instabilität und sekundäre Vortexströmungen

Dissertation zur Erlangung des Grades des
Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich–Technischen Fakultät II
– Physik und Mechatronik –
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Dipl.–Phys. Philipp Winfried Bohr

Saarbrücken
2015

Dekan: Univ.-Prof. Dr. ing. Georg Frey

Der Prüfungsausschuss:

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Jürgen Eschner

1. Gutachter: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Christian Wagner

2. Gutachter: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Manfred Lücke

Akad. Mitarbeiter: Dr. ing. Andreas Tschöpe

Tag des Kolloquiums:08.05.2015

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, Philipp Winfried Bohr, an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem Verfahren zur Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt.

Saarbrücken, den 19.12.2014

Philipp Winfried Bohr

Gewidmet meiner Mutter, Christine Löwen-Bohr (1955 – 2013), die das Ende dieser Arbeit sicherlich gerne noch erlebt hätte. Ich danke für die vorgelebte Selbstdisziplin und das vererbte gesunde Maß an Sturheit.

Inhalt der Arbeit

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Aspekten viskoelastischer Turbulenz in Poiseuilleströmungen durch krummlinige Geometrien, insbesondere der oszillatorischen Strömungen in der Nähe des kritischen Kontrollparameters, sowie sekundären Vortexströmungen. Der Fokus liegt dabei auf experimentellen Untersuchungen, zusätzlich wird auch auf die analytische Beschreibung von Strömungen in solchen Geometrien eingegangen. Im experimentellen Teil wird zunächst ein Bifurkationsszenarium beschrieben, um einen kritischen Kontrollparameter, in diesem Fall die kritische Weissenberg-Zahl Wi_c , zu ermitteln. Um diesen Wert herum wird das zeitliche Verhalten der Geschwindigkeit genauer untersucht, die dabei beobachteten Oszillationen werden mittels Parameter wie der spektralen Leistungsdichte und der Autokorrelationsfunktion beschrieben. Die dabei beobachteten Oszillationen des Geschwindigkeitsfeldes entsprechen Beobachtungen in numerischen Simulationen und bestätigen den Charakter der Instabilität als linear. Der zweite Themenschwerpunkt wird von sekundären Vortexströmungen gebildet, die bisher aus analytischen und numerischen Betrachtungen bekannt sind, experimentell aber bisher nicht untersucht wurden. Wir widmen uns in diesem Zusammenhang insbesondere der Strukturaufklärung und einer Abhängigkeitsstudie bezüglich der Weissenbergzahl der Hauptströmung und der Beobachtungsposition entlang des Kanals.

Abstract/contents

The subject of the work presented in this thesis are aspects of viscoelastic turbulence in Poiseuille flows through curvilinear geometries, with a focus on oscillatory flows around the critical value of the control parameter as well as on secondary vortex flows. We focus on experimental observations, however we have included an in-detail analytic study of the flows observed in an own part of this work. In the experimental part, we first describe a bifurcation scenario to determine a critical driving parameter Wi_c , which is the critical Weissenberg number. Subsequently, we study oscillatory flows in the vicinity of Wi_c for their temporal behavior and describe these oscillations by the means of parameters like the power spectral density and the autocorrelation function. The observed oscillations corroborate numerical studies carried out in literature and confirm the linear character of the instability. The second focus of this work are secondary vortex flows, which have so far been described by the means of stability analyses and numerical simulations, but never before been observed experimentally. The frame of our work on this subject encloses such aspects as an investigation of the flow structure and studies of the dependency on parameters like the Weissenberg number of the main flow and the observing position along the channel.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Inhaltsverzeichnis | 7 |
| I Thematische Einführung. | 9 |
| 1 Einleitung | 11 |
| 1.1 Historischer und Thematischer Kontext | 11 |
| 1.2 Komplexe Fluide in Biologie und Technik | 13 |
| 1.3 Motivation | 14 |
| 1.3.1 Lineare Instabilität und viskoelastische Turbulenz | 15 |
| 1.3.2 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen | 17 |
| 2 Literatursynopsis | 19 |
| 2.1 Frühe Behandlung komplexen Strömungsverhaltens | 19 |
| 2.2 Instabilitäten in industriellen Verarbeitungsprozessen | 20 |
| 2.3 Untersuchung des Instabilitätsmechanismus | 20 |
| 2.4 Elastische Instabilitäten in Kanalströmungen | 25 |
| 2.5 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen | 27 |
| II Der hydrodynamische Rahmen. | 29 |
| 3 Dynamik Newton'scher Fluide | 31 |
| 3.1 Grundgleichungen der Hydrodynamik | 31 |
| 3.1.1 Navier–Stokes–Gleichung | 31 |
| 3.1.2 Kontinuitätsgleichung | 33 |
| 3.2 Geschwindigkeitsfeld im rechteckigen Kanal | 34 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 3.3 | Geschwindigkeitsfeld im gekrümmten Kanal | 37 |
| 4 | Dynamik komplexer Fluide | 45 |
| 4.1 | Einfache Modelle komplexen Fließverhaltens | 45 |
| 4.1.1 | Power-law-Modell | 45 |
| 4.1.2 | Carreau-Yasuda-Modell | 46 |
| 4.2 | Moderne konstitutive Modelle | 47 |
| 4.2.1 | Upper-convected Maxwell-Modell | 47 |
| 4.2.2 | Phan-Thien-Tanner Modell | 49 |
| 4.3 | Zweidimensionale Strömungen komplexer Fluide | 51 |
| 4.3.1 | Grundlagen der Beschreibung | 51 |
| 4.3.2 | Gerader Kanal | 52 |
| 4.3.3 | Gekrümmter Kanal | 55 |
| 4.4 | Dreidimensionale Strömungen komplexer Fluide | 59 |
| 4.4.1 | Oldroyd-B-Modell | 60 |
| 4.4.2 | Phan-Thien-Tanner-Modell | 61 |
| 4.4.3 | PTT-Fluss durch einen geraden Kanal – numerische Betrachtung | 63 |
| III | Experimentelle Untersuchungen und Ergebnisse. | 67 |
| 5 | Rheologie der Polymerlösung | 69 |
| 5.1 | Auswahl und Ansatz eines geeigneten Testfluids | 69 |
| 5.2 | Mathematischer und technischer Rahmen | 71 |
| 5.2.1 | Messanordnungen | 71 |
| 5.2.2 | Rheologische Grundlagen | 73 |
| 5.3 | Messungen und Ergebnisse | 76 |
| 5.3.1 | Scherrheometrie | 76 |
| 5.3.2 | Normalspannungsrelaxation | 78 |
| 5.3.3 | Dehnungsrheometrie | 80 |
| 5.3.4 | Abschließende Beurteilung | 82 |
| 6 | Versuchsaufbau | 85 |
| 6.1 | Strömungsmaschinerie | 85 |
| 6.1.1 | Versuchskanal (C-40) | 85 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.1.2 | Strömungsantrieb | 87 |
| 6.2 | Strömungsmessungen mittels DPIV | 89 |
| 6.2.1 | Der mathematische Rahmen | 91 |
| 6.2.2 | Technische Umsetzung | 92 |
| 6.3 | Kontrollmessungen | 95 |
| 6.3.1 | Mess- und Auswertungsprotokoll | 95 |
| 6.3.2 | Räumliche Untersuchung der Geschwindigkeitsfelder | 96 |
| 6.3.3 | Genauigkeit und zeitliches Verhalten des zeitlichen Geschwindigkeitssignals | 101 |
| 7 | Übergang zur Turbulenz | 107 |
| 7.1 | Messung und Auswertung | 107 |
| 7.1.1 | Geschwindigkeitsprofile | 107 |
| 7.1.2 | Zeitreihen der Geschwindigkeit | 108 |
| 7.2 | Bifurkationsszenarium | 108 |
| 7.3 | Räumliche Charakterisierung der Turbulenz | 113 |
| 7.4 | Untersuchung des zeitlichen Verhaltens | 120 |
| 7.4.1 | Lineare Instabilität im gekrümmten Kanal | 121 |
| 7.4.2 | Lineare Stabilität im geraden Kanal | 130 |
| 8 | Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen | 135 |
| 8.1 | Modifikation der Versuchsanordnung | 135 |
| 8.1.1 | Technische Probleme | 135 |
| 8.1.2 | Versuchsaufbau | 136 |
| 8.1.3 | Kontrollmessungen im Newton'schen Fluid | 138 |
| 8.2 | Struktur- und Parameterstudie | 140 |
| 8.2.1 | Räumliche Strukturanalyse | 140 |
| 8.2.2 | Zeitliches Verhalten der Sekundärströmungen | 146 |
| 8.2.3 | Parameterstudie | 154 |
| 8.3 | Einsetzen und Etablieren sekundärer Strömungen | 158 |
| 9 | Abschließende Bemerkungen | 163 |
| 9.1 | Zusammenfassung und kontextuelle Einordnung | 163 |
| 9.2 | Weiterführende Fragestellungen | 166 |
| 9.2.1 | Theoretische und simulative Fragestellungen | 166 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 9.2.2 | Analyse der linearen Instabilität und der Turbulenzverteilung | 167 |
| 9.2.3 | Sekundäre Strömungen | 167 |

| | | |
|--------------------------|--|------------|
| Literaturregister | | 169 |
|--------------------------|--|------------|

| | | |
|------------------------------|--|------------|
| Abbildungsverzeichnis | | 175 |
|------------------------------|--|------------|

Teil I

Thematische Einführung.

Einleitung

$\pi\alpha\nu\tau\alpha\rho\epsilon\iota$ (Panta Rhei, “Alles fließt.”)

– Heraklit (560 – 620 v. Ch.)

Hört zu, ihr Könige, horcht auf, ihr Fürsten! Ich will, ja ich will dem Herrn
singen! Ich will spielen dem Herrn, dem Gott Israels.

O Herr, als du von Seir auszogst, als du einhergingst vom Gebiet Edoms, da
erzitterte die Erde und der Himmel troff, ja, die Wolken troffen vom Wasser.

Die Berge zerflossen vor dem Herrn, der Sinai dort zerfloß vor dem Herrn, dem
Gott Israels.

– *Deboras Siegeslied, Richter 5, 1 – 6*

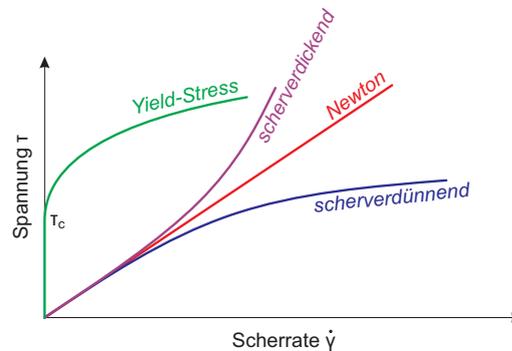
1.1 Historischer und Thematischer Kontext

Das industrielle Aufkommen von Polymeren (Staudinger, 1920) brachte für die chemische Industrie einen Komplex neuer Probleme hinsichtlich des Fließverhaltens solcher Stoffe. Dies führte zum Aufkommen eines neuen Teilgebietes der Physik, der *Rheologie*, die die Wissenschaften der Aero- und Hydrodynamik, allgemeiner der Dynamik der Fluide und der Festkörpermechanik miteinander verband. Die Rheologie beschäftigt sich dabei mit *konstitutiven Modellen*, die Beziehungen zwischen in einem Kontinuum auftretenden Spannungen und Verformungen beschreibt. Ein sehr einfaches Beispiel hierfür ist das Hooke'sche Gesetz $\tau = G\gamma$, in dem γ die Scherung eines Körpers beschreibt, G ein vereinfachtes Elastizitätsmodul ist und τ die auf den Körper wirkende Spannung. Der Begriff *Rheologie* wurde geprägt durch Bingham und Reiner, auf deren Initiative die Gründung der *Society of Rheology* zurückgeht (Giesekus 1994; Reiner 1964).

Ausgehend von Forschungsarbeiten der britischen Armee an Brennstoffen für Flammenwerfer während des zweiten Weltkrieges veröffentlichte Karl Weissen-

1 Einleitung

Abbildung 1.1: Fluidklassen nach Spannungsverhalten unter Deformation. Für Newton'sche Flüssigkeiten ergibt sich eine einfache, lineare Spannungs-Dehnungs-Relation. Scherverdickende (-verdünnende) Fluide weisen mit größer werdender Deformation stärkere (schwächere) Spannungszuwächse auf. *Yield-Stress*- oder *Bingham*-Fluide zeigen erst oberhalb einer kritischen Scherspannung τ_c ein dann scherverdünnendes Fließverhalten.



berg 1947 einen Artikel, in dem er zwei Klassen von Fluiden voneinander unterschied, die er “allgemeine” und “besondere” Fluide nannte (Weissenberg 1947). Entgegen der intuitiven Deutung stellen in dieser Untersuchung “besondere” Fluide solche dar, die etwa bei Rotation eines Stabes in einem gefüllten Becher ein Rotationsparaboloid als Oberfläche ausbilden, wohingegen “allgemeine” Fluide an dem rotierenden Stab hinaufgezogen werden. Physikalisch interpretierte Weissenberg dies durch eine entlang der Stromlinien auftretende Zugspannung, die auch dazu führt, dass beim Durchschneiden eines Stranges einer “allgemeinen” Flüssigkeit sich dieser von den Schnittkanten zurückzieht. Bei ringförmig geschlossenen Stromlinien sollte diese Zugspannung ähnlich einem Gummiband ein ganzes Fluidfilament nach innen ziehen. In dieser Veröffentlichung werden Flüssigkeiten erstmals in einer geschlossenen Theorie mitsamt einem empirischen und einem kontinuumsmechanischen Modell elastische Eigenschaften, also solche eines Festkörpers, zugesprochen.

Die moderne Rheologie unterscheidet nach *Newton'schen* (“besonderen” in Weissenbergs Nomenklatur) und *komplexen* (“allgemeinen”) Fluiden. Newton'sche Fluide zeichnen sich dabei durch eine lineare Beziehung zwischen Scherrate und Spannung, $\tau = \eta \dot{\gamma}$ aus, η bezeichnet die Viskosität des Fluids. Innerhalb der komplexen Fluide lassen sich eine Reihe weiterer Unterscheidungen vornehmen, wie in Abb. 1.1 gezeigt. Betrachtet man zunächst nur stationäre Abhängigkeiten der Viskosität, so lassen sich unterscheiden:

- Scherverdünnende Flüssigkeiten: Die Viskosität solcher Flüssigkeiten sinkt bei immer größeren angelegten Scherraten. Als Beispiele hierfür kann etwa Wandfarbe dienen, die bei Bewegung des Pinsels fließfähig ist, ohne angelegte Scherung aber an der Wand haftet, ohne zu fließen.
- Scherverdickende Flüssigkeiten: Diese verhalten sich entgegengesetzt zu scherverdünnenden Flüssigkeiten, die Viskosität nimmt bei stärkeren Fließraten zu. Ein alltägliches Beispiel hierfür ist etwa Kuchenteig, der in einer langsam rotierenden Rührmaschine um den Rührstab herum fließt, bei schnellerer Rotation hingegen gegen die Gefäßwände gedrückt wird.

1.2 Komplexe Fluide in Biologie und Technik



Abbildung 1.2: Konsequenzen komplexen Fließverhaltens. Links: Weissenberg-Effekt. Der Schergradient sorgt für eine effektive Kraft zum Ort des geringeren Krümmungsradius auf die Polymere. Die Flüssigkeit ‘fließt’ daher am rotierenden Stab nach oben. Rechts: Dye Swell. Im Düsendgang werden die Polymere in eine Vorzugsrichtung orientiert. Sobald diese Zwangsbedingung außerhalb der Düse im freien Strahl fehlt, sorgt die Entropiemaximierung für eine Vergrößerung des Konfigurationsraums und so zu einer Verbreiterung des Strahls. (Bilder Eigentum v. G. H. McKinley, Massachusetts Institute of Technology)

- *Yield-stress-* oder *Bingham-*Fluide beginnen erst oberhalb einer bestimmten Mindestspannung zu fließen, verhalten sich dann aber weitgehend linear, wie Newton’sche Fluide. Beispiele hierfür sind Ketchup ($\tau_c \approx 15$ Pa), Mayonnaise ($\tau_c \approx 100$ Pa) oder Haargel ($\tau_c = 135$ Pa).

Weitere Unterscheidungen können vorgenommen werden, wenn man auch nichtstationäre Änderungen der Viskosität berücksichtigt, etwa bei *Rheopexie* oder *Thixotropie*

1.2 Komplexe Fluide in Biologie und Technik

Wie bereits erwähnt ergab sich die Rheologie aus der Beobachtung bis dahin unbekanntem Fließverhaltens bei der industriellen Verarbeitung von Polymeren, und in der Tat weisen komplexe Fluide eine Reihe interessanter Effekte auf, die entgegen intuitiver Erwartungen und entgegen jedem bei Newton’schen Fluiden beobachteten Verhalten sind. Im folgenden geben wir einen kurzen Überblick über diese Effekte, sie sind in Abb. 1.2 veranschaulicht.

- Der Effekt, dass ein komplexes Fluid in der Lage ist, sich entgegen der nach außen drängenden Zentrifugalkraft und der nach unten wirkenden Schwerkraft an einem Rührstab nach oben zu ziehen, ist in der Literatur als *Weissenberg-Effekt* bekannt. Auf den dahinterstehenden physikalischen Mechanismus wird im folgenden noch genauer eingegangen werden.

1 Einleitung

- Drückt man ein komplexes Fluid, etwa eine Polymerschmelze, durch eine enge Düse (engl. *dye*), so beobachtet man unmittelbar hinter der Düsenöffnung ein Aufquellen (engl. *swell*) des ausgedrückten Flüssigkeitsstranges. Zusammengefasst steht dahinter das physikalische Prinzip der Entropiemaximierung. In der Düse nehmen die Polymere eine Vorzugsorientierung in Fließrichtung ein, der Konfigurationsraum wird dadurch eingeschränkt und die Entropie verringert. Ohne diese künstliche Zwangsbedingung nehmen die Polymere im freien Strang dann wieder jede beliebige Orientierung ein, was zu einer Verbreiterung des Strahls führt.
- Gießt man ein komplexes Fluid von einem Behälter in einen anderen, so kann es bei geschicktem Unterbrechen des Gießvorganges dazu kommen, daß das Fluid in umgekehrter Richtung wieder in das auszuleerende Gefäß läuft, auch wenn sich dieses über dem Zielbehälter befindet. Dahinter stehen die bereits in (Weissenberg 1947) beschriebenen Zugkräfte entlang der Stromlinien, die hier sogar die Schwerkraft überwinden.
- Anders als bei textilen Fasern beobachtet man bei Fasern aus viskoelastischen Materialien eine Verstärkung in dünneren Materialregionen. Daher sind solche Fasern einfach maschinell zu weben.

Tatsächlich stellen komplexe Fluide einen Großteil der in Biologie, Chemie und Technik verwendeten Fluide. Beginnend vom Blutfluss über Polymerschmelzen und -lösungen bis hin zu Farben und Lacken weisen Flüssigkeiten gewisse Festkörpereigenschaften auf, meistens dann, wenn in einem rein Newton'schen Lösungsmittel kleine Festkörper, etwa Pigmente, Proteine oder Bakterien gelöst sind.

Durch die Zugabe von Polymeren lassen sich mitunter bestimmte Fließeigenschaften nach Maß einstellen. Bei Motorschmierstoffen werden Viskositätsindex-(VI-)verbesserer eingesetzt, um die Viskosität eines Schmierstoffs bei hohen Betriebstemperaturen nicht zu weit abzusenken. Hierfür werden sternförmige Polymere eingesetzt, die im kalten Zustand zusammengeknäult vorliegen und sich bei Wärme ausdehnen und so ein Netz bilden, das insgesamt dem sie umgebenden Öl einen höheren Widerstand entgegensetzt (Rhodes *u. a.* 1995).

Ähnliche Methoden werden auch eingesetzt, um gezielt Fließeigenschaften von Salben und anderen Arzneimitteln oder von Lebensmitteln zu beeinflussen.

1.3 Motivation

Im Zusammenhang mit solchen technischen Verarbeitungsprozessen wurden auch zum erstenmal *elastische Instabilitäten* beobachtet, zunächst zumeist Oberflächeninstabilitäten, die zu Wellenmustern der Oberfläche beim Folienblasen oder bei Extrusionsprozessen führten. Dieses Phänomen ist als Schmelzbruch bekannt (Bertola *u. a.* 2003; Hürlimann & Knappe 1972; Larson 2000). Solche Instabilitäten, die durch elastische Effekte bedingt sind, sind in der darauffolgenden Zeit

immer wieder Thema der Forschung gewesen und stellen auch heute noch ein wichtiges Forschungsgebiet dar.

1.3.1 Lineare Instabilität und viskoelastische Turbulenz

Inertiale Turbulenz

Dass Strömungen Newton'scher Fluide nicht bis zu beliebig hohen Geschwindigkeiten stationär und frei von sekundären Geschwindigkeitskomponenten bleiben, ist bereits seit Reynolds bekannt (Reynolds 1883). In Experimenten ließ er durch ein glattes Rohr Wasser mit verschiedenen Geschwindigkeiten laufen. Oberhalb einer kritischen Geschwindigkeit zeigten sich dabei zunächst räumlich begrenzte Verwirbelungen, sog. *puffs*, bei sehr hohen Geschwindigkeiten wurde die Strömung insgesamt turbulent.

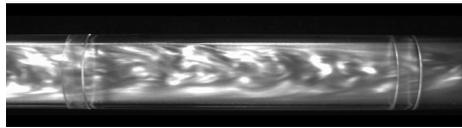


Abbildung 1.3: Turbulente Rohrströmung bei $Re = 2200$ (Bild: T. Mullin, U Manchester).

Ein Parameter zur Beschreibung dieser *inertialen Turbulenz* ist die *Reynoldszahl* Re , durch sie werden diffusiver und advektiver Impulsstrom in einer viskosen Flüssigkeit miteinander verglichen (Guyon *u. a.* 2001). Bezeichnet man mit $\Pi_a = \rho U^2$ den advektiven und mit $\Pi_d = \eta U/L$ den diffusiven Impulsstrom, wobei U und L typische Geschwindigkeits- sowie Längenskalen sind und η und ρ Viskosität und Dichte der Flüssigkeit, so folgt für deren Verhältnis:

$$\frac{\Pi_a}{\Pi_d} = \frac{\rho U^2}{\eta U/L} = \frac{\rho U L}{\eta} = Re \quad (1.1)$$

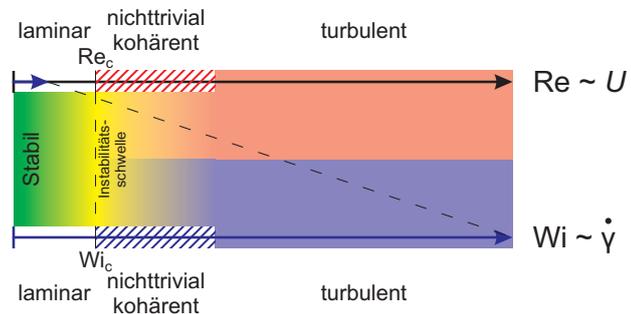
oder alternativ $Re = UL/\nu$, wobei $\nu = \eta/\rho$ die kinematische Viskosität darstellt (zu dem selben Ergebnis gelangt man durch den Vergleich von advektiven und diffusiven Zeitskalen in einer Strömung). Bei hohen Reynoldszahlen überwiegt der konvektive Impulsstrom und resultiert in stark instabilen Strömungen. Mathematisch lassen sich diese durch die dann nicht vernachlässigbaren Nichtlinearitäten der Geschwindigkeit und des Geschwindigkeitsgradienten in der Navier–Stokes–Gleichung fassen.

Wie aus der Definition der Reynoldszahl, Gl. (1.1) hervorgeht, lässt sich die Turbulenzanfälligkeit eines Systems über eine hinreichend hohe Geschwindigkeit, eine große Ausdehnung oder die Viskosität der verwendeten Flüssigkeit kontrollieren.

Wirbel, die sich in solchen Strömungen bilden, lassen sich durch die Superposition verschieden großer Vortizitätszentren (*“eddies”*) beschreiben (Wilkes 2006). Große Vortizitätszentren beziehen ihre kinetische Energie aus der Hauptströmung.

1 Einleitung

Abbildung 1.4: Instabilitätsverhalten bei inertialer und viskoelastischer Turbulenz. Die Strömung ist bis zu einer kritischen Parameter Re_c oder Wi_c stabil und laminar, es folgen zunächst nichtstationäre, kohärente Zustände, und schließlich chaotische Turbulenz. (Grafik nach (Morozov & van Saarloos 2007))



mung, die nächstkleineren Zentren jeweils aus den größeren. Diese Kaskade setzt sich so lange fort, bis die Wirbelzentren zu klein werden und die Wirbelenergie durch die hohen Geschwindigkeitsgradienten in Wärme umgewandelt wird (*Kolmogorov-Grenzfall*).

Einen mathematischen Ansatz zur Fassung der Entstehung turbulenter Strömungen liefert eine lineare Stabilitätsanalyse (Landau & Lifschitz 1991). Im Rahmen dieser wird das Geschwindigkeitsfeld in eine mittlere und eine fluktuierende Komponente zerlegt, $U(t) = \bar{U} + U'(t)$ (Reynolds-Zerlegung). Einsetzen dieser Zerlegung in die Navier-Stokes-Gleichung liefert dann im wesentlichen eine Impulsbilanz, die durch die zeitgemittelten Anteile erfüllt wird, zusätzlich allerdings auch Terme $\sim \rho U'^2$, die sog. *Reynolds-Spannungen*, deren Größenordnungen allerdings in weiten Bereichen eines Rohrs über den zeitgemittelten Spannungen liegen.

Viskoelastische Turbulenz

In Abb. 1.4 haben wir schematisch die Abhängigkeit der Stabilität einer Strömung von den Parametern Re , der Reynoldszahl im Fall Newton'scher Fluide und Wi , der Weissenbergzahl im Fall komplexer Fluide, gezeigt. Bis zu einem kritischen Parameter Re_c (bzw. Wi_c) ist die beobachtete Strömung laminar und stabil, kleine Störungen sterben aus und beeinträchtigen den Strömungsverlauf nicht. Überschreitet man die Schwelle zur Instabilität, treten zunächst räumlich oder zeitlich periodische, kohärente Strömungszustände auf. Bei noch höheren Reynolds- bzw. Weissenbergzahlen zeigt sich schließlich chaotische Turbulenz. Bemerkenswert ist dabei, dass viskoelastische Turbulenz bereits bei verschwindenden Reynoldszahlen auftreten kann, fern der Schwelle zu inertialer Turbulenz.

Dass Strömungen viskoelastischer Fluide bei gekrümmten Stromlinien linear instabil sind, ist theoretisch belegbar (Larson 1992; Larson *u. a.* 1990; Morozov & van Saarloos 2007). Der lineare Charakter der Instabilität ist auch schon für die Situationen wie die Couette-Taylor-Strömung (Groisman & Steinberg 1998; Morozov & van Saarloos 2007) oder die Batchelor-Strömung (Byars *u. a.* 1994; Morozov & van Saarloos 2007) gezeigt worden. Dabei legen insbesondere Larsons Betrachtungen den Schluss nahe, dass auch Poiseuille-Strömungen viskoelasti-

scher Fluide in gekrümmten Kanälen linear instabil sein sollten, eine experimentelle Beobachtung hierfür steht allerdings noch aus.

Wir untersuchen zur Beobachtung der Instabilität das Geschwindigkeitsfeld in einer solchen Geometrie um den Einsatzzpunkt der viskoelastischen Turbulenz. Ein Beleg für die lineare Instabilität ist beispielsweise gegeben, wenn man in der Nähe des Einsatzzpunktes eine oszillatorische Strömung mit einer geringen Zahl wachstumsfähiger Fouriermoden nachweist. Aus numerischen Simulationen von Poole (Zilz *u. a.* 2012) geht das oszillatorische Verhalten der Geschwindigkeitskomponente in Fließrichtung bereits hervor, eine quantitative experimentelle Untersuchung hierzu steht allerdings bislang aus.

Ein weitere Beleg kann im Vorhandensein einer Hopf–Bifurkation gesehen werden. Als Kontrollparameter in einem solchen Szenarium empfiehlt sich die Weissenberg–Zahl, die durch die Fließrate und damit die mittlere Geschwindigkeit im Kanal experimentell gut zugänglich ist. Als Ordnungsparameter kann die Fluktuationsamplitude $\langle U^2 \rangle$ des Geschwindigkeitsfeldes herangezogen werden, diese sollte weitestgehend das in (Landau & Lifschitz 1991) beschriebene Amplitudenverhalten widerspiegeln.

1.3.2 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

Dass Fluide in gekrümmten Geometrien Vortexströmungen entwickeln, deren Vortizitätsvektoren (anti-)parallel zur Hauptströmung orientiert sind, ist seit geraumer Zeit bekannt (Dean 1927, 1928). Ursprüngliche theoretische Betrachtungen beziehen sich dabei auf gekrümmte Rohre, die Ergebnisse gelten allerdings auch etwa bei Rohren oder allgemein Geometrien mit Einschnürungen oder variablem Querschnitt (Lauga *u. a.* 2004). Im Grenzfall von variablem Querschnitt und variabler Krümmung einer Geometrie existieren diese Strömungen sogar im Fall sehr kleiner Reynoldszahlen.

Für viskoelastische Fluide existieren, wie ebenfalls bereits referiert, ausführliche analytische und numerische Nachweise wirbelartiger Sekundärströmungen in gekrümmten Geometrien. Auch existieren bereits qualitative Nachweise in Form von Farbstoffmessungen (Burghelea *u. a.* 2004a). Dennoch ist das Verhalten dieser Sekundärströmungen in Abhängigkeit von Parametern wie der mittleren Fließgeschwindigkeit oder geometrischen Aspekten, wie der Position in Strömungsrichtung, experimentell bisher unerforscht. Auf numerischer Seite seien hier insbesondere die Arbeiten von Poole (Poole *u. a.* 2013) und Malheiro (Malheiro *u. a.* 2013) erwähnt, die umfangreiche parametrische Studien sekundärer Vortexströmungen enthalten.

Diese Arbeit soll an dieser Stelle anknüpfen durch eine systematische Untersuchung der Geschwindigkeits- und Vortizitätsfelder solcher Strömungen liefern. Hierzu wird das Geschwindigkeitsfeld in der Wendeebene untersucht, da dieses experimentell am besten zugänglich ist. Aufgrund der hohen Elastizität der verwendeten Messlösung und Vergleich mit Messungen an Newton’schen Fluiden

1 Einleitung

kann ausgeschlossen werden, dass die gemessenen Wirbelströmungen auf andere Effekte wie den Krümmungswechsel von einer Windung zu anderen zurückzuführen sind (Lauga *u. a.* [2004](#)).

Literatursynopsis

Texte über komplexe – insbesondere viskoelastische – Fluide und das an ihnen beobachtete Fließverhalten werden seit den ausgehenden 1940er Jahren publiziert, angefangen von Weissenbergs Nature-Artikel bis hin zu den modernen Veröffentlichungen. Das vorliegende Kapitel stellt die wichtigsten Erkenntnisse bisheriger Veröffentlichung zusammen und soll so auf den Stand der Forschung bringen.

2.1 Frühe Behandlung komplexen Strömungsverhaltens

Wie bereits erwähnt erfolgte eine erste systematische Untersuchung und Interpretation des Fließverhaltens komplexer Fluide durch Weissenberg (Weissenberg 1947). In diesem Aufsatz ist auch bereits ein phänomenologisches und kontinuumsmechanisches Modell zur Beschreibung solcher Fluide enthalten, beide greifen hierbei im wesentlichen auf lineare elastische Effekte zurück, die bereits die Grundlage der Beschreibung eines Körpers als Boltzmann-Kontinuum bilden.

1950 beschäftigte sich Oldroyd mit den Grundlagen der Formulierung konstitutiver Gleichungen zur Beschreibung der Spannungs- und Verformungszustände homogener Kontinua (Oldroyd 1950). Ähnlich wie Weissenberg zuvor verwendete er zur Formulierung der konstitutiven Gleichungen ein mitbewegtes Koordinatensystem, um simultan Bewegungs-, Kontinuitäts- und Modellgleichung zu lösen war aber ein Übergang in ein festes Bezugssystem nötig. Hierfür formulierte er die *Oldroyd-Ableitung*, die neben der konvektiven Ableitung auch ein Produkt von Spannungs- und Geschwindigkeitsgradiententensor enthält. Letzteres verschwindet im Falle kleiner Spannungsamplituden.

Die so entstandene Modellgleichung, die in der Literatur als *Oldroyd-B-* oder *upper-convected Maxwell-*Modell (UCM) bekannt ist, ist die einfachste Möglichkeit, ein komplexes Fluid zu beschreiben. Oldroyd verfasste noch weitere Schriften, die sich mit den elastischen und viskosen Eigenschaften komplexer Fluide beschäftigen, die hier aber aus Gründen der Prägnanz nicht weiter zitiert wer-

den sollten.

2.2 Instabilitäten in industriellen Verarbeitungsprozessen

Wie bereits mehrfach erwähnt ist die Rheologie komplexer Fluide eng mit der industriellen Verarbeitung ebensolcher verknüpft. Eine umfassende Beschreibung der hierbei beobachteten Instabilitätsphänomene lieferten Petrie und Denn (Denn & Avenas 1975; Petrie & Denn 1976). Die Motivation hierbei war, dass die Produktionsrate, etwa von Polymerfasern oder -folien, durch eine kritische Flussrate beschränkt ist, oberhalb derer beispielsweise periodische Modulationen des Faserdurchmessers auftreten. Hierbei gibt (Petrie & Denn 1976) einen Überblick über die verschiedenen beobachteten Phänomene, eine genauere theoretische Betrachtung des zugrundeliegenden Spinnprozesses erfolgt in (Petrie & Denn 1976). Die Modellierung und numerische Simulation wurde durch Denn später vertieft (Cain & Denn 1988; Gagon & Denn 1981).

In (Petrie & Denn 1976) charakterisieren Denn und Petrie zwei Arten von Instabilitäten: Zugresonanzen, die am düsenfernen Ende einer Faser aus gezogener Polymerschmelze auftreten, und Schmelzbruch, der im Zu- und Ablauf der Extrusionsdüse auftritt. Die Zugresonanz führt dabei zu den bereits beschriebenen Oszillationen des Faserdurchmessers, während der Schmelzbruch zu letztlich unregelmäßigen Verwerfungen der Polymeroberfläche führt. Dabei wird für die Zugresonanzen auf Sekundärliteratur verwiesen, eine genauere Analyse erfolgt lediglich für den Schmelzbruch. Als Instabilitätsmechanismus für diesen werden rheologische Effekte, insbesondere Scherverdünnung, angeführt. Weitere Punkte, die eine Rolle spielen, sind die spezifische Struktur des verwendeten Polymers, sowie die Geometrie der Düse. Insbesondere der letztere wird im Rahmen der Untersuchung von Kontraktionsströmungen in der Literatur genauer erörtert.

Chronologisch vor Denns Betrachtungen liegen bereits seine und Avenas' analytische und numerische Untersuchungen zum Spinnvorgang (Denn & Avenas 1975). Hierzu werden die elastischen Eigenschaften der Polymerschmelze durch das bereits erwähnte UCM-Modell beschrieben. Neben der numerischen Simulation des Spinnvorgangs wird auch eine analytische Betrachtung asymptotischer Grenzfälle durchgeführt. Zentrale Ergebnisse waren die Simulation eines kontinuierlichen Übergangs von Newton'schem zu viskoelastischem Fließverhalten und die Existenz einer kritischen Dehnungsrate, oberhalb derer die Dehnungsspannungen kontinuierlich steigen.

2.3 Untersuchung des Instabilitätsmechanismus

Nachdem viskoelastische Instabilitäten bis dato eher auf phänomenologische Weise nach der Beobachtung von ungewollten Effekten bei industriellen Fertigungsprozessen beobachtet wurden, wurde der Instabilitätsmechanismus als solcher ab

2.3 Untersuchung des Instabilitätsmechanismus

den frühen 90er Jahren untersucht. Eine wichtige Rolle, insbesondere wegen der wohldefinierten und experimentell gut kontrollierbaren Randbedingungen, spielt hierbei die Untersuchung von Strömungen in Couette–Taylor–Zellen, wie sie beispielsweise in (Larson *u. a.* 1990) geschildert wird. Der vorliegende Aufsatz umfasst neben einer umfassenden theoretischen Betrachtung der Strömungssituation und einer Stabilitätsanalyse auch den Vergleich mit experimentell gewonnenen Daten. Als Ergebnis kann hieraus das nach den Autoren Larson, Muller und Shaqfeh so benannte LMS-Argument für viskoelastische Instabilitäten festgehalten werden. Neben der Originalveröffentlichung sei hier auch auf (Morozov & van Saarloos 2007) verwiesen, ein zusammenfassender Artikel, der den Übergang zu instabilen Strömungen in verschiedenen Strömungssituationen zusammenfasst, und an dessen Darstellungen wir uns orientieren.

Dem LMS-Argument zufolge sorgen drei Eigenschaften eines Fluides für viskoelastische Instabilitäten: Elastizität, Anisotropie und ein Memory-Effekt, der zu einer endlichen Relaxationszeit führt, während der sich ein Fluid an eine ursprüngliche Strömungssituation oder Spannungsverteilung ‘erinnern’ kann. Grundlage für das Auftreten einer Instabilität ist eine Differenz der Normalspannungen, die zu einer Dehnung der Polymere führt, wobei durch deren Elastizität Energie gespeichert werden kann. Da bis zur Relaxation in die ursprüngliche Konformation jedoch eine endliche Zeitspanne vergeht, werden die Polymere bis dahin durch die Strömung bewegt, was zum Energietransport führt.

Insbesondere in (Morozov & van Saarloos 2007) wird dieses Argument auf Strömungen mit gekrümmten Stromlinien angewendet, die eine Tendenz zu linearer Instabilität aufweisen, wie in (Larson *u. a.* 1990) hergeleitet. Im Falle gekrümmter Stromlinien werden die Polymere durch den Schergradienten nicht nur gedehnt, sondern auch zum Mittelpunkt der Krümmung gezogen. Dieser Effekt ist, wie bereits in der Einleitung geschildert, als Weissenberg-Effekt bekannt. Da der Schergradient näher am Mittelpunkt größer ist, wirkt auf die nach innen verlagerten Fluidelemente eine noch größere Kraft, es handelt sich somit um einen sich selbst verstärkenden Effekt. Der Einsatzpunkt der Instabilität hängt dabei sowohl von der Weissenbergzahl als auch vom Krümmungsradius ab (insbesondere letzteres Phänomen ist unter dem Begriff ‘Geometric Scaling’ bekannt und wir beispielsweise in (Zilz *u. a.* 2012) eingehend untersucht)

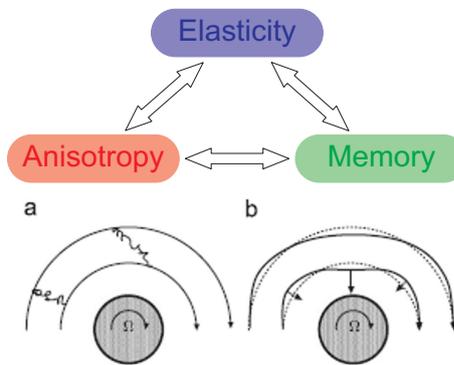


Abbildung 2.1: Links: Zusammenspiel der Instabilitätsmechanismen Elastizität, Anisotropie und Memory-Effekt. Rechts: Zur Illustration der ‘hoop stresses’, Grafik nach (Morozov & van Saarloos 2007).

2 Literatursynopsis

Dass diese Instabilität nicht auf inertiale Effekte zurückzuführen ist, wurde durch Larson in (Larson *u. a.* 1990) in einer Couette–Taylor–Geometrie mit fixem Innen- und rotierendem Außenzylinder nachgewiesen. Da auch in dieser Anordnung Instabilitäten bei einer Taylor–Zahl weit unterhalb der Instabilitätsschwelle beobachtbar waren, scheiden inertiale Effekte als treibende Kraft hinter der Instabilität aus. In anderen Anordnungen (etwa gekrümmten Kanälen oder zwischen rotierenden Platten) kann man durch geeignete Wahl der Viskosität und der Systemabmessungen eine Strömung mit verschwindender Reynoldszahl realisieren, in der ebenfalls Instabilitäten beobachtbar sind.

Eine weitere beliebte Geometrie zur Untersuchung viskoelastischer Instabilitäten besteht aus konzentrisch gelagerten, rotierenden Platten, wobei die Strömung zwischen diesen Platten untersucht wird. Wie in (Schiamberg *u. a.* 2006) geschildert wird, findet sich durch visuelle Messmethoden, d.h. durch Beobachtung der durch Tracerpartikel visualisierten Strömung, ein Übergang aus dem Grundzustand laminarer Strömung über periodische Strömungen mit mehreren Moden hin zu voll ausgebildeter elastischer Turbulenz mit einem breiten Modenspektrum. Experimente in dieser Geometrie trugen auch zu vielen weiteren Veröffentlichungen bei (Burghelea *u. a.* 2005; Groisman & Steinberg 2000, 2004)

Während das LMS–Argument physikalisch den Entstehungsmechanismus viskoelastischer Turbulenz zu erklären vermag, so fehlt jedoch weiterhin ein universelles Kriterium zu deren Einsetzen. Mit der Suche nach einem solchen universellen Kriterium, welches die bis dato gewonnen Erkenntnisse aus Experimenten und theoretischen Betrachtungen einfacher Geometrien mit den Beobachtungen in komplexeren Strömungssituationen verknüpft, befasste sich McKinley Mitte der 90er Jahre (McKinley *u. a.* 1996). Ergebnis dieser Untersuchungen war ein dimensionsloses Kriterium, welches Krümmungen und Spannungen in einem Fluid miteinander vergleicht. Bezeichnet man mit $\dot{\gamma}$ eine charakteristische Scherrate, mit τ_{11} die Zugspannung in Fließrichtung in einem viskoelastischen Fluid mit der Relaxationszeit λ und einer typischen Geschwindigkeit \bar{U} in einer Geometrie mit charakteristischem Krümmungsradius ρ , so kann die Strömung turbulent werden, falls

$$\sqrt{\frac{\lambda \bar{U}}{\rho} \frac{\tau_{11}}{\eta_0 \dot{\gamma}}} \geq \mathcal{M}_c \quad (2.1)$$

zumindest lokal erfüllt wird. Diese Gleichung ist auch als *Pakdel–McKinley–Kriterium* bekannt ist. Dabei ist \mathcal{M}_c eine dimensionslose Konstante, die experimentell oder durch Simulationen in Abhängigkeit von der verwendeten Geometrie und der Rheologie des verwendeten Fluids zu bestimmen ist. Für gekrümmte Kanäle liegt sie bei $\mathcal{M}_c = 1.75$ (simulativ) oder $\mathcal{M}_c = 0.68$ (experimentell) (Zilz *u. a.* 2012). Für einfache, exemplarische Strömungssituationen führten McKinley und Pakdel auch analytische Ausdrücke für \mathcal{M}_c ein.

Nach Pakdel und McKinley genügt eine zumindest lokale Erfüllung dieses Kriteriums, da durch die endliche Relaxationszeit Störungen in Richtung der se-

2.3 Untersuchung des Instabilitätsmechanismus

kundären Strömung advektiert werden und damit ihrerseits für Änderungen des Krümmungsradius der Stromlinien sorgen. An diesen Stellen kann dann unter Umständen das Pakdel–McKinley–Kriterium erneut erfüllt werden, so dass insgesamt eine instabile Strömung entsteht. Diese Argumentation unterscheidet sich nur unwesentlich vom LMS–Argument.

Herausragend ist dabei die Bandbreite verschiedener Strömungssituationen, die das Pakdel–McKinley–Kriterium abdeckt. Als generisches System zur Veranschaulichung wird auch in (McKinley *u. a.* 1996) wieder das Taylor–Couette–System betrachtet (s. Abb. 2.2). Für dieses lassen sich, bei Verwendung eines Maxwell–Modells eines viskoelastischen Fluids, sofort die Zugspannung $\tau_{11} = 2\eta\lambda\dot{\gamma}^2$ und eine typische Geschwindigkeit durch die Advektionsgeschwindigkeit am Innenzylinder, $U = \Omega_1 R_1$ angeben. Der Krümmungsradius der Stromlinien ist bei nicht zu großer Spaltweite zwischen Innen– und Außenzylinder durch den Radius des Innenzylinders gegeben, es gilt dann $\rho = R_1$. Setzt man diese in Gl. (2.1) ein, so erhält man

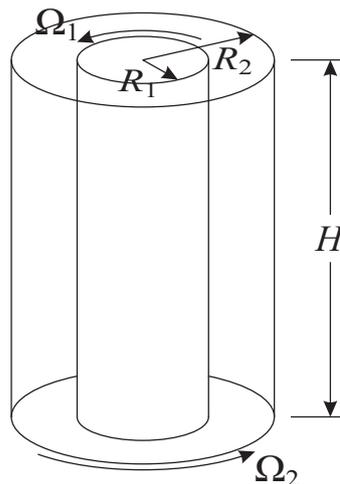


Abbildung 2.2: Couette–Taylor–Zelle mit unabhängig drehbarem Außen– und Innenzylinder mit Radien R_1 bzw. R_2 und Höhe H .

$$\sqrt{\frac{\lambda \bar{U}}{\rho} \frac{\tau_{11}}{\eta_0 \dot{\gamma}}} = \left(\frac{\lambda (\Omega_1 R_1)}{R_1} \frac{2\eta\lambda\dot{\gamma}^2}{\eta\dot{\gamma}} \right)^{1/2} = \sqrt{2\text{DeWi}} = \sqrt{2\Gamma} \text{Wi} \geq \mathcal{M}_c, \quad (2.2)$$

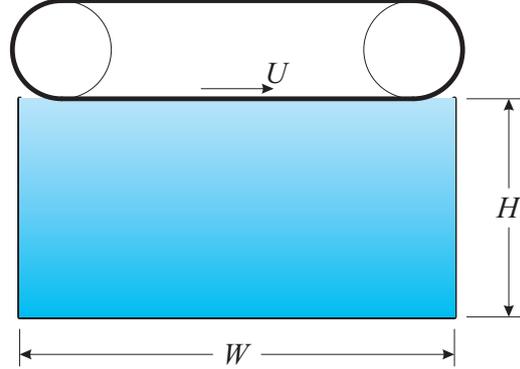
worin mit Wi die Weissenberg– und mit De die Deborah–Zahl bezeichnet wird¹. Beide sind in diesem Fall durch die relative Spaltweite $\Gamma = d/R_i$ miteinander verknüpft. Durch eine lineare Stabilitätsanalyse lässt sich numerisch $\mathcal{M}_c \approx 8.37$ berechnen.

Als Beispiel für die Übertragbarkeit von Gl. (2.1) auf komplexere Strömungen wird die deckelgetriebene Hohlraumströmung in einer Rechteckgeometrie angeführt (vgl. Abb. 2.3). Bezeichnet man mit H und W Höhe und Breite dieser Geometrie, und mit $\Lambda = H/W$ das Aspektverhältnis, so kann man durch die

¹Obwohl beide Zahlen mathematisch äquivalent sind, so sind sie doch unterschiedlich definiert. Die Deborah–Zahl De vergleicht die mikroskopische Relaxationszeit λ eines Fluides mit einer typischen advektiven Zeitskala T , $\text{De} = \lambda/T$. Verwendet man als typische Zeitskala die inverse Scherrate, $T = \dot{\gamma}^{-1}$, so liegt die Weissenberg–Zahl Wi vor, $\text{Wi} = \lambda\dot{\gamma}$. Eine “physikalische” Definition der Weissenbergzahl folgt aus dem Vergleich von Normal– und Scherspannungen in einer Scherströmung (Galindo-Rosales *u. a.* 2014; McKinley *u. a.* 1996).

2 Literatursynopsis

Abbildung 2.3: Anordnung zur Herstellung einer deckelgetriebenen Hohlraumströmung. Auf der Oberseite des Behälters kann ein Förderband auf eine Linear­geschwindigkeit U eingestellt werden.



gewichtete Summe $a/H + b/W = 1/\rho$ einen gewichteten mittleren Krümmungsradius definieren, da weder H noch W alleine als Längenskalen für die Advektionslänge geeignet sind. Setzt man dann ferner $\bar{U} \sim U$ als Skalengröße für die Geschwindigkeit und führt zusätzlich das dimensionslose Viskositätsverhältnis $\beta = \eta_s/(\eta_s + \eta_p)$ als Anteil der Lösungsmittelviskosität an der Gesamtviskosität ein, so liefert das Pakdel–McKinley–Kriterium

$$\sqrt{\frac{\lambda \bar{U}}{\rho} \frac{\tau_{11}}{\eta_0 \dot{\gamma}}} = \left\{ \lambda U \left(\frac{a}{H} + \frac{b}{W} \right) 2(1 - \beta) \lambda U \left(\frac{a}{H} + \frac{b}{W} \right) \right\}^{1/2} \geq \mathcal{M}_c \quad (2.3)$$

Zur experimentellen Überprüfung formt man diese dergestalt um, dass man die kritische Weissenbergzahl Wi_c als Funktion des Aspektverhältnis Λ darstellen kann, und erhält

$$Wi_c \left\{ \underbrace{a \frac{\sqrt{2(1-\beta)}}{\mathcal{M}_c}}_{=A} + \underbrace{b \frac{\sqrt{2(1-\beta)}}{\mathcal{M}_c}}_{=B} \right\} \Lambda = 1 \quad (2.4)$$

Demzufolge müsste eine Auftragung von Wi_c^{-1} gegen Λ eine Gerade mit y -Achsenabschnitt A und Steigung B ergeben, was experimentell zu bestätigen war. Ähnliche Betrachtungen führten auch bei der Simulation der Strömung um ein zylinderförmiges Hindernis auf eine gute Übereinstimmung zwischen aus Pakdel–McKinley–Kriterium vorhergesagter und simulativ bestimmter Instabilitätsschwelle.

Abschließend betrachtet werden neben den geometrischen Aspekten noch rheologische Aspekte, wie Scherverdünnung und ein Relaxationsspektrum anstelle einer einzigen Relaxationszeit betrachtet. Zu ersterem Aspekt bleibt anzumerken, daß dieser sich durch die Verwendung eines scherratenabhängigen $\mathcal{M}(\dot{\gamma})$ abbilden lässt. Zur Berücksichtigung eines (diskreten) Relaxationsspektrums betrachtet man einen Spannungstensor, der eine Summe über Spannungstensoren für jede spektrale Mode darstellt, wobei in der linearen Stabilitätsanalyse jede

Mode einzeln behandelt wird. Das Pakdel–McKinley–Kriterium lässt sich dann umschreiben als Summe über die Kriterien für jede einzelne Mode. Erneut zeigt sich bei Vergleichen mit Messdaten aus einem Kegel–Platte–Rheometer eine qualitative Übereinstimmung mit den Vorhersagen des Kriteriums.

2.4 Elastische Instabilitäten in Kanalströmungen

Mit dem Aufkommen mikrofluidischer, chemischer und biologischer Reaktoren wird die Untersuchung viskoelastischer Turbulenz zu einer neuen wissenschaftlichen Grundlage industrieller Prozesse. Die Dimensionen von Probenbehältern und Verbindungskanälen etwa in sogenannten *Lab-on-a-Chip*-Systemen verhindern durch ihre geringen Abmessungen im Bereich von ca. $100\ \mu\text{m}$ das Entstehen inertialer Turbulenz, wie sie allerdings für Vermischungsprozesse benötigt wird (Burghelea *u. a.* 2004b; Simmonet & Groisman 2005). Auch Kühlungsprozesse laufen bei turbulenter Strömung des Kühlmediums wesentlich effizienter ab (Sadedghi *u. a.* 2011).

Die Grundlagen der Thematik wurden im wesentlichen von Steinberg und seinen Mitarbeitern erarbeitet (Groisman & Steinberg 1998, 2000, 2001). Die verwendeten experimentellen Methoden umfassten dabei qualitative Ansätze wie die Fluoreszenzmessung von Farbstoffkonzentrationen wie auch quantitative Geschwindigkeitsmessungen mittels Particle Imaging Velocimetry (PIV) oder Laser–Doppler Anemometry (LDA). Der Fokus der Messungen lag dabei in erster Linie auf der Untersuchung des Mischungsverhaltens, insbesondere der Skalierung der Mischungslänge und dem Abgleich mit theoretischen Vorhersagen (Burghelea *u. a.* 2004a; Jun & Steinberg 2010). Dabei wurde als Strömungsgeometrie ein Kanal mit 60 verbundenen Halbringen verwendet, als Fluid diente eine Lösung von Polyacrylamid (PAAm) in einer wässrigen Zuckerlösung als Lösungsmittel. Der Kanal besaß zwei Zugänge, durch die dieses Fluid ungefärbt und mit einer kleinen Menge fluoreszierenden Farbstoffs (FITCD oder Fluoreszin) eingespeist werden konnte. Von dieser Geometrie existierten eine Ausführung mit einer lichten Weite von ca. $100\ \mu\text{m}$ und eine um einen Faktor 30 vergrößerte, makroskopische Ausführung. Diese Beschreibung des Aufbaus ist (Groisman & Steinberg 2004) entnommen, sie liegt jedoch allen Veröffentlichungen dieser Forschergruppe zugrunde.

Erste Untersuchungen dienten der Charakterisierung der Strömung. Dazu wurde einerseits der Druckabfall in der mikrofluidischen Geometrie mit dem einer Strömung eines Newton’schen Lösungsmittels verglichen, wobei ab einer gewissen kritischen Fließrate eine Abweichung beider Druckabfälle voneinander messbar ist. Parallel dazu beobachtet man bei Messungen mit gefärbter und ungefärbter Polymerlösung eine bestmögliche Durchmischung beider Lösungen, feststellbar an einer Minimierung der zeitlichen Intensitätsschwankungen (Groisman & Steinberg 2004). Im Bezug auf diese Farbstoffmessung ist festzuhalten, dass aufgrund der mit noch höheren Fließraten verbundenen verringerten Residenzzeit oberhalb der kritischen Fließrate die Intensitätsschwankungen wieder ansteigen.

2 Literatursynopsis

Der turbulente Charakter des Geschwindigkeitsfeldes kann durch eine punktuelle LDA-Messung des Geschwindigkeitsfeldes und Bestimmung des Exponenten belegt werden.

Von besonderem Interesse ist, wie bereits gesagt, der Bezug zwischen dem Mischungsverhalten in mikrofluidischen Kanälen und viskoelastischer Turbulenz als Antrieb des Mischungsverhaltens (Burghelea *u. a.* 2004a). Diese Veröffentlichung beschäftigt sich eher mit qualitativen Messungen am Geschwindigkeitsfeld durch PIV-Messungen an der mikrofluidischen Variante der Geometrie. Die Strömung ist in diesem Fall druckgetrieben, ab einer kritischen Druckdifferenz stellt man dabei einen Anstieg der Fluktuationsamplitude fest. Das Geschwindigkeitssignal weist schon nach Anschauung starke Fluktuationen auf, die Autokorrelationsfunktion des zeitabhängigen Geschwindigkeitssignals fällt praktisch sofort auf Rauschniveau ab. Eine Auftragung der mittleren Geschwindigkeit gegen die angelegte Druckdifferenz, die bei Newton'schen Lösungsmitteln eine lineare Funktion darstellt, zeigt, daß bei Polymerlösungen Proportionalität nur bis zu einer bestimmten Weissenbergzahl gegeben ist. Oberhalb dieser kritischen Weissenbergzahl steigt die mittlere Geschwindigkeit langsamer und nichtlinear (Jun & Steinberg 2010).

Zur eingehenden Untersuchung des Mischungsverhaltens wird erneut die Farbstoffkonzentration an verschiedenen Windungen des Kanals durch die Stärke des Fluoreszenzsignals gemessen. Dabei fällt auf, daß mit zunehmender Entfernung vom Anfang des Kanals eine Angleichung der Konzentration zu beobachten ist, was auf einen vorhandenen Materialtransport zwischen den beiden Kanalhälften hinweist. Intensitätsmessungen in der Querschnittsebene des Kanals weisen auf Dean-artige Wirbel als Mechanismus dieses Materialtransports hin, sie werden quantitativ in dieser Veröffentlichung nicht behandelt, sind aber Gegenstand späterer Veröffentlichungen und auch Teil der vorliegenden Arbeit.

Die Mischungslänge als charakteristische Länge, über die sich die Farbstoffkonzentration ändert, wird aus einer doppelt-logarithmischen Auftragung der Fluktuationsamplitude der Farbstoffkonzentration ermittelt, ist aber auch durch theoretische Betrachtungen Gegenstand späterer Untersuchungen (Jun & Steinberg 2010). Ein theoretischer Wert für die Mischungslänge lässt sich aus den Einträgen des Turbulenzdiffusionstensors herleiten, diese Mischungslänge liegt aber um ein Vielfaches unterhalb der experimentell gemessenen. Ursache hierfür sind beobachtete "Jets" gefärbter Lösung, die willkürlich aus der Grenzschicht der Krümmung in den Volumenbereich des Kanals einschließen und so die bereits erreichte Homogenität gefärbter und ungefärbter Lösungen stören. Diese Jets sind auch in numerischen Simulationen zu beobachten, analytisch liegen zu ihnen noch keine Betrachtungen vor.

Jenseits der Arbeiten von Steinberg et al., die sich insbesondere mit der voll ausgebildeten Turbulenz beschäftigen, stellt auch das Übergangsregime oszillierender Strömungen einen Bereich aktueller Forschung dar (Zilz *u. a.* 2012). Dieser Artikel vereinigt in erster Linie analytische und numerische Betrachtungen zu einer Polymerlösung aus Polyethylenoxid (PEO) in einer wässrigen Glycerinlösung

2.5 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

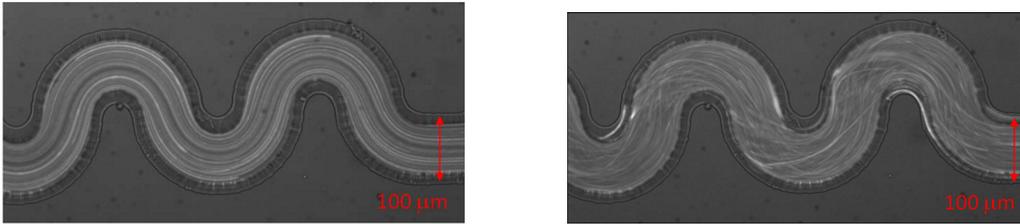


Abbildung 2.4: Farbstoffvisualisierung der Strömung einer viskoelastischen Flüssigkeit durch einen Kanal mit 0.100 mm Breite. Links: Laminare Strömung bei niedrigen Weissenbergzahlen. Rechts: Turbulente Durchmischung bei hohen Weissenbergzahlen. Aufnahmen aus (Zilz *u. a.* 2012).

in einem Kanal mit nur wenigen Windungen ($N_{\max} = 4$). Die Ergebnisse der Simulation werden qualitativ durch Farbstoffmessungen überprüft (s. Abb. 2.4).

Eine numerische Simulation des Strömungsverhaltens enthüllt die Anwesenheit von sekundären Wirbeln im Bereich laminarer als viskoelastisches Analogon zu Dean-Strömungen. Bei Überschreiten der kritischen Weissenbergzahl stellt sich eine Oszillation der Geschwindigkeitskomponente in Fließrichtung ein, mit einer Periode im Bereich von 10λ , wobei λ erneut die Polymerrelaxationszeit bezeichnet. Die Erwartung einer oszillatorischen Instabilität wird mit dem Vorhandensein einer stationären Sekundärströmung im Grundzustand begründet.

2.5 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

Sekundäre Strömungen Newton'scher Fluide in gekrümmten Röhren wurden zunächst durch Dean aus der linearen Stabilitätsanalyse hergeleitet beschrieben (Dean 1927, 1928), betrachtet wurden gekrümmte Röhren, in denen neben der Hauptströmung symmetrische Wirbelpaare, die in Stromrichtung blickend übereinander gestapelt sein sollten. Aus der Entdimensionalisierung der Bewegungsgleichungen lässt sich als dimensionslose Zahl die *Dean-Zahl* $Dn = Re\sqrt{2R/\rho}$ ableiten, wobei ρ die Rohrkrümmung und R den Rohrradius bezeichnen. Eine tiefere greifende numerische und experimentelle Analyse dieser Strömungen (Guglielmini *u. a.* 2011; Sznitman *u. a.* 2012) erlaubt auch eine Größenabschätzung der auftretenden Geschwindigkeitsamplituden, die mit 10 bzw. 1 % der mittleren Fließgeschwindigkeit sehr klein, aber im allgemeinen noch zu messen sein sollten.

Die lineare Stabilitätsanalyse war auch das Mittel der Wahl, um derartige Strömungssituationen für viskoelastische Fluide zu betrachten (Joo & Shaqfeh 1991). Fragestellung war hierbei, ob auch für verschwindende Reynoldszahlen – und damit auch verschwindende Dean-Zahlen – ähnliche sekundäre Wirbelströmungen angeworfen werden können. Durch Lösung des Eigenwertproblems konnte das Strömungsfeld der sekundären Geschwindigkeitskomponenten bestimmt werden, auch für diesen Fall erhält man symmetrische Wirbelpaare als Lösung.

2 Literatursynopsis

Der Mechanismus, der hinter diesen Wirbeln steht, ist Gegenstand gleich mehrerer Veröffentlichungen (Debbaut *u. a.* 1997; Fan *u. a.* 2001; Joo & Shaqfeh 1992, 1994). So findet sich durch eine Betrachtung des Energietransfers zwischen Hauptströmung und sekundären Störungsströmungen, dass das Strömungsfeld der transversalen Geschwindigkeitskomponenten seine Energie in erster Linie aus der axialen Zugspannungskomponente des Polymerspannungstensors bezieht².

Fan *et. al.* ergänzen diesen Mechanismus, indem sie drei Fälle unterscheiden und die Szenarien Newton'scher und nicht-Newton'scher Fluide nebeneinanderhalten. Für Newton'sche Fluide ist der Druckgradient in Wandnähe der treibende Mechanismus dieser Wirbel, für nicht-Newton'sche Kriechströmungen ($Re \approx 0$) ist es ein Zusammenspiel aus Zugspannung in Fließrichtung und den "hoop stresses" aus dem LMS-Argument, für inertial-viskoelastische Strömungen ist es eine Kombination aus axialer Zugspannung und der in Wandnähe verringerten Trägheit des Fluids (Fan *u. a.* 2001).

Eher quantitativer Natur sind die numerischen Untersuchungen von Poole und Alves aus jüngerer Zeit. Durch numerische Simulation wird die Abhängigkeit der Vortexgeschwindigkeit $\dot{S} = \sqrt{V^2 + W^2}$, wobei V und W die sekundären Geschwindigkeitskomponenten sind, von einer Reihe möglicher geometrischer und Materialparameter untersucht. So kann die bereits beschriebene Abhängigkeit der Geschwindigkeitsamplituden von Materialparametern (Xue *u. a.* 1995) bestätigt werden, und auch eine geometrische Skalierung in Abhängigkeit des Krümmungsradius bestätigt werden. Auch kann festgestellt werden, dass die Vortexgeschwindigkeit bis zur kritischen Weissenbergzahl der beschriebenen Strömung linear anwächst, danach nur noch nichtlinear (Poole *u. a.* 2013).

²Wir merken hierzu an dieser Stelle an, dass mit "axial" an dieser Stelle die Komponente in Fließrichtung bezeichnet wird, entsprechend der Originalveröffentlichung. In unserer eigenen Terminologie ist damit die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur azimuthalen (Fließrichtung) und radialen Komponente bezeichnet.

Teil II

Der hydrodynamische Rahmen.

Dynamik Newton'scher Fluide

Im folgenden soll ein Einstieg in die mathematische Formulierung und Beschreibung hydrodynamischer Probleme gewährt werden. Hierzu werden zunächst die Grundgleichungen der Hydrodynamik (Navier–Stokes–Gleichung und Kontinuitätsgleichung) hergeleitet und erklärt, danach werden sie für zwei grundlegende Probleme der im experimentellen Teil der Arbeit betrachteten Strömungsgeometrie gelöst.

3.1 Grundgleichungen der Hydrodynamik

3.1.1 Navier–Stokes–Gleichung

Betrachtet man das zweite Newton'sche Gesetz im Grenzfall kontinuierlicher Massenverteilungen, so gelangt man zu der Darstellung

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{f} \quad (3.1)$$

Die Schreibweise mit der Massendichte ρ ergibt sich aus der vorgenommenen Normierung durch das als infinitesimal angenommene Probevolumen. \mathbf{f} ist ein Vektor externer Kräfte, $\boldsymbol{\Sigma}$ ist der Spannungstensor der auf die Oberfläche des Probevolumens wirkenden Normal- und Scherspannungen, wie sie in Abb. 3.1 veranschaulicht sind.

Der Tensor der Oberflächenspannungen $\boldsymbol{\Sigma}$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

kann dabei durch Multiplikation mit dem Vektor der Normalvektoren in einen Anteil der Diagonaleinträge und einen der Nebendiagonaleinträge zerlegt werden.

3 Dynamik Newton'scher Fluide

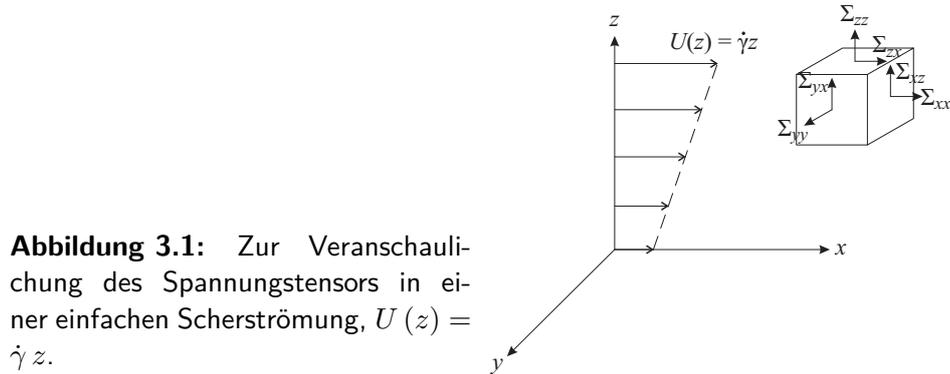


Abbildung 3.1: Zur Veranschaulichung des Spannungstensors in einer einfachen Scherströmung, $U(z) = \dot{\gamma}z$.

Ersterer enthält die Normalspannungen und gibt dann die Druckkräfte in der Flüssigkeit an, letzter ist der Tensor der Scherspannungen. Dieser wird in üblicher Notation mit $\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet. Es gilt kurz:

$$\Sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (3.3)$$

wobei $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$ und 0 sonst. Das negative Vorzeichen von p ergibt sich aus der Tatsache, dass die Normalspannungen dem äußeren Druck in einer ruhenden Flüssigkeit entgegenwirken.

Mit dieser Einsetzung kann Gl. (3.1) umgeschrieben werden zu:

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{f} \quad (3.4)$$

wobei die Spannungs-Dehnungs-Relation

$$\sigma_{ij} = \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.5)$$

angewendet wurde.

Der totale Zeitableitungsoperator $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$ enthält dabei Beiträge sowohl aus der expliziten zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit als auch aus der Tatsache, dass sich das Probevolumen sich in der Flüssigkeit bewegt hat und daher auch eine räumliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes erfasst. Ausgeschrieben nimmt diese Seite von Gl. (3.1) somit die Form

$$\rho (\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{f} \quad (3.6)$$

an. Dies ist die landläufige Formulierung der *Navier-Stokes-Gleichung*. (NSG)

Verwendet man charakteristische Größenskalen für die in der NSG auftretenden physikalischen Größen:

$$\mathbf{r} = L \mathbf{r}' \quad (3.7a)$$

3.2 Geschwindigkeitsfeld im rechteckigen Kanal

$$\mathbf{U} = \bar{U} \mathbf{U}' \quad (3.7b)$$

$$t = \bar{T} t' \quad (3.7c)$$

$$p = \varrho \bar{U}^2 p' \quad (3.7d)$$

so kann man die NSG in dimensionsloser Form schreiben. In den Gln. (3.7a – 3.7d) bezeichnen die gestrichenen Symbole jeweils die dimensionslose Größe. Mit diesen erhält man durch Einsetzen in Gl. (3.6), wobei man $\nabla = \frac{d}{d\mathbf{r}} = 1/L \frac{d}{d\mathbf{r}'}$ beachtet:

$$\frac{\varrho \bar{U} L}{\eta} (\partial_{t'} \mathbf{U}' + (\mathbf{U}' \cdot \nabla') \mathbf{U}') = -\nabla' p' + \eta \nabla'^2 \mathbf{U}' \quad (3.8)$$

Der ebenfalls dimensionsfreie Vorfaktor ist die Reynoldszahl Re , deren weitere physikalische Bedeutung hierdurch klar wird, vergleicht sie nämlich den nichtlinearen, konvektiven Beitrag $(\mathbf{U}' \cdot \nabla') \mathbf{U}'$ mit dem dissipativen, viskosen Beitrag $\eta \nabla'^2 \mathbf{U}'$. Für verschwindende Reynoldszahl vereinfacht sich die NSG durch Entfall der Nichtlinearität. Von diesem Fall wird im weiteren Verlauf noch Gebrauch gemacht werden.

Ausführliche Herleitungen der Navier–Stokes–Gleichung, die Bedeutung der darin auftretenden Terme und ihre Formulierung in anderen Koordinatensystemen finden sich verbreitet in der Literatur (Guyon *u. a.* 2001; Landau & Lifschitz 1991; Wilkes 2006).

3.1.2 Kontinuitätsgleichung

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir Strömungen, deren typische Geschwindigkeiten weit unterhalb der Schallgeschwindigkeit liegen. Daraus lässt sich schließen, dass die Dichteverteilung in der Flüssigkeit homogen und zeitlich stationär ist. Diese Tatsache wird durch die Massenerhaltungsgleichung

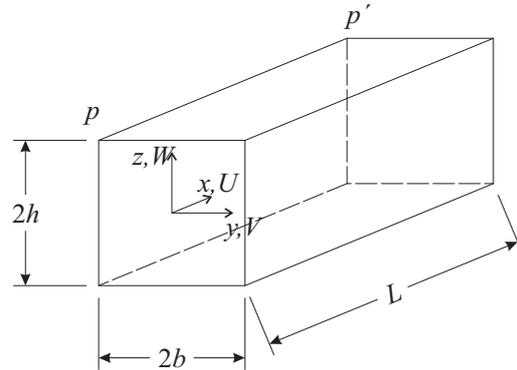
$$\partial_t \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.9)$$

beschrieben. Insbesondere die Stationarität der Dichte führt auf die vereinfachte Form

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.10)$$

Ein hydrodynamisches Problem kann durch Lösung der Navier–Stokes–Gleichung Gl. (3.6) unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung) Gl. (3.10) und eventueller Rand- und Anfangsbedingungen gelöst werden. Eine analytische Lösung ist dabei allerdings meist nur für Systeme mit vereinfachenden Annahmen möglich.

Abbildung 3.2: Strömung durch einen geraden Kanal. $2b$ und $2h$ sind die lichte Weite und Höhe, zwischen den Enden fällt ein Differenzdruck $p' - p$ über die Länge L ab.



3.2 Geschwindigkeitsfeld im rechteckigen Kanal

Wir betrachten einen Kanal der Länge L , zwischen dessen Enden eine Druckdifferenz $p' - p$ abfällt. In einem allgemeineren Fall soll zunächst angenommen werden, dass die lichte Weite und Höhe des Kanals verschieden seien und mit $2b$ bzw. $2h$ bezeichnet seien. Sinnvollerweise wählt man zur Beschreibung des sich stellenden Problems eine Darstellung in kartesischen Koordinaten mit einem Ortsvektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ und $\mathbf{U} = (U, V, W)$. Ein Schema findet sich in Abb. 3.2.

In der beschriebenen Situation kann es nur zu einer Strömung in x -Richtung kommen, alle anderen Geschwindigkeitskomponenten verschwinden. Da die Wände des Kanals unbeweglich sind, lauten die Randbedingungen für diese Geschwindigkeitskomponente

$$U(y = \pm b, z) = U(y, z = \pm h) = 0 \quad (3.11)$$

Ferner sei noch angenommen, dass die Strömung stationär sei ($\partial_t U = 0$) und die Abmessungen des Systems nicht zu groß. In diesem Fall kann der Trägheitsterm $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$ der Navier-Stokes-Gleichung ebenso wie die partielle zeitliche Ableitung vernachlässigt werden. Berücksichtigt man weiterhin, dass der Druckgradient nur eine nicht-verschwindende Komponente in x -Richtung besitzt:

$$\partial_z p = -\frac{p}{L} = -G = \text{const.} \quad (3.12)$$

so vereinfacht sich Gl. (3.6) zu

$$\nabla^2 U = -\frac{G}{\eta} \quad (3.13)$$

Dies ist eine *Poisson-Gleichung* für die Geschwindigkeitskomponente U . Da sie inhomogen ist, müssen die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und die spezielle Lösung des inhomogenen Problems separat berechnet werden.

3.2 Geschwindigkeitsfeld im rechteckigen Kanal

Spezielle Lösung des inhomogenen Problems. Wir berechnen aus Gründen der Einfachheit zunächst die spezielle Lösung des inhomogenen Problems, $U_s(y)$, von der wir annehmen, dass sie nur von einer Variable abhängt. Gl. (3.13) vereinfacht sich dann zu:

$$\frac{d^2 U_s}{dy^2} = -\frac{G}{\eta} \quad (3.14)$$

Zweifaches Integrieren und Berücksichtigung der Randbedingungen aus Gl. (3.11) führt dann sofort auf die Lösung

$$U_s(y) = \frac{G}{2\eta} (b^2 - y^2) \quad (3.15)$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Die zu diesem Problem gehörende homogene Differentialgleichung ist die *Laplace-Gleichung*

$$\nabla^2 U_h(y, z) = 0 \quad (3.16)$$

Wie in der Literatur weithin bekannt, wird eine solche Differentialgleichung am ehesten durch einen Produktansatz $U_h(y, z) = \varphi(y) \cdot \psi(z)$ gelöst, bei dem jede Ansatzfunktion nur noch von einer Variable des Problems abhängig ist. Ein Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (3.16) führt dann bei Ausschreiben des Laplaceoperators nach Division durch U_h auf:

$$\frac{\partial_y^2 \varphi(y)}{\varphi(y)} + \frac{\partial_z^2 \psi(z)}{\psi(z)} = 0 \quad (3.17)$$

Beide Summanden sind voneinander unabhängig gleich einer Konstante $-k^2$. So lassen sich die Ansatzfunktionen φ und ψ berechnen:

$$\varphi(y) = A \cos(k_n y) + B \sin(k_n y) \quad (3.18a)$$

$$\psi(z) = C \cosh(k_n z) + D \sinh(k_n z) \quad (3.18b)$$

Die Randbedingungen fordern in diesem Problem symmetrische Funktionen, man kann sofort die Konstanten B und D gleich 0 setzen. Weiterhin folgt aus den Randbedingungen $k_n = (2n + 1)\pi/2b = \omega_n/b$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Lösung des allgemeinen Problems ergibt sich dann durch die Aufsummation über alle Moden n :

$$U_h(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\omega_n \frac{y}{b}\right) \cosh\left(\omega_n \frac{z}{b}\right) \quad (3.19)$$

Die Lösung der Differentialgleichung Gl. (3.13) ist dann die Überlagerung von spezieller und allgemeiner Lösung, $U(y, z) = U_s(y) + U_h(y, z)$:

3 Dynamik Newton'scher Fluide

$$\begin{aligned}
 U(y, z) &= U_s(y) + U_h(y, z) \\
 &= \frac{G}{2\eta} (b^2 - y^2) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\omega_n \frac{y}{b}\right) \cosh\left(\omega_n \frac{z}{b}\right) \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Noch zu bestimmen sind die Entwicklungskoeffizienten A_n . Hierzu zerlegt man die spezielle Lösung Gl. (3.15) in ihre Fouriermoden mit Entwicklungskoeffizienten E_n , $U_s(y) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(k_n y)$. Die Entwicklungskoeffizienten können dann durch Integration bestimmt werden:

$$U_s(y) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(k_n y) \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{G}{2\eta b} \int_{-b}^b dy (b^2 - y^2) \cos\left(\omega_n \frac{y}{b}\right) \\
 &= \frac{2Gb^2}{\eta} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3} \quad (3.21b)
 \end{aligned}$$

Einsetzen von Gl. (3.21b) in Gl. (3.20) führt dann zunächst auf

$$U(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cosh\left(\omega_n \frac{z}{b}\right) + \frac{2Gb^2}{\eta} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3} \right) \cos\left(\omega_n \frac{y}{b}\right) \quad (3.22)$$

und nach erneutem Beachten der Randbedingung $U(y, z = h) = 0$ auf

$$A_n = -\frac{2Gb^2}{\eta} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3} \frac{1}{\cosh\left(\omega_n \frac{h}{b}\right)} \quad (3.23)$$

Insgesamt folgt also das Geschwindigkeitsfeld

$$U(y, z) = \frac{G}{2\eta} \left\{ b^2 - y^2 - 4b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3} \frac{\cosh\left(\omega_n \frac{z}{b}\right)}{\cosh\left(\omega_n \frac{h}{b}\right)} \cos\left(\omega_n \frac{y}{b}\right) \right\} \quad (3.24)$$

In den von uns durchgeführten Experimenten ist der Druckgradient für gewöhnliche experimentell nicht zugänglich. Anstelle dessen verwenden wir die Flussrate $Q = 4hb\bar{U}$. Um diese zu bestimmen, wird das Geschwindigkeitsprofil entlang y und z integriert:

3.3 Geschwindigkeitsfeld im gekrümmten Kanal

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{-b}^b dy \int_{-h}^h dz U(y, z) \\
 &= 4bh \underbrace{\frac{Gb^2}{3\eta} \left[1 - \frac{6b}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh\left(\omega_n \frac{h}{b}\right)}{\omega_n^5} \right]}_{=\bar{U}} \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

In Abb. 3.3 wird ein zweidimensionaler Plot des durch die mittlere Geschwindigkeit \bar{U} normierten Geschwindigkeitsprofils gezeigt. Ein Vergleich mit diesem Modell errechneter Werte mit denen aus einer Messung ist in Abb. 3.5 gezeigt.

3.3 Geschwindigkeitsfeld im gekrümmten Kanal

Im folgenden betrachten wir einen halbkreisförmig gebogenen Kanal mit quadratischem Querschnitt (s. Abb. 3.4). Der Radius der inneren bzw. äußeren Wand sei mit R_1 bzw. R_2 bezeichnet, der mittlere Krümmungsradius beträgt somit $\bar{R} = (R_1 + R_2) / 2$. Die Kanalbreite $R_2 - R_1$ sei $2b$. Zur Beschreibung des Problems wählt man nun ein System aus Polarkoordinaten $\mathbf{r} = (\theta, r, z)$, der Geschwindigkeitsvektor besitzt erneut die Komponenten U, V und W .

Es liegen auch bei diesem Problem no-slip Randbedingungen für die Wände des Kanals vor, ausformuliert lauten diese:

$$\mathbf{U}(\theta, r = R_1, z) = \mathbf{U}(\theta, r = R_2, z) = \mathbf{U}(\theta, r, z = \pm b) = 0 \quad (3.26)$$

Der Druckgradient liegt erneut zwischen den Enden des Kanals an. Allerdings fällt er diesmal über den überstrichenen Winkelbereich von π ab, was aufgrund der radialen Koordinate dazu führt, dass der Druck auf der Innenseite des Kanals über eine geringere Distanz abfällt als auf der Außenseite. Eine Abschätzung mit dem mittleren Radius \bar{R} würde erneut zu einem symmetrischen Geschwindigkeitsprofil ähnlich dem des geraden Kanals führen, exakterweise rechnen wir hier aber mit dem positionsabhängigen Druckgradienten:

$$\frac{1}{r} \partial_{\theta} p = \frac{p' - p}{r\pi} = -\frac{p}{\pi r} = -\frac{G}{r} \quad (3.27)$$

Berücksichtigt man Massenerhaltung und Stationarität der Strömung, so gelangt man erneut zu einer Poissongleichung für die azimuthale Geschwindigkeitskomponente $V(r, z)$:

$$\nabla^2 U(r, z) = -\frac{G}{\eta r} \quad (3.28)$$

3 Dynamik Newton'scher Fluide

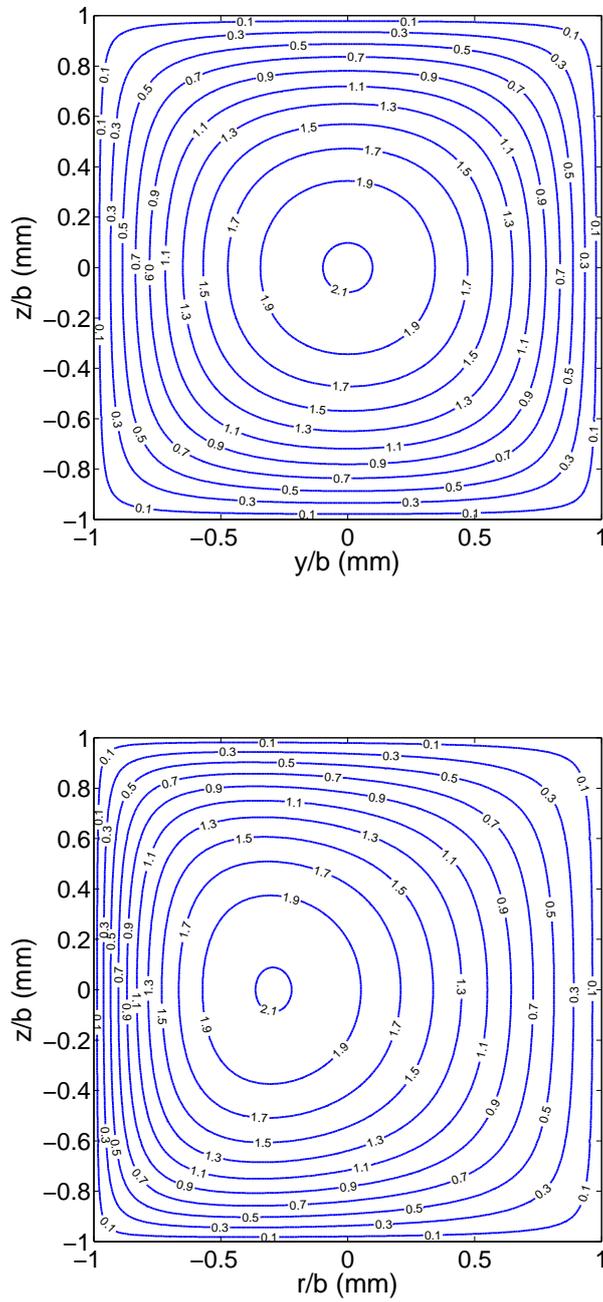


Abbildung 3.3: *Oben:* Konturplot des berechneten Geschwindigkeitsprofils, normiert durch die mittlere Geschwindigkeit, $U(y,z)/\bar{U}$, im geraden Kanal. *Unten:* Gleiche Auftragung für einen gekrümmten Kanal.

3.3 Geschwindigkeitsfeld im gekrümmten Kanal

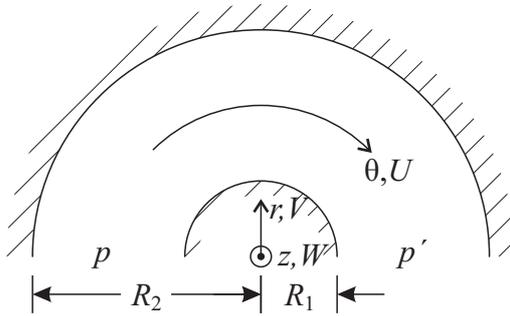


Abbildung 3.4: Halbkreisförmig gekrümmter Kanal mit Wandradien R_1 und R_2 . Die Druckdifferenz $p' - p$ fällt über einen Winkel von π ab.

oder, mit dem in Polarkoordinaten ausgeschriebenen Laplace-Operator:

$$\partial_r^2 U + \frac{1}{r} \partial_r U + \partial_z^2 U = -\frac{G}{\eta r} \quad (3.29)$$

Zur Lösung wenden wir dieselbe Strategie an wie bereits im vorhergehenden Abschnitt, wir lösen also zunächst das inhomogene Problem unter der Annahme, die spezielle Lösung sei rein von der Radialkoordinate abhängig, und lösen danach die homogene Differentialgleichung (Laplace-Gleichung).

Lösung des inhomogenen Problems. Es sei $U_s = U_s(r)$ die spezielle Lösung des inhomogenen Problems. Unter dieser Annahme muss die partielle Ableitung in axialer Richtung (z) in Gl. (3.29) nicht mehr berücksichtigt werden, die zu lösende Differentialgleichung lautet also:

$$\partial_r^2 U + \frac{1}{r} \partial_r U = -\frac{G}{\eta r} \quad (3.30)$$

und besitzt die Lösung

$$U_s(r) = C_1 \ln r + C_2 - \frac{Gr}{2\eta} \quad (3.31)$$

die Konstanten $C_{1,2}$ können dabei aus der Randbedingung $U(R_{1,2}) = 0$ bestimmt werden. Sie lauten:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{G}{2\eta} \frac{R_1 - R_2}{\ln(R_1/R_2)} \\ C_2 &= \frac{G}{2\eta} \frac{R_1 \ln R_2 - R_2 \ln R_1}{\ln(R_1/R_2)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Alternativ ergibt sich, setzt man eine reine Abhängigkeit in axialer Richtung voraus, $U_s = U_s(z)$, analog zum vorherigen Abschnitt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U_s}{dz^2} = -\frac{G}{\eta r} \quad (3.33)$$

3 Dynamik Newton'scher Fluide

mit der Lösung

$$U_s(z) = \frac{G}{2\eta r} (b^2 - z^2) \quad (3.34)$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung. Die zum Problem gehörende homogene Differentialgleichung ist die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten:

$$\nabla^2 U_h(r, z) = \partial_r^2 U_h + \frac{1}{r} \partial_r U_h + \partial_z^2 U_h = 0 \quad (3.35)$$

Mit einem Produktansatz $U_h(r, z) = \chi(r) \cdot \zeta(z)$ analog zur bereits verwendeten Vorgehensweise erhält man so die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\chi} \left(\partial_r^2 \chi + \frac{1}{r} \partial_r \chi \right) = -\frac{1}{\zeta} \partial_z^2 \zeta \quad (3.36)$$

Beide Seiten der Gleichungen hängen von verschiedenen Variablen ab und sind gleich bis auf eine Separationskonstante k^2 , von deren Vorzeichen die Form der Lösung abhängt. Man erhält dann für die rechte Seite der Gleichung die beiden möglichen Varianten

$$k^2 < 0 \longrightarrow \frac{d^2 \zeta}{dz^2} - k^2 \zeta = 0 \quad (3.37a)$$

$$k^2 > 0 \longrightarrow \frac{d^2 \zeta}{dz^2} + k^2 \zeta = 0 \quad (3.37b)$$

Die zugehörigen Lösungen sind dann (Indizes repräsentieren das Vorzeichen von k^2):

$$\zeta_-(z) = A \cosh(k_n z) + B \sinh(k_n z) \quad (3.38a)$$

$$\zeta_+(z) = A \cos(k_n z) + B \sin(k_n z) \quad (3.38b)$$

Die Symmetrie des Profils und die Randbedingungen Gl. (3.26) erlauben es uns, in den Gln. (3.38a, 3.38b) die ungeraden Funktionen Sinus (Sinus hyperbolicus) zu verwerfen und somit $B = 0$ anzunehmen. Für die Wellenzahl k_n gilt dann $k_n = (2n + 1) \pi / 2b$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Für die linke Seite der Gleichung gilt dementsprechend

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} = \pm k^2 \chi, \quad (3.39)$$

was sich durch Multiplikation mit r^2 zu

$$r^2 \frac{d^2 \chi}{dr^2} + r \frac{d\chi}{dr} \mp k^2 r^2 \chi = 0 \quad (3.40)$$

3.3 Geschwindigkeitsfeld im gekrümmten Kanal

umformen lässt. Dies ist die *Bessel-Differentialgleichung*, deren Lösung die Bessel- und Neumann-Funktionen $J_0(k_n r)$ und $Y_0(k_n r)$ bzw. $I_0(k_n r)$ und $K_0(k_n r)$ sind. Die vorzeichenabhängigen Lösungen von Gl. (3.40) bestehen dann aus den Superpositionen (Indizes repräsentieren die Vorzeichenwahl):

$$\chi_-(R) = C J_0(k_n R) + D Y_0(k_n R) \quad (3.41a)$$

$$\chi_+(R) = C I_0(k_n R) + D K_0(k_n R) \quad (3.41b)$$

wobei eine Koordinatentransformation $r \rightarrow R = r - \bar{R}$ durchgeführt wurde. Für k_n gilt

$$k_n b = x_{n,0} \approx \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \quad (3.42)$$

wobei $x_{n,0}$ die n -te Nullstelle der Besselfunktion $J_0(k_n b)$ ist. Aus Symmetriegründen kann hierbei auf die ungeraden Funktionen $Y_0(k_n r)$ und $K_0(k_n r)$ verzichtet werden, d.h. es ist $D = 0$. Da wir eine Rotationsinvarianz in azimuthaler Richtung annehmen, berücksichtigen wir ferner immer den Fall $m = 0$ bei Angabe der Bessel-Funktion. Die Besselfunktionen bilden ebenfalls ein orthogonales Funktionensystem, entsprechend lassen sich die Lösungen von Gl. (3.35) in einer Modenentwicklung darstellen:

$$U_{h,-}(R, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cosh(k_n z) J_0(k_n R), \quad k_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2b} \quad (3.43a)$$

$$U_{h,+}(R, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n z) I_0(k_n R), \quad k_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2b} \quad (3.43b)$$

Im Falle einer Wahl wie in Gl. (3.43a) wäre zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten A_n das Fourier-Bessel-Integral

$$A_n = \frac{2}{b J_1(k_n b)} \int_0^{\infty} dR U_s(R) J_0(k_n R) \quad (3.44)$$

zu lösen, was nach Einsetzen von Gl. (3.31) auf ein analytisch nicht zu berechnendes Integral führt. Wir entscheiden uns daher für eine Darstellung der Lösung wie in Gl. (3.43b) analog zu Gl. (3.23):

$$A_n = -\frac{2Gb^2}{\eta r} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3} \frac{1}{I_0(\omega_n)} \quad (3.45)$$

Hierbei wurde bereits der quadratische Querschnitt des Kanals bei der Berechnung des Arguments der Besselfunktion berücksichtigt. Zusammengenommen erhält man als Lösung für das Geschwindigkeitsprofil:

3 Dynamik Newton'scher Fluide

$$\begin{aligned}
U(r, z) &= U_s(r, z) + U_h(r, z) \\
&= \frac{G}{2\eta r} (b^2 - z^2) - \frac{2Gb^2}{\eta r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3} \cos\left(\omega_n \frac{z}{b}\right) \frac{I_0\left(\omega_n \frac{r-\bar{R}}{a}\right)}{I_0(\omega_n)} \\
&= \frac{G}{2\eta r} \left\{ b^2 - z^2 - 4b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3} \cos\left(\omega_n \frac{z}{b}\right) \frac{I_0\left(\omega_n \frac{r-\bar{R}}{a}\right)}{I_0(\omega_n)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Berechnung der Fließrate. Da auch in diesem Fall experimentell nur die Fließrate kontrollierbar ist, berechnen wir diese durch Integration über den Kanalquerschnitt. Wir berechnen hierzu zunächst getrennt voneinander die mit der speziellen und der homogenen Lösung assoziierten Fließraten, die Gesamtließrate ergibt sich dann aus der Addition $Q = Q_s + Q_h$. Einfach zu berechnen ist das Integral, das auf die mit der speziellen Lösung assoziierten Fließrate führt:

$$Q_s = \frac{G}{2\eta} \int_{-b}^b dz (b^2 - z^2) \int_{R_1}^{R_2} dr \frac{1}{r} = \frac{4Gb^3}{6\eta} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{3.47}$$

Für die mit der homogenen Fließrate assoziierte Fließrate ergibt sich das Integral

$$\begin{aligned}
Q_h &= \frac{2Gb^2}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3 I_0(\omega_n)} \int_{-b}^b dz \cos\left(\omega_n \frac{z}{b}\right) \int_{-b}^b dR \frac{I_0\left(\omega_n \frac{R}{b}\right)}{R + \bar{R}} \\
&= \frac{4Gb^2}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^4 I_0(\omega_n)} \int_{-b}^b dR \frac{I_0\left(\omega_n \frac{R}{b}\right)}{R + \bar{R}}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Um das Integral hierin zu berechnen, muss zunächst eine Reihenentwicklung der Besselfunktion vorgenommen werden. Diese lautet (Gradshteyn & Ryzhik 1994):

$$I_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2j}}{j! \Gamma(j+1)} \approx 1 + \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^4) \tag{3.49}$$

Berücksichtigt man maximal Terme quadratischer Ordnung, so lässt sich das Integral aus Gl. (3.48) berechnen:

$$\int_{-b}^b dR \frac{I_0\left(\omega_n \frac{R}{b}\right)}{R + \bar{R}} \approx \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\omega_n}{b} \left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - 1 \right) \tag{3.50}$$

3.3 Geschwindigkeitsfeld im gekrümmten Kanal

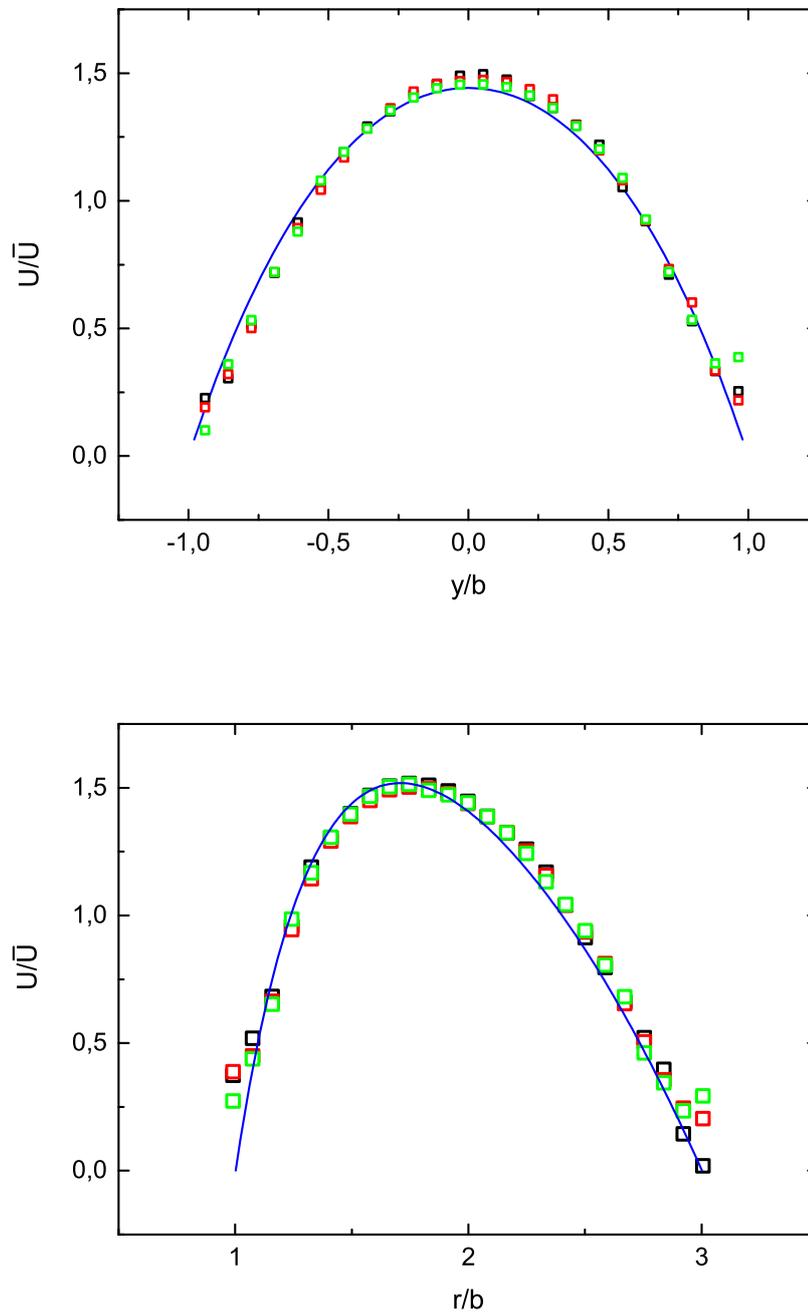


Abbildung 3.5: Gemessene Geschwindigkeitsdaten für drei Fließraten nach Normierung durch die mittlere Geschwindigkeit (offene Quadrate) im Vergleich zum Ergebnis einer analytischen Rechnung (blaue Linie) im geraden (oben) und gekrümmten (unten) Kanal. Allgemein werden die Abweichungen am Rand aufgrund der dortigen höheren Fehleranfälligkeit der PIV-Messmethode größer.

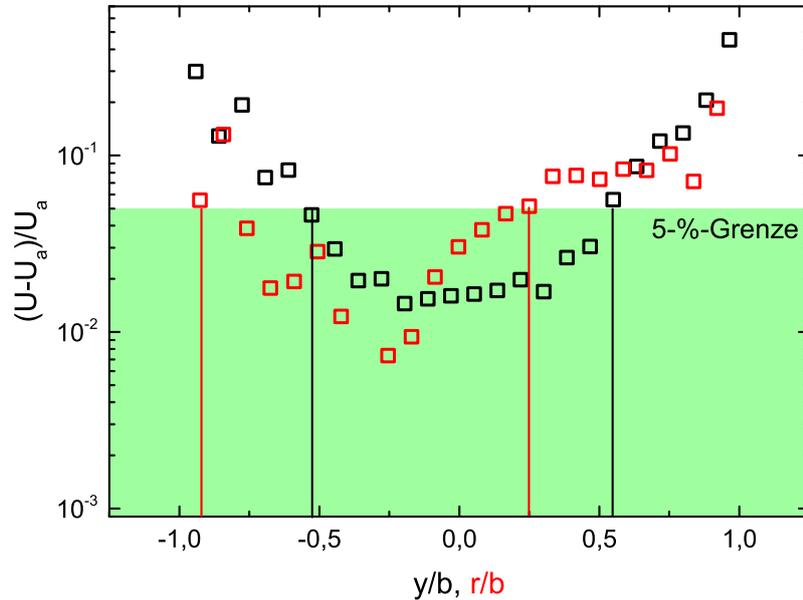


Abbildung 3.6: Ortsabhängige Abweichung zwischen berechneter und gemessener Geschwindigkeit. Um einen Bereich um das Maximum des Geschwindigkeitsprofils herum liegt die Abweichung zwischen gemessener Geschwindigkeit U und berechneter Geschwindigkeit U_a unter 5 % in Bezug auf letztere.

Insgesamt ergibt sich die Fließrate

$$Q \approx \frac{2Gb^3}{3\eta} \left\{ \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^4 I_0(\omega_n)} \left[\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{\omega_n}{b} \left(\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 1 \right) \right] \right\} \quad (3.51)$$

Ein Vergleich der so errechneten Geschwindigkeitsprofile mit gemessenen ist in Abb. 3.5 dargestellt. Die über die mittlere Geschwindigkeit normierten Geschwindigkeitsdaten, gemessen für drei verschiedene Fließraten, decken sich sehr gut der analytisch berechneten Kurve, insbesondere für den geraden Kanal, da für diesen nicht auf eine Reihenentwicklung bei der Berechnung der mittleren Geschwindigkeit zurückgegriffen werden musste. Probleme treten lediglich am Rand auf, wo die zur Auswertung der Messung verwendete PIV-Methode (vgl. Kap. 6.2) naturgemäß fehleranfällig ist.

In Abb. 3.6 geben wir eine Übersicht über die Abweichung zwischen gemessener Geschwindigkeit U und berechneter Geschwindigkeit U_a relativ zu letzterer. Insgesamt bestätigt sich die höhere Genauigkeit über den Kanalbereich um das Maximum des Geschwindigkeitsprofils, hier liegt die Abweichung unter 5 %.

Dynamik komplexer Fluide

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Grundlagen der physikalischen Beschreibung hydrodynamischer Probleme an Newton'schen Fluiden gelegt und die Strömung einer einfachen, Newton'schen Flüssigkeit durch einen geraden und einen gekrümmten Kanal analytisch beschrieben. Im folgenden Kapitel sollen nun die Grundlagen komplexer Fluidmechanik präsentiert werden. Hierzu werden zunächst phänomenologische Modelle zur Beschreibung komplexen Fließverhaltens diskutiert, es folgt eine Darstellung realistischerer konstitutiver Modelle.

4.1 Einfache Modelle komplexen Fließverhaltens

Da die Navier–Stokes–Gleichung die Grundlage zur Beschreibung (Newton'scher) fluidmechanischer Probleme darstellt, sollte ein erster Ansatz zur Beschreibung komplexen Fließverhaltens ebenfalls auf ihr beruhen. Hierzu betrachtet man den Fall, dass die Viskosität eines Fluids keine Konstante mehr darstellt, sondern dass diese ebenfalls scherratenabhängig ist – phänomenologisch lässt sich dies durch Viskositätsmessungen feststellen.

Die im folgenden vorgestellten Modelle beruhen im wesentlichen auf der Messung der scherratenabhängigen Viskosität von Polymerschmelzen und -lösungen, für die dann ein möglichst gut passender funktionaler Zusammenhang gesucht wird.

4.1.1 Power-law-Modell

Die einfachste Art, einen Zusammenhang zwischen der Scherspannung und -rate einer komplexen Flüssigkeit herzustellen, ist das Potenzgesetzverhalten (Macosko 1993):

4 Dynamik komplexer Fluide

$$\tau = m\dot{\gamma}^n \quad \text{oder} \quad \eta = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (4.1)$$

wobei m eine Konstante ist und n der Exponent der Scherverdünnung ist. Für $n = 1$ erhält man normales, Newton'sches Fließverhalten, für $n > 1$ liegt Scherverdickung und für $n < 1$ Verdünnung vor.

Das Potenzgesetzverhalten stellt für mittlere Scherraten einen deckenden funktionalen Zusammenhang zwischen der Scherspannung und -rate einer komplexen Flüssigkeit dar. Für die Grenzfälle $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ und $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ kommt es allerdings zu Abweichungen. Da in der Regel der Fall $n < 1$ vorliegt, divergiert τ nach Gl. (4.1) für $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, entgegen den gemessenen Werten, die hier in ein Plateau für die *Nullscherviskosität* laufen. Ebenso müsste laut der Gleichung für $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ die Scherspannung τ verschwinden, was ebenfalls nicht experimentell belegt werden kann; es findet sich experimentell ein weiteres Plateau im Bereich des Grenzwertes η_∞ .

Es bleibt somit festzustellen, dass das *Power-law*-Modell zwar über einen weiten Scherratenbereich Messungen zu interpretieren vermag, allerdings in den Grenzfällen sehr hoher oder sehr geringer Scherraten versagt.

4.1.2 Carreau–Yasuda–Modell

Ein Versuch der Behebung der bereits diskutierten Defizite des *Power-law*-Modells sind die Anpassungen durch Cross (Cross 1965; Macosko 1993), der empirisch folgenden funktionalen Zusammenhang aufstellte:

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left(1 + K^2 \dot{\gamma}^2\right)^{(n-1)/2} \quad (4.2)$$

Bei Betrachtung des Grenzfalles $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ geht in diesem Modell wie gewünscht $\eta \rightarrow \eta_0$. Umgekehrt erhält man für $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ den Wert η_∞ als Grenzwert. Die Parameter n, K, η_0 und η_∞ lassen sich aus einer parametrischen Regression von Messdaten bestimmen.

Eine noch genauere Anpassung der Messdaten an ein Modell und eine stärkere Verknüpfung mit den mikroskopischen Eigenschaften des betrachteten Fluids gelang durch die an Gl. (4.2) von Yasuda et al. vorgenommenen Modifikationen (Macosko 1993; Yasuda u. a. 1981):

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^a\right)^{(n-1)/a} \quad (4.3)$$

Das Cross- oder Carreau-Modell geht aus dem allgemeineren Carreau–Yasuda-Modell durch die Wahl des Parameters $a = 2$ hervor. Im allgemeinen lassen sich die Viskositätsdaten von Polymerschmelzen und verdünnten Polymerlösungen gut mit diesem Modell anpassen.

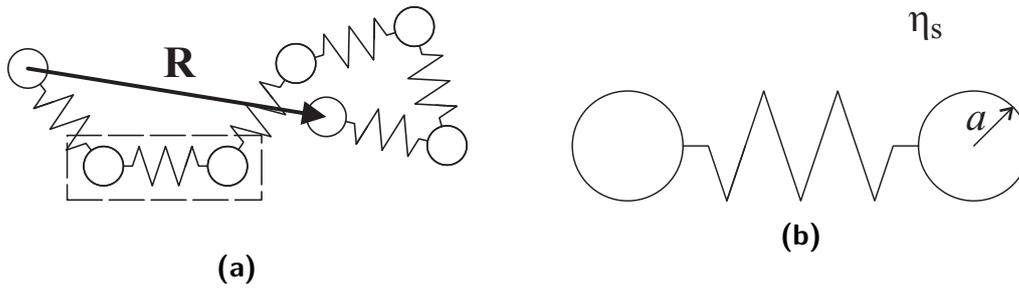


Abbildung 4.1: (a) Ausschnitt eines Polymers als elastische Kette. Der Verbindungsvektor vom Start- zum Endpunkt der Kette ist der *End-to-End*-Vektor \mathbf{R} . (b) Vergrößerung des gestrichelt gekennzeichneten Bereichs: Ein Submolekül (Kettenglied) des Polymers, bestehend aus zwei Massen m mit Kugelradius a . η_s ist die Viskosität des Lösungsmittels.

4.2 Moderne konstitutive Modelle

4.2.1 Upper-convected Maxwell-Modell

Ein guter Ansatz zur Modellierung des Verhaltens von Polymerschmelzen und -lösungen ist die Verwendung elastischer Ketten, bei denen intrinsische elastische des Polymers durch lineare Federn und viskose Kräfte durch kugelförmige Massen entlang der Kette modelliert werden, wie in Abb. 4.1a gezeigt. Das einzelne Kettenglied bildet dann ein Submolekül (Abb. 4.1b). Der Verbindungsvektor vom Start- zum Endpunkt der Kette ist der *End-to-End*-Vektor \mathbf{R} . Eine solche Kette kann zur Beschreibung der Polymerdynamik verwendet werden, wenn die inneren Bewegungen der Submoleküle schnell gegen die advective Zeitskala des umgebenden Flusses erfolgen.

Interessiert man sich für den Relaxationsprozess des gesamten Moleküls, so kann man das Molekül als vergrößerte Version eines einzigen Kettenglieds betrachten. Diese Modellvorstellung ist als *elastic-dumbbell*-Modell bekannt. Auf ein solches Polymer wirken im wesentlichen drei Kräfte:

- Die viskose Reibung \mathbf{F}_{visc} mit dem es umgebenden Lösungsmittel

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = \frac{\mu}{2} \left(\dot{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \cdot (\nabla \mathbf{U}) \right) \quad (4.4)$$

in der $\mu = 6\pi\eta_s a$ den Reibungskoeffizienten mit der Lösungsmittelviskosität η_s und dem Durchmesser der als kugelförmig angenommenen Masse a bezeichnen,

- die elastische Kraft \mathbf{F}_K der Molekülkette

$$\mathbf{F}_K = 2k_B T \beta^2 \mathbf{R} \quad (4.5)$$

4 Dynamik komplexer Fluide

mit $\beta = 3/2 \langle R^2 \rangle$ und $R = |\mathbf{R}|$ und

- die Brown'sche Zufallskraft F_{Br}

$$\mathbf{F}_{\text{Br}} = k_{\text{B}}T\nabla\psi \quad (4.6)$$

in der ψ die Wahrscheinlichkeitsdichte aller möglichen Endpunkte des *end-to-end*-Vektors darstellt.

Die vektorielle Summe aller drei Kräfte kann gleich 0 gesetzt werden, da aufgrund der geringen Masse die Trägheitskraft eines Submoleküls vernachlässigbar ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{F}_{\text{visc}} + \mathbf{F}_{\text{K}} + \mathbf{F}_{\text{Br}} \\ &= \frac{\mu}{2} \left(\dot{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \cdot (\nabla\mathbf{U}) \right) + 2k_{\text{B}}T\beta^2\mathbf{R} + k_{\text{B}}T\nabla\psi \end{aligned} \quad (4.7)$$

Löst man Gl. (4.7) nach $\dot{\mathbf{R}}$ auf und setzt sie in die Kontinuitätsgleichung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\partial_t\psi + \nabla \cdot (\dot{\mathbf{R}}\psi) = 0 \quad (4.8)$$

ein, so erhält man eine Gleichung, die die zeitliche Dynamik von ψ beschreibt:

$$\partial_t\psi + \nabla \cdot \left\{ \psi\mathbf{R} \cdot (\nabla\mathbf{U}) - \frac{4k_{\text{B}}T\beta^2}{\mu}\mathbf{R}\psi - \frac{2k_{\text{B}}T}{\mu}\nabla\psi \right\} = 0 \quad (4.9)$$

Diese Gleichung kann mit dem Konformationstensor (\mathbf{RR}) multipliziert werden. Integriert man dann räumlich über alle Koordinatenachsen, so erhält man folgende Beiträge (Larson 1988, 1999):

$$\int d^3R \partial_t\psi (\mathbf{RR}) = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3R \psi \mathbf{RR} = \partial_t \langle \mathbf{RR} \rangle \quad (4.10a)$$

$$\int d^3R (\mathbf{RR}) (\psi\mathbf{R} \cdot (\nabla\mathbf{U})) = -(\nabla\mathbf{U})^\dagger \cdot \langle \mathbf{RR} \rangle - \langle \mathbf{RR} \rangle \cdot (\nabla\mathbf{U}) \quad (4.10b)$$

$$\int d^3R (\mathbf{RR}) \nabla (\mathbf{R}\psi) = -2 \langle \mathbf{RR} \rangle \quad (4.10c)$$

$$\int d^3R (\mathbf{RR}) \nabla (\nabla\psi) = 2 \cdot \mathbf{1} \quad (4.10d)$$

Nun ist der Tensor der Polymerspannungen, $\boldsymbol{\tau}$, durch $\boldsymbol{\tau} = 2nk_{\text{B}}T\beta^2 (\mathbf{RR})$ mit dem Konformationstensor (\mathbf{RR}) verknüpft. Nachdem man also Gln. (4.10a – 4.10d) mit $2nk_{\text{B}}T\beta^2$ multipliziert hat und in Gl. (4.9) eingesetzt hat, erhält

man mit den Abkürzungen $G = nk_B T$ des Schermoduls und $\lambda = \mu/8k_B T \beta^2$ der Relaxationszeit:

$$\underbrace{\partial_t \boldsymbol{\tau} - (\nabla \mathbf{U})^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{U})}_{\stackrel{\nabla}{=} \boldsymbol{\tau}} + \frac{1}{\lambda} (\boldsymbol{\tau} - G \mathbf{1}) = 0 \quad (4.11)$$

Dies ist die konstitutive Gleichung des *upper-convected* Maxwell-Modells mit der *upper-convected*- oder Oldroyd-Ableitung $\stackrel{\nabla}{\mathbf{T}} = \partial_t \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{U}) - (\nabla \mathbf{U})^\dagger \cdot \mathbf{T}$.

Das *upper-convected* Maxwell-Modell ist sehr beliebt zur numerischen Simulation des Verhaltens komplexer Fluide und aufgrund seiner Linearität auch für analytische Betrachtungen sehr gut geeignet. Berechnungsergebnisse decken sich hervorragend mit experimentell gewonnenen Erkenntnissen, obwohl ein großes Defizit dieses Modells darin besteht, nur eine Relaxationszeit λ entgegen dem in der Realität vorhandenen Relaxationsspektrum zu berücksichtigen. Auch werden in diesem Modell die Endlichkeit der Zugspannungen nicht betrachtet, dies kann bei der numerischen Simulation zum Konvergenzversagen und zu drastisch erhöhten Rechenzeiten führen.

Für verdünnte Polymerlösungen eignet sich besonders eine Weiterentwicklung des *upper-convected* Maxwell-Modells, bei der viskos bedingte Spannungen in der Flüssigkeit und durch die Polymere verursachte Spannungen getrennt voneinander betrachtet werden (*elastic-viscous stress split* EVSS). Betrachtet man die Spannung in einem Fluid als durch zwei Beiträge verursacht, wobei $\boldsymbol{\tau}^{(p)}$ den Beitrag der Polymere und $\boldsymbol{\tau}^{(s)} = 2\eta_s \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ den des Lösungsmittels bezeichnen, so gilt für den Gesamtspannungstensor dann $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{(s)} + \boldsymbol{\tau}^{(p)}$. Dieses Modell ist als *Oldroyd-B-Modell* bekannt (Bird u. a. 1987a; Oldroyd 1950):

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{(s)} + \boldsymbol{\tau}^{(p)} \quad (4.12a)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(s)} = 2\eta_s \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.12b)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(p)} + \lambda \stackrel{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^{(p)} = 2\eta_p \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.12c)$$

4.2.2 Phan-Thien-Tanner Modell

Im vorangegangenen Abschnitt näherte man sich der Dynamik der Polymerketten durch eine mikroskopische Betrachtung der Bewegung einzelner Polymere. Für eine verdünnte Lösung von Polymeren ist dies eine durchaus vertretbare Herangehensweise, die jedoch bei konzentrierten Polymerlösungen und -schmelzen versagt.

Das Defizit kann durch eine netzwerktheoretische Beschreibung, analog zur Netzwerktheorie der Gummielastizität, ausgeglichen werden. Im Grunde ist dieser Ansatz von der Betrachtungsweise der elastischen Kette, wie im vorhergehenden Abschnitt erläutert, nicht so verschieden. Anstelle von elastisch miteinander verbundenen, kugelförmigen Massen, betrachtet man in der Netzwerktheorie durch

4 Dynamik komplexer Fluide

Knotenpunkte versinnbildlichte chemische Bindungspunkte (*junction*) zwischen Polymerketten. Im Festkörper sind diese Bindungspunkte permanent, in einer Flüssigkeit werden sie mit einer bestimmten Bildungs- und Vernichtungsrate neu geschaffen bzw. aufgebrochen. Die Polymerkette zwischen zwei Bindungspunkten nennt man Segment, Start- und Endpunkt eines Segments sind wieder durch einen *end-to-end*-Vektor miteinander verbunden. Eine ausführlichere Beschreibung und Herleitung der konstitutiven Gleichungen findet sich in (Bird *u. a.* 1987b).

Zentrale Annahmen der netzwerktheoretischen Beschreibung polymerer Fluide sind einerseits, dass die Bewegung der Knotenpunkte *affin* erfolgt, analog zu der der Massenpunkte im *elastic-dumbbell*-Modell. Ebenso werden thermische Bewegungen der Massenpunkte als zu schnell, um maßgeblich zu sein, angenommen.

Das Phan-Thien-Tanner-(PTT-)Modell macht nun weitere Annahmen über die Raten, mit denen neue Knotenpunkte im Netzwerk erschaffen und vernichtet werden, und unterstellt ihnen die gleiche Abhängigkeit von den Fluktuationen des *end-to-end*-Vektors. Die konstitutive Gleichung des Oldroyd-B-Modells wird dadurch mittels einer Funktion $f(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))$ modifiziert, für die Phan-Thien und Tanner empirisch folgende Formen vorschlugen:

$$f(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) = 1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \quad (4.13a)$$

$$f(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) = \exp\left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right) \quad (4.13b)$$

Gl. (4.13a) ist die ursprünglich veröffentlichte Variante (Phan-Thien & Tanner 1977), Gl. (4.13b) folgte kurz darauf (Phan-Thien 1978). Die konstitutive Gleichung lautet dann ausgeschrieben:

$$f(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) \boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_p \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.14)$$

Die Arbeit mit Gl. (4.14) führt gewöhnlich auf nichtlineare, algebraische Gleichungen für die Einträge des Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$. Der Unterschied von Gl. (4.14) und Gl. (4.12c) liegt im Nichtlinearitätsparameter ϵ , für eine Wahl $\epsilon = 0$ gehen beide Gleichungen ineinander über.

Ein sehr wichtiges Merkmal des PTT-Modells ist allerdings, dass durch den Parameter ϵ auch die Normalspannungen in die konstitutiven Gleichungen eingebunden werden. Dadurch kann, anders als im Oldroyd-B-Modell, auch scherverdünnendes Verhalten beschrieben werden. Dies zeigt sich insbesondere in numerischen Untersuchungen zu viskoelastischen Phänomenen, die nach Zugrundelegen des PTT-Modells bis zu wesentlich höheren Weissenbergzahlen stabil bleiben als bei Zugrundelegen des Oldroyd-B-Modells.

Im folgenden Abschnitt werden beide vorgestellten Modelle genutzt, um Informationen über grundlegende, im späteren Experiment auftretende Strömungs-

profile zu gewinnen. Tiefgreifendere Ausführungen zur Dynamik von Polymeren findet man u. a. in (Doi & Edwards 1986)

4.3 Zweidimensionale Strömungen komplexer Fluide

4.3.1 Grundlagen der Beschreibung

Die im folgenden betrachteten Strömungen werden als stationär und im inertia-len Sinne laminar betrachtet, d.h., man setzt a priori $\partial_t \mathbf{U} = 0$ und $Re = 0$. Die Navier–Stokes–Gleichung, die auch hier Grundlage der Berechnung der Geschwindigkeitsprofile ist. Gl. (3.8), reduziert sich dann auf den einfachen Ausdruck

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (4.15)$$

in dem $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ die Divergenz des Tensors der Polymerspannungen,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \tau_{22} & \tau_{23} \\ * & & \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

ist. Die Einträge des Tensors lassen sich aus den konstitutiven Gleichungen des Oldroyd–B–Modells (Gl. (4.12c)) oder des PTT-Modells (Gl. (4.14)) berechnen. An dieser Stelle sei auch auf die Symmetrie des Tensors $\boldsymbol{\tau}$ hingewiesen, die hier nicht ausführlich begründet werden soll, hierfür sei beispielsweise auf (Macosko 1993) verwiesen.

In diesen konstitutiven Gleichungen wird vom Scherratentensor $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ Gebrauch gemacht:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{11} & \dot{\gamma}_{12} & \dot{\gamma}_{13} \\ & \dot{\gamma}_{22} & \dot{\gamma}_{23} \\ * & & \dot{\gamma}_{33} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

In beiden Gleichungen stehen die Bezeichnungen ‘1’, ‘2’ und ‘3’ als generische Bezeichnungen für die erste, zweite und dritte Raumkoordinate. Zwischen dem Scherratentensor und dem Geschwindigkeitsgradiententensor ($\nabla \mathbf{U}$) besteht der Zusammenhang

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{U}) + (\nabla \mathbf{U})^\dagger \right) \quad \text{mit} \quad (\nabla \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} U & \partial_{x_1} V & \partial_{x_1} W \\ \partial_{x_2} U & \partial_{x_2} V & \partial_{x_2} W \\ \partial_{x_3} U & \partial_{x_3} V & \partial_{x_3} W \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

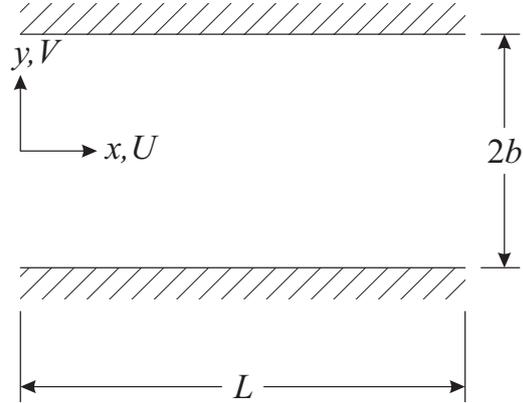


Abbildung 4.2: Zweidimensionaler, gerader Kanal mit Dimensionen und verwendetem Koordinatensystem. Das Fluid wird mittels eines von links nach rechts laufenden Druckgradienten durch den Kanal getrieben.

4.3.2 Gerader Kanal

Zu berechnen ist das Geschwindigkeitsprofil eines durch das lineare Phan–Thien–Tanner Modell (lin-PTT, Gl. (4.14) mit Gl. (4.13a)) beschriebenen komplexen Fluides. Der Kanal und das Koordinatensystem sind in Abb. 4.2 gezeigt. Zur Beschreibung des Problems wird ein zweidimensionales, kartesisches Koordinatensystem mit Koordinaten (x, y) und Geschwindigkeitskomponenten (U, V) verwendet. Zwischen den Kanalenden liegt ein Druckgradient G an. An den Wänden sollen *no-slip*-Randbedingungen erfüllt sein.

Aus der zu erfüllenden Kontinuitätsgleichung folgt dann sofort $V(x, y) = 0$. Die konstitutive Gleichung liefert dann ausgeschrieben:

$$f(\tau_{kk}) + \lambda \left[\partial_t \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - \left\{ \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{U}) + (\nabla \mathbf{U})^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau} \right\} \right] = 2\eta_p \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.19)$$

mit den oben bezeichneten Spannungs- und Scherratentensoren, wobei wir aus Gründen der Prägnanz die Abkürzung $\tau_{kk} = \text{tr}(\boldsymbol{\tau})$ verwenden.

Da die Strömung stationär ist, entfällt sofort auch die Zeitabhängigkeit des Spannungstensors, $\partial_t \boldsymbol{\tau} = 0$. Ferner gilt für den zweiten Term der ausgeschrieben Oldroyd-Ableitung wegen $V(x, y) = 0$ und Translationsinvarianz in x -Richtung auch $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} = 0$. Unter Ausnutzung ebendieser Voraussetzungen vereinfachen sich die in Gln. (4.17) und (4.18) eingeführten Tensoren zu:

$$(\nabla \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial_y U & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial_y U \\ \partial_y U & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Insgesamt wird Gl. (4.19) somit zu

$$f(\tau_{kk}) \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ * & \tau_{yy} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2\tau_{xy} \partial_y U & \tau_{yy} \partial_y U \\ * & 0 \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} 0 & \partial_y U \\ * & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.21)$$

4.3 Zweidimensionale Strömungen komplexer Fluide

Diese Gleichung liefert uns ein Gleichungssystem für die drei verschiedenen Einträge τ_{xx} , τ_{xy} und τ_{yy} des Polymer Spannungstensors. Setzt man Gl. (4.13a) ein, so erhält man:

- für die xx -Komponente:

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p}\tau_{kk}\right)\tau_{xx} = 2\lambda\tau_{xy}\partial_y U \quad (4.22)$$

- für die xy -Komponente:

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p}\tau_{kk}\right)\tau_{xy} = \eta\partial_y U \quad (4.23)$$

- für die yy -Komponente:

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p}\tau_{kk}\right)\tau_{yy} = 0 \quad (4.24)$$

Aus Gl. (4.24) folgt sofort $\tau_{yy} = 0$, da i. A. $f(\tau_{kk}) \neq 0$ gilt. Scher- und Zugspannung, τ_{xy} und τ_{xx} lassen sich nun aus der Impulsbilanz, Gl. (4.15) errechnen. Ausgeschrieben lautet diese:

$$-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 = -\begin{pmatrix} \partial_x p \\ \partial_y p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} \\ \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \tau_{yy} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Mit den Vereinfachungen $\partial_y p = 0$ und $\tau_{yy} = 0$ sowie der Translationsinvarianz $\partial_x \dots = 0$ und dem konstanten Druckgradienten $\partial_p x = G$ folgt hieraus für die Scherspannung die einfache Differenzialgleichung

$$-G + \frac{d\tau_{xy}}{dy} = 0, \quad (4.26)$$

deren Lösung $\tau_{xy}(y) = Gy + \tilde{c}$ ist. Die Integrationskonstante lässt sich aus der Tatsache, dass $\tau_{xy}(y=0) = 0$ gelten muss, sofort als $\tilde{c} = 0$ bestimmen, so dass man für die Scherspannung $\tau_{xy}(y) = Gy$ findet. Formt man dann Gl. (4.23) nach $\partial_y U$ um und setzt das Ergebnis zusammen mit $\tau_{xy} = Gy$ in Gl. (4.22) ein, so folgt für die Zugspannung $\tau_{xx}(y) = 2\lambda G^2 y^2 / \eta_p$. Im Überblick gilt also für die Einträge des Spannungstensors:

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda}{\eta_p} G^2 y^2 \quad (4.27a)$$

$$\tau_{xy} = Gy \quad (4.27b)$$

$$\tau_{yy} = 0 \quad (4.27c)$$

4 Dynamik komplexer Fluide

Zur Berechnung des Geschwindigkeitsprofils nutzt man die Ausdrücke für τ_{xx} und τ_{xy} , die in Gl. (4.22) eingesetzt werden. Dies liefert, mit $\tau_{kk} = \tau_{xx} + \tau_{yy} = \tau_{xx}$:

$$-\left(1 + \frac{2\epsilon\lambda^2 G^2 y^2}{\eta_p^2}\right) \frac{Gy}{\eta} = \frac{dU}{dy} \quad (4.28)$$

und somit eine Differenzialgleichung, die durch Integration über y sofort auf das Geschwindigkeitsprofil

$$\begin{aligned} U(y) &= -\frac{G}{\eta_p} \int dy y - \frac{\epsilon\lambda^2 G^3}{\eta_p^3} \int dy y^3 \\ &= -\frac{Gy^2}{2\eta_p} - \frac{\epsilon\lambda^2 G^3 y^4}{4\eta_p^3} + \bar{c} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Nachdem man die Integrationskonstante \bar{c} aus der Randbedingung, $U(y = \pm b) = 0$, bestimmt hat, nimmt das Geschwindigkeitsprofil die Form

$$U(y) = \frac{G}{2\eta_p} (b^2 - y^2) \left[1 + \frac{\epsilon\lambda^2 G^2}{2\eta_p^2} (b^2 + y^2) \right] \quad (4.30)$$

Unter Einführung der dimensionslosen Koordinate $Y = y/b$, des Geschwindigkeitsfaktors $U_0 = Gb^2/2\eta_p$ und der Weissenbergzahl $Wi = \lambda\bar{U}/b$ lässt sich auch Gl. (4.30) in dimensionsloser Form schreiben:

$$\frac{U(Y)}{\bar{U}} = \frac{3U_0}{2\bar{U}} (1 - Y^2) \left[1 + 9\epsilon Wi^2 \left(\frac{U_0}{\bar{U}}\right)^2 (1 + Y^2) \right] \quad (4.31)$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit bekannten Berechnungen anderer Gruppen (Oliveira & Pinho 1999). Eine graphische Übersicht über die Formen des Geschwindigkeitsprofils in Abhängigkeit des Parameters Wi ist in Abb. 4.3 gegeben. Vergleicht man die Profile für verschiedene Weissenbergzahlen für eine typische Wahl des Parameters $\epsilon = \mathcal{O}(10^{-2})$ erst bei hohen und sehr hohen Weissenbergzahlen signifikante Abweichungen von der Parabelform als Konsequenz der Scherverdünnung auftreten. Für eine nicht zu große Wahl von ϵWi^2 weichen die Kurven von linearem und exponentiellem lin-PTT-Modell nicht zu stark voneinander ab, wie in (Oliveira & Pinho 1999) gezeigt.

Es lässt sich durch eine kurze Betrachtung zeigen, dass das Oldroyd-B-Modell keine Abweichung von Newton'schen Fließprofil liefert. Wie bereits angesprochen, geht das Oldroyd-B-Modell durch die Wahl $\epsilon = 0$ aus dem PTT-Modell hervor. Für diese Wahl ergibt sich in Gl. (4.31) für den in eckigen Klammern gefassten Ausdruck der Wert 1, und somit $U(Y)/\bar{U} = 3U_0/2\bar{U} (1 - Y^2)$ wie für ein Newton'sches Fluid.

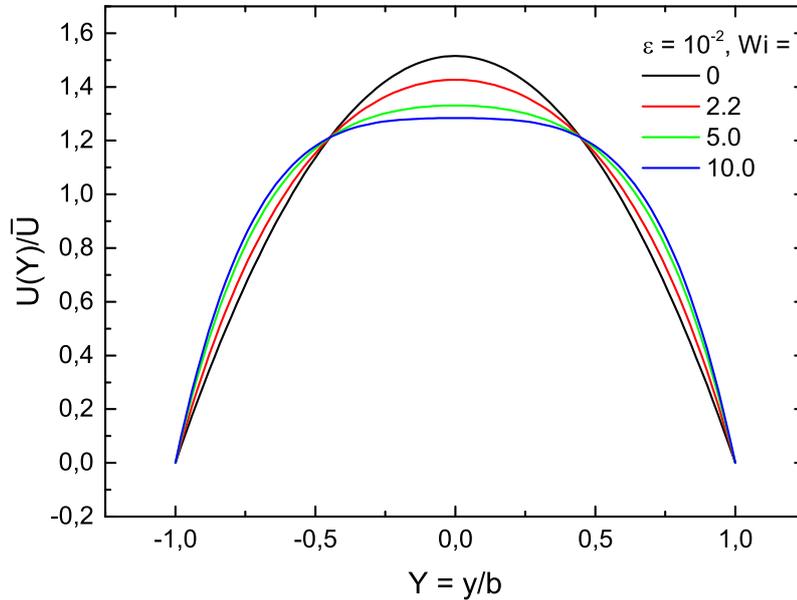


Abbildung 4.3: Wi -abhängiges Geschwindigkeitsprofil eines lin-PTT-Fluids im geraden Kanal für einen Nichtlinearitätsparameter $\epsilon = 10^{-2}$ und $Wi = 0, 2.2, 5$ und 10 .

4.3.3 Gekrümmter Kanal

Wir betrachten nun einen gekrümmten Kanal, wie er bereits in Abs. 3.3 eingeführt worden ist und berechnen die Geschwindigkeitsfelder unter Betrachtung des Oldroyd-B- und PTT-Modells.

Im gewählten System zylindrischer Polarkoordinaten (θ, r) mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{U} = (U, V)$ nehmen Spannungs-, Geschwindigkeitsgradienten-

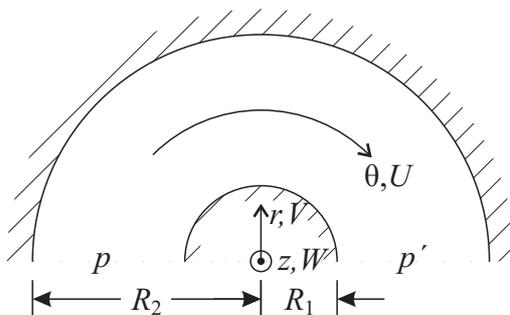


Abbildung 4.4: Zweidimensionaler, gekrümmter Kanal mit Dimensionen und verwendetem Koordinatensystem. Das Fluid wird mittels eines von links nach rechts laufenden Druckgradienten durch den Kanal getrieben, der Druckgradient ist im gezeigten Fall allerdings von der radialen Position abhängig.

4 Dynamik komplexer Fluide

und Scherratentensor folgende Gestalten an:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta r} \\ * & \tau_{rr} \end{pmatrix} \quad (4.32a)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{U}) &= \begin{pmatrix} 1/r \partial_\theta U + V/r & \partial_r U \\ 1/r \partial_\theta V - U/r & \partial_r V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_r U \\ -U/r & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.32b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{dU}{dr} - U/r \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad (4.32c)$$

Auch im gesetzten Fall setzen wir Stationarität der Strömung und die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung voraus, weswegen in den Definitionen der Tensoren alle Terme von V verschwinden. Da die Rotationssymmetrie der Strömung vorausgesetzt wurde, wurden ebenso alle Terme mit Ableitungen nach θ vernachlässigt.

Die Gleichung des Oldroyd-B-Modells, Gl. (4.12c), wird somit unter Berücksichtigung der Gln. (4.32a), (4.32b) und (4.32c) zu:

$$\begin{aligned} 2\eta_p \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\tau} - \lambda \left[\boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{U}) + (\nabla \mathbf{U})^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau} \right] \\ \eta_p \begin{pmatrix} 0 & -U/r + \frac{dU}{dr} \\ * & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta r} \\ * & \tau_{rr} \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} -2\lambda\tau_{\theta r}U/r & \lambda \left(\tau_{\theta\theta} \frac{dU}{dr} - \tau_{rr}U/r \right) \\ * & 2\lambda\tau_{\theta r} \frac{dU}{dr} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Hieraus lässt sich erneut ein Gleichungssystem für die drei verschiedenen Einträge des Spannungstensors herleiten:

$$\tau_{\theta\theta} + 2\lambda\tau_{\theta r} \frac{U}{r} = 0 \quad (4.34a)$$

$$\tau_{\theta r} - \lambda \left(\tau_{\theta\theta} \frac{dU}{dr} - \tau_{rr} \frac{U}{r} \right) = \eta_p \left(-U/r + \frac{dU}{dr} \right) \quad (4.34b)$$

$$\tau_{rr} - 2\lambda\tau_{\theta r} \frac{dU}{dr} = 0 \quad (4.34c)$$

Die in Gl. (4.15) aufgestellte Impulsbilanz lautet, in Polarkoordinaten geschrieben:

4.3 Zweidimensionale Strömungen komplexer Fluide

$$\begin{pmatrix} 1/r\partial_\theta p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/r\partial_\theta\tau_{\theta\theta} + 1/r\partial_r(r\tau_{\theta r}) \\ 1/r\partial_\theta\tau_{\theta r} + 1/r\partial_r(r\tau_{rr}) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Nach Berücksichtigung aller Voraussetzungen erhält man hieraus ein Gleichungssystem, das die Komponenten $\tau_{\theta r}$ und τ_{rr} zugänglich macht:

$$\frac{p}{\pi r} = \frac{1}{r}\partial_r(r\tau_{\theta r}) \quad (4.36a)$$

$$0 = \frac{1}{r}\partial_r(r\tau_{rr}) \quad (4.36b)$$

Aus Gl. (4.36b) folgt sofort $\tau_{rr} = 0$. Gl. (4.36a) lässt durch Integration eine Bestimmung von $\tau_{\theta r}$ zu als:

$$\tau_{\theta r} = G + \frac{\tilde{c}}{r} \quad (4.37)$$

mit der Integrationskonstanten \tilde{c} und der Abkürzung $G = p/\pi$. Diese kann zunächst nicht näher bestimmt werden. Allgemein kann man sich allerdings die erwartete Form des Geschwindigkeitsprofils einer Poiseuille-Strömung zunutze machen, die ein Maximum aufweisen muss. Sei r_0 der Ort dieses Maximums, so gilt $\tau_{\theta r}(r = r_0) = 0$, also $\tilde{c} = -Gr_0$, und damit

$$\tau_{\theta r} = G \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \quad (4.38)$$

Weiterhin setzt man Gln. (4.34a) und (4.34c), jeweils nach $\tau_{\theta\theta}$ und τ_{rr} umgeformt, in Gl. (4.34b) ein. Auf diese Art erhält man einen scherratenabhängigen Ausdruck von $\tau_{\theta r}$:

$$\tau_{\theta r} = \frac{\eta_p \left(-\frac{U}{r} + \frac{dU}{dr}\right)}{1 + 4\lambda^2 \frac{U}{r} \frac{dU}{dr}} \quad (4.39)$$

Ein Vergleich der Gln. (4.39) und (4.38) führt dann, analog zu Abs. 4.3.2, auf eine Differentialgleichung für $U(r)$. Die so entstehende Differentialgleichung ist allerdings analytisch nicht lösbar. Betrachtet man allerdings sehr kleine Relaxationszeiten, $\lambda \rightarrow 0$, so ist der Nenner in Gl. (4.39) vernachlässigbar, und man erhält die Differentialgleichung

$$\eta_p \left(-\frac{U}{r} + \frac{dU}{dr}\right) = G \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \quad (4.40)$$

mit Randbedingung $U(r = R_1) = 0$. Die Lösung dieser Differentialgleichung wurde mit *Maple* berechnet und lautet

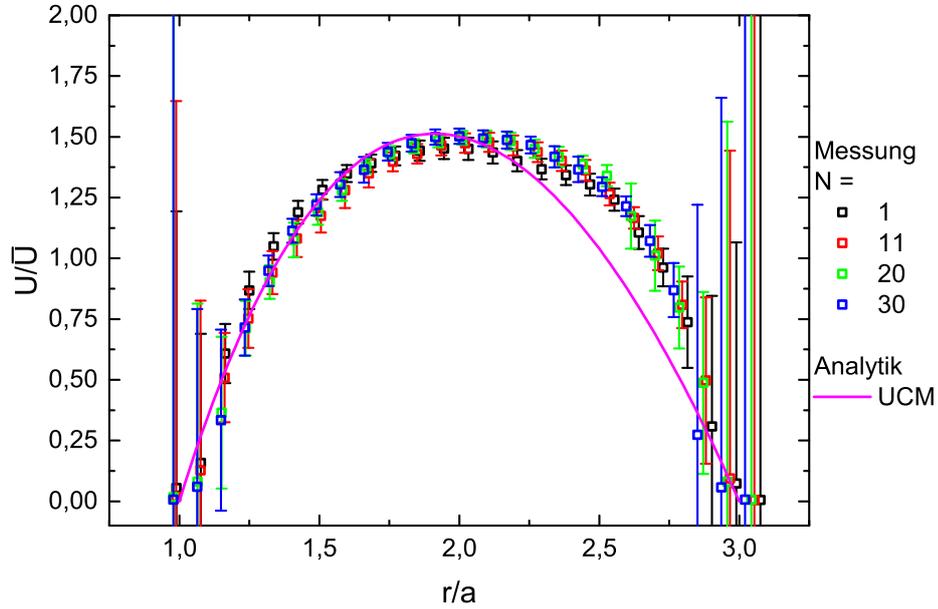


Abbildung 4.5: Vergleich analytisch berechneter Daten für einen gekrümmten Kanal mit für die kleinste eingestellte Weissenbergzahl $Wi = 32$ gemessenen Daten. Es zeigt sich eine stärkere Abweichung zwischen errechneten und gemessenen Daten im äußeren Bereich des Kanals.

$$U(r) = -\frac{G}{\eta_p R_1} \left[r_0 (r - R_1) + R_1 r \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) \right] \quad (4.41)$$

Noch zu bestimmen ist r_0 . Hierzu wird die zweite Randbedingung, $U(r = R_2) = 0$, ausgenutzt. Einsetzen in Gl. (4.41) liefert dann:

$$r_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \quad (4.42)$$

Und insgesamt:

$$U(r) = -\frac{G}{\eta_p R_1} \left[\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} (r - R_1) \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) + R_1 r \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) \right] \quad (4.43)$$

In Abb. 4.5 werden analytisch berechnet und experimentell gemessene Geschwindigkeitsdaten miteinander verglichen. Es zeigt sich hierbei, dass das analytisch in Gl. (4.43) aufgestellte Modell bei Normierung zwar die Daten Geschwindigkeitsdaten auf der Innenseite des Kanals gut anpasst, allerdings im äußeren

4.4 Dreidimensionale Strömungen komplexer Fluide

Kanalbereich aufgrund der Scherverdünnung, die in der Analytik nicht berücksichtigt werden kann, versagt. Es bliebe zu untersuchen, ob ein weniger elastisches Fluid als das von uns verwendete eine bessere Deckung der Kurven ermöglicht.

Aus der Tatsache, dass der gemessene Geschwindigkeitsverlauf nach Anschauung deutlich von der (verzerrten, s. Abb. 3.5 unten) Parabelform Newton'scher Fluide abweicht, ist davon auszugehen, dass die für diese Messung gewählte Weissenbergzahl schon zu hoch war, um analytisches Modell und experimentell gewonnene Daten zu vergleichen.

Eine Anwendung des PTT-Modells hilft ebenfalls nicht, dieses Problem zu lösen. Ein Ansatz nach

$$f(\boldsymbol{\tau}) + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.44)$$

mit $f(\boldsymbol{\tau}) = 1 + \epsilon \lambda \tau_k k / \eta$ liefert hier für die Scherspannung den Ausdruck

$$\tau_{\theta r} = \frac{\eta \left(-\frac{U}{r} + \frac{dU}{dr} \right)}{f(\boldsymbol{\tau}) + 4\lambda^2 \frac{dU}{dr} \frac{U}{r}} \quad (4.45)$$

welcher auf eine quadratische Gleichung für $\tau_{\theta r}$ führt:

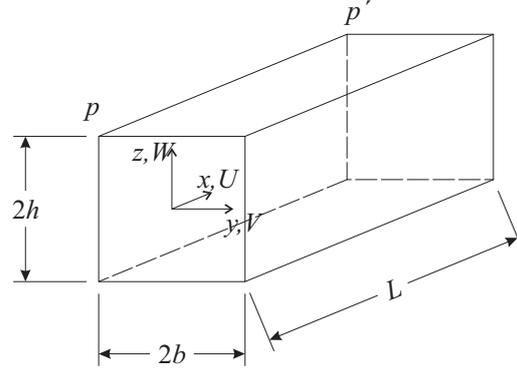
$$\tau_{\theta r}^2 - \frac{1 + 4\lambda^2 \frac{dU}{dr} \frac{U}{r}}{2\epsilon U / \eta r} \tau_{\theta r} - \frac{\eta^2}{2\epsilon U / r} \left(-\frac{U}{r} + \frac{dU}{dr} \right) = 0 \quad (4.46)$$

Im Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$ liefert dieser Ausdruck allerdings das gleiche Ergebnis wie Gl. (4.39). Zusammenfassend lässt sich hier sagen, dass keines der beiden Modelle einen analytisch geschlossenen Ausdruck für das Geschwindigkeitsprofil liefert und erst für sehr kleine Weissenbergzahlen eine näherungsweise Lösung angegeben werden kann, die den Grenzfall eines Newton'schen Fluides darstellt.

4.4 Aspekte der Berechnung dreidimensionaler Strömungen komplexer Fluide

Wir betrachten im folgenden den bereits in Abs. 3.2 gezeigten geraden Kanal und berechnen den Geschwindigkeitsverlauf in zwei Dimensionen. Hierfür verwenden wir als konstitutive Modelle sowohl das Oldroyd-B-Modell, um zu zeigen, dass dieses das durch Gl. (3.24) beschriebene Geschwindigkeitsprofil nicht ändert, als auch das lin-PTT-Modell. Die Randbedingungen sind dabei die gleichen geblieben, ebenso die Vereinfachungen der Stationarität der Strömung. Auch werden die sekundären Geschwindigkeitskomponenten wieder wegen der Massenerhaltungsgleichung als verschwindend betrachtet, $V = W = 0$. Ferner gilt Translationsinvarianz in x -Richtung.

Abbildung 4.6: Strömung eines komplexen Fluides durch einen geraden Kanal. $2b$ und $2h$ sind die lichte Weite und Höhe, zwischen den Enden fällt ein Differenzdruck $p' - p$ über die Länge L ab.



4.4.1 Oldroyd-B-Modell

Mit diesen Vereinfachungen erhält man die Geschwindigkeitsgradienten- und Scherratenensoren

$$(\nabla \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial_y U & 0 & 0 \\ \partial_z U & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial_y U & \partial_z U \\ \partial_y U & 0 & 0 \\ \partial_z U & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Setzt man beide in die konstitutive Gleichung des Oldroyd-B-Modells, Gl. (4.12c), ein, so erhält man nach allen Umformungen:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ * & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2(\tau_{xy}\partial_y U + \tau_{xz}\partial_z U) & \tau_{yy}\partial_y U + \tau_{yz}\partial_z U & \tau_{yz}\partial_y U + \tau_{zz}\partial_z U \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} = \eta_p \begin{pmatrix} 0 & \partial_y U & \partial_z U \\ \partial_y U & 0 & 0 \\ \partial_z U & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Ein komponentenweiser Vergleich hiervon führt sofort darauf, dass die Normalspannungskomponenten senkrecht zur Fließrichtung verschwinden, $\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$, ebenso die Scherspannungskomponente dieser beiden Koordinaten, $\tau_{yz} = 0$. Ferner folgt aus dem Gleichungssystem für die restlichen Einträge des Spannungstensors,

$$\tau_{xx} + 2\lambda(\tau_{xy}\partial_y U + \tau_{xz}\partial_z U) = 0 \quad (4.49a)$$

$$\tau_{xy} + \lambda(\tau_{yy}\partial_y U + \tau_{yz}\partial_z U) = \eta_p \partial_y U \quad (4.49b)$$

$$\tau_{yz} + \lambda(\tau_{yz}\partial_y U + \tau_{zz}\partial_z U) = \eta_p \partial_z U \quad (4.49c)$$

4.4 Dreidimensionale Strömungen komplexer Fluide

Die Klammerausdrücke in Gl. (4.49b) und (4.49c) verschwinden sofort und führen auf die zu erwartenden Spannungs–Scherraten–Beziehungen $\tau_{xy} = \eta_p \partial_y U$ bzw. $\tau_{xz} = \eta_p \partial_z U$.

Die Impulsbilanz nach Gl. (4.15) lautet in diesem Fall ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \partial_x p \\ \partial_y p \\ \partial_z p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} \\ \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \tau_{yy} + \partial_z \tau_{yz} \\ \partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} + \partial_z \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Aufgrund der Translationsinvarianz entfallen hierin alle Einträge, die Ableitungen nach x enthalten. Ebenso entfallen alle Einträge, die sich auf verschwindende Komponenten des Spannungstensors beziehen. Es verbleibt somit nur noch die Differenzialgleichung $G = \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz}$, die mit den vorher hergeleiteten Ausdrücken zu

$$-\frac{G}{\eta_p} = (\partial_y^2 U + \partial_z^2 U) = \nabla^2 U \quad (4.51)$$

wird, was exakt der Differenzialgleichung der Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung, Gl. (3.13), für Newton'sche Fluide entspricht.

4.4.2 Phan–Thien–Tanner–Modell

Zur Berechnung des Geschwindigkeitsprofils auf der Grundlage des linearisierten Phan–Thien–Tanner–Modells modifiziert man Gl. (4.48) durch Multiplikation des Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$ mit einem der Ausdrücke Gl. (4.13a) oder (4.13b). Dies führt auf eine Tensorgleichung

$$\begin{aligned} & f(\tau_{kk}) \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ * & & \tau_{zz} \end{pmatrix} \\ & - \lambda \begin{pmatrix} 2(\tau_{xy} \partial_y U + \tau_{xz} \partial_z U) & \tau_{yy} \partial_y U + \tau_{yz} \partial_z U & \tau_{yz} \partial_y U + \tau_{zz} \partial_z U \\ & 0 & 0 \\ & * & 0 \end{pmatrix} \\ & = \eta \begin{pmatrix} 0 & \partial_y U & \partial_z U \\ \partial_y U & 0 & 0 \\ \partial_z U & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Auch diese Tensorgleichung lässt sich in ein System von Gleichungen für die sechs unterschiedlichen Komponenten des Spannungstensors umformen:

$$\left(1 + \frac{\epsilon \lambda}{\eta_p} \tau_{kk}\right) \tau_{xx} - 2\lambda (\tau_{xy} \partial_y U + \tau_{xz} \partial_z U) = 0 \quad (4.53a)$$

4 Dynamik komplexer Fluide

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} \tau_{kk}\right) \tau_{xy} + \lambda (\tau_{yy} \partial_y U + \tau_{yz} \partial_z U) = \eta_p \partial_y U \quad (4.53b)$$

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} \tau_{kk}\right) \tau_{xz} + \lambda (\tau_{yz} \partial_y U + \tau_{zz} \partial_z U) = \eta_p \partial_z U \quad (4.53c)$$

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} \tau_{kk}\right) \tau_{yy} = 0 \quad (4.53d)$$

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} \tau_{kk}\right) \tau_{yz} = 0 \quad (4.53e)$$

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} \tau_{kk}\right) \tau_{zz} = 0 \quad (4.53f)$$

Da in der Regel $f(\tau_{kk}) \neq 0$ vorausgesetzt werden kann (Oliveira & Pinho 1999), folgt auch im vorliegenden Fall aus Gln. (4.53d) – (4.53f) $\tau_{yy} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0$. Daraus ergeben sich einerseits Konsequenzen in Form des Entfallens der Klammerterme in Gln. (4.53b), (4.53c), andererseits vereinfacht sich allerdings auch die Spur des Spannungstensors zu $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = \tau_{xx}$. Die Scherspannungen sind jetzt allerdings durch den Faktor $f(\tau_{xx})$ modifiziert, $\tau_{xy} = \eta_p / f(\tau_{xx}) \partial_y U$ und $\tau_{xz} = \eta_p / f(\tau_{xx}) \partial_z U$.

Wir fahren, wie bereits in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt, mit dem Aufstellen der Impulsbilanz fort. Diese besitzt zunächst die in Gl. (4.50) aufgestellte Form, es können auch die gleichen Vereinfachungen vorgenommen werden und die Scherspannungen eingesetzt werden. Dies führt insgesamt auf:

$$-G = \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} \quad (4.54)$$

Nach Einsetzen der Scherspannungen erhält man:

$$-\frac{Gf(\tau_{xx})}{\eta_p} + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} (\partial_y U \partial_y \tau_{xx} - \partial_z U \partial_z \tau_{xx}) = (\partial_y^2 U + \partial_z^2 U) \quad (4.55)$$

Der Unterschied zum Oldroyd–B–Modell und zur Poisson–Gleichung, die sich in der gleichen Situation für ein Newton’sches Fluid ergibt, äußert sich einerseits darin, daß der Term $f(\tau_{xx})$ den Druckgradienten reskaliert und an das Zugspannungsfeld koppelt, andererseits auch in einem Korrekturterm mit Ableitungen des Geschwindigkeits- und Zugspannungsfeldes.

Zur vollständigen analytischen Lösung des Problems muss nun noch ein Ausdruck für das Zugspannungsfeld τ_{xx} gefunden werden, welcher dieses mit der Scherrate in Verbindung bringt. Hierzu setzt man die aus den Gln. (4.53b) und (4.53c) hervorgegangenen Ausdrücke für die Scherspannungen in Gl. (4.53a) ein und erhält aus

$$f(\tau_{xx}) \tau_{xx} - 2\lambda (\tau_{xy} \partial_y U + \tau_{xz} \partial_z U) = 0 \quad (4.56)$$

4.4 Dreidimensionale Strömungen komplexer Fluide

eine kubische Gleichung für τ_{xx} :

$$\left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p} \tau_{xx}\right)^2 \tau_{xx} - 2\lambda\eta_p (\partial_y^2 U + \partial_z^2 U) = 0 \quad (4.57)$$

Die Lösung dieser Gleichung kann beispielsweise mit *Maple* berechnet werden. Vernachlässigt man dabei die komplexen Lösungen, so erhält man

$$\tau_{xx} = \frac{\eta (1 + S^{2/3} - 2S^{1/3})}{3\epsilon\lambda S^{1/3}} \quad (4.58)$$

$$\text{mit } S = 1 + 27\epsilon\lambda^2 \|\nabla U\|_s^2 + 3\epsilon\lambda \sqrt{\frac{3\|\nabla U\|_s^2}{\epsilon} (2 + 27\epsilon\lambda^2 \|\nabla U\|_s^2)}$$

worin die Abkürzung $\|\nabla U\|_s^2 = (\partial_y U)^2 + (\partial_z U)^2$ verwendet wurde. Es ist offensichtlich, dass sich mit diesem Ausdruck keine Gleichung der Form (4.28) mit isolierter Scherrate aufstellen lässt, auch unter vereinfachenden Annahmen, wie etwa der Abhängigkeit von nur einer Variablen, nicht. Wir bearbeiten das Problem daher numerisch weiter.

4.4.3 PTT–Fluss durch einen graden Kanal – numerische Betrachtung

Dimensionslose Modellgleichungen

Vor dem erstellen eines Algorithmus zur numerischen Berechnung entdimensionalisieren wir die Modellgleichungen des lin–PTT–Modells. Unter Verwendung der Skalen

$$\mathbf{U} = \bar{U} \mathbf{U}' \quad (4.59a)$$

$$\mathbf{r} = b \mathbf{r}' \quad (4.59b)$$

$$t = \lambda t' \quad (4.59c)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\eta_p \bar{U}}{b} \boldsymbol{\tau}' \quad (4.59d)$$

kann das lin–PTT–Modell folgendermaßen dargestellt werden:

$$\left(1 + \frac{\epsilon \text{Wi}}{\mu_p} \tau'_{kk}\right) \boldsymbol{\tau}' + \text{Wi} \left[(\mathbf{U}' \cdot \nabla') \boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}' \cdot (\nabla' \mathbf{U}') - (\nabla' \mathbf{U}')^\dagger \cdot \boldsymbol{\tau}' \right] = 2\mu_p \dot{\boldsymbol{\gamma}}' \quad (4.60)$$

Dabei wurde auch der Polymeranteil an der Viskosität, η_p , an der Gesamtviskosität η durch diese normiert, $\mu_p = \eta_p/\eta$. Zusammen mit dem Anteil der

4 Dynamik komplexer Fluide

Lösungsmittelviskosität $\mu_s = \eta_s/\eta$ gilt $\mu_s + \mu_p = 1$. Ferner führt diese Art der Entdimensionalisierung auf den Parameter Wi , der der *Weissenberg-Zahl* entspricht und wie folgt definiert ist:

$$Wi = \frac{\lambda \bar{U}}{b} \quad (4.61)$$

Aus Gl. (4.60) erhält man entsprechend nach Lösung der Gleichung durch *Maple* für das Spannungsfeld den dimensionslosen Ausdruck:

$$\tau_{xx} = \frac{\mu_p (1 + S^{2/3} - 2S^{1/3})}{3\epsilon Wi S^{1/3}} \quad (4.62)$$

$$\text{mit } S = 1 + 27\epsilon Wi^2 \|\nabla U\|_s^2 + 3\epsilon Wi \sqrt{\frac{3 \|\nabla U\|_s^2}{\epsilon} (2 + 27\epsilon Wi^2 \|\nabla U\|_s^2)}$$

Sowie als zu lösende Differentialgleichung:

$$-\frac{Gf(\tau_{xx})}{\mu_p} + \frac{\epsilon Wi}{\mu_p} (\partial_y U \partial_y \tau_{xx} - \partial_z U \partial_z \tau_{xx}) = (\partial_y^2 U + \partial_z^2 U) \quad (4.63)$$

Wir wählen entsprechend den Gegebenheiten in unserem späteren Versuch $\mu_p = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$ und $G = 1$ für die Simulation.

Algorithmische Umsetzung

Die algorithmische Umsetzung erfolgt dabei durch einen Spannungsrelaxations-Algorithmus, wie wir ihn in Abb. 4.7 schematisch präsentieren und der stark an die Methode der Druckrelaxation zur numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung angelehnt ist (Chorin 1967; Madsen & Schäffer 2006; Pozrikidis 1997).

Dieser berechnet zunächst das Geschwindigkeitsprofil $U^{(0)}$ für ein geschätztes Spannungsfeld $\tau_{xx}^{(0)} = 0$, dieses entspricht dem Fall der Strömung eines Newton'schen Fluides. Von diesem Ausgangspunkt wird für den n -ten Schritt der Relaxation das Geschwindigkeitsfeld $U^{(n)}$ berechnet, indem auf der linken Seite der Differentialgleichung Gl. (4.63) das Spannungsfeld $\tau_{xx}^{(n)}$ aus dem Geschwindigkeitsfeld $U^{(n-1)}$ ausgewertet wird.

Die Relaxation wird so lange durchgeführt, bis sich die Geschwindigkeitsfelder $U^{(n)}$ und $U^{(n-1)}$ im Mittel eine relative Differenz von weniger als 10^{-4} aufweisen. Zur Verbesserung der Konvergenz wird zusätzlich eine Unterrelaxation implementiert, nach der das Spannungsfeld nicht vollständig aktualisiert wird, sondern auf einen Zwischenwert

$$\tau_{xx}^{(n)} = \tau_{xx}^{(n-1)} + \alpha (\tau_{xx}^{(n)} - \tau_{xx}^{(n-1)}) \quad (4.64)$$

4.4 Dreidimensionale Strömungen komplexer Fluide

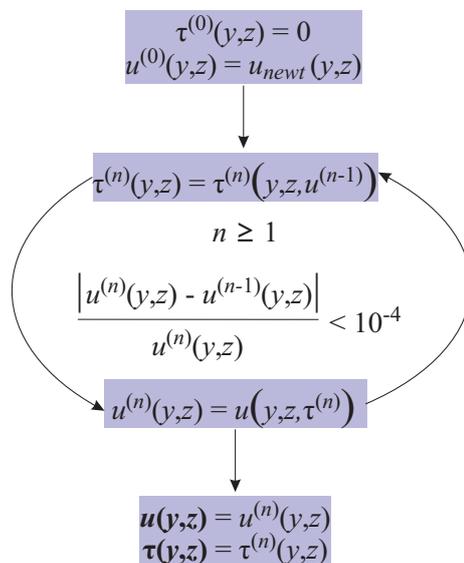


Abbildung 4.7: Schema des Spannungs–Relaxations–Algorithmus. Spannungs– und Relaxationsfelder werden so lange iterativ berechnet, bis die relative mittlere Abweichung des Geschwindigkeitsfeldes, bezogen auf den letzten Rechenschritt, unter 10^{-4} gesunken ist.

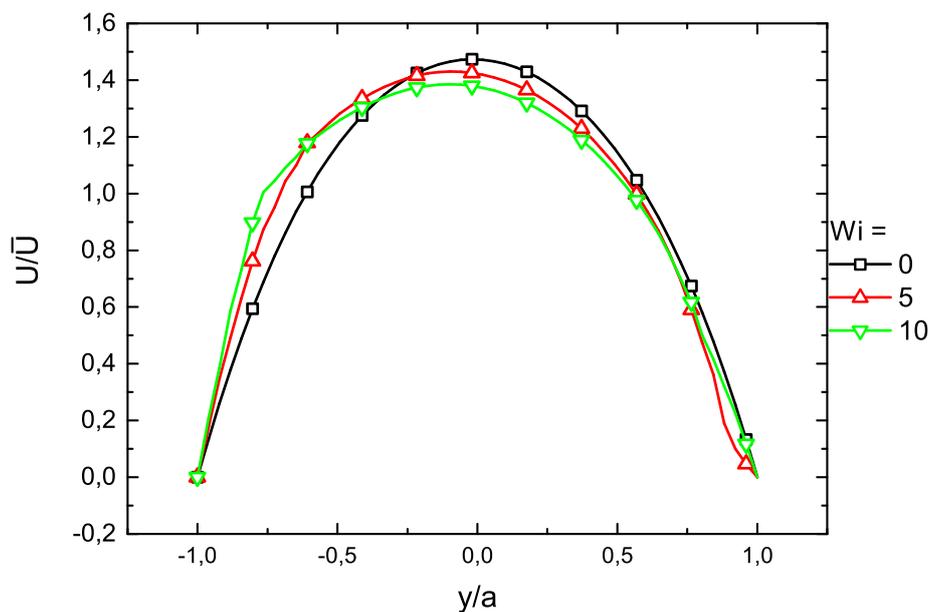


Abbildung 4.8: Nach dem lin–PTT–Modell berechnete Geschwindigkeitsprofile. Wie bereits aus den zweidimensionalen Betrachtungen erwartet flacht das Profil in der Kanalmitte ab, die Flanken werden gleichzeitig steiler. Die am rechten Ende des Profils auftretende Eindellung werten wir als numerisches Artefakt, ebenso die leicht zunehmende Asymmetrie des Geschwindigkeitsprofils.

4 Dynamik komplexer Fluide

wobei α ein dimensionsloser Parameter der Größenordnung $\mathcal{O}(10^{-4} \dots 10^{-3})$ ist. Dadurch wird insgesamt die Laufzeit der Berechnung verlängert, das Konvergenzverhalten allerdings deutlich verbessert. Dennoch muss auf unter Umständen auf eine Anpassung der Fehlertoleranz geachtet werden, da mit der Unterrelaxation die Felder aufeinanderfolgender Iterationen generell dichter beieinander liegen.

Die mittels dieser Methode berechneten Geschwindigkeitsprofile präsentieren wir in Abb. 4.8, der Berechnung liegen die genannten Parameter zugrunde, der Kanalquerschnitt wurde zur Berechnung in ein Gitter aus 100×100 Bulk-Punkten (102×102 Punkte mit den Rändern) zerlegt. Die Berechnungen erfolgten nur im Bulkbereich, auf den Rändern wurden die no-slip-Randbedingungen festgehalten.

Es zeigt sich deutlich die durch Scherverdünnung hervorgerufene Abflachung des Geschwindigkeitsprofils in der Kanalmitte und die steileren Flanken. Wir beobachten zudem bei zwei numerische Artefakte. Erstens zeichnet sich mit zunehmender Weissenbergzahl eine Eindellung um $y/b = 1$ ab, zudem werden die Profile mit zunehmender Weissenbergzahl leicht asymmetrisch.

Teil III

Experimentelle Untersuchungen und Ergebnisse.

Rheologie der Polymerlösung

Das vorliegende Kapitel gewährt einen Überblick über die Rheologie der in den Experimenten verwendeten Polymerlösung. Wir geben hierzu zunächst einen kurzen Hintergrund über den mathematischen Rahmen und die Messtechnik und stellen ein Anforderungsprofil für eine mögliche Messlösung auf. Abschließend präsentieren wir dann Methoden und Ergebnisse zur Messung der Viskosität und Relaxationszeit der verwendeten Lösung.

5.1 Auswahl und Ansatz eines geeigneten Testfluids

Neben den üblichen Anforderungen technischer und chemischer Natur (Handhabbarkeit/Toxizität, chemische Passivität, Empfindlichkeit auf chemische und mechanische Degradation) sind an ein Testfluid zur Untersuchung der komplexen Fließeigenschaften noch weitere Anforderungen zu stellen.

Von besonderem Interesse ist hierbei die Ausprägung der elastischen Eigenschaften des Testfluids, für die die Relaxationszeit λ ein Maß ist. Diese sollte möglichst lange sein, um schon bei geringen Scherraten $\dot{\gamma}$ messbare viskoelastische Effekte zu erzielen. An dieser Stelle sei erneut auf die Definition der Weissenbergzahl $Wi = \lambda\dot{\gamma}$ verwiesen. Hohe Scherraten bringen unerwünschte Effekte mit sich, wie einerseits Schererwärmung durch viskose Reibung, andererseits führen sie auch zu inertialen Effekten.

Auch die längsten Relaxationszeiten von Polymeren liegen erfahrungsgemäß im Bereich von $\lambda \sim \mathcal{O}(10^{-1} \text{ s})$ (Larson 1999). Indem man ein sehr hochviskoses Lösungsmittel und sehr langkettige Polymere ($M_w \sim \mathcal{O}(10^6 \text{ Da})$) auswählt, lässt sich dieser Wert bis in den Bereich $\mathcal{O}(1 \dots 10 \text{ s})$ steigern. Fluide, die diese Eigenschaften besitzen, sind einschlägig als *Boger-Fluide* bekannt (Binnington & Boger 1985; Boger 1977; Macosko 1993). Ein weitere Vorteil der Boger-Fluide ist die relative Konstanz der Viskosität, die sich über mehrere Dekaden der Scherrate

5 Rheologie der Polymerlösung

um maximal eine Dekade ändert.

Für die durchzuführenden Experimente entscheiden wir uns für eine Lösung des Polymers Polyacrylamid (PAAm, hergestellt von *Polysciences*) in einem Lösungsmittel, das aus einer wässrigen Lösung von Glycerin (Glycerin-Anteil 80 Gew.-%) besteht. Polyacrylamid ist ein Polymer zu Acrylamid mit einem sehr flexiblen *backbone* (Hauptkette). Die Kettenlänge liegt im Bereich mehrerer MDa, für unsere Versuche wählen wir eine Ausführung mit einem Molekulargewicht $M_w = 18 \text{ MDa}$.

Ein kritischer Parameter ist die *Overlap-Konzentration* c^* , oberhalb derer nicht mehr von einer verdünnten Lösung gesprochen werden kann, da die einzelnen Polymere begonnen haben, miteinander zu überlappen. Für dieses Polymer liegt die kritische Konzentration, oberhalb derer nicht mehr von einer verdünnten Lösung gesprochen werden kann, bei ca. 834 ppm. Dieser Wert kann aus der *Mark-Houwink-Beziehung* (Bird *u. a.* 1987a; McCarthy *u. a.* 1987) hergeleitet werden, derzufolge die intrinsische Viskosität der Polymerlösung durch die empirische Gleichung $[\eta] = KM_w^a \text{ \{ml/g\}}$ beschrieben werden kann. K und a sind die *Mark-Houwink-Sakurada-Konstanten*. Für das von uns verwendete Lösungsmittel sind sie in der gegebenen Quelle nicht auffindbar, aufgrund der bestehenden Daten werden sie als $K \approx 10^{-2}$ und $a \approx 0.7$ abgeschätzt, was in der üblichen Größenordnung liegt. Die *Overlap-Konzentration* ist bei bekannter intrinsischer Viskosität durch $c^* = 1/[\eta]$ gegeben, bei Einsetzen der genannten *Mark-Houwink-Sakurada-Konstanten* ergibt sich so $c^* \approx 834 \text{ ppm}$. Um im verdünnten Bereich zu bleiben, wählen wir eine Konzentration von 600 ppm.

Beim Ansatz der Testlösung wird weitestgehend den Schritten des Protokolls von Groisman (Groisman & Steinberg 2004) gefolgt. Die erforderliche Masse von PAAm wird zum Ansatz einer Testlösung zunächst im Wasseranteil des Lösungsmittels gelöst und für ca. 24 h auf einem Schüttler bei einer Frequenz von 2 Hz geschüttelt. Dieser Vorgang dient einerseits dem Herstellen einer homogenen Lösung, andererseits werden in diesem Stadium bereits langkettigere PAAm-Polymere durch Vorschering zerschlagen, in der fertigen Testlösung ist dann sichergestellt, dass möglichst wenige Polymere mit zu großer Kettenlänge vorhanden sind. Nach 24 h erfolgt dann die Beigabe von Glycerin (hergestellt von *Grüssing*, Filsung), um die Gesamtviskosität des Testfluids zu erhöhen und damit auch die Relaxationszeit auf den gewünschten Bereich anzupassen. Nach Beigabe erfolgt erneut ein Mischprozess, der bei einer Frequenz von ca. 2.5...3 Hz einen Zeitraum von 168 h beansprucht.

Für die später besprochenen DPIV-Messungen wird der Wasseranteil der Lösung um die entsprechende beigefügte Menge von Tracerpartikeln (Rhodamin-B-beschichtet, Durchmesser ~ 5.0 Mikron, hergestellt von *Berlin Microparticles*, Berlin) verringert. Die Partikel selbst liegen als wässrige Lösung mit einem Feststoffanteil von 2.5 % vor.

5.2 Mathematischer und technischer Rahmen

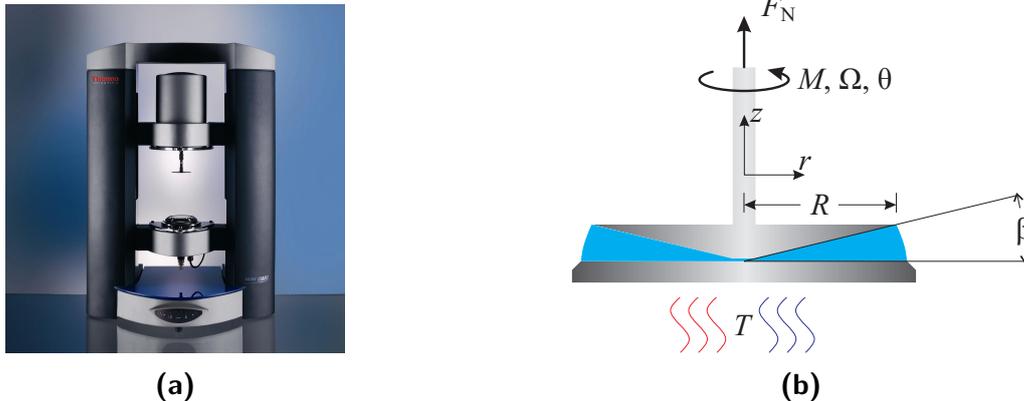


Abbildung 5.1: (a) Fotografische Darstellung eines Rotationsrheometers *Thermo Scientific/Haake* MARS II mit eingesetzter Kegel-Platte-Messgeometrie (Bild Eigentum der *Thermo Scientific GmbH*, Karlsruhe). (b) Schematische Darstellung der Messgeometrie und des Messprinzips. Die Dimensionen des Kegels sind im Text gegeben. Der Antrieb des Rheometers ist mit Sensoren zur Messung des Drehmoments/Stromaufnahme, der Drehfrequenz und der in Wellenrichtung wirkenden Axialkraft ausgestattet. Die Bodenplatte kann über einen Thermostat auf konstanter Temperatur T gehalten werden, mit einer Abweichung von 0.2 K.

5.2 Mathematischer und technischer Rahmen

5.2.1 Messanordnungen

Wir verwenden zwei Messgeräte zur rheologischen Charakterisierung der gewählten Testflüssigkeit: Ein kommerzielles Rotationsrheometer *Thermo Scientific/Haake* MARS II (*Thermo Scientific*, Karlsruhe) und ein Dehnungsrheometer (*Capillary Break-up Extensional Rheometer* – CaBER, Eigenbau).

Das Funktionsprinzip des Rotationsrheometers (s. Abb. 5.1a) beruht dabei auf der Definition der Viskosität als Beziehung zwischen Scherspannung und Scher rate einer Flüssigkeit. Die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich im Spalt zwischen einem rotierenden Messkopf und einer fixierten Bodenplatte, die über ein Thermostat mit Wasserkühlkreis (*Thermo Scientific* Phoenix) temperiert werden kann. Die Toleranz bei der Temperierung beträgt ca. 0.2 K. Das Rheometer verfügt über einen Gleichstrommotor mit reibungsarmem Luftlager. Der von uns verwendete Messkopf des Rheometers bildet einen Kegelstumpf mit einem Basisdurchmesser $D = 60.00$ mm und einem Basiswinkel $\beta = 2.00^\circ$. Die Spitze des Kegels ist begradigt, um ein Aufsetzen auf der Bodenplatte und die damit erfolgende Reibung zu verhindern. Der Spaltabstand zwischen der Abschlussfläche des Kegelstumpfes und der Bodenplatte ist so gewählt, dass bei gedachter Fortsetzung der Mantelfläche die Spitze des Kegels die Bodenplatte grade berühren würde.

5 Rheologie der Polymerlösung

Die Scherrate dieses Motors wird über die Drehfrequenz Ω , die durch einen Drehencoder ausgelesen werden kann, bestimmt. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen ist durch die lokale azimuthale Geschwindigkeit $U(r) = \Omega r$ und dem lokalen Spaltabstand $d(r) = r \tan \beta$ gegeben. Berücksichtigt man die Definition der Scherrate $\dot{\gamma} = \frac{dU}{dz}$, so erhält man nach der Näherung $\frac{dU}{dz} \approx U(r)/d(r)$:

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\beta} = \frac{R}{d_m} \Omega = A \Omega \quad (5.1)$$

In technischer Notation bezeichnet $A = R/d_m$ mit $d_m = d(r = R)$ den *Geometriefaktor*.

Das Drehmoment ist messtechnisch zugänglich durch die Stromaufnahme des Motors, der als Gleichstrommotor ausgeführt ist und daher ein linearer Zusammenhang zwischen Stromaufnahme und ausgeübtem Drehmoment besteht. Es muss der Scherkraft, ausdrückbar durch Integration der Scherspannung $\tau_{\theta r}(r)$ über die Mantelfläche des Kegels, widerstehen, um eine vorgegebene Drehfrequenz konstant zu halten. Auf einen Kreisring im Abstand r von der Symmetrieachse und mit der Breite dr angeordnet ist, wirkt dann die Scherspannung $d\tau_{\theta r}(r) = M/2\pi r^2 dr$. Integration liefert dann:

$$\tau_{\theta r} = \frac{3M}{2\pi R^3} = B M \quad (5.2)$$

Hierin bezeichnet in technischer Notation $B = 3/2\pi R^3$ den *Schubfaktor*.

Die Viskosität folgt dann bei gemessenem $\tau_{\theta r}$ und $\dot{\gamma}$ aus der Beziehung $\eta(\dot{\gamma}) = \tau_{\theta r}(\dot{\gamma})/\dot{\gamma}$. Durch das Abfahren verschiedener Rampen von $\dot{\gamma}$ lässt sich so das scherratenabhängige Viskositätsverhalten bestimmen.

Neben dem Rotationsrheometer verwenden wir auch ein im Eigenbau aufgebautes Dehnungviskosimeter (CaBER) (Gier 2010). In diesem wird ein Tropfen des zu untersuchenden Fluids zwischen zwei Platten aufgebracht, von denen eine über einen Linearmotor (hergestellt von *LinMot*) nach oben gezogen werden kann. Zwischen den Platten wird dadurch ein Fluidfilament gezogen, das sich in der einzuschnüren beginnt. Die Kontur des Filaments ist für Newton'sche Fluide eine Parabel bis zum Abriss, für komplexe Fluide entsteht ein Faden, wie in Abb. 5.2 gezeigt.

Durch Abfilmen des Fadens ab dem Erreichen von Position (c) der oberen Platte kann der Durchmesser $d(t)$ an der engsten Stelle bestimmt werden. Aus dem zeitlichen Verhalten von $d(t)$ lässt sich dann – für uns von größerer Bedeutung – die Relaxationszeit λ ermitteln. Der Einschnürvorgang erfolgt exponentiell gemäß $d(t) \propto \exp(-t/\lambda)$, wie in (Gier 2010) gezeigt.

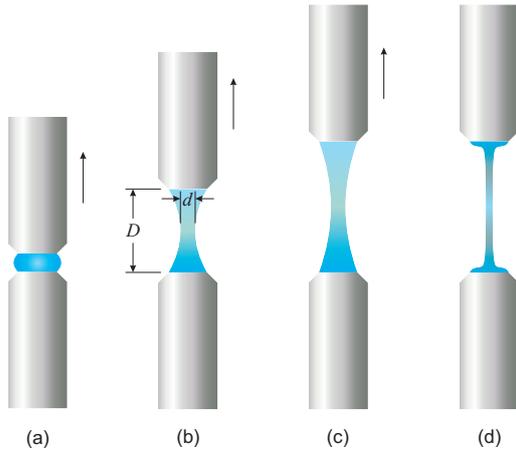


Abbildung 5.2: Verhalten eines Tropfens eines komplexen Fluids im Dehnungsrheometer (CaBER) (a). Beim Auseinanderziehen der Platten ((b) und (c)) schnürt sich das entstehende Filament ein, wegen der endlichen Relaxationszeit λ auch nach dem Anhalten der oberen Platte. Es entsteht ein sehr schmaler Faden der Flüssigkeit (d). Viskosität und Relaxationszeit lassen sich aus dem Zeitverhalten von $d(t)$ herauslesen.

5.2.2 Rheologische Grundlagen

Hybrides Phan–Thien–Tanner–/Oldroyd–B–Modell

Zur Interpretation der Messdaten, insbesondere der Scherrheologie im Rotationsrheometer, müssen die gewonnenen Viskositätsdaten durch ein rheologisches Modell angepasst werden. Aus den Daten dieser Anpassung lassen sich dann die relevanten Parameter der Nullscherviskosität η_0 , des Hochschergrenzwertes der Viskosität, η_∞ sowie die Relaxationszeit λ ableiten. Neben einer Untersuchung unter konstanter Scherung wird in diesem Messgerät auch eine Messung unter oszillatorischer Scherung durchgeführt.

Zur Anpassung der Daten verwenden wir ein hybrides konstitutives Modell, wie es in (Schäfer 2013) präsentiert wird. In diesem tragen betrachtet man anstelle eines Spannungstensors der Polymerspannungen τ einen Spannungstensor, der Beiträge des lin–PTT– und des Oldroyd–B–Modells enthält:

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot [\tau^P + \tau^U] \quad (5.3a)$$

$$\tau^U + \lambda^U \overset{\nabla}{\tau}^U = 2\eta^U \dot{\gamma} \quad f(\tau_{kk}^P) + \lambda^P \overset{\nabla}{\tau}^P = 2\eta^P \dot{\gamma} \quad (5.3b)$$

Durch komponentenweises Ausschreiben erhält man hieraus die Einträge des Tensors der Polymerspannungen:

- Zugspannungen:

$$\tau_{\theta\theta}^P = 0 = \tau_{\theta\theta}^U \quad (5.4)$$

5 Rheologie der Polymerlösung

- Scherspannungen:

$$\text{PTT-Modell: } \tau_{\theta r}^{\text{P}} + 2\epsilon \frac{(\lambda^{\text{P}})^2}{(\eta^{\text{P}})^2} (\tau_{\theta r}^{\text{P}})^3 = \eta^{\text{P}} \dot{\gamma} \quad (5.5)$$

$$\text{Oldroyd-B-Modell: } \tau_{\theta r}^{\text{U}} = \eta^{\text{U}} \dot{\gamma} \quad (5.6)$$

$$\text{Lösungsmittelanteil: } \tau_{\theta r}^{\text{S}} = \eta_{\text{s}} \dot{\gamma} \quad (5.7)$$

- Normalspannungen:

$$\tau_{zz}^{\text{P}} = 2 \frac{\lambda^{\text{P}}}{\eta^{\text{P}}} (\tau_{\theta r}^{\text{P}})^2 \quad \text{und} \quad \tau_{zz}^{\text{U}} = 2\eta^{\text{U}} \lambda^{\text{U}} \dot{\gamma}^2 \quad (5.8)$$

Die vom Rheometer gemessene Scherspannung enthält dabei Beiträge $\tau_{\theta r}^{\text{S}} = \eta_{\text{s}} \dot{\gamma}$ aus der Lösungsmittelviskosität, aus dem lin-PTT-Modell $\tau_{\theta r}^{\text{P}}$ und aus dem Oldroyd-B-Modell $\tau_{\theta r}^{\text{U}}$. Gleiches gilt auch für die auftretende Normalspannung τ_{zz}^{S} . In dem Fall gilt für die Viskosität:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{\theta r}^{\text{S}} + \tau_{\theta r}^{\text{U}} + \tau_{\theta r}^{\text{P}}}{\dot{\gamma}} = \eta_{\text{s}} + \eta^{\text{U}} + \frac{\tau_{\theta r}^{\text{P}}}{\dot{\gamma}} \quad (5.9)$$

sowie für die gemessene Normalspannung:

$$\tau_{zz}(\dot{\gamma}) = \frac{F_{\text{N}}(\dot{\gamma})}{\pi R^2} = 2 \frac{\lambda^{\text{P}}}{\eta^{\text{P}}} (\tau_{\theta r}^{\text{P}})^2 + 2\eta^{\text{U}} \lambda^{\text{U}} \dot{\gamma}^2 \quad (5.10)$$

Aus einer *least-squares*-Regression mittels der Datenverarbeitungssoftware *Origin 9.0* kann ein Satz von Parametern $(\eta_{\text{s}}, \eta^{\text{P}}, \eta^{\text{U}}, \lambda^{\text{P}}, \lambda^{\text{U}}, \epsilon)$ sowie einem generellen Offset gewonnen werden. Hierzu wird eine von Schäfer (Schäfer 2013) entwickelte Anpassungsroutine verwendet. Es sei allerdings angemerkt, dass aus einem simultanen Fit mit beiden Modellen der Parameter λ^{P} nur sehr ungenau bestimmt werden kann, da dieser im Produkt mit dem Parameter ϵ auftritt. Eine Anpassung mit einem gemeinsamen Parameter $\epsilon (\lambda^{\text{P}})^2$ liefert dagegen ein zuverlässigeres Ergebnis.

Oszillationsrheometrische Methoden

Neben der Rheologie bei stetiger Scherung, entsprechend einer Rotation des Messkopfes mit konstanter Geschwindigkeit, wurde das Testfluid auch unter oszillatorischer Scherung untersucht. Dabei oszilliert der Messkopf, was einer zeitabhängigen Scherung $\gamma(t)$ entspricht. Die Spannungsantwort des Fluides ist dann ebenfalls oszillatorisch, allerdings phasenversetzt um einen Phasenwinkel δ :

5.2 Mathematischer und technischer Rahmen

$$\text{Scherung:} \quad \gamma(t) = \gamma_0 \sin \omega t \quad (5.11)$$

$$\text{Scherrate:} \quad \dot{\gamma}(t) = \gamma_0 \omega \cos \omega t \quad (5.12)$$

$$\text{Antwort:} \quad \tau(t) = \tau_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (5.13)$$

Aus Gründen der Prägnanz verwenden wir die Abkürzung $\tau = \tau_{\theta r}$ für die Scherspannung.

Zur Auswertung der Messung zerlegt die Aufnahmesoftware die aufgezeichneten Spannungswerte in zwei um 90° versetzte, wellenförmige Signale τ' und τ'' :

$$\tau = \tau'_0 \sin \omega t + \tau''_0 \cos \omega t \quad (5.14)$$

Der Phasenversatz δ der Spannungsantwort zur Scherung lässt sich dann aus $\tan \delta = \tau''_0 / \tau'_0$ ermitteln.

Ruft man sich die generische Definition $\tau = G\gamma$ der Scherspannung in Erinnerung, bei der G ein generalisiertes, dynamisches Modul bezeichnet, so legt die vorgenommene Zerlegung des Spannungssignals τ die Existenz zweier solcher Moduli,

$$G' = \frac{\tau'_0}{\gamma} \quad \text{und} \quad G'' = \frac{\tau''_0}{\gamma} \quad (5.15)$$

Ferner legt ein Vergleich der Zerlegung der Spannungsantwort, Gl. (5.14), mit der Definition einer komplexen Zahl gemäß der Euler-Identität nahe, dass es sich bei G' und G'' um den Real- und Imaginärteil des komplexwertigen dynamischen Moduls G handelt, genauer gesagt um das *elastische Modul* G' und das *Verlustmodul* G'' . Für die Beträge gilt weiterhin $|G^*| = \sqrt{G'^2 + G''^2}$. Aus der Definition allgemein linearen viskoelastischen Verhaltens lassen sich die Ausdrücke für die Moduli herleiten (Macosko 1993):

$$G'(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \frac{\omega^2 \lambda_j^2}{1 + \omega^2 \lambda_j^2} \approx G_1 \frac{\omega^2 \lambda_1^2}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} + G_2 \frac{\omega^2 \lambda_2^2}{1 + \omega^2 \lambda_2^2} \quad (5.16a)$$

$$G''(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \frac{\omega \lambda_j}{1 + \omega^2 \lambda_j^2} \approx G_1 \frac{\omega \lambda_1}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} + G_2 \frac{\omega \lambda_2}{1 + \omega^2 \lambda_2^2} \quad (5.16b)$$

Man betrachtet nun die zur Scherung gehörige Scherrate $\dot{\gamma} = \gamma_0 \omega \cos \omega t$. Bei gegebener Scherrate lautet die Spannungs-Scherungsbeziehung $\tau = \eta \dot{\gamma}$, und bei erneuter Zerlegung gemäß Gl. (5.14) folgen die Definitionen der elastischen Moduli:

$$\eta' = \frac{\tau'_0}{\dot{\gamma}} = \frac{G'}{\omega} \quad \text{und} \quad \eta'' = \frac{\tau''_0}{\dot{\gamma}} = \frac{G''}{\omega} \quad (5.17)$$

5 Rheologie der Polymerlösung

Eine Verbindung zwischen elastischem und Verlustmodul sowie der Viskosität $|\eta^*| = \sqrt{\eta'^2 + \eta''^2}$ stellt dann die *Cox-Merz-Regel* her, nach der die gemessene Viskosität η dem Betrag der komplexwertigen Viskosität η^* entspricht (Cox & Merz 1958). Elastisches und Verlustmodul sind durch die Spannungsantwort bei oszillatorischer Scherung experimentell direkt zugänglich. Experimentell zeigt sich ferner, dass in den Gln. (5.16a) und (5.16b) eine Ausführung der Summe bis zum zweiten Summanden genügt. Ferner muss als additiver Beitrag die Lösungsmittelviskosität η_s berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}
 \eta - \eta_s = |\eta^*| &= \left[\left(\frac{G''}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{G'}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \\
 &= \left[\frac{1}{\omega^2} \left(G_1 \frac{\omega^2 \lambda_1^2}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} + G_2 \frac{\omega^2 \lambda_2^2}{1 + \omega^2 \lambda_2^2} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\omega^2} \left(G_1 \frac{\omega \lambda_1}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} + G_2 \frac{\omega \lambda_2}{1 + \omega^2 \lambda_2^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.18) \\
 &= \left[\left(\eta_1 \frac{\omega^2 \lambda_1^2}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} + \eta_2 \frac{\omega^2 \lambda_2^2}{1 + \omega^2 \lambda_2^2} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\eta_1 \frac{\omega \lambda_1}{1 + \omega^2 \lambda_1^2} + \eta_2 \frac{\omega \lambda_2}{1 + \omega^2 \lambda_2^2} \right)^2 \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

Der Parametersatz $(\eta_s, \eta_1, \eta_2, \lambda_1, \lambda_2)$ lässt sich dann durch Anpassung der Messdaten bestimmen.

5.3 Messungen und Ergebnisse

5.3.1 Scherrheometrie

Wir bestimmen zunächst mittels *steady-shear* Rheometrie die Viskositäten von Lösungsmittel und Polymerlösung. Erwartungsgemäß zeigt sich für das Lösungsmittel eine scherratenunabhängige Viskosität $\eta_s = 62.6 \pm 1.19$ mPas (Abb. 5.3). Die stärksten Abweichungen finden sich für sehr kleine Scherraten und decken sich mit der in diesem Scherratenbereich zu erwartenden Ungenauigkeit der Spannungsmessung.

Eine Anpassung der Viskositätsdaten der Polymerlösung gemäß dem hybriden PTT-OB-Modell liefert Viskositäten $\eta^P = 18.5 \pm 0.6$ Pas bzw. $\eta^U = 0.076 \pm 10^{-3}$ Pas, beide mit relativ geringen Fehlern. Die Relaxationszeiten gemäß beiden Modellen liegen bei $\lambda^P = 90.5$ s für das PTT-Modell bzw. $\lambda^U = 0.08$ s für das UCM-Modell. In diesem Zusammenhang fallen einerseits die stark voneinander abweichenden Relaxationszeiten auf, die – vorgreifend auf weitere Ergebnisse –

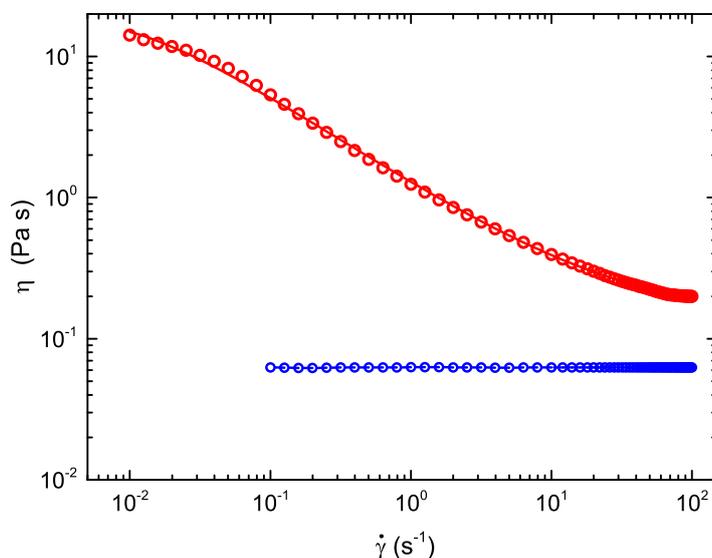


Abbildung 5.3: Scherratenabhängige Viskosität η des Lösungsmittels (\circ) und der Polymerlösung (\circ) mit den entsprechenden 7-Parameter-Regressionen gemäß dem hybriden PTT-OB-Modell.

auch um eine Dekade über bzw. unter denen aus der oszillatorischen Messung liegen. Wir geben diese Werte hier der Vollständigkeit halber an, verweisen allerdings auf die bereits genannten Schwachstellen eines direkten, simultanen Fits mit beiden Modellen.

Der überwiegende Beitrag der PTT-Relaxationszeit im Vergleich zur Oldroyd-B-Relaxationszeit repräsentiert die im Oldroyd-B-Modell nicht vorhandene, experimentell aber beobachtbare Scherverdünnung. Von den Viskositäten her fällt auf, dass man im Grenzfall unendlicher Scherraten einen Unterschied zwischen Lösungsmittel und Polymerlösung misst. Diese Beobachtung ist nur auf den ersten Blick nicht intuitiv. Tatsächlich stellt sich im betrachteten Grenzfall $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ keine weitere Bedingung an die Viskosität als deren Konstanz und $\dot{\gamma}$ -Unabhängigkeit, der Betrag von η kann sich natürlich durch die Beigabe makroskopischer Moleküle ändern.

Wir untersuchen weiterhin die Polymerlösung mittels oszillatorischer Rheometrie und passen die dabei gefundenen Werte für die Viskosität durch ein Modell wie in Gl. (5.18) gegeben an (s. Abb. 5.4 (b)). Zusätzlich zeigen wir in Abb. 5.4 (a) die Rohdaten für das elastische Modul G' und das Verlustmodul G'' , einmal durch einen 2-Moden- und einen 4-Moden-Fit angepasst. Da sich die Viskositätsdaten über mehrere Dekaden erstrecken, muss bei der Regression eine Gewichtung der Daten berücksichtigt werden.

Es zeigt sich, dass bereits zwei Moden genügen, um eine passable Überein-

5 Rheologie der Polymerlösung

stimmung zwischen Modell und Messdaten zu erzeugen. Zum Vergleich wurde auch eine Anpassung mit vier Moden durchgeführt, die wenig überraschend zu einer noch besseren Übereinstimmung führt, allerdings die Regression auch numerisch weniger zuverlässig macht. Betrachtet man außerdem die geplotteten Viskositätsdaten, Abb. 5.4 (b), so stellt man fest, dass eine Erhöhung der Modenzahl lediglich im Bereich sehr hoher Scherraten zu einer Annäherung beider Kurven führt. Allerdings ist diese Annäherung zu gering, um aus unserer Sicht die Nachteile einer geringeren Stabilität der Regression in Kauf zu nehmen.

Die aus den Moduli errechneten Viskositätsdaten decken sich faktisch mit denen aus der *steady-shear* Messung, zu Abweichungen kommt es in den Grenzfällen sehr großer und sehr kleiner Scherraten. Die Nullscherviskosität lässt sich aus der Anpassung als $\eta_0 = 5.07 \pm 0.29$ Pas bzw. $\eta_0 = 5.87 \pm 0.07$ Pas für die Regression mit vier Moden ablesen. Im Bereich hoher Scherraten liegt der Grenzwert der Viskosität bei $\eta_\infty = 0.53 \pm 0.05$ Pas bzw. $\eta_\infty = 0.38 \pm 0.03$ Pas. Die Lösungsmittelviskosität η_s wird in beiden Messungen als 0.27 ± 0.01 Pas bzw. 0.24 Pas bestimmt.

Die Relaxationszeiten variieren bei den vorgenommenen Messungen, liegen aber alle in der Größenordnung weniger Sekunden, bis maximal etwa 16 s. Für eine zweimodige Regression, wie wir sie weiterhin in dieser Arbeit verwenden, stellen wir stets zwei Relaxationszeiten fest, von denen eine im Bereich $\lambda_1 \approx 0.5$ s liegt, die andere im Bereich von $\lambda_2 \approx 7.5 \dots 8.5$ s. Wie bereits in Kap. 4.2 und (Burghlea *u. a.* 2004a) geschildert, betrachten wir die längste gemessene Relaxationszeit hier als diejenige, die die Dynamik des kompletten Moleküls beschreibt.

Der Parameter der Relaxationszeit eignet sich auch zur Beurteilung der Qualität und Eignung einer Polymerlösung zur Messung. Eine zu hohe Relaxationszeit weist auf die Anwesenheit zu vieler langkettiger Polymere hin, was der Stabilität der Lösung unter Scherbedingung abträglich ist und zu einem verfrühten Einsatz viskoelastischer Effekte führt. Eine zu kleine Relaxationszeit weist auf Degradation während des Ansatzprozesses hin. In beiden Fällen wird von einer weiteren Verwendung der betroffenen Lösung abgesehen.

5.3.2 Normalspannungsrelaxation

Insbesondere die Relaxationszeit kann neben der direkten rheologischen Messung auch aus der Relaxation der Normalspannung nach einem abrupten Stoppen der Scherung gemessen werden. Hierzu verwendet man das Signal F_z des Normalkraftsensors des Rheometers. Die Scherung folgt dann der Vorgabe

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_0 \mathcal{H}(t - t_0) = \begin{cases} \dot{\gamma}_0, & t < t_0 \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (5.19)$$

wobei von der internen Regelung des Rheometers nicht die Scherrate, sondern die Scherspannung konstant gehalten wird. Nach dem Stoppen der Scherung relaxiert die Normalspannung dann exponentiell gegen Null gemäß

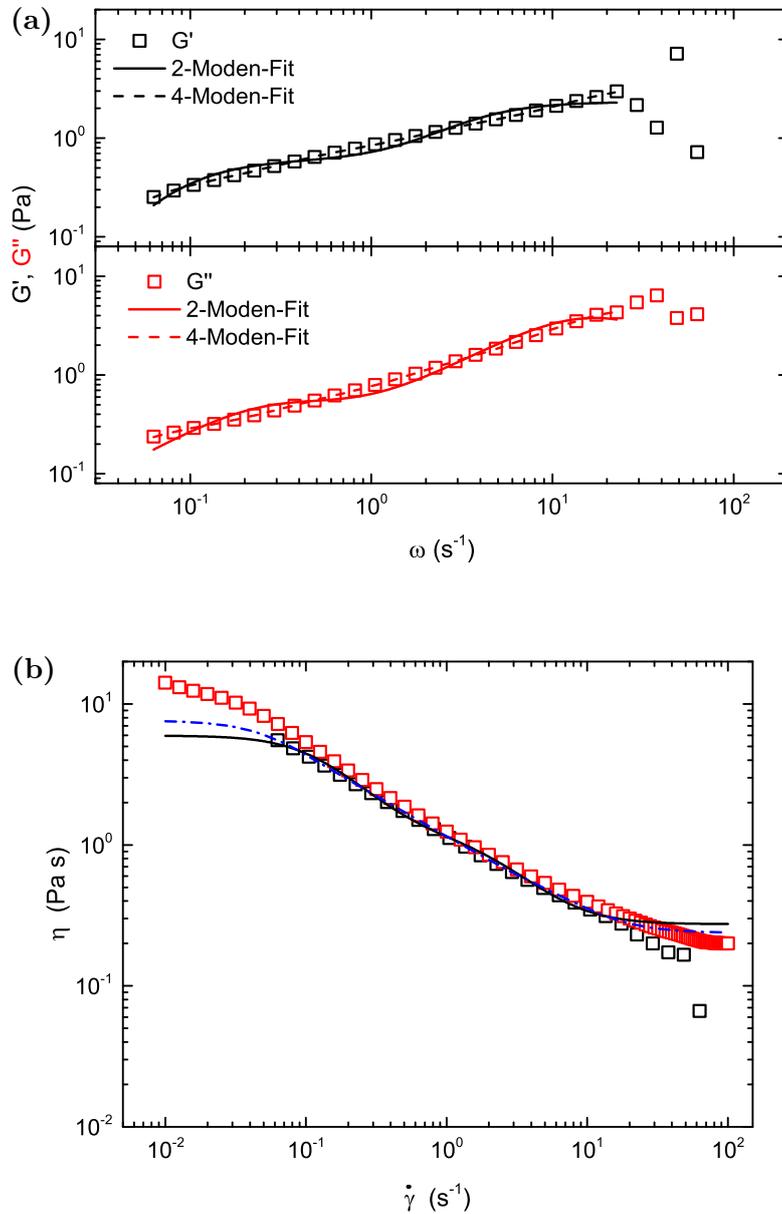


Abbildung 5.4: (a) Frequenzabhängige dynamische Moduli G' und G'' . Als Abbruchfrequenz für das Ende des laminaren Fließbereichs wählt man die kleinste Frequenz, ab der eines der Module Abweichungen vom bis dahin erfolgten Kurvenverlauf zeigt. (b) Scherratenabhängige Viskosität η der Polymerlösung, errechnet aus den dynamischen Moduli (\square) nach der Oszillationsmessung und direkt in stetiger Scherung gemessen (\blacksquare). Aus einer Anpassung (schwarze Linie: Zwei Moden, blaue Linie: vier Moden) lassen sich die rheologischen Parameter ermitteln.

5 Rheologie der Polymerlösung

| τ_0 (Pa) | N_m | λ_1 (s) | λ_2 (s) | λ_3 (s) |
|---------------|-------|-----------------|------------------|------------------|
| 2 | 2 | 1.78 ± 0.45 | 23.71 ± 2.97 | – |
| 5 | 2 | 1.65 ± 0.12 | 13.86 ± 2.03 | – |
| | 3 | (1.65) | (1.65) | 13.86 ± 2.66 |
| 10 | 2 | 1.51 ± 0.04 | 19.57 ± 2.45 | – |
| | 3 | (1.51) | (1.51) | 19.60 ± 2.96 |

Tabelle 5.1: Überblick über die für $\tau = 2, 5$ und 10 Pa gemessenen Relaxationszeiten bei Auswertung mittels Zwei- und Drei-Moden-Regression

$$F_N(t) = F_N^{\text{bias}} + F_N^{(1)} \exp\left(-\frac{t-t_0}{\lambda_1}\right) + F_N^{(2)} \exp\left(-\frac{t-t_0}{\lambda_2}\right) + F_N^{(3)} \exp\left(-\frac{t-t_0}{\lambda_3}\right) \quad (5.20)$$

Die Zeitkonstante dieses Prozesses wird als Relaxationszeit betrachtet. Wir berücksichtigen zusätzlich eine Vorspannung F_z^{bias} des Sensors. Wir vergleichen im folgenden Relaxationsprozesse mit zwei und drei Moden, vorgreifend können wir allerdings feststellen, dass das zusätzliche Betrachten der dritten Mode praktisch keinen Unterschied zu einem Zwei-Moden-Abfall bringt.

Wir führen insgesamt vier Messungen mit Ausgangs-Scherspannungen $\tau = 1, 2, 5$ und 10 Pa durch. Die Messung für $\tau = 1$ Pa liefert jedoch kein auswertbares Spannungssignal und wird daher verworfen. Über die restlichen Messungen geben wir in Abb. 5.5 (c) einen Überblick. Die gemessenen Relaxationszeiten sind in Tab. 5.1 tabelliert zusammengefasst. Insgesamt bleibt hier festzuhalten, dass sich eine Auswertung mittels Zwei-Moden-Regression empfiehlt, da diese wesentlich zuverlässigere Werte liefert. Die sich gleichenden Moden bei der Drei-Moden-Regression sind jeweils mit einem sehr hohen Fehler behaftet.

5.3.3 Dehnungsrheometrie

Abschließend wurde noch die Relaxationszeit der Polymerlösung durch Dehnungsrheometrie gemessen. Hierzu wird, wie bereits beschrieben, die Einschnürung eines zwischen zwei Platten gespannten Fluidfilaments videographisch gemessen. Für ein viskoelastisches Fluid erwartet man, dass nach dem Stop der Zugbewegung der Platten ein exponentieller Verlauf des Filamentdurchmessers, $d(t) \propto \exp(-t/\lambda)$ zu beobachten ist. Für diesen lässt sich dann ebenfalls eine Zeitkonstante bestimmen, die zur Relaxationszeit definiert ist. In Abb. 5.6 zeigen wir für drei nacheinander ausgeführte Messungen den Verlauf der Filamentstärke.

Die für die drei durchgeführten Messungen gemessenen Relaxationszeiten liegen bei 4.11 ± 0.005 s, 4.42 ± 0.003 s und 4.48 ± 0.003 s und damit in der Größen-

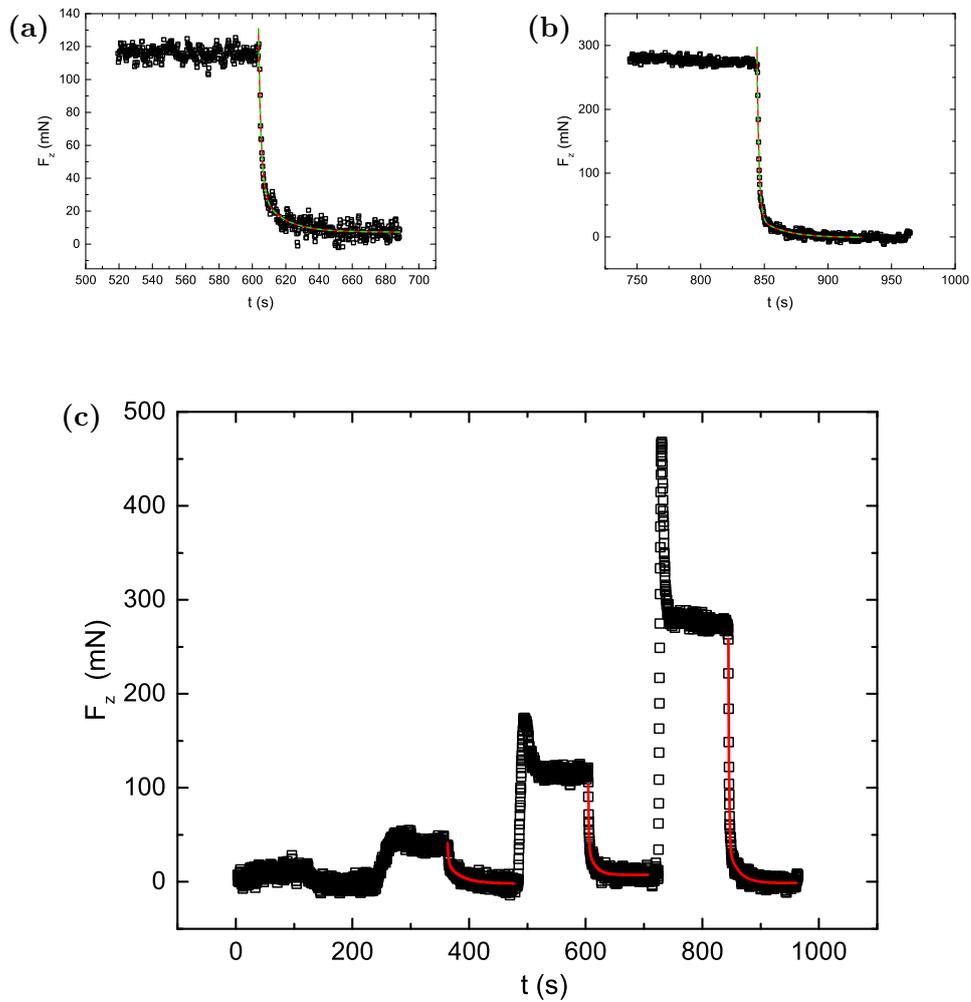


Abbildung 5.5: Messung des Relaxationsverhaltens der Normalspannung. (a) und (b) Vergleich der Zwei- und Drei-Moden-Regression für Messungen mit einer Ausgangsscherung von $\tau = 5$ und 10 Pa. Es ergeben sich in diesem Fall für zwei der drei Moden nahezu identische Relaxationszeiten, die allerdings mit einem großen Fehler behaftet sind. (c) Überblick über alle durchgeführten Messungen. Für die erste eingestellte Spannung wird keine exponentielle Anpassung durchgeführt.

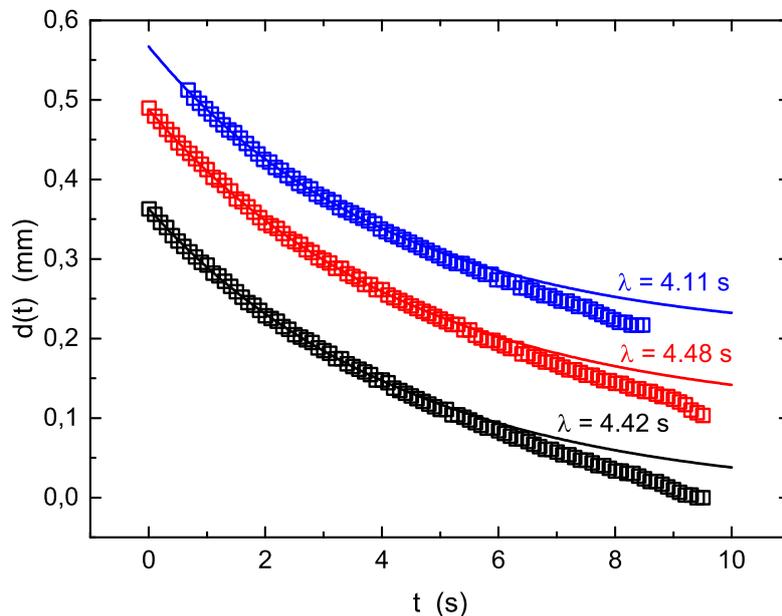


Abbildung 5.6: Einschnürungsprozesse bei Dehnungsrheometrie. Messbar ist in allen drei durchgeführten Untersuchungen ein annähernd ähnlicher Verlauf der Filamentstärke, die Zeitkonstante bei der Relaxation liegt zwischen 4.1 und 4.5 s.

ordnung, die wir bereits bei den anderen angewandten Messverfahren festgestellt haben.

5.3.4 Abschließende Beurteilung

Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten verschiedene Verfahren angewendet, um die Relaxationsparameter und die Viskosität eines komplexen Fluids zu messen. Insbesondere von Interesse ist für die weiteren Kapitel dieser Arbeit die Relaxationszeit, da diese durch $Wi = \lambda\dot{\gamma}$ direkt in die Berechnung der Weissenbergzahl eingeht.

Als problematisch erweist sich dabei die Tatsache, dass es für die Relaxationszeit keine einheitliche, makro- wie mikroskopische Definition gibt und in der Realität ein Polymer auch nicht durch eine Relaxationszeit charakterisiert ist, sondern durch ein im schlimmsten Falle breites Spektrum vieler Relaxationszeiten. Dennoch muss an dieser Stelle angemerkt werden, dass wie bereits in der Literatur erwähnt oft eine oder wenige Moden dieses Spektrum dominieren und daher zur Beschreibung der Polymerdynamik ausreichend sind.

Die von uns gemessenen Relaxationszeiten decken einen Rahmen von ca. 0.5...90s ab und variieren mit der Messmethode, teilweise auch innerhalb ei-

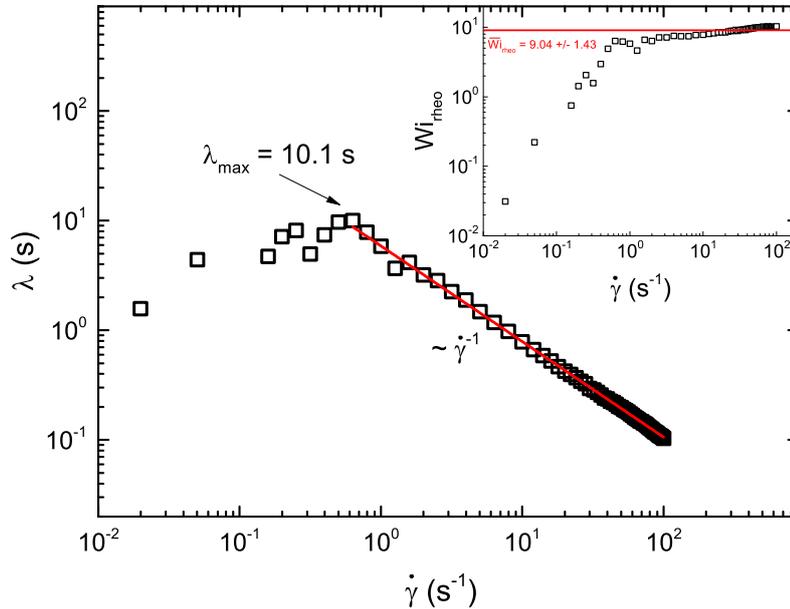


Abbildung 5.7: Scherratenabhängigkeit der Relaxationszeit. Bei Auftragung der Relaxationszeit aus der Scherrheometrie gegen die angelegte Scherrate zeigt sich ein funktioneller Zusammenhang, nachdem die Normalspannungsdifferenz $N_1 = \tau_{zz}$ nahezu umgekehrt proportional zur Scherrate $\dot{\gamma}$ ist, die Werte liegen in einem Bereich von ca. $\lambda \sim \mathcal{O}(1\text{s})$. Die rheologische Weissenbergzahl ist auf diesem Bereich konstant.

ner Messmethode. Diese Variationen führen wir einerseits auf algorithmische Defizite der verwendeten Regressionsmethode zurück (*Least-squares, non-linear*), andererseits auch auf Defizite der zugrundegelegten rheologischen Modelle, alle Aspekte des Fluids ausreichend genau abzubilden. Variationen mit der Messmethode sind darauf zurückzuführen, dass mit der Methode auch die Fließsituation sich stark ändert (oszillatorische, Rotations- und Dehnungsströmungen) und damit unterschiedliche Kräfte auf die gelösten Polymere einwirken. Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass man etwa für die Anlaufzeit einer Strömung bei festgestellter Fließrate im später verwendeten Kanal eine Antwortzeit des Fluids bis zum Erreichen einer konstanten Geschwindigkeit von 100 s misst, ein Wert, der ebenfalls als Relaxationszeit definiert werden kann. Für die Relaxationszeit dieses Prozesses wird ebenfalls ein Wert von ca. 20...30 s gemessen.

Zusammenfassend müssen wir feststellen, dass die Messung unter oszillatorischer Scherung die beste Ergebnis-Robustheit bei Abbildung der Strömungsverhältnisse im verwendeten Kanal aufweist und wir deshalb die mittels dieser Methode gewonnenen Relaxationszeiten für alle weiteren Untersuchungen verwen-

5 Rheologie der Polymerlösung

den. Dabei vernachlässigen wir die kleinere der beiden gemessenen Relaxationszeiten, da nach gängiger Literatur die Dynamik eines ganzen Polymers durch die größte Relaxationszeit beschrieben wird. Reihenuntersuchungen der Viskosität, wie sie im Umfeld der schwerpunktmäßigen Messungen dieser Arbeit durchgeführt wurden, weisen auf eine Relaxationszeit $\lambda = 8.1 \pm 0.3$ s hin.

Wir nehmen abschließend eine Untersuchung der Scherratenabhängigkeit der Relaxationszeit unter stetiger Scherung vor, die Ergebnisse sind in Abb. 5.7 gezeigt. Die Relaxationszeit folgt dabei aus einer Normalspannungsmessung. Aus der konstitutiven Gleichung des Upper-convected-Maxwell-Modells lässt sich für diese der Zusammenhang $N_1 = \tau_{zz} = 2\eta(\dot{\gamma}) \lambda \dot{\gamma}^2$ herleiten, entsprechend kann die Relaxationszeit durch Division $\tau_{zz}/2\eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^2$ errechnet werden.

Hierbei zeigen sich zwei Dinge. Erstens zeigt sich, dass die Relaxationszeiten durch ein Potenzgesetz $\lambda \sim \dot{\gamma}^{-1}$ beschrieben werden können. Dieser Zusammenhang insbesondere führt auf eine rheologische Definition der Weissenbergzahl, $Wi_{\text{rheo}} = \lambda \dot{\gamma} = \tau_{zz}/2\eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}$, die auf diesem Scherratenbereich konstant ist.

Zweitens sind die so gemessenen, längsten Polymerrelaxationszeiten im Bereich von $\lambda \approx 10$ s, was die Ergebnissen der oszillatorischen Rheometrie bestätigt. Es bleibt weiteren Untersuchungen vorbehalten, ob aus dem Vergleich beider Werte allgemein $\lambda \approx [Wi_{\text{rheo}}] \{s\}$ gefolgert werden kann, oder ob dies hier nur eine zufällige Begebenheit war.

Versuchsaufbau

Im nun folgenden Kapitel beschreiben wir den Aufbau der Versuchsanordnung. Dabei widmen wir uns einerseits dem Kanal und dem Strömungsantrieb, andererseits widmen wir uns auch der Optik und Bildaquisition sowie den Grundlagen der DPIV-Technik (*Digital Particle Imaging Velocimetry*). Wir präsentieren darüber hinaus erste Kontrollmessungen mit einem einfachen Newton'schen Lösungsmittel zur Überprüfung der Genauigkeit des Geschwindigkeitssignals und untersuchen die unter Umständen zu erwartende Leckrate.

6.1 Strömungsmaschinerie

In der Literatur existieren Untersuchungen zu turbulenten Strömungen in verdünnten Polymerlösungen, die in geraden Kanälen beobachtet wurden (Bonn *u. a.* 2011; Paterson & Abernathy 1972; Ram & Tamir 1964). Bei eingehendem Studium stellt sich allerdings heraus, dass diese Strömungen zwar kritische Weissenbergzahlen und kritische Scherraten erreichen, allerdings erst im Grenzfall hoher Geschwindigkeiten. Diese Turbulenz ist daher als der Grenzfall der *elasto-inertialen* Turbulenz zu werten (Samanta *u. a.* 2013).

Aus der bisherigen Literatur geht hervor (Analyse derselbigen s. Kap. 2.4 und 1.3), dass der für uns relevante Effekt rein viskoelastischer Turbulenz am besten durch gekrümmte Fließgeometrien zu erzeugen ist. Beim Entwurf einer geeigneten Versuchsanordnung ist dies zu berücksichtigen.

6.1.1 Versuchskanal (C–40)

Der konkret für diese Arbeit verwendete Kanal basiert auf einem Entwurf, wie er bereits von Steinberg (Jun & Steinberg 2010), Groisman (Groisman & Steinberg 2004) und Burghlea (Burghlea *u. a.* 2004a,b) mikro- und makrofluidisch ausgeführt worden ist.

6 Versuchsaufbau

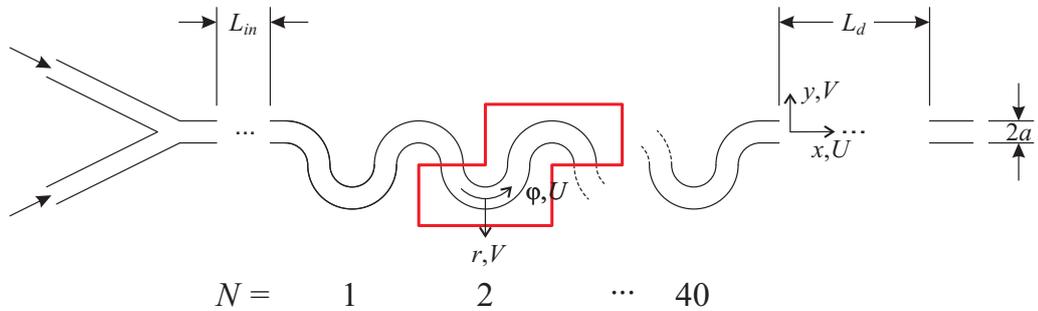
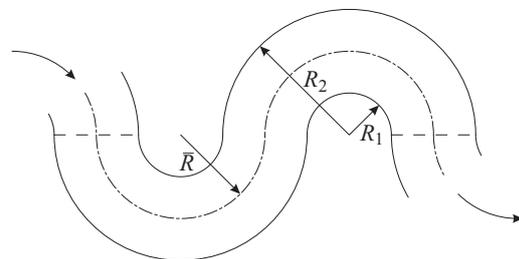


Abbildung 6.1: C-40-Kanal im Überblick. Das Testfluid wird über zwei Speiseleitungen (links) eingespeist, bis zur ersten funktionalen Einheit ist eine Strecke $L_{in} = 95.0$ mm zurückzulegen, um Störungen aus dem Aufeinandertreffen der Fluidstränge der beiden Speiseleitungen zu beruhigen. Es folgen insgesamt 40 funktionale Einheiten mit den im Text gegebenen Innen- und Außenradien. Bis zur Auslassöffnung ist hinter der letzten funktionalen Einheit ein ebenfalls 95.0 mm langes, gerades Kanalstück positioniert. Eine funktionale Einheit ist hier rot hervorgehoben.

Abbildung 6.2: Überblick über eine einzelne funktionale Einheit. Im verwendeten Kanal betragen die Abmessungen $R_1 = 1.00$ mm und $R_2 = 3.00$ mm. Die Kanalhalbweite und -höhe betragen somit $a = 1.00$ mm, der mittlere Radius \bar{R} liegt bei 2.00 mm. Die Übergangsflächen zu den benachbarten funktionalen Einheiten sind eng gestrichelt eingezeichnet.



Der Kanal besteht aus 40 miteinander verbundenen *funktionalen Einheiten*, die aus jeweils zwei miteinander verbundenen Halbringen bestehen (Abb. 6.2). Ein Halbring weist einen Innendurchmesser von $R_1 = 1.00$ mm und einen Außendurchmesser von $R_2 = 3.00$ mm auf, die Kanalhalbweite beträgt somit $a = 1.00$ mm. Dies entspricht auch der Kanalhöhe, da der Kanal einen quadratischen Querschnitt besitzt. Der mittlere Radius eines Halbrings liegt bei $\bar{R} = 2.00$ mm. Dies gibt dem Kanal eine funktionale Länge von 502.00 mm oder 6.28 mm pro funktionaler Halbring. Alle Angaben können im Rahmen der Fertigungstoleranz von 0.05 mm als exakt betrachtet werden. Ein Überblick über den gesamten Kanal ist in Abb. 6.1 gegeben, in dieser Abbildung sind auch die verwendeten Koordinatensysteme eingetragen.

Der verwendete Kanal ist in Plexiglas ausgeführt, die in Abb. 6.1 gezeigte Anordnung ist dafür in einen Plexiglasstreifen, der ca. 10.00 mm stark ist und in seinen lateralen Abmessungen etwa 50×2.5 cm misst, gefräst worden. Abgedeckt wird er durch einen identisch bemessenen Plexiglasstreifen, der mit 40 Schrauben entlang der Seiten mit dem unteren Streifen verbunden ist. Zur Sicherstellung der Dichtigkeit befindet sich in einer Rille im abdeckenden Streifen eine O-Ring-Schnur, die zusätzlich mit Flächendichtmittel behandelt wurde. Ein im Kreuzmuster von der Mitte zu den Enden hin erfolgendes schrittweises Anziehen der Schrauben stellt sicher, dass beide Plexiglasstreifen und die Dichtung gleichmäßig belastet aneinandergedrückt werden.

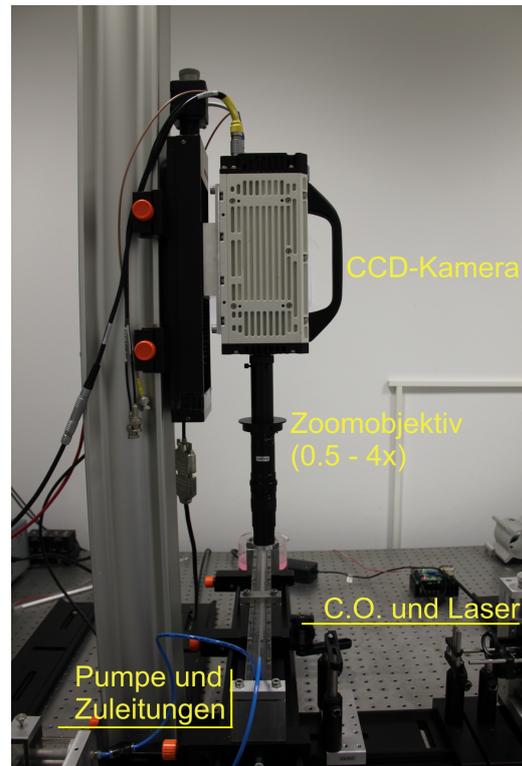
Für Messungen ist der Kanal mittels Reitern auf eine optische Bank (*Linos FLS-95*) montiert. Selbst gefertigte Abstandhalter aus Aluminium befestigen den Kanal an beiden Enden, dazwischen sichern Stützböcke aus Aluminium in Abständen von ca. 25 cm den Kanal gegen Durchbiegen. Die komplette Versuchsanordnung ist zum Schutz vor Vibrationen des Gebäudes auf einen luftgelagerten Tisch (*Newport S-2000 Laminar Flow Isolator*) montiert.

6.1.2 Strömungsantrieb

Die Einspeisung des Testfluids in den Kanal erfolgt durch zwei Bohrungen im abdeckenden Plexiglasstreifen. Die beiden Speiseleitungen schneiden sich in einem spitzen Winkel, um die am Schnittpunkt eventuell auftretende Störungen in den beiden Fluidsträngen zu beruhigen, liegt zwischen dem Schnittpunkt der Speiseleitungen und der ersten funktionellen Einheit ein gerades Kanalsegment von 95.00 mm Länge. Ein solches findet sich auch zwischen der letzten funktionellen Einheit und dem Abfluss des Kanals.

Der Antrieb der Strömung erfolgt durch eine schrittmotorgetriebene Spritzenpumpe (*CETONI Nemesys*, Korbußen). Auf dieser sind zwei druckfeste Glasspritzen (*ILS Innovative Laborsysteme*, Stützerbach) montiert, die das Testfluid beinhalten. Durch die Verwendung zweier Spritzen ergibt sich einerseits der Vorteil, Farbstoffmessungen durchführen zu können, andererseits verdoppelt sich auch im Vergleich zu einer einzelnen Spritze das Reservoir an für die Messungen zur Verfügung stehender Testflüssigkeit auf ca. 100 ml. Dies ist insbesondere bei Lang-

Abbildung 6.3: Versuchsaufbau. Links unten (außerhalb des Bildes) sind Spritzenpumpe und Zuleitungen angeordnet, rechts die Zylinderoptik (C.O.) und der Laser zur Fluoreszenzanregung der verwendeten Tracerpartikel. Die Kamera filmt von oben die Strömung im Kanal ab. Alle Komponenten sind mit optischen Schienen auf einem luftgelagerten Tisch montiert, der Abstand zwischen Kamera und Kanal kann über eine elektrisch betriebene Bühne eingestellt werden, um für eine eingestellte Vergrößerung die Schärfe zu regulieren.



zeitmessungen zur zeitlichen Periodizität der Strömung von Vorteil. Die Spritzen sind mit dem Kanal durch Polyurethanschläuche (Innendurchmesser 2.00 mm, Festo, St. Ingbert) verbunden.

Die verwendete Spritzenpumpe erlaubt eine Dosierung mit einer maximalen Fließrate von ca. 1.2 ml/s . Zur Überprüfung der Übereinstimmung von vorgegebener und tatsächlich eingestellter Fließrate wird mittels einer Analysewaage die nach gewissen Zeitabständen abgegebene Masse einer Flüssigkeit, in diesem Fall einer wässrigen Glycerinlösung (Glycerinanteil 80 %), festgestellt. Da die Dichte dieser Lösung bekannt ist ($\rho = 1.209 \text{ kg/l}$ bei Raumtemperatur, 20.0°), kann so das abgegebene Flüssigkeitsvolumen errechnet werden (s. Abb. 6.4). Eine lineare Anpassung erlaubt dann die Bestimmung der tatsächlichen Fließrate.

Wir bestimmen mittels dieses Verfahrens für eine vorgegebene Fließrate von $50.0 \cdot 10^{-3} \text{ ml/s}$ eine tatsächlich eingestellte Fließrate von $\dot{V} = (50.23 \pm 0.04) \cdot 10^{-3} \text{ ml/s}$, was einer Abweichung von ca. 0.5 % entspricht. Diese müssen nicht zwangsläufig auf die Spritzenpumpe zurückzuführen sein und können durchaus methodischer Natur sein (Fehler beim Ablesen der sich ständig ändernden Waagenanzeige, Fehler bei der Zeitnahme). Allerdings ist auch zu berücksichtigen, dass der Schrittmotor der Spritzenpumpe eine vorgegebene Drehzahl durch die diskrete Anzahl der Mikroschritte auch nur mit einer endlichen Genauigkeit einstellen kann. Diese Abweichungen liegen allerdings unterhalb des ml/s -Bereichs und sind nicht von Bedeutung.

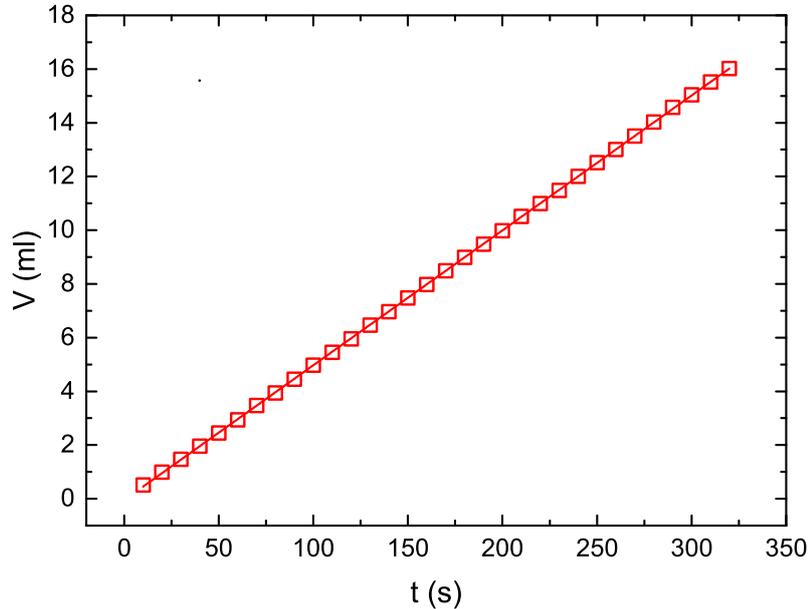


Abbildung 6.4: Zur Messung der Fließrate der Spritzenpumpe. Das pro Zeiteinheit abgegebene Flüssigkeitsvolumen kann aus der linearen Regression der in bestimmten Zeitabständen festgestellten Flüssigkeitsmenge berechnet werden.

Durch die Fließrate wird in Experimenten von uns die mittlere Geschwindigkeit $\bar{U} = \dot{V}/4a^2$ kontrolliert, hierüber stellen wir für die Strömung durch den Kanal eine Weissenberg-Zahl ein. Diese ist dann definiert durch

$$\text{Wi} = \frac{\lambda \bar{U}}{a} = \frac{\lambda \dot{V}}{4a^3} \quad (6.1)$$

Für die Relaxationszeit λ verwenden wir einen Wert von ca. 8 s, wie bereits in Kap. 5.3.4 besprochen. Dennoch beobachten wir in diesem Zusammenhang eine Stellzeit, d.h. eine Zeit bis zum Erreichen eines konstanten Geschwindigkeitswert nach Start der Spritzenpumpe, von ca. 120 s. Wir haben diesen Sachverhalt in Abb. 6.5 noch einmal demonstriert.

6.2 Strömungsmessungen mittels DPIV

Am Beginn dieser Arbeit stand das Ziel, viskoelastische Turbulenz durch Geschwindigkeitsmessungen mittels Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) zu untersuchen. Frühe Untersuchungen und Evaluationen führten diesbezüglich jedoch schnell darauf, dass LDA-Systeme für den hier auftretenden Geschwindigkeitsbereich von einigen mm/s einen zu starken Messfehler aufweisen. Wir beschränken

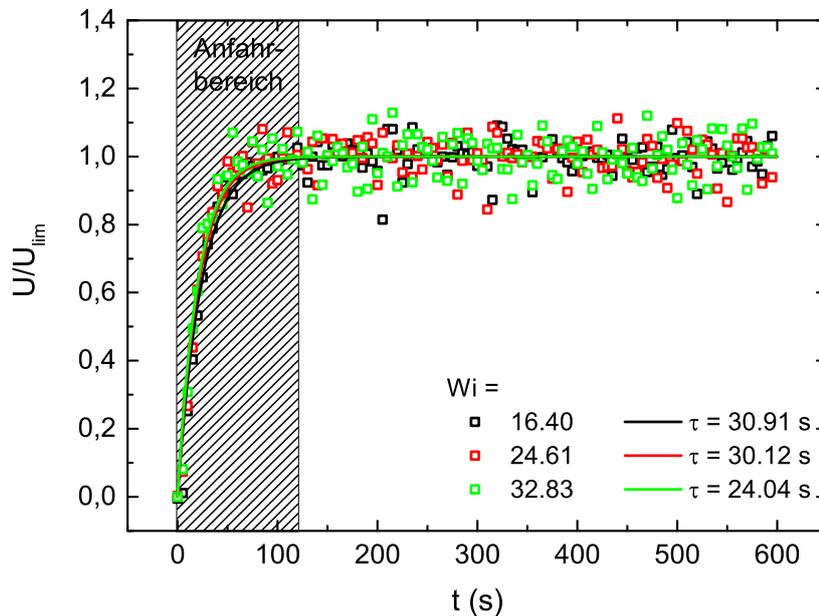


Abbildung 6.5: Zur Illustration der Anlaufzeit der Strömung. Erst ab einer Zeit von ca. 120 s erreicht die Strömung ihre konstante Endgeschwindigkeit, die Zeitkonstanten der exponentiellen Zunahme während des Anlaufvorgangs liegt bei ca. 25...30 s

und daher auf Untersuchungen mittels Digitaler Particle-Imaging Velocimetry (DPIV).

DPIV-Verfahren sind seit der Mitte der 80er-Jahre etabliert (Raffel *u. a.* 1998) und beruhen darauf, in kurzen Zeitabständen abfotografierte oder gefilmte Verteilungen von Markern oder Tracern miteinander zu vergleichen. Aus dem so bestimmten Verschiebungsfeld kann nach Division durch den bekannten Zeitabstand nacheinander erfolgter Aufnahmen das Geschwindigkeitsfeld berechnet werden. Der Vorteil des Verfahrens liegt dabei eindeutig in der Möglichkeit, mit einer Aufnahme simultan einen ausgedehnten räumlichen Bereich zu erfassen (anders als bei punktuellen Messverfahren wie LDA) und so auch nichtstationäre Geschwindigkeitsfelder detailliert untersuchen zu können.

In den folgenden Unterabschnitten widmen wir uns zunächst dem mathematischen Hintergrund der DPIV-Verfahren, danach beschreiben wir die technische Umsetzung im Rahmen unseres Versuchsaufbaus. Abschließend betrachten wir Kontrollmessungen, die am Lösungsmittel der Polymermessungen durchgeführt wurden und widmen uns dem technischen Aspekt der Bestimmung der Leckrate.

6.2.1 Der mathematische Rahmen

Um ein Feld von Verschiebungen – und daraus Geschwindigkeitsvektoren – zu erhalten, werden die aufgenommenen Bilder zunächst in Abfragefenster zerlegt. Jedes Abfragefenster wird dann mit seinem verschobenen Pendant auf dem nächsten Bild verglichen. Wir betrachten im folgenden zwei Abfragefenster als Graustufenverteilungen, $\mathcal{I}_1(i, j)$ und $\mathcal{I}_2(i, j)$, wobei (i, j) die diskreten Bildkoordinaten in Pixeln darstellen und (m, n) einen Verschiebungsvektor. Als Quantifizierung für den Unterschied von \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 betrachten wir deren geometrischen Abstand in Abhängigkeit der Verschiebung:

$$d(m, n) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} [\mathcal{I}_1(i, j) - \mathcal{I}_2(i - m, j - n)]^2 \quad (6.2)$$

Das Auflösen der Klammer liefert dann drei Terme:

$$\begin{aligned} d(m, n) &= \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{I}_1^2(i, j) + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{I}_2^2(i - m, j - n) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{I}_1(i, j) \mathcal{I}_2(i - m, j - n) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nach Anschauung dieses Ausdrucks fällt auf, dass die beiden ersten Terme Konstanten darstellen, genaugenommen die Autokorrelationen der beiden Graustufenverteilungen. Der dritte Term stellt die Kreuzkorrelation des Fensters \mathcal{I}_1 mit seinem um (m, n) verschobenen Pendant da und ist für den Wert von $d(m, n)$ der entscheidende:

$$d(m, n) \sim \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{I}_1(i, j) \mathcal{I}_2(i - m, j - n) \quad (6.4)$$

Mathematisch erfolgt die Auswertung von DPIV–Aufnahmen also durch die Berechnung der Korrelation zwischen zwei Abfragefenstern. Bringt man Abfragefenster und Pendant bestmöglich zur Deckung, nimmt der Korrelationskoeffizient seinen maximalen Wert an, und die örtliche Verschiebung ist gefunden.

Zur algorithmischen Ausführung seien an dieser Stelle noch zwei Punkte angemerkt. Zunächst verwendet man die normierte Kreuzkorrelation, indem man Gl. (6.4) durch die Wurzel des Produktes der beiden Autokorrelationen dividiert. Da diese Gleichung auch die (diskrete) Faltung der beiden Graustufenverteilungen ist, nutzt man ferner das Faltungstheorem

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)) \quad (6.5)$$

Dies erlaubt, die Faltung als Inverse des Produkts der Fouriertransformierten der beiden Bildern zu berechnen und so Gebrauch von den FFT- (*Fast-Fourier-Transformation*-) Algorithmen zu machen. Eine ausgiebige Diskussion dieser Methode sowie alternativer Auswertungsmethoden findet sich in der gängigen Literatur (Raffel *u. a.* 1998; Tropea *u. a.* 2007).

Abb. 6.6 zeigt exemplarisch die Abstandsfunktion zweier (hier künstlich erzeugter) aufeinanderfolgender Bilder eines Ensembles von Tracerpartikeln, die durch ein Geschwindigkeitsfeld bewegt wurden. Im Verlauf der durchgeführten Berechnungen (in *Matlab*) zeigt sich, dass das Hinzufügen einer weißen Rauschkomponente für den Bildhintergrund der Peakform der Abstandsfunktion durchaus zuträglich ist und das Auffinden eines einzelnen Maximums gegenüber einem uniform dunklen Hintergrund vereinfacht, dieser führt, wie Tests zeigen, zu einer “abgeplatteten” Peakspitze ohne eindeutiges Maximum. Dies ist intuitiv klar, da die verrauschten Hintergründe nur dann zu einem Maximum der Korrelation führen, wenn die identischen Teile (die drei Partikel) durch das Abarbeiten der Verschiebungen zur Deckung gebracht worden sind.

Wir verwenden zur Auswertung der von uns gemachten Aufnahmen einen PIV-Algorithmus, wie er für *Matlab* frei verfügbar ist (Sveen 2004). Modifikationen betreffen lediglich die Kompatibilität mit der jeweils aktuellen Version von *Matlab* und die Routinen zur Transformation von Bild- in physikalische Koordinaten sowie zur Maskierung nicht durchströmter Kanalbereiche.

6.2.2 Technische Umsetzung

In Abb. 6.7 geben wir einen Überblick über die verwendete Anordnung zur Durchführung der PIV-Aufnahmen. Die wesentlichen Komponenten sind ein Diodenlaser mit Wellenlänge im grünen Spektralbereich, die Zylinderoptik zur Herstellung eines aufgefächerten Strahlprofils und die CCD-Kamera zur Bildaufnahme.

Die von uns verwendeten Tracerpartikel (s. Kap. 5.1) besitzen eine fluoreszente Oberfläche. Als Fluoreszenzfarbstoff wird Rhodamin-B mit einer Anregungswellenlänge um 540 nm (grün) verwendet, die Emissionswellenlänge liegt bei 610 nm (orange). Wir verwenden daher zur Anregung einen kontinuierlich arbeitenden (CW), frequenzverdoppelten Neodym:Yttrium-Aluminium-Granat- (Nd:YAG-) Laser mit einer Ausgangswellenlänge von 532 nm und einer Lichtleistung von 250 mW (Hersteller: *Laserworld*, Lengwil). Um die Möglichkeit, die Beleuchtungs- und Aufnahmeoptik entlang des Kanals zu verschieben, zu erhalten, entscheiden wir uns an dieser Stelle für den Einsatz des kompakter gebauten Diodenlasers anstelle, wie in der Literatur gewöhnlich erwähnt, einen gepulsten Laser zu verwenden (Devasenathipathy *u. a.* 2003; Wereley & Meinhart 2005). Dies ist auch möglich, da in einem System mit diesen Abmessungen die Beleuchtungsstärke kein großes Problem darstellt.

Der Laserstrahl wird durch einen invertierten 1:2-Strahlaufweiter Galilei'scher Bauart in seinem Durchmesser von 2 mm auf 1 mm reduziert. Eine Zylinderlin-

6.2 Strömungsmessungen mittels DPIV

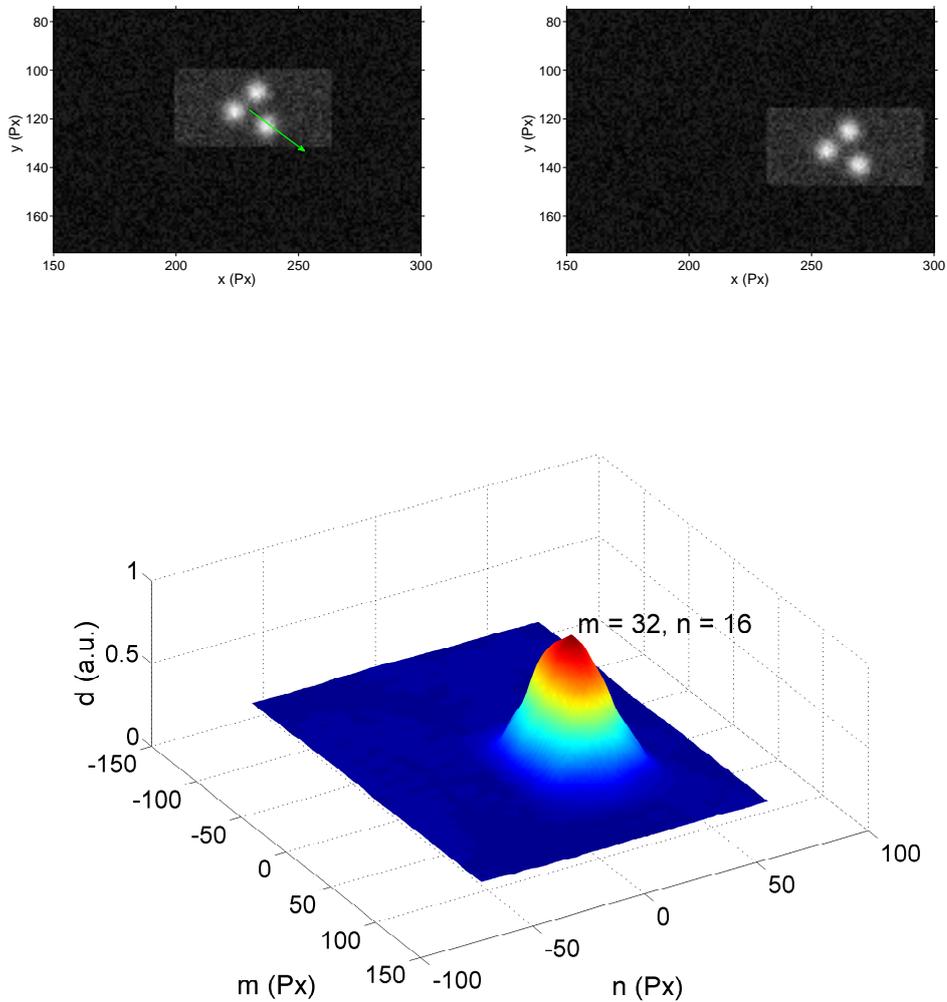


Abbildung 6.6: Exemplarischer Ablauf einer PIV-Korrelationsroutine. In der obersten Zeile links ist eine Abbildung dreier Partikel zu sehen (Bewegungsrichtung zur Verdeutlichung als grüner Pfeil dargestellt), daneben eine um eine Zeitspanne δt versetzte Aufnahme, während der die Partikel durch das Geschwindigkeitsfeld weitertransportiert wurden. Die Korrelationsfunktion des (hell unterlegten) Abfragefensters ist in der untersten Zeile geplottet, die Maximumsstelle gibt die Komponenten des Verschiebungsvektors an.

6 Versuchsaufbau

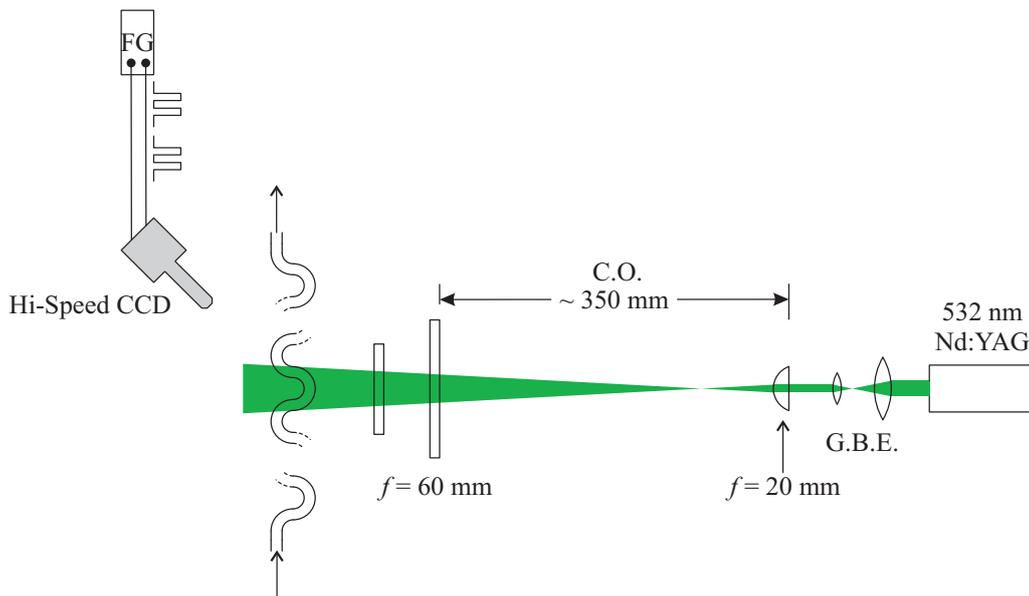


Abbildung 6.7: Überblick über die Versuchsanordnung zur Durchführung von PIV-Messungen. Der Strahl des Lasers wird in einem invertierten (Galilei'schen) Strahlaufweiter auf den halben Durchmesser reduziert, danach wird er durch eine erste Zylinderlinse in der Beobachtungsebenen aufgefächert, bis er am Ort des zu vermessenden Kanalabschnitts in etwa die Weite eines Halbringes aufweist. Eine zweite Zylinderlinse komprimiert den Strahl in die Brennebene auf eine Stärke von ca. 0.05 mm. Die Aufnahme der Bilder erfolgt mittels einer sehr lichtstarken Hochgeschwindigkeitskamera, die von einem Funktionsgenerator getriggert wird, in bestimmten Zeitabständen Bildpaare aufzunehmen.

se mit Brennweite $f = 20.0 \text{ mm}$ fächert diesen Strahl auf, bis er am Ort der Messung etwa die Weite eines Halbringes bei nach wie vor flacher Strahlstärke aufweist. Die Stärke des Strahls wird dabei durch eine im Bezug auf die erste um 90° versetzt stehende Zylinderlinse mit der Brennweite $f = 60.0 \text{ mm}$ auf eine Stärke von ca. 0.05 mm reduziert. Um die Position des so erzeugten Laserhechts innerhalb des Kanals zu kontrollieren, verwenden wir eine 5.00 mm starke Platte aus N-BK7-Glas, die in der Strahlebene schwenkbar ist und so eine parallele Strahlverlagerung ermöglicht (alle Optikkomponenten stammen aus dem Sortiment von *Thorlabs*, Newton (NJ)). Vor den eigentlichen Messungen wird die Position des Laserstrahls auf die horizontale Mittelebene des Kanals justiert. Um Streueffekte durch eine Reustraugigkeit der Seitenfläche des Kanals zu verhindern, verwenden wir einen Objektträger aus ebenfalls N-BK7-Glas, der mit einem indexanpassenden Silikonöl an der Seitenfläche des Kanals befestigt wird.

Zur Bildaufnahme verwenden wir eine Hochgeschwindigkeits-CCD-Kamera *Memrecam GX-1* (Hersteller: *NAC Image Technology*, Tokyo) mit einem Zoomobjektiv (*Edmund Optics*, Barrington(NJ)). Die maximale Vergrößerung liegt bei $M = 4.5$, die Lichtempfindlichkeit der Kamera ist vom Hersteller mit mindestens

20'000 ISO angegeben. Vor das Objektiv wird ein Fluoreszenzfilter zum Herausfiltern des Anregungssignals montiert. Die Kamera wird gesteuert über einen selbst gefertigten und programmierten Impulsgenerator, der es erlaubt, mit einer vorgegebenen Wiederholrate (in unserem Fall 10 Hz) Aufnahmen mit geringem zeitlichen Abstand (je nach gewählter Weissenbergzahl 2...9 ms) auszulösen. Die von der Kamera aufgenommenen 8-Bit-Graustufenbilder werden zunächst im kamerainternen Speicher hinterlegt und nach Abschluss einer Messung zur weiteren Verarbeitung auf dem Auswertungs-PC gespeichert.

6.3 Kontrollmessungen

6.3.1 Mess- und Auswertungsprotokoll

Zum Test der Versuchsanordnung führen wir Messungen mit dem Lösungsmittel, einer wässrigen Glycerinlösung, durch. Das Augenmerk bei diesen Messungen liegt auf der räumlichen und zeitlichen Glätte des Geschwindigkeitssignals und der Untersuchung auf Übereinstimmung mit analytisch für Newton'sche Fluide getroffener Aussagen (vgl. Kap. 3.2 und 3.3).

Die Messungen folgen dabei alle dem gleichen Protokoll. Die für die Messung gewünschte Fließrate wird an der Spritzenpumpe eingestellt und der Pumpvorgang gestartet. Danach wird eine Zeitspanne abgewartet, die eine unmittelbar nach dem Schnittpunkt der Speiseleitungen auftretende Störung benötigt, um die Messposition passiert zu haben. Es folgt für eine Zeitspanne von 100s das Abfilmen der durch Tracerpartikel sichtbarmachten Strömung. Nach Abschluss der Bildaufnahme wird die Spritzenpumpe angehalten und die Bilder auf dem Auswertungs-PC gespeichert.

Erster Schritt bei der statistischen Auswertung der Bilder ist die Berechnung der Momente

$$\langle U \rangle(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T dt U(\mathbf{r}, t) \quad (6.6)$$

$$\sigma_U(\mathbf{r}) = \sqrt{\langle U^2 \rangle(\mathbf{r})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T dt (U(\mathbf{r}, t) - \langle U \rangle(\mathbf{r}))^2} \quad (6.7)$$

also des mittleren Geschwindigkeitsfeldes sowie der Fluktuationsamplitude. Insbesondere letztere ist für unsere Untersuchungen von großem Interesse, da die normierte Fluktuationsamplitude letztlich als Ordnungsparameter in einem Bifurkationsszenario dient.

Für zeitliche Untersuchungen wird das Geschwindigkeitssignal an einem fixen Ort extrahiert. Für diesen fixen Ort bieten sich mehrere Möglichkeiten an, etwa

die Wendeebene zwischen zwei funktionalen Einheiten, wie in den numerischen Simulationen in (Zilz *u. a.* 2012) gewählt, oder der Scheitelpunkt des betrachteten Halbrings. Vorgreifend führen wir hierzu an, dass Tests an beiden Orten qualitativ das gleiche Verhalten des Geschwindigkeitssignals zeigen, allerdings im Scheitelpunkt eine bessere Reproduzierbarkeit vorliegt. Dies könnte technisch darauf zurückzuführen sein, dass im Scheitelpunkt des Halbrings die Ausleuchtung besser ist und der PIV-Algorithmus hier bessere Ergebnisse liefert. In der Wendeebene lag bei dieser Art Messung oft eine inhomogenere Ausleuchtung vor.

6.3.2 Räumliche Untersuchung der Geschwindigkeitsfelder

Das zeitabhängige Geschwindigkeitssignals wird wie in Abb. 6.8 gezeigt aus dem Geschwindigkeitsprofil $U(r)$ entlang des Scheitels des Halbrings extrahiert. Die Extraktion erfolgt durch Mittelung über ein Feld von 7×7 Vektoren um die radiale Position des Geschwindigkeitsmaximums herum. Für die Untersuchung des Geschwindigkeitsfeldes im geraden Kanal hinter der letzten funktionalen Einheit wird zur Untersuchung des zeitlichen Geschwindigkeitssignals eine Spalte des Vektorfelds in der Bildmitte extrahiert, die Mittelung erfolgt dann wie bereits geschildert ebenfalls um das Maximum des so gemessenen Geschwindigkeitsprofils.

Die Geschwindigkeitsprofile sind in Abb. 6.9 dargestellt. Für die Kontrollmessung wählen wir vier Fließraten zwischen 0.016 ml/s und 0.064 ml/s aus, die später auch den gesamten Bereich an untersuchten Weissenbergzahlen abdecken. Feststellbar ist neben der erwarteten Ähnlichkeit der Profile, dass über den Verlauf des Kanals hinweg die Strömung verlangsamt wird. Diese Verlangsamung ist insbesondere entlang des gekrümmten Kanalteils messbar und beträgt ca. 0.03% je passierter funktionaler Einheit.

Um diese Verlangsamung eingehender zu untersuchen, führen wir zusätzliche Messungen in den geraden Kanalsektionen unmittelbar vor wie hinter den funktionalen Einheiten durch. Die dabei gemessenen Geschwindigkeitsprofile weisen bei Normierung Ähnlichkeit auf (s. Abb. 6.10 (a)), weswegen wir zur weiteren Untersuchung nur noch mit der Maximalgeschwindigkeit argumentieren. Nach Gl. (3.24) ist diese für einen Kanal mit Breite $2a$, wie in Abb. 6.1 gezeigt, und quadratischem Querschnitt durch

$$U(y, z) = \frac{G}{2\eta} \left\{ a^2 - y^2 - 4a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh\left(\omega_n \frac{z}{a}\right)}{\omega_n^3 \cosh(\omega_n)} \cos\left(\omega_n \frac{y}{a}\right) \right\} \quad (6.8)$$

gegeben, wenn man diese Gleichung für $y = z = 0$ auswertet:

$$U_{\max} = -\frac{3Ga^2}{2\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3 \cosh \omega_n} \quad (6.9)$$

Für die Fließrate gilt nach Gl. (3.25) für $b = h = a$:

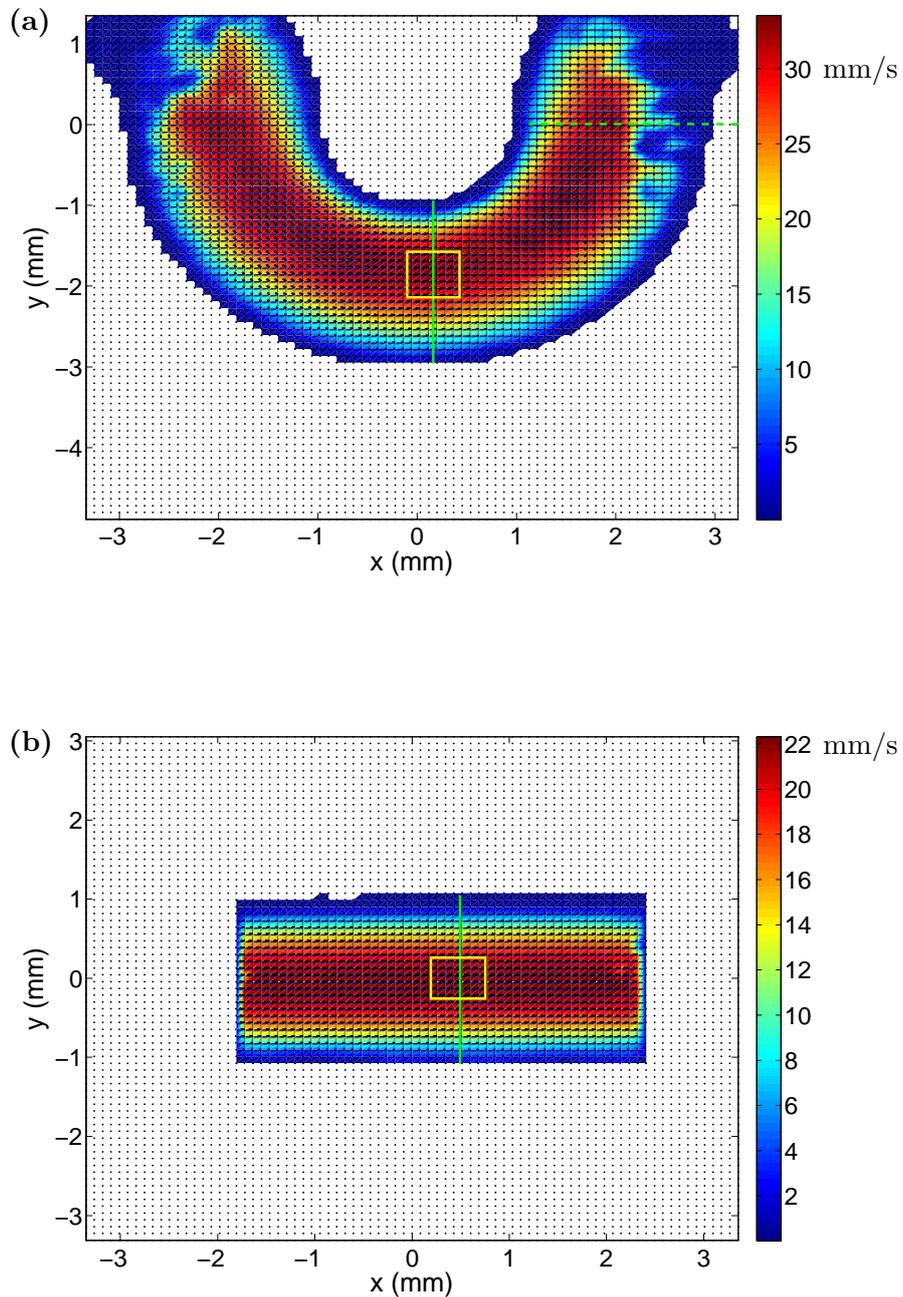


Abbildung 6.8: (a) Über 100 s gemittelttes Geschwindigkeitsfeld an der Position $N = 20$, für eine Fließrate $\dot{V} = 0.064 \text{ ml/s}$. Eingezeichnet sind in grün mögliche zu extrahierende Geschwindigkeitsprofile sowie in gelb das Abfragefenster für das Geschwindigkeitssignal $U(t)$. (b) Gleiche Auftragung für den geraden Kanalbereich.

6 Versuchsaufbau

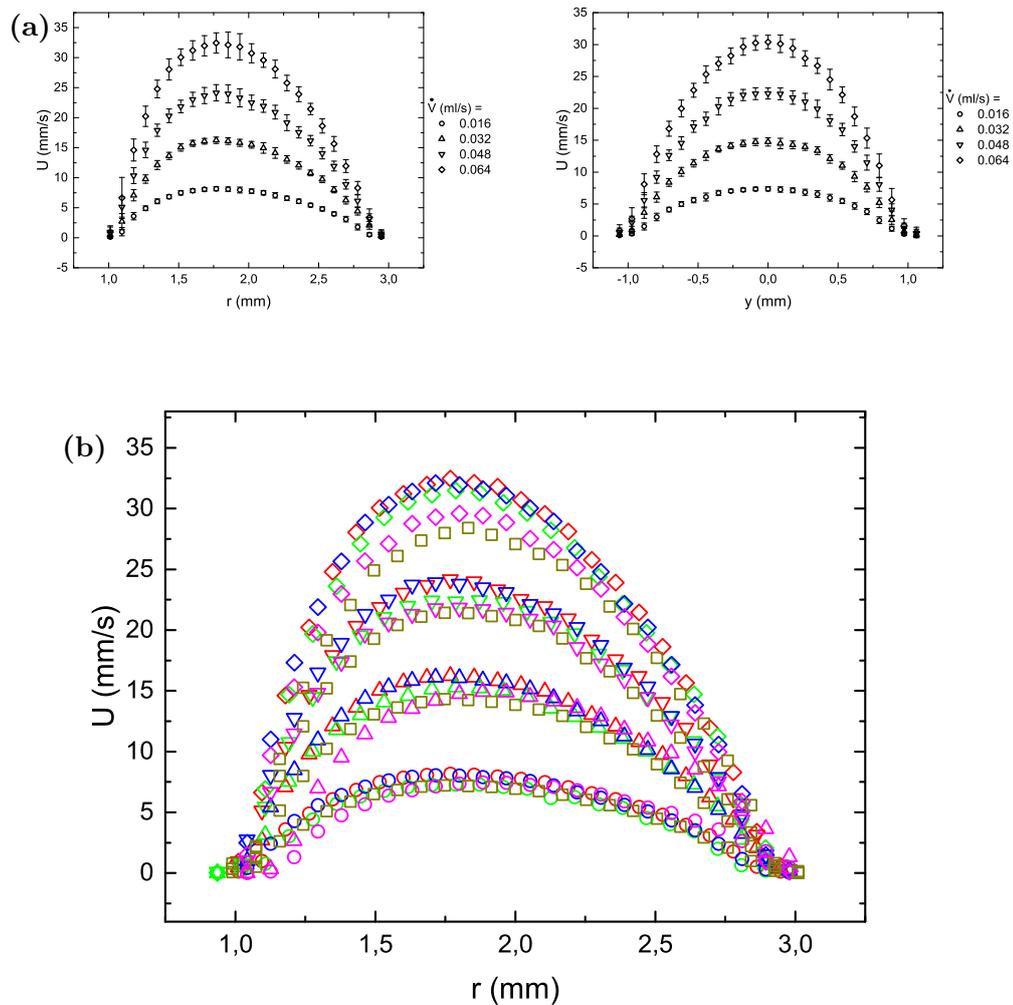


Abbildung 6.9: (a) Überblick über die Geschwindigkeitsprofile für die Messpositionen $N = 1$ bis 40 (links) und $x/a = 2$ (rechts), für Fließraten von 0.016 – 0.064 ml/s. (b) Die Geschwindigkeitsamplituden sind von N abhängig und fallen zwischen $N = 1$ und $N = 40$ um ca. 10 % ab. Wegen der insgesamt kürzeren Distanz ist ein solcher Effekt im geraden Kanalteil nicht zu beobachten.

$$\dot{V} = \frac{4Ga^4}{3\eta} \left[1 - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(\omega_n)}{\omega_n^5} \right] \quad (6.10)$$

Dividiert man diesen Ausdruck für die Fließrate durch $8a^2/9$, so kann man erneut den Vorfaktor $3Ga^2/2\eta$ reproduzieren:

$$\frac{3Ga^2}{2\eta} = \frac{9\dot{V}}{8a^2 \left[1 - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(\omega_n)}{\omega_n^5} \right]} \quad (6.11)$$

Einsetzen von Gl. (6.11) in (6.9) liefert dann einen analytischen Ausdruck für die Maximalgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der gewählten Fließrate, $U_{\max} = C\dot{V}$ mit

$$C = \frac{9}{8a^2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^3} \frac{1}{\cosh \omega_n}}{1 - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(\omega_n)}{\omega_n^5}} \quad (6.12)$$

Der Wert des Bruchs kann etwa durch *Matlab* berechnet werden als 0.2434. Identifiziert man hierin mit $S = 8a^2$ den Kanalquerschnitt, so erschließt sich eine Möglichkeit, einen effektiven Kanalquerschnitt durch eine Auftragung der Maximalgeschwindigkeit gegen die Fließrate, wie in Abb. 6.10 (b) gezeigt, experimentell zu berechnen. Aus der gezeigten Auftragung berechnen wir vor den funktionalen Einheiten einen Kanalquerschnitt, der mit 4.15 mm^2 fast genau dem Soll von 4.00 mm^2 entspricht, hinter den funktionalen Einheiten allerdings mit 4.63 mm^2 eine signifikante Abweichung aufweist. Die Geschwindigkeitsmessungen erfolgten dabei an den Positionen $x/a = -5$ vor der ersten und $x/a = 5$ hinter der letzten funktionalen Einheit.

Dies lässt zwei Interpretationen zu. Einerseits kann es sein, dass am Stoß der beiden Plexiglasstreifen trotz der von uns getroffenen und in Kap. 6.1.1 geschilderten Maßnahmen immernoch eine Undichtigkeit vorliegt. Nimmt man für diese eine rechteckige Form an und einen Abstand der Plexiglasstreifen, der der doppelten Fertigungstoleranz von 0.05 mm entspricht, so ergibt sich für das Leck eine zweite Ausdehnung von $4.6 \dots 9.2 \text{ mm}$ liegt, was durchaus im Bereich der Möglichen liegt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass beim Fräsen des Kanals, beispielsweise durch thermische Ausdehnung des Fräskopfes, der Querschnitt vom Sollwert abweicht. Die Kanalabmessungen müssten in diesem Bereich dann zwischen $2 \dots 2.1 \text{ mm}$ in der Breite und $2.2 \dots 2.3 \text{ mm}$ in der Tiefe liegen.

Vorgreifend auf die später erfolgenden Messungen mit viskoelastischen Fluiden muss an dieser Stelle allerdings darauf verwiesen werden, dass diese Diskrepanz potentiell den Ordnungsparameter der Weissenbergzahl in Frage stellt, dieser wäre dann nämlich ebenfalls N -abhängig. Es ist daher a priori sinnvoll, als alternativen Kontrollparameter $\langle \text{Wi} \rangle = \lambda \langle U \rangle / a$ einzuführen, wobei $\langle U \rangle$ der

6 Versuchsaufbau

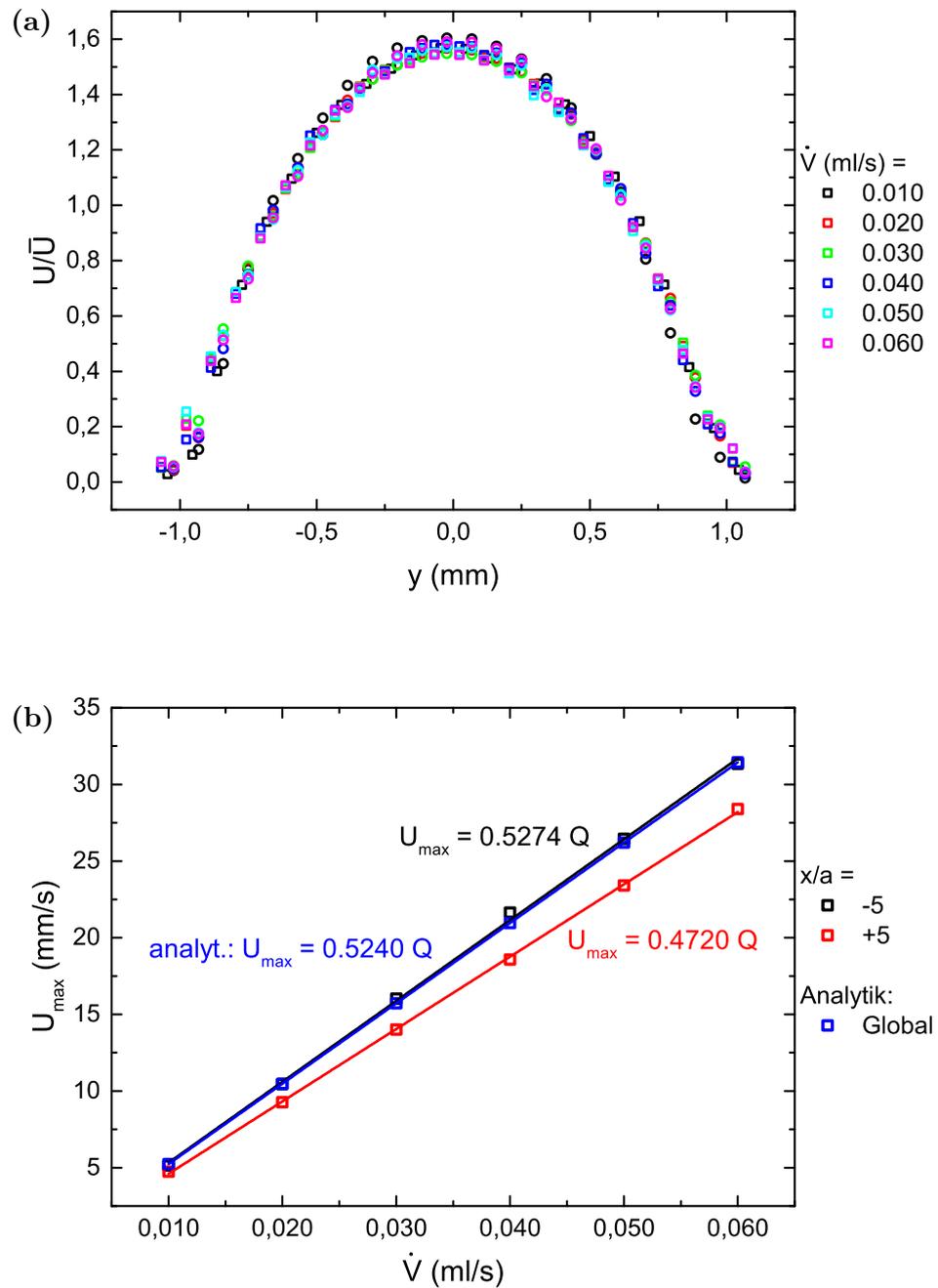


Abbildung 6.10: (a) Ähnlichkeit der Geschwindigkeitsprofile vor und hinter den funktionalen Einheiten nach Normierung durch die Maximalgeschwindigkeit. Aus Gründen der Normierbarkeit argumentieren wir im folgenden nur noch mit der Maximalgeschwindigkeit, für die sich ein analytischer Ausdruck formulieren lässt. (b) Auftragung der Maximalgeschwindigkeit gegen die Fließrate und Vergleich mit den analytischen Werten, zur Berechnung des effektiven Querschnitts.

zeitliche Mittelwert der bei N gemessenen Geschwindigkeit darstellt. Auf die Konsequenzen gehen wir in Kap. 7.2 genauer ein.

6.3.3 Genauigkeit und zeitliches Verhalten des zeitlichen Geschwindigkeitssignals

Abschließend zu den Kontrollmessungen ist noch die Genauigkeit der Geschwindigkeitsmessung zu berechnen. Hierzu werten wir das zeitliche Geschwindigkeitssignal, das wie bereits geschildert aus den Feldern extrahiert wurde, statistisch an den verschiedenen Messpositionen entlang des Kanals aus. Exemplarisch zeigen wir für $N = 1$ und $x/a = 10$ in Abb. 6.11 (a, links) und 6.11 (a, rechts) die für verschiedene Fließraten aufgenommenen, zeitabhängigen Geschwindigkeitssignale.

Wie erwartet weisen die Signale keine nennenswerten Abweichungen von einem erwarteten Wert ab, die sichtbaren Fluktuationen können auf die gewöhnliche Unschärfe der Messung zurückgeführt werden. Die in einigen Fällen beobachtbare langwellige Oszillation liegt im Bereich von weniger als 3 % des jeweiligen Geschwindigkeitswertes, insgesamt liegt die Genauigkeit und damit die Ungenauigkeit des Messverfahrens ortsunabhängig bei 1 bis 3 %. Ein Überblick über die Ungenauigkeit in Abhängigkeit von der Fließrate wird in Abb. 6.11 (b) gegeben.

Nach einer Reynolds-Zerlegung lassen sich fluktuierender und stationärer Anteil eines Strömungsfeldes getrennt betrachten, dies entspricht einer Zerlegung

$$U(t) = \langle U \rangle + u(t), \quad (6.13)$$

bei der die zeitliche Dynamik komplett im fluktuierenden Anteil erfasst ist. Zusätzlich kann man den Ausdruck Gl. (6.13) durch die mittlere Geschwindigkeit $\langle U \rangle$ normieren, wie bei uns im Vorfeld der Berechnung der Autokorrelationsfunktion und der spektralen Leistungsdichte erfolgt. Wir untersuchen den fluktuierenden Anteil der Strömung des Lösungsmittels im Folgenden mittels spektraler Methoden, insbesondere der Autokorrelationsfunktion $C_{uu}(\tau)$:

$$C_{uu}(\tau) = \int_0^{T_m} dt U(t) U(t - \tau) \quad (6.14)$$

und der spektralen Leistungsdichte $S(\nu)$. Die Ergebnisse sind in den Abbn. 6.12 (a) und (b) (Autokorrelationen) bzw. den Abbn. 6.13 (a) und (b) (Spektrale Leistungsdichten) dargestellt. In den Autokorrelationsfunktionen finden sich noch Hinweise auf eine schwache Oszillation, deren Amplitude sich jedoch im Bereich der Messungenauigkeit bewegt.

Ein Vergleich mit den später gemessenen Oszillationen in viskoelastischen Fluiden ergibt einen Unterschied der Amplituden von mindestens einer Größenordnung. Passend hierzu weisen die gezeigten Verteilungen der spektralen Leis-

6 Versuchsaufbau

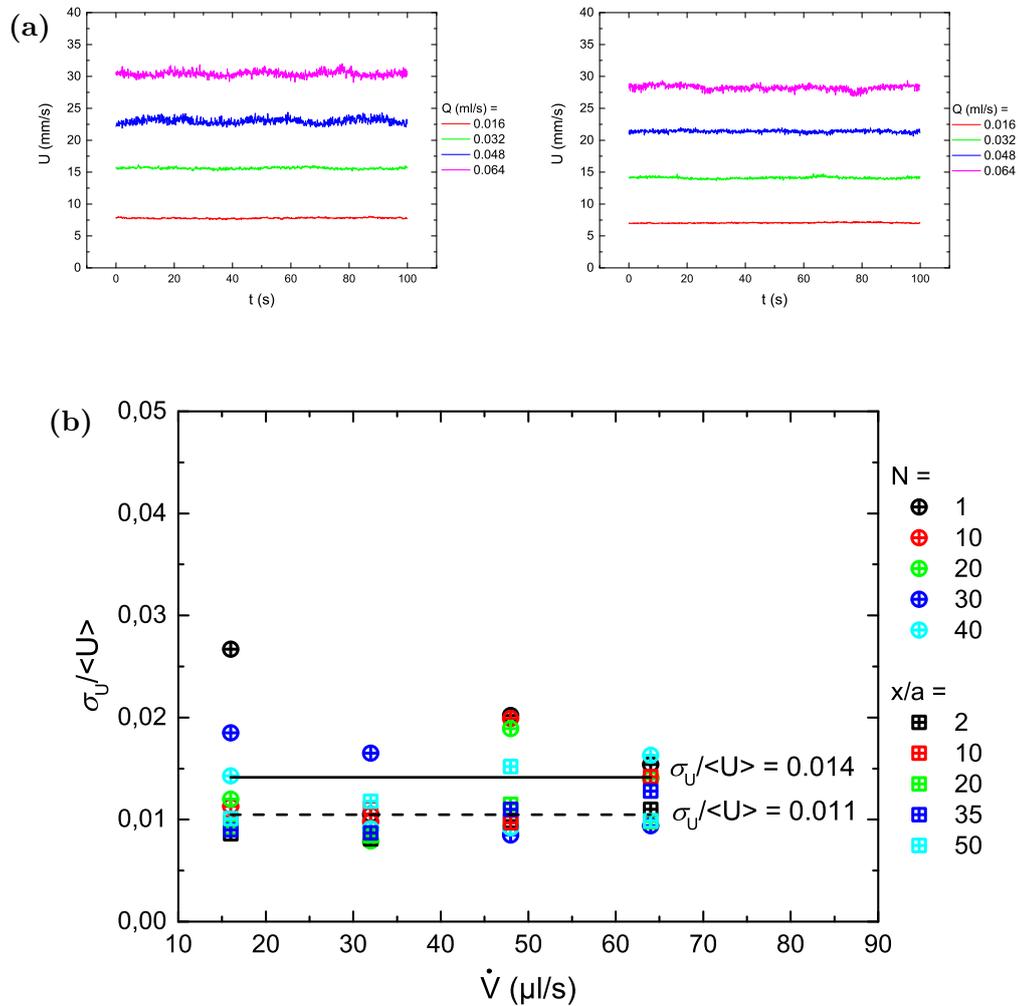


Abbildung 6.11: (a) Geschwindigkeitssignale für Fließraten zwischen 0.016...0.064 ml/s in der ersten funktionalen Einheit (links) und bei $x/a = 2$, hinter der letzten Einheit (rechts). (b) Fluktuationsamplituden des Geschwindigkeitssignals an den verschiedenen Messpositionen in den funktionalen Einheiten (○) und hinter diesen (□). Die Amplitude liegt durchweg bei Werten zwischen 1 und 3 %, gemittelt über alle Fließraten und Messpositionen liegen die Fehler bei 1.4 % (in den funktionalen Einheiten) und 1.1 % (hinter denselben).

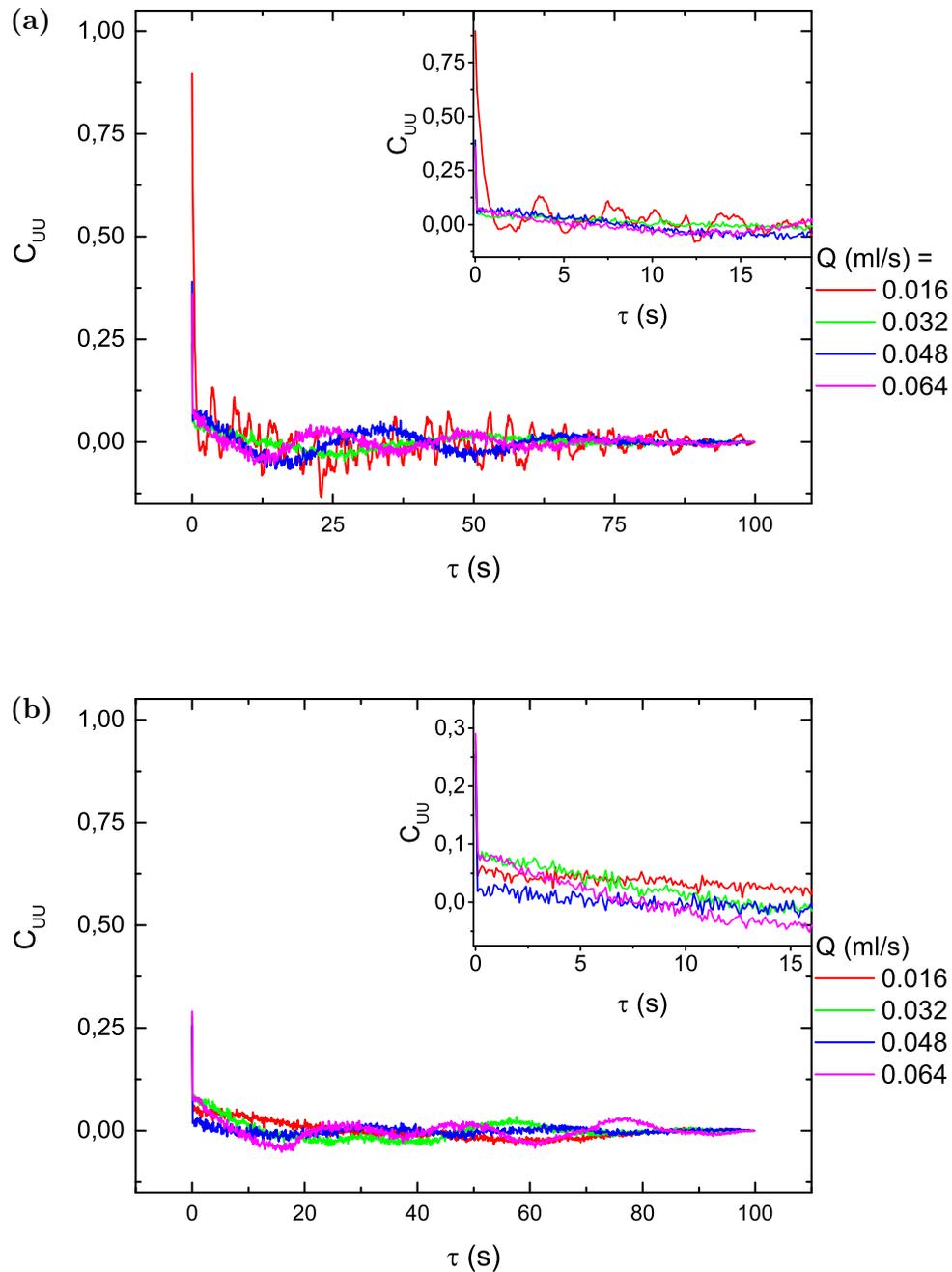


Abbildung 6.12: (a) Autokorrelationsfunktion des Geschwindigkeitssignals bei $N = 1$. Wie im Inset gezeigt, dekorreliert das zeitliche Verhalten quasi sofort. Die noch vorhandene Oszillation ist möglicherweise technisch bedingt, in ihrer Amplitude jedoch vernachlässigbar. (b) Gleiche Auftragung, gemessen an der Position $x/a = 10$.

6 Versuchsaufbau

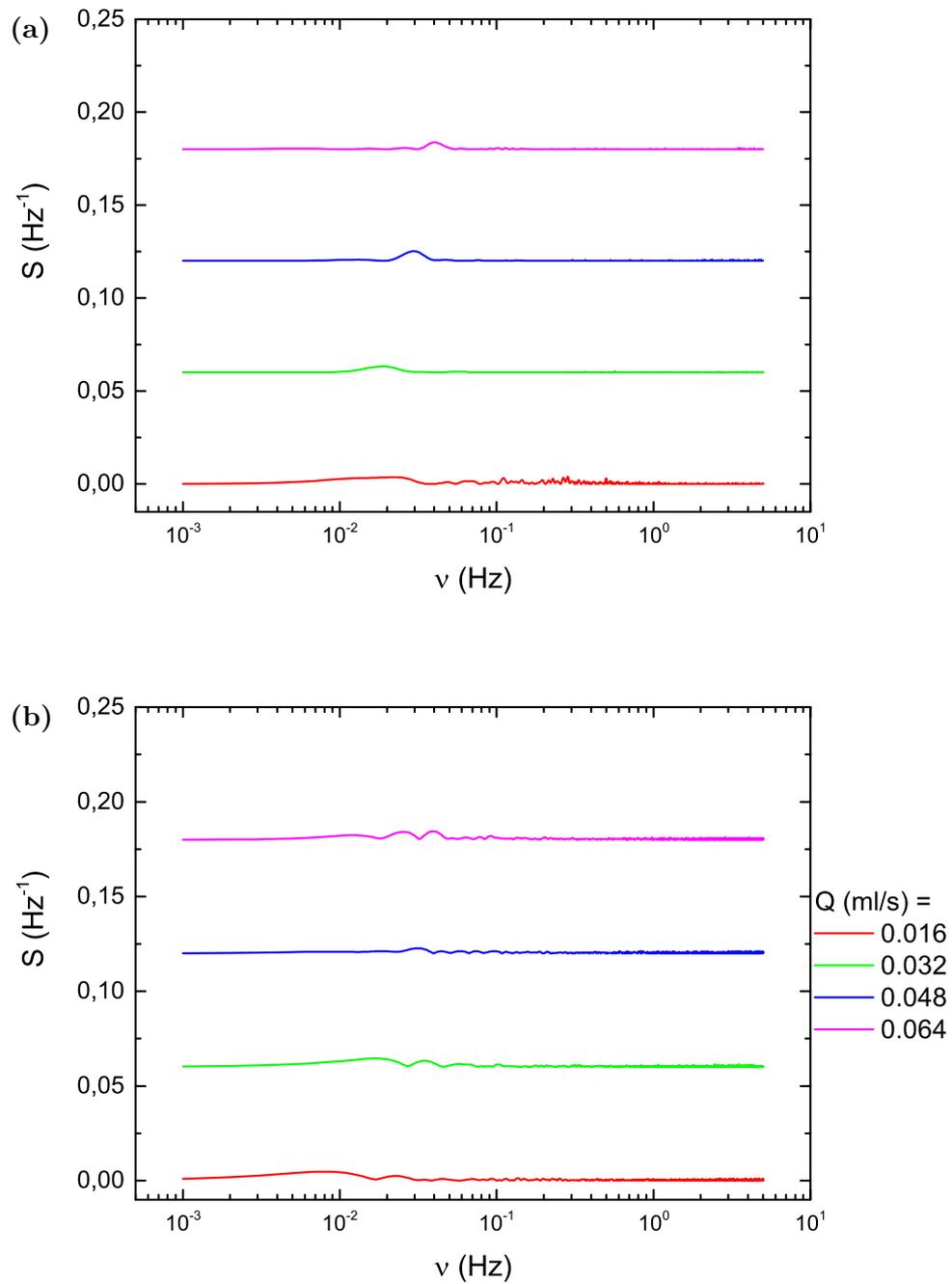


Abbildung 6.13: (a) Spektrale Leistungsdichte des Geschwindigkeitssignals bei $N = 1$. Die sichtbaren Frequenzspitzen besitzen eine Amplitude im Bereich von 10^{-3} Hz^{-1} . Der Frequenzbereich, bei denen man sie beobachtet, liegen außerdem unterhalb des Bereichs, indem man bei viskoelastischen Fluiden Frequenzspitzen feststellt. (b) Gleiche Auftragung, gemessen an der Position $x/a = 10$.

tungsdichte schwache Frequenzspitzen auf, deren Amplitude jedoch ebenfalls um mindestens eine Größenordnung von denen der durch viskoelastische Effekte hervorgerufenen Oszillationen abweicht.

6 Versuchsaufbau

Lineare Instabilität und Übergang zur Turbulenz

Im folgenden stellen wir unsere Ergebnisse zur Untersuchung des Übergangs zur viskoelastischen Turbulenz vor. Die Geschwindigkeitsfelder hierzu wurden mittels der vorgestellten DPIV-Methode gemessen. Wir zeigen zunächst unsere Untersuchungen bezüglich der räumlichen Verteilung und Ausdehnung der Turbulenz, bevor wir das Bifurkationsszenarium und ein Phasendiagramm der Strömungstypen präsentieren, und schließen das Kapitel mit einer genaueren Untersuchung der linearen Instabilität ab.

7.1 Messung und Auswertung

Die Messungen am verwendeten viskoelastischen Fluid (Auswahl und rheologische Charakterisierung vgl. Kap. 5) erfolgen gemäß dem in Kap. 6.3.1 beschriebenen Protokoll, wobei die Wartezeit bis zum Beginn der Messungen um eine Zeitspanne von 120s erweitert wird, diese Zeit benötigt das Fluid um, wie in Kap. 5.3.4 beschrieben, seine Endgeschwindigkeit zu erreichen. Nach der Auswertung werden die ebenfalls beschriebenen statistischen Grunduntersuchungen ausgeführt.

7.1.1 Geschwindigkeitsprofile

In Abb. 7.1 (links) zeigen wir einen Überblick über die am Kurvenscheitel extrahierten Geschwindigkeitsprofile. Sobald die Strömung voll etabliert ist (ab $N = 11$) zeigt sich konsistent, dass das Geschwindigkeitsmaximum anders als bei Newton'schen Fluiden beobachtet nicht mehr auf der Innenseite des Kanals liegt, sondern zur Außenseite hin verschoben ist. Diese Verschiebung wird mit zunehmender Weissenbergzahl betonter. Sie entspricht auch dem, was aus in der Lite-

7 Übergang zur Turbulenz

ratur abgebildeten Geschwindigkeitsprofilen (Jun & Steinberg 2010) bekannt ist. Ferner ist bereits aus den Profilen ersichtlich, dass die Amplitude der Geschwindigkeit nur bis zu einer gewissen Weissenbergzahl linear mit dieser anwächst, auf diesen Effekt werden wir allerdings im nächsten Abschnitt noch genauer eingehen.

7.1.2 Zeitreihen der Geschwindigkeit

In Abb. 7.1 haben wir für den Bereich kleiner Weissenbergzahlen Fehlerbalken zur Darstellung hinzugefügt, diese stellen jeweils die Fluktuationsamplitude $\langle U^2 \rangle$ dar. Dieselbe ziehen wir in den kommenden Abschnitten als Ordnungsparameter in einem Bifurkationsszenarium heran. Ein Überblick über die Fluktuationen kann allerdings schon aus den unverarbeiteten Geschwindigkeitssignalen, wie sie in Abb. 7.1 rechts dargestellt sind, gewinnen.

Ausgehend von der reinen Anschauung können wir drei Geschwindigkeitsregime provisorisch unterscheiden:

- Im Bereich *laminarer Strömung* bei niedrigen Weissenberg-Zahlen ist das Geschwindigkeitsfeld bis auf die Messungenauigkeit frei von Fluktuationen und Oszillationen, außer eventuell durch äußere Einflüsse hervorgerufene Schwankungen. Diese liegen, wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln beschrieben, im Rahmen der Messungenauigkeit von 2...3%.
- Für mittlere Weissenbergzahlen ($Wi \approx 80 \dots 105$) beobachtet man eine *oszillierende Strömung*. Die Oszillationen haben eine moderate Amplitude und sind nicht chaotisch, ihre Frequenz kann durch Anschauung als ca. 0.1 Hz abgeschätzt werden. Dieses Regime lässt sich allerdings maximal bis zur funktionalen Einheit $N = 30$ beobachten.
- Im Bereich hoher Weissenbergzahlen liegt eine *turbulente Strömung* vor, das Geschwindigkeitssignal fluktuiert in diesem Regime stark, mit einer Tendenz zu regelmäßigen Verlangsamungen der Strömung. Dieses Verhalten ist ab $N = 20$ sehr betont.

Der Fall laminarer Strömungen ist aus wissenschaftlicher Sicht weitgehend uninteressant (außer etwa zu rheologischen Charakterisierungen). Turbulente Strömungen bei hohen Weissenbergzahlen waren bereits in der Vergangenheit Gegenstand einiger Publikationen (Burghlea *u. a.* 2004a,b; Groisman & Steinberg 2000, 2004; Jun & Steinberg 2010). Wir konzentrieren uns in den folgenden Abschnitten daher auf den Übergangsbereich oszillatorischer Strömungen und die Unterschiede zu voll ausgeprägten, turbulenten Strömungen.

7.2 Bifurkationsszenarium

Ein erster Schritt zur Charakterisierung der linearen Instabilität ist das Erstellen eines Bifurkationsszenariums. Hierzu werten wir als Ordnungsparameter die

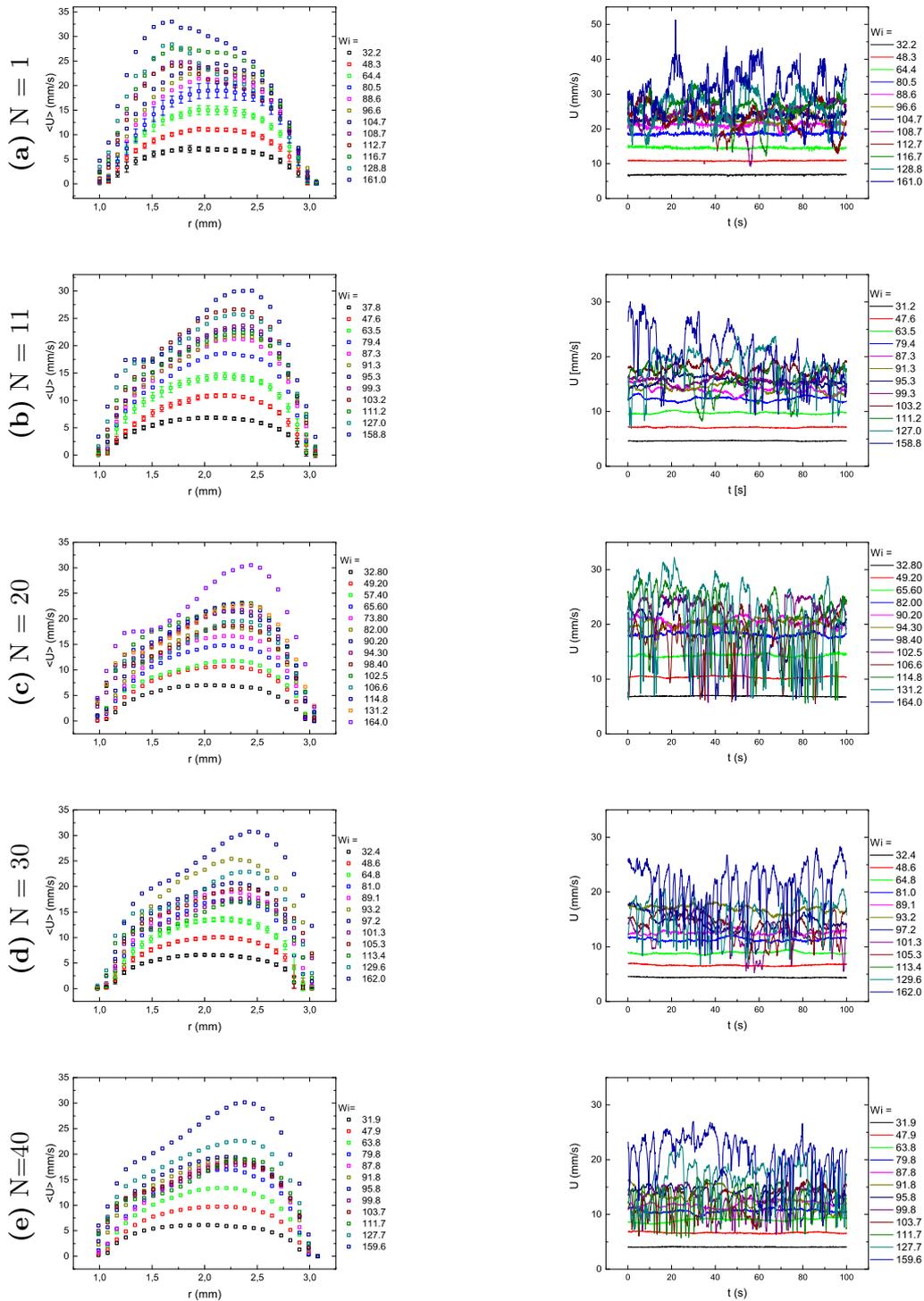


Abbildung 7.1: Geschwindigkeitsprofile (links) und Zeitreihen (rechts) für viskoelastische Fluide für $N = 1 \dots 40$. Mit zunehmender Weissenbergzahl fällt eine zunehmende Deformation der Geschwindigkeitsprofile auf.

7 Übergang zur Turbulenz

Fluktuationsamplitude in Abhängigkeit von der Weissenbergzahl, wie sie durch Gl. (6.1) als Kontrollparameter definiert ist, des zeitabhängigen Geschwindigkeitssignals aus. Wir untersuchen dabei sowohl die normierte als auch die unnormierte Fluktuationsamplitude, die Normierung erfolgte durch den Mittelwert der Geschwindigkeit, $\langle U \rangle$.

In Abb. 7.2 zeigen wir die Bifurkationsdiagramme aus den funktionalen Einheiten $N = 1 \dots 40$. Hierfür wird die unnormierte Fluktuationsamplitude gegen die Weissenbergzahl Wi aufgetragen. Man stellt fest, dass ab einer kritischen Weissenbergzahl Wi_c die Fluktuationsamplitude über das Rauschniveau nichtlinear anwächst. Für die Windungen $N = 1$ und $N = 11$ ist das Bifurkationsverhalten als eher imperfekt zu beschreiben, es fällt hier deutlich ein Übergangsbereich auf. Erst in den Windungen $N = 20, 30$ und 40 wird die Bifurkation zunehmend perfekt.

Als Kriterium für das Vorliegen eines Übergangs verwenden wir die Bedingung, dass die gemessene relative Fluktuationsamplitude, wie sie in Abb. 7.3 aufgetragen ist, das doppelte Rauschniveau erreicht haben muss. Diese Entscheidungsschwelle ist für $N = 1$ und $N = 40$ durch strich-punktierte Linien gekennzeichnet. Liegt an der entsprechenden Stelle kein Datenpunkt vor, so wird der nächstliegende gemessene Datenpunkt verwendet.

Trotz der für einen solchen Fit eher geringen Anzahl vorliegender Datenpunkte nehmen wir eine *Least-squares*-Regression der Fluktuationsamplitude ab der kritischen Weissenbergzahl gemäß einem Modell

$$\sigma_U = \sigma^{(\text{bias})} + A |Wi - Wi_c|^p \quad (7.1)$$

vor. In Erwartung einer Hopf-Bifurkation setzten wir zunächst $p = 0.5$ konstant und lassen die kritische Weissenbergzahl Wi_c und die Amplitude A als freie Parameter durch die Regression bestimmen. Die so erarbeiteten Regressionen für die bei $N = 20, 30$ und 40 aufgenommenen Daten weisen eine Güte $R^2 \approx 0.7$ auf, die in erster Linie der geringen Datendichte zuzuschreiben ist. Allgemein fällt auf, dass die gemessenen Kurven zunächst steiler zu verlaufen scheinen als die durch nach Modellierung und Regression zu erwartenden. Die kritischen Weissenbergzahlen liegen bei $Wi_c = 83.6, 92.6$ und 98.9 . Durch Interpolieren und Ablesen finden sich für $N = 1$ und $N = 11$ die kritischen Weissenbergzahlen 104.7 und 103.2 , respektive.

Lässt man den Parameter p zusätzlich frei, so ergeben sich naturgemäß passendere Kurven, die Exponenten derselben liegen zwischen $p = 0.3$ und $p = 0.34$. Die mit dieser Methode gefundenen kritischen Weissenbergzahlen unterscheiden sich von denen aus der Anpassung für $p = 0.5 = \text{const.}$ nur unwesentlich ($Wi_c|_{N=20} = 98.8$, $Wi_c|_{N=30} = 93.2$ und $Wi_c|_{N=40} = 87.8$). Wir haben diese Kurven gestrichelt in Abb. 7.2 eingetragen.

Eine interessante Randnotiz hierzu ist, dass man bei einer Auftragung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit $\langle U \rangle$ (s. Abb. 7.4) gegen die Weissenbergzahl

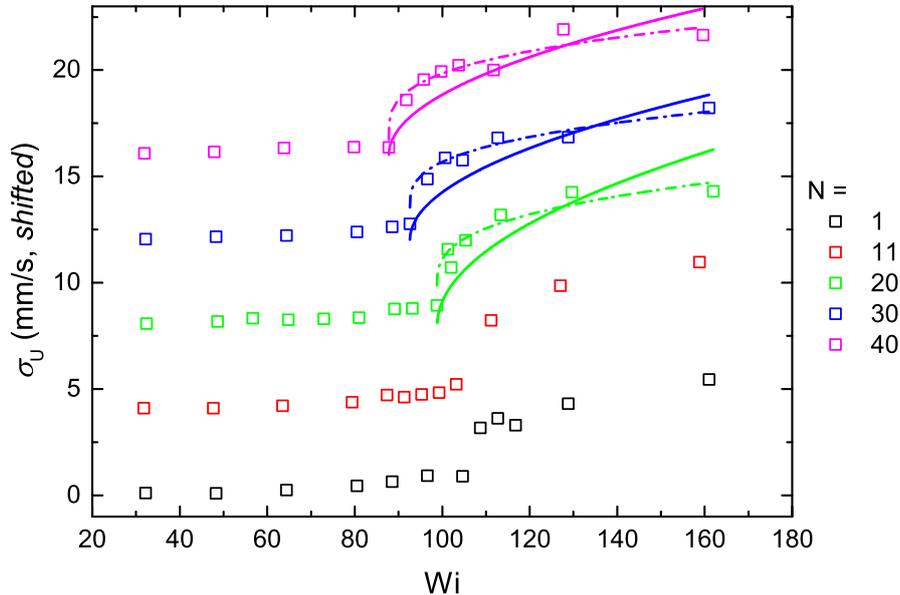


Abbildung 7.2: Bifurkationsdiagramm der absoluten Fluktuationsamplituden. Für die funktionalen Einheiten wurde zusätzlich eine *Least-Squares*-Regression der Fluktuationsamplituden für $Wi \geq Wi_c$ durchgeführt (durchgezogene Linien: $p = 0.5 = \text{const.}$, strichpunktiert: p frei). Dabei finden sich Exponenten im Bereich von 0.3. Die Bifurkationen bei $N = 1$ und $N = 11$ weisen deutliche Imperfektionen auf.

feststellt, dass ungefähr mit dem Erreichen der kritischen Weissenbergzahl das Geschwindigkeitswachstum vom bis dahin linearen Verlauf (gestrichelte Linien) nach unten abweicht. Ein solches Verhalten ist aus der Literatur bekannt (Jun & Steinberg 2010), wobei allerdings auffällt, dass in dieser Quelle der für uns eher nichtlinear erscheinende Bereich durch eine lineare Regression angepasst wurde. Eine Erklärung hierfür ist nicht gegeben.

Auch im Bereich instabiler und nichtstationärer Strömungen muss weiterhin die Massenerhaltung erfüllt sein und das zur Weissenbergzahl proportionale, pro Zeiteinheit transportierte Volumen im Verhältnis zur angelegten Weissenbergzahl wachsen. Daher interpretieren wir diese Beobachtung im Zusammenhang mit dem beobachteten Verhalten räumlichen Verteilung der sekundären Geschwindigkeitskomponenten V und W , die beim Einsetzen der Instabilität nichtstationär werden (vgl. Kap. 8) und die axiale Position des Geschwindigkeitsmaximums außerhalb der Messebene lassen.

Um die angesprochene Verschiebung der kritischen Weissenbergzahl Wi_c auf eine Ursache etwa in Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Position N entlang des Kanals zu überprüfen, verwenden wir als Kontrollparameter eine Version

7 Übergang zur Turbulenz

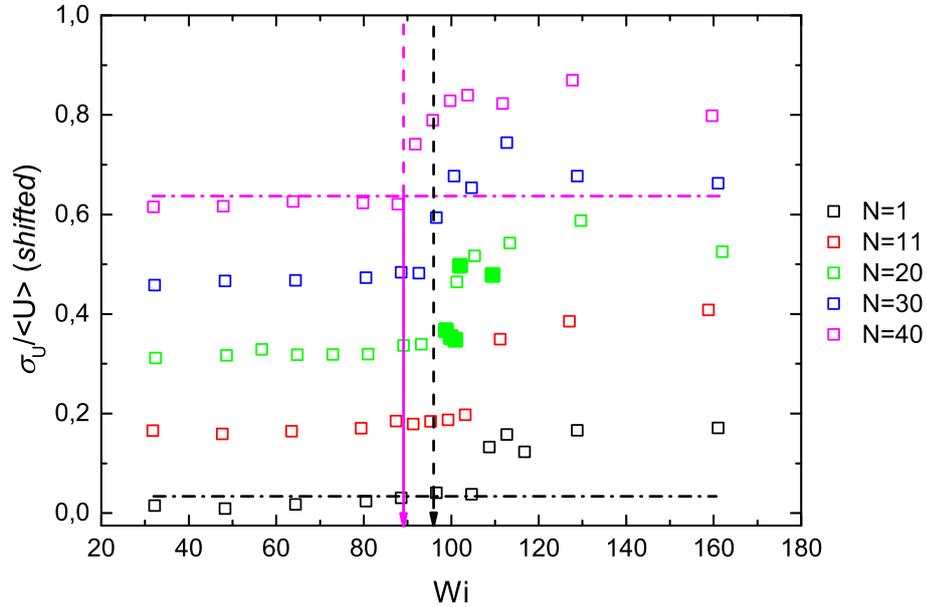


Abbildung 7.3: Bifurkationsdiagramm der relativen Fluktuationsamplituden. Für die Extremfälle $N = 1$ und $N = 40$ sind zusätzlich strich-punktiert der doppelte Wert des Rausniveaus als Entscheidungsschwelle für das Vorliegen einer instabilen Strömung eingetragen.

$\langle Wi \rangle$ der Weissenbergzahl, die wie folgt definiert ist:

$$\langle Wi \rangle = \frac{\lambda \langle U \rangle}{a} \quad (7.2)$$

wobei man anstelle einer aus einer räumlichen Mittelung hervorgegangenen Geschwindigkeit \bar{U} die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit $\langle U \rangle$ heranzieht, wie sie aus der Messung hervorgegangen ist. In Abb. 7.5 zeigen wir das auf diese Art entstehenden Bifurkationsdiagramm der normierten Fluktuationsamplitude, $\sigma_U / \langle U \rangle$.

Es zeigt sich, dass diese Art des Kontrollparameters eher zu einer noch stärkeren Aufspreizung des Übergangsbereichs führt, der jetzt von $Wi_c(N = 40) \approx 141$ bis $Wi_c(N = 1) \approx 182.9$ führt. Außerdem tritt – neben der erneuten Vergrößerung der Größenordnung von Wi , durch die Änderung der Größenordnung von $\langle U \rangle$ bedingt – ein weiteres Problem auf, da sich $\langle Wi \rangle$ nur bedingt als Kontrollparameter eignet. Wie wir bereits in Abb. 7.4 gezeigt haben, besteht zwischen der eigentlich kontrollierten Fließrate $\dot{V} \sim Wi$ und der mittleren Geschwindigkeit $\langle U \rangle$ keine globale lineare Beziehung. Dies äußert sich auch in Datenpunkten, die schon vor Erreichen der offensichtlichen kritischen Weissenbergzahl fast das Ni-

7.3 Räumliche Charakterisierung der Turbulenz

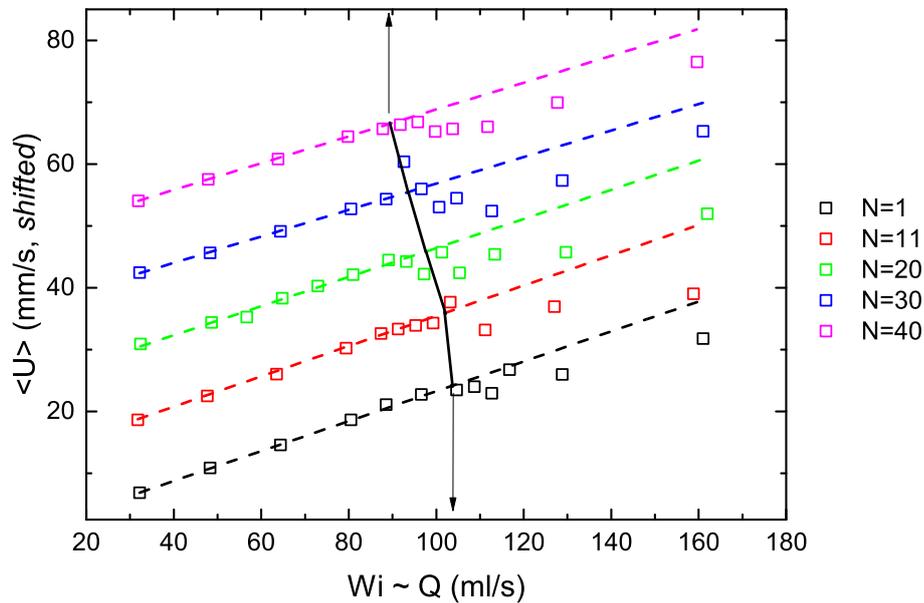


Abbildung 7.4: Wi -Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit $\langle U \rangle$. Ungefähr gleichzeitig mit dem Auftreten instabiler Strömungen beobachtet man ein nichtlineares weiteres Anwachsen der mittleren Geschwindigkeit, das schwächer als das extrapolierte lineare Wachstum ausfällt. Schwarz durchgezogen eingezeichnet wurde die Instabilitätsschwelle.

veau voll entwickelter Turbulenz anzeigen, und die durch die in Abb. 7.4 gezeigte Nichtlinearität zwischen $\langle U \rangle$ und \dot{V} aus dem Bereich überkritischer Wi auf ihre neuen Positionen passend zu $\langle Wi \rangle$ verschoben werden.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass, wie in Abb. 7.18 ein Zusammenhang zwischen der kritischen Weissenbergzahl Wi_c und der Messposition N dergestalt besteht, dass die Instabilitäten sich früher einstellen, je mehr funktionale Einheiten bis dahin zurückgelegt worden sind. Dieser Effekt erhärtet sich auch bei Betrachtung der lokalen Geschwindigkeit anstelle einer aus räumlicher Mittelung berechneten.

7.3 Räumliche Charakterisierung der Turbulenz

Ausgehend von den eingangs beschriebenen statistischen Untersuchungen der Geschwindigkeitsfelder legen wir in diesem Abschnitt eine Charakterisierung der Turbulenzverteilung vor. Als Ordnungsparameter hierfür verwenden wir den Absolutwert der Fluktuationsamplituden, berechnet gemäß Gl. (6.7). In den Abbn. 7.6 – 7.9 gewähren wir einen Überblick über die beobachteten Verteilungen.

7 Übergang zur Turbulenz

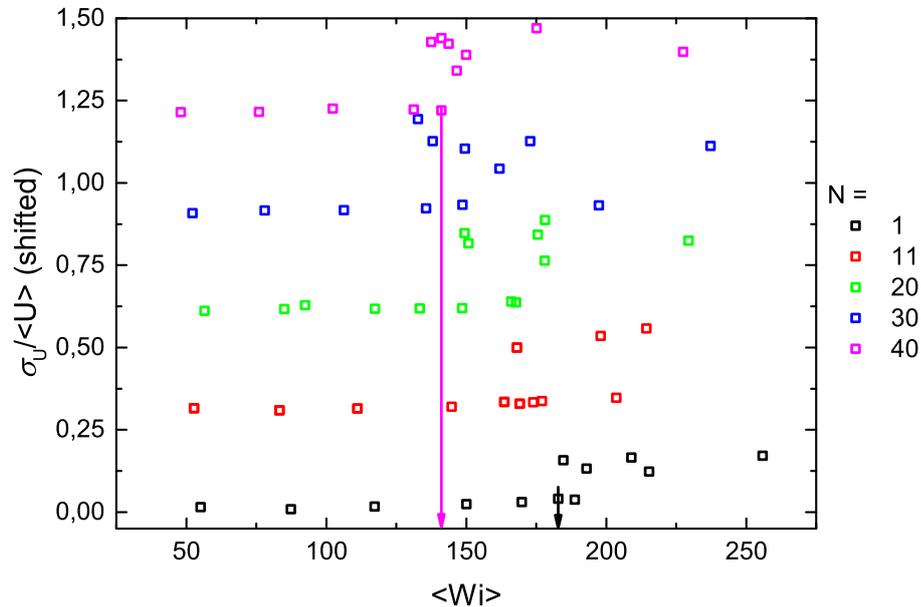


Abbildung 7.5: Bifurkationsdiagramme mit dem Kontrollparameter $\langle Wi \rangle$. Der Übergangsbereich ist jetzt noch weiter aufgespreizt als zuvor, damit kann eine Abhängigkeit der kritischen Weissenbergzahl von der Messposition N als bestätigt betrachtet werden. In allen Kurven lassen sich deutlich zu hoch liegende Fluktuationswerte zwischen $\langle Wi \rangle \approx 140$ und 180 erkennen, diese sind durch die nichtlineare Abhängigkeit von $\langle Wi \rangle$ und \dot{V} entstanden.

Wir betrachten zunächst die Unterschiede in den Verteilungen der Fluktuationsamplitude. Zunächst fällt dabei auf, dass man auch hier wieder einen Unterschied zwischen den Verteilungen in den ersten untersuchten funktionalen Einheiten, $N = 1$ und $N = 11$, und den letzten, $N = 30$ und $N = 40$, feststellen kann (Die Abbildung für $N = 30$ entfällt aus Gründen der Prägnanz). In den ersten Einheiten, insbesondere bei $N = 1$ sind die Fluktuationen breit über die Einheit verteilt. Daran ändert sich auch bei $N = 11$ wenig, wenn sich auch hier bereits abzuzeichnen beginnt, dass in den Wendeebenen zwischen den funktionalen Einheiten die Fluktuationsamplituden stärker sind. Die Tendenz tritt bei $N = 20$ ebenfalls hervor, auch wenn diese Windung so etwas wie einen Grenzfall zwischen beiden beobachteten Verhaltensweisen darstellt.

In den Einheiten bei $N = 30$ und $N = 40$ lässt sich konsistent feststellen, dass die höchsten Fluktuationsamplituden um die Wendeebenen zwischen zwei Halbringen herum messbar sind. Betrachtet man das Verhalten am Ein- und am Ausgang eines Halbrings, so fällt auf, dass entgegen der Strömungsrichtung diese Region erhöhter Fluktuationen ein eher stumpfes Ende aufweist, das in

7.3 Räumliche Charakterisierung der Turbulenz

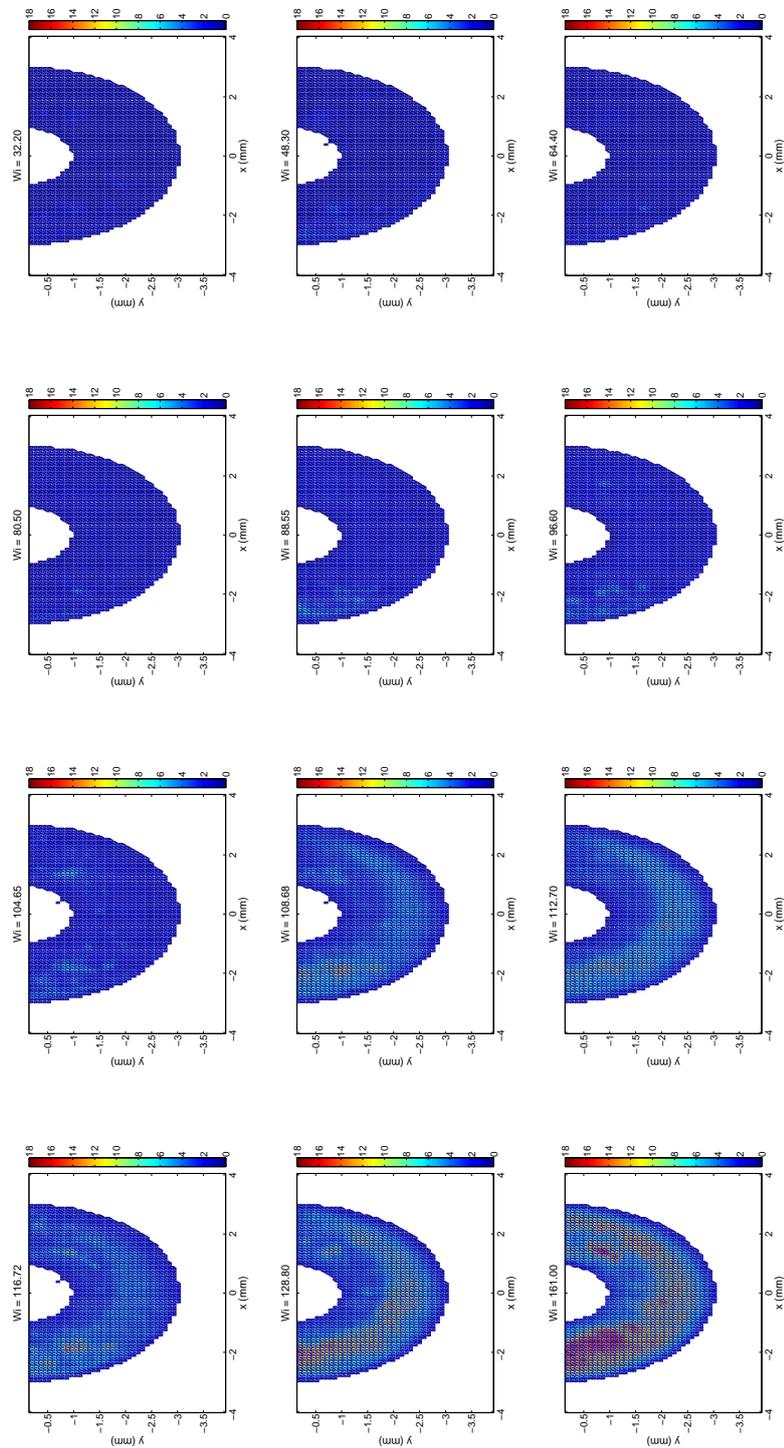


Abbildung 7.6: Räumliche Verteilung der absoluten Fluktuationsamplitude (in mm/s) bei $N = 1$. Weitere Erklärungen im Text.

7 Übergang zur Turbulenz

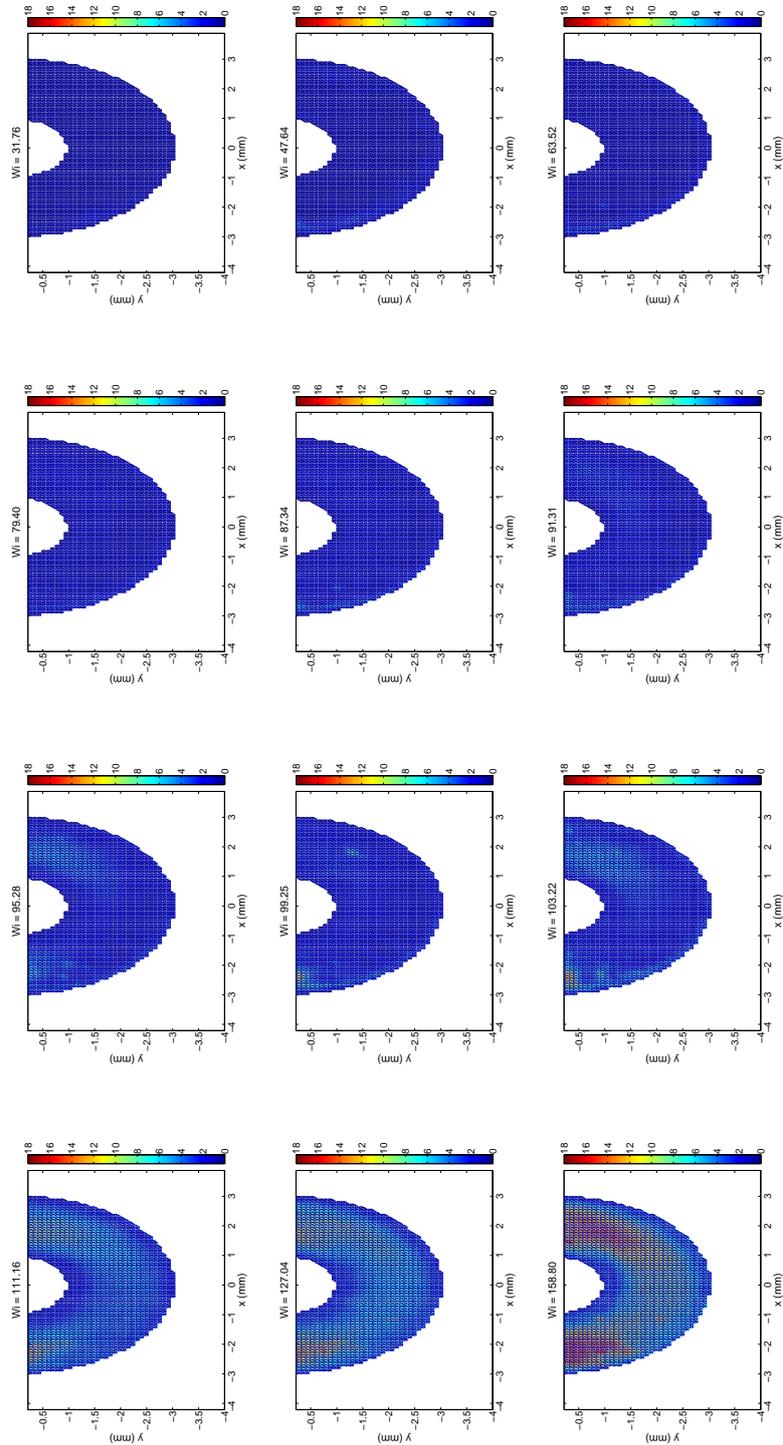


Abbildung 7.7: Räumliche Verteilung der absoluten Fluktuationsamplitude (in mm/s) bei $N = 11$. Weitere Erklärungen im Text.

7.3 Räumliche Charakterisierung der Turbulenz

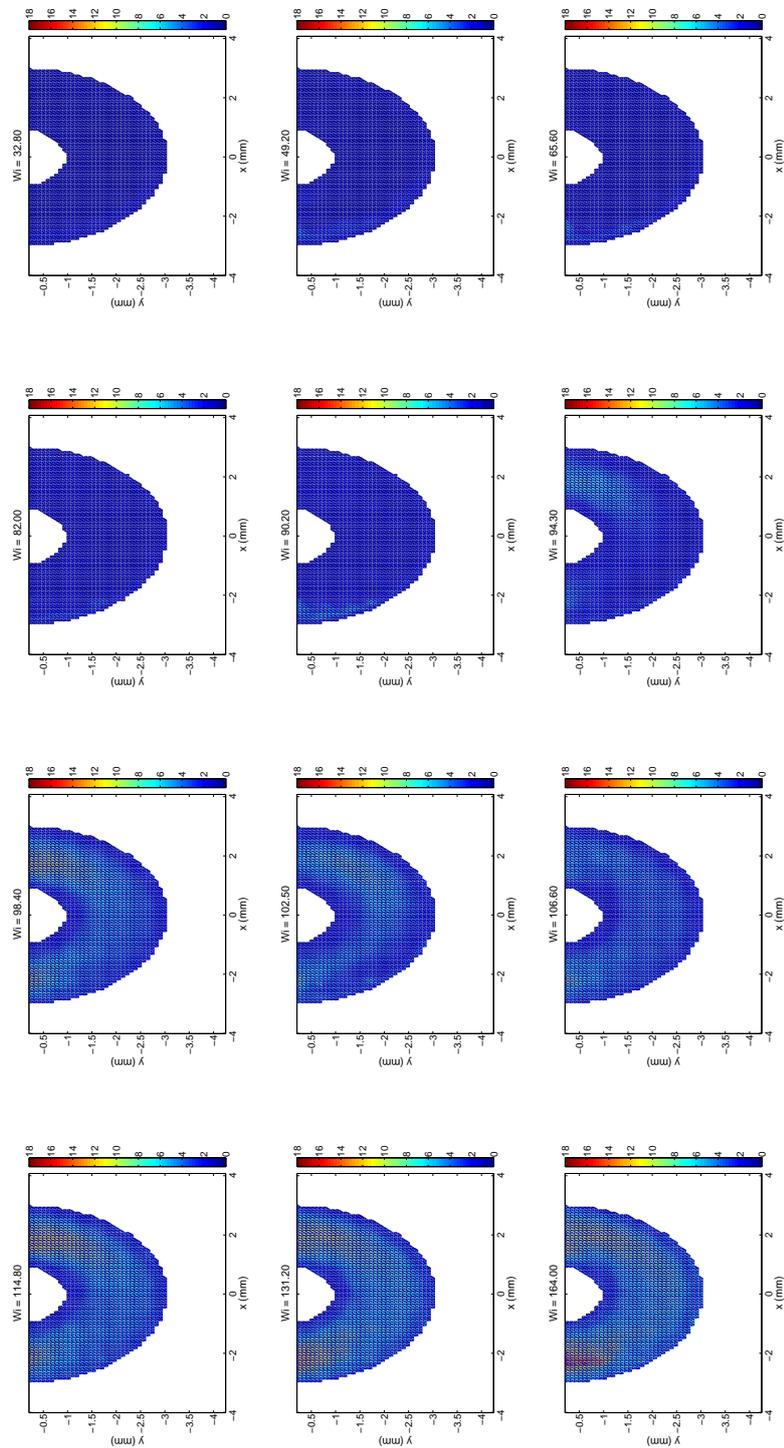


Abbildung 7.8: Räumliche Verteilung der absoluten Fluktuationsamplitude (in mm/s) bei $N = 20$. Weitere Erklärungen im Text.

7 Übergang zur Turbulenz

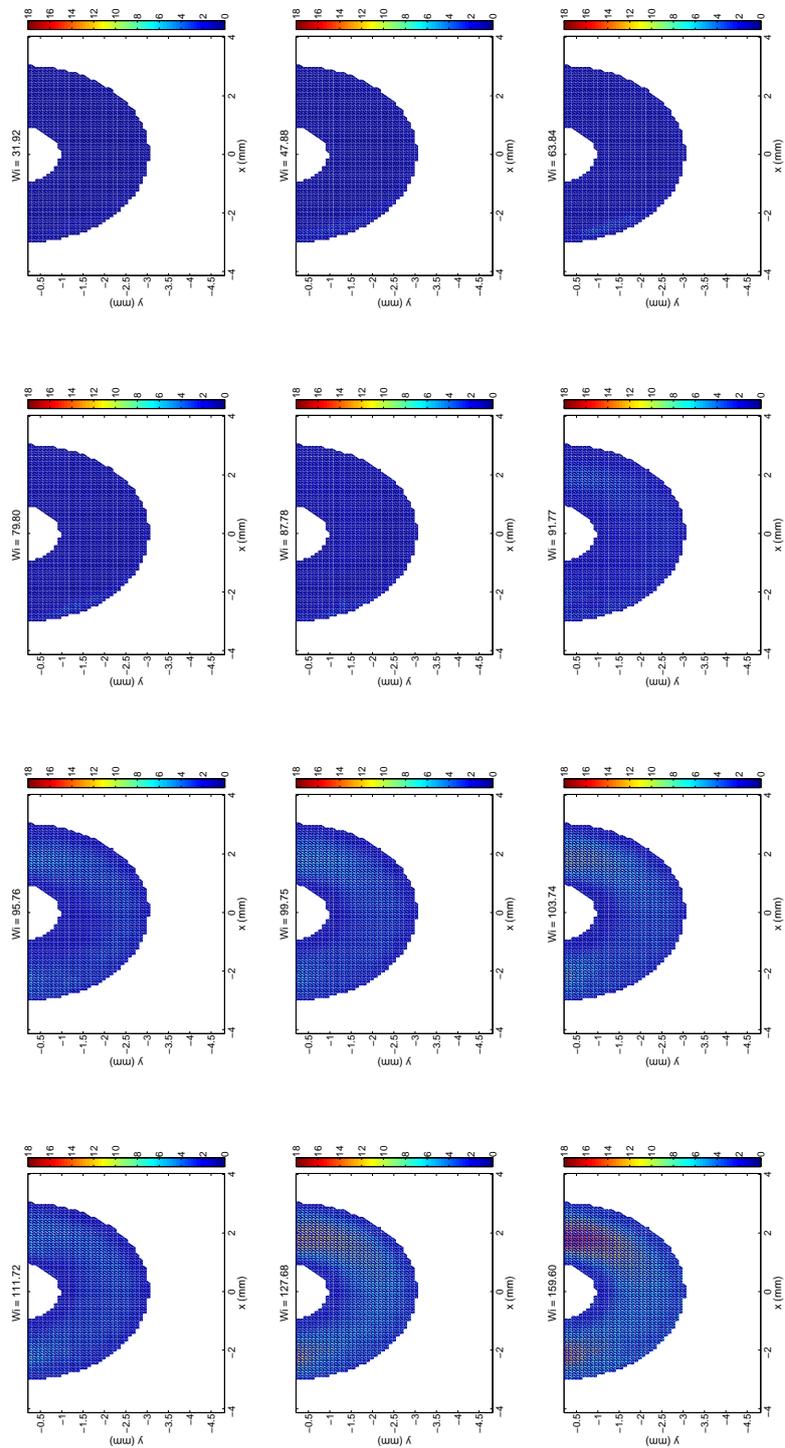


Abbildung 7.9: Räumliche Verteilung der absoluten Fluktuationsamplitude (in mm/s) bei $N = 40$. Weitere Erklärungen im Text.

7.3 Räumliche Charakterisierung der Turbulenz

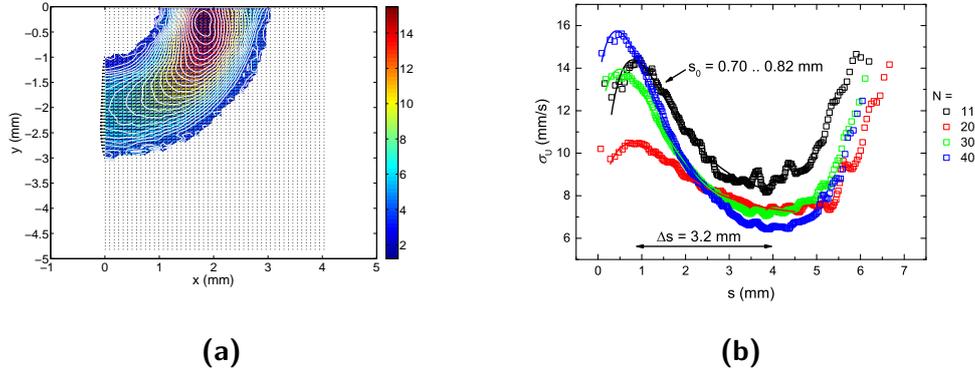


Abbildung 7.10: (a) Farbkodierte, konturierte Fluktuationsamplituden und ange deutetes Geschwindigkeitsfeld bei $Wi = 159.6$ und $N = 40$. Wie im Text beschrie ben erreicht die turbulente Zone ihre größte Ausdehnung im Bereich der höchsten Geschwindigkeit, was auf eine konvektive Mitnahme der erzeugten turbulenten Strö mung hindeutet. (b) Azimuthaler Schnitt durch das Fluktuationsfeld für verschiedene Positionen N , bei jeweils der höchsten Weissenberg-Zahl, zur Veranschaulichung der Ausbreitung der Turbulenz mit typischen Längenskalen.

Strömungsrichtung liegende Ende dagegen spitz zulaufend ist. Dass dieses spitz zulaufende Ende seine größte Ausdehnung an der gleichen radialen Stelle erreicht, an der auch die Geschwindigkeit in Strömungsrichtung maximal wird, lässt sich dahingehend interpretieren, dass die Fluktuation durch die Strömung weiter in den betrachteten Halbring konvektiert wird.

In Abb. 7.10 haben wir zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts für $Wi = 159.6$ und $N = 40$ die farbkodierte Fluktuationsverteilung und das Geschwindigkeitsfeld als Vektorplot dargestellt. Ergänzend zeigen wir in Abb. 7.10b einen azi muthalen Schnitt entlang des untersuchten Halbrings. Hierbei ist $s = \bar{R}\theta$ eine Bogenkoordinate. Man misst in diesem Zusammenhang eine maximale Ausdehnung der turbulenten Zone von ca. 3.2 mm. Es sei in diesem Zusammenhang noch einmal darauf verwiesen, dass die Turbulenz bis zu diesem Punkt zwar abklingt, aber, wie unsere Bifurkationsdiagramme zeigen, nicht ausstirbt.

Zur Interpretation ziehen wir eine Charakterisierung der Strömung heran, wie sie von Poole in (Zilz u. a. 2012) eingeführt wird. Sind $\hat{\gamma}$ und $\hat{\Omega}$ Größenordnungen für den Scherraten- und den Vortizitätstensor, so lässt sich ein Fließparameter ξ durch das Verhältnis

$$\xi = \frac{\hat{\gamma} - \hat{\Omega}}{\hat{\gamma} + \hat{\Omega}} \in [-1, 1] \quad (7.3)$$

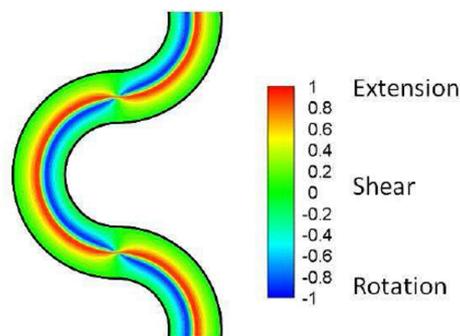
definieren. Durch diesen lässt sich, wie in Tab. 7.1 genauer ausgeführt, zwi schen Dehnungs-, Rotations- und Scherströmungen sowie zwischen Kombinati onen dieser Strömungstypen unterscheiden.

7 Übergang zur Turbulenz

| Strömung | $\hat{\gamma}$ | $\hat{\Omega}$ | ξ |
|----------|-------------------------------|----------------|-------|
| Rotation | 0 | $\hat{\Omega}$ | -1 |
| Scherung | $\hat{\gamma} = \hat{\Omega}$ | $\hat{\Omega}$ | 0 |
| Dehnung | $\hat{\gamma}$ | 0 | 1 |

Tabelle 7.1: Charakterisierung des Fließverhaltens nach (Zilz *u. a.* 2012). Der Fließparameter ξ unterscheidet zwischen Rotations- und Scheranteilen der Strömung sowie Kombinationen dieser Strömungen.

Abbildung 7.11: Verteilung der Strömungsarten nach (Zilz *u. a.* 2012). In der Wendeebene erreicht die Scherströmung ihre größte Ausdehnung, wenn Dehnungs- und Rotationsströmungen die Seiten relativ zur Strömungsrichtung tauschen.



In der zitierten Veröffentlichung ist für eine funktionale Einheit im Detail gezeigt, wie sich diese Strömungstypen verteilen. So finden sich im inneren Halb- raum, von innen nach außen gesehen, zunächst Scher-, dann Rotationsströmung. Entlang der Kanalmittellinie, wie in Abb. 6.2 strich-punktiert angedeutet, liegt ein Bereich moderater Scherung bis Dehnung vor. Zur Außenseite hin folgt dann ein Bereich starker Dehnung, bis entlang der Außenwand wieder eine Scherströmung vorliegt. In den Wendeebenen zwischen zwei Halbringen wechseln Dehnungs- und Rotationsströmung jeweils die Seiten, die Scherströmung schnürt diese Be- reiche zusammen und ist an dieser Stelle räumlich dominant. Wir sehen an dieser Stelle einen Zusammenhang zwischen der räumlich ausgeprägten Scherströmung und der starken Turbulenz um die Wendeebene herum.

7.4 Untersuchung des zeitlichen Verhaltens

Wir untersuchen im folgenden experimentell die Stabilität turbulenter Strömungen viskoelastischer Fluide in den funktionalen Einheiten sowie im geraden Kanalabschnitt, der sich an diese anschließt. Bereits in Kap. 2.3 wurde das gängige Argument für die lineare Instabilität einer Strömung eines viskoelastischen Fluids bei gekrümmten Stromlinien erläutert (Larson *u. a.* 1990; Morozov & van Saarloos 2007).

Schon länger bekannt ist die lineare Stabilität paralleler Scherströmungen viskoelastischer Fluide (Ho & Denn 1977; Morozov & van Saarloos 2005). Wir

legen im folgenden experimentell gewonnene Hinweise auf die lineare Instabilität einer Poiseuilleströmung durch einen gekrümmten Kanal vor.

7.4.1 Lineare Instabilität im gekrümmten Kanal

Wie bereits in Kap. 7.1.2 geschildert, beobachten wir in Abhängigkeit von der angelegten Weissenbergzahl zunächst laminares, dann oszillatorisches und schließlich ein ausgeprägt turbulentes Geschwindigkeitssignal. Insbesondere letzteres ist bereits ausführlich erforscht worden. Für uns von besonderem Interesse ist das oszillatorische Geschwindigkeitsregime.

Numerische Simulationen haben gezeigt, dass beim Überschreiten der Instabilitätsschwelle zunächst eine oszillatorische Strömung auftreten sollte (Zilz *u. a.* 2012). Dies passt zum generellen Charakter linear instabiler Prozesse, bei denen bei einem leichten Überschreiten der Instabilitätsschwelle zunächst eine begrenzte Zahl oszillatorischer Moden wachstumsfähig angeregt werden sollte. Dies ist etwa im Fall der Couette–Taylor–Strömung zu beobachten.

Für genauere Untersuchungen ziehen wir im folgenden die normierte, fluktuierende Geschwindigkeitskomponente

$$u(t) = \frac{U(t) - \langle U \rangle}{\langle U \rangle} \quad (7.4)$$

heran. In den Abbn. 7.12 und 7.13 sind diese für die Messpositionen $N = 40$ und $N = 20$ beispielhaft dargestellt. Das zeitliche Verhalten der Strömung weist in den beiden gezeigten Einheiten einen unterschiedlichen Charakter auf. Bei $N = 40$ geht die Strömung mit Erreichen der kritischen Weissenbergzahl direkt von laminarem zu turbulentem Verhalten mit starken Fluktuationen über. Bei $N = 20$ lassen sich um die kritische Weissenbergzahl herum moderate Oszillationen des Geschwindigkeitssignals feststellen. Diese Oszillationen lassen sich auch in funktionalen Einheiten für $N < 20$ feststellen, sie treten im Bereich imperfekter Bifurkationen unmittelbar unter- und oberhalb von Wi_c auf.

Für eingehendere Untersuchungen wählen wir die Einheit bei $N = 20$, da diese einerseits ausreichend weit vom Eingang entfernt ist und viskoelastische Effekte prägend sind, andererseits erfolgt der Übergang aus dem laminaren Grundzustand nicht so abrupt, dass er für uns nicht auflösbar ist.

In Kap. 6.3 haben wir das Problem im Versuchsaufbau auftretender, langwelliger Oszillationen beschrieben, die ihren Ursprung möglicherweise im Strömungsantrieb oder der Flexibilität der Zuleitungen haben. Erste Messungen zeigen, dass diese langwelligeren Oszillationen eine Periodendauer um 30 s besitzen, was sich deutlich von den durch viskoelastische Effekte hervorgerufenen Oszillationen unterscheidet, sie aber dennoch die Auswertung insbesondere der Autokorrelationsfunktionen empfindlich stören können.

Wir beheben das Problem, indem wir eine Driftkorrektur durchführen. Hierzu wird von dem aus der Messung extrahierten Zeitsignal (Verfahren gemäß Kap.

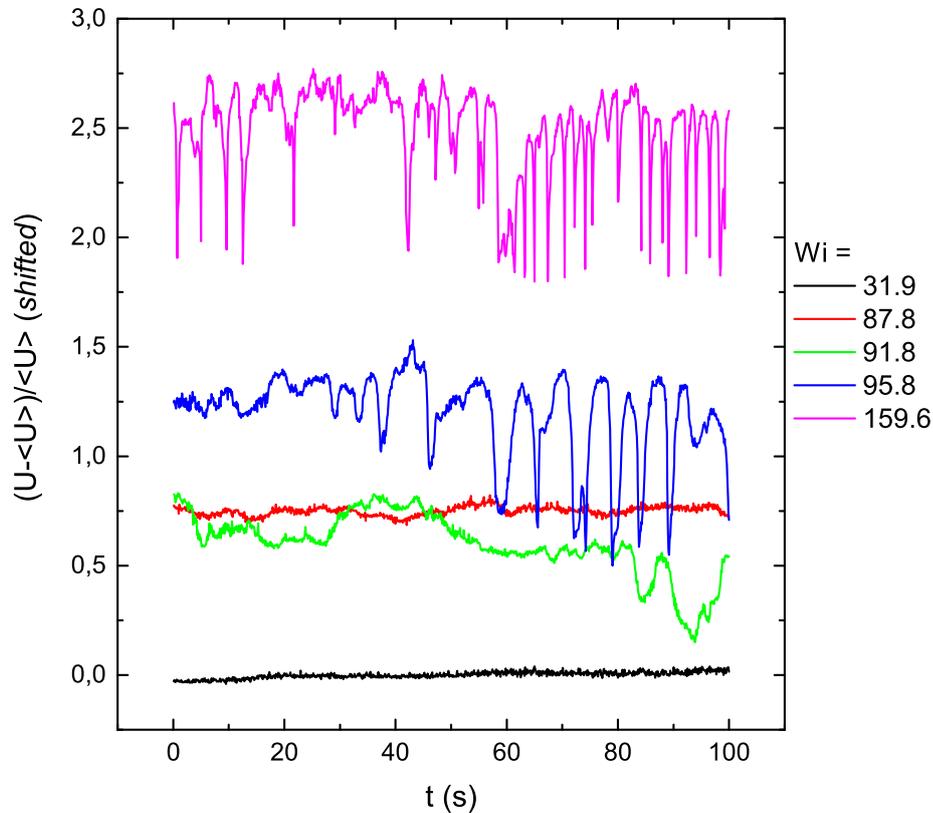


Abbildung 7.12: Im Vergleich zu den funktionalen Einheiten $N = 1 \dots 20$ zeigt sich beispielhaft für $N = 40$, dass die Fluktuationen mit Erreichen von Wi_c mehr oder weniger sofort in ein stark fluktuierendes Signal umschlagen ($Wi_c = 87.8 \rightarrow 91.8$).

6.3.2) ein Glättungspolynom $\tilde{U}(t) = \sum_{j=0}^{j_{\max}} a_j t^j$ abgezogen. Die Koeffizienten des Polynoms werden aus einer Regression der Geschwindigkeitsdaten ermittelt, der Grad des Polynoms liegt zwischen 3 und 5. In Abb. 7.13 zeigen wir die Geschwindigkeitsrohdaten (gebleichte, durchgezogene Linien) und die zugehörigen Glättungspolynome (strich-punktiert). Die daraus hervorgehenden geglätteten Geschwindigkeitsdaten sind als durchgezogene Linien dargestellt

Zur weiteren Untersuchung führen wir eine Spektralanalyse durch, hierzu untersuchen wir zunächst die Verteilung der spektralen Leistungsdichte $S(\nu)$, wobei ν die Frequenz bezeichnet. Diese Leistungsspektren sind in Abb. 7.14 gezeigt, wobei sie jeweils durch ihr Maximum normiert werden. Eine Ausnahme bildet das Spektrum für $Wi = 73.8$, welches durch das Maximum des für $Wi = 90.2$ gewonnenen normiert wurde, um den Vergleich von laminarer und oszillatorischer

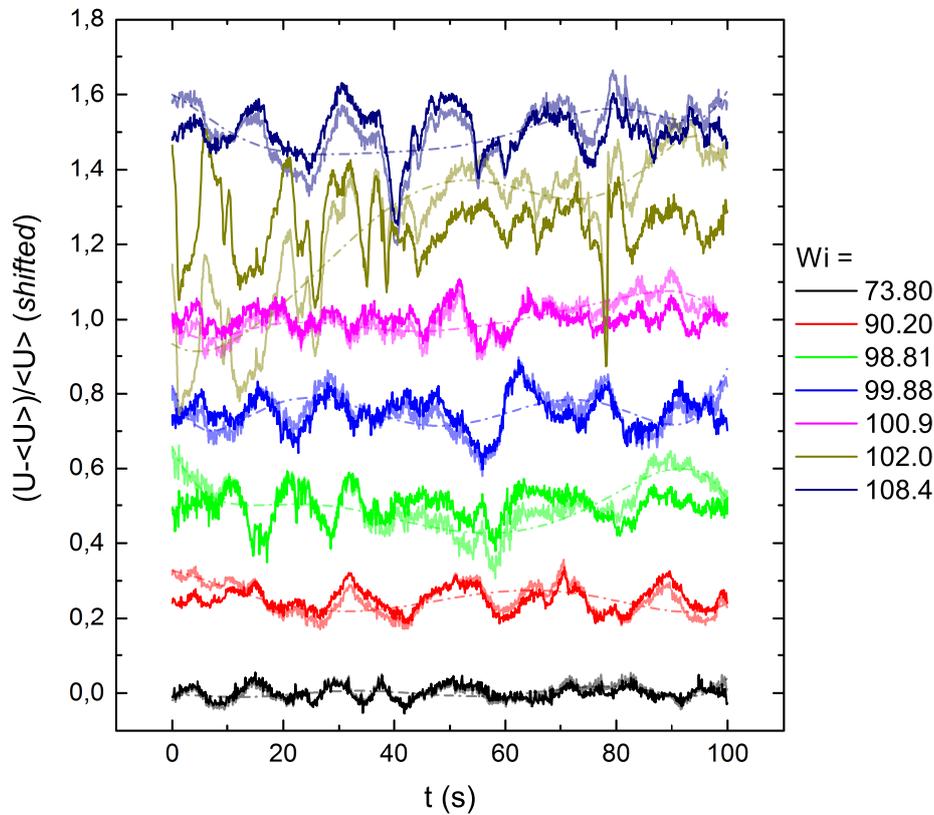


Abbildung 7.13: Geschwindigkeitsverlauf bei $N = 20$. Geschwindigkeitsrohdaten (Gebrochene, durchgezogene Linien) und Glättungspolynome (gestrichelt) zum Filtern langwelliger Oszillationen. Die durchgezogenen Kurven ergeben sich durch Abziehen der Glättungspolynome von den Rohdaten.

Strömung zu ermöglichen.

Wie zu erwarten stellt man zunächst fest, dass für $Wi = 73.8$ im unterkritischen Bereich keine auffälligen Frequenzspitzen zu beobachten sind. Bei einer Erhöhung auf $Wi = 90.2$ zeigt sich zunächst eine, bei einer weiteren Erhöhung auf $Wi = 98.8 \dots 100.2$ drei Frequenzspitzen. Dies entspricht dem Verhalten, dass man zunächst von einer linearen Instabilität erwarten würde, mit einer mit zunehmendem Abstand vom kritischen Kontrollparameter zunehmenden Zahl angeregter Moden. Dem entgegen stehen die Spektren, die sich für $Wi = 102.4$ und $Wi = 108.4$ beobachten lassen. Im einen Fall findet sich ein recht breit aufgestelltes Spektrum, im anderen Fall eines mit nur einer Frequenzspitze. Wir führen dies auf den in diesen Fällen bereits recht großen Abstand $Wi - Wi_c$ zurück, der zwar prinzipiell noch oszillatorische Moden erlaubt, diese aber zunehmend instabil werden. Es zeigt sich außerdem (mit Ausnahme von $Wi = 108.4$), dass ab einer Weissenbergzahl von 102.4 weitere Moden im höherfrequenten Frequenzbereich

7 Übergang zur Turbulenz

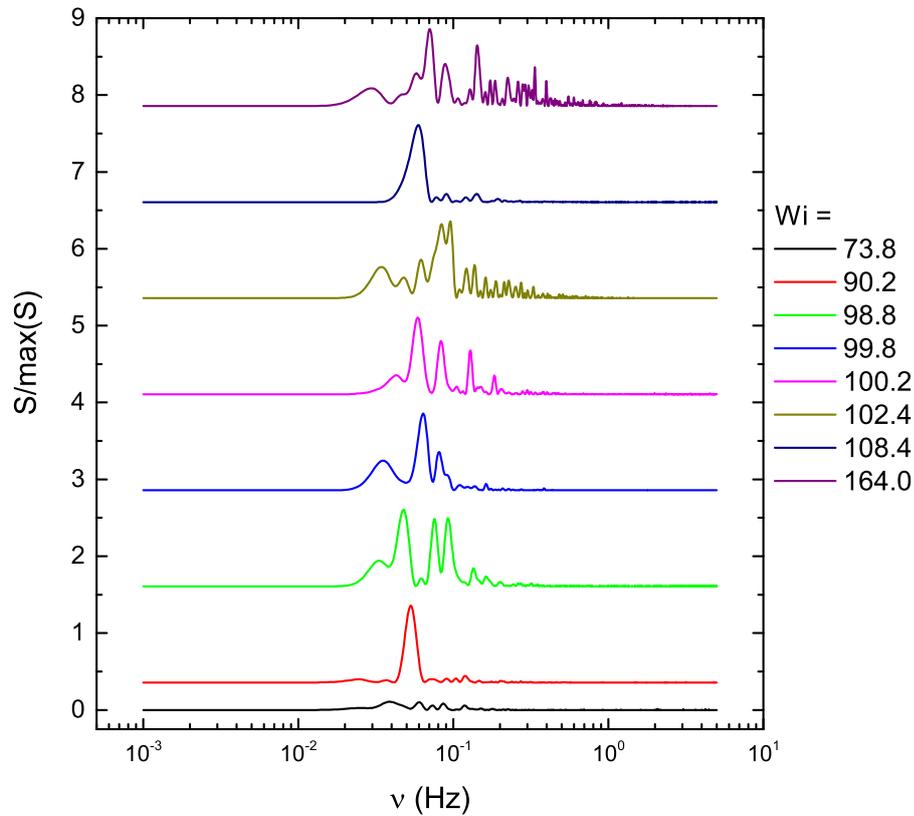


Abbildung 7.14: Spektrale Leistungsdichte für oszillatorische Strömungen für ausgewählte Weissenbergzahlen. Zum Vergleich der Amplituden ist auch die normierte spektrale Leistungsdichte im Fall unterkritischer Weissenbergzahlen ($Wi = 73.8$) abgebildet.

auftreten, die für turbulente Strömungen typisch sind.

Wir untersuchen weiterhin die zeitliche Stabilität der angeregten Moden. Hierzu wird das Spektrum auf einem gleitenden Abfragefenster der Länge $T/2$ berechnet (im gegebenen Fall entspricht dies 50 s). Man beobachtet hier im unterkritisch bis leicht überkritischen Fall ($Wi \leq 90.2$) kaum Änderung der Spektren, für höhere Weissenbergzahlen treten teilweise drastische Änderungen auf, die entweder zu einer Verbreiterung des Spektrums führen (z.B. $Wi = 102.4$ und $Wi = 108.4$) oder zur Stabilisierung einer einzigen Mode ($Wi = 99.8$). Für turbulente Strömungen ($Wi = 164.0$) beobachtet man wiederum ein qualitativ relativ stabiles Spektrum.

Wir widmen uns weiterhin noch einer zusammenfassenden Charakterisierung der spektralen Leistungsdichte, wie sie in Abb. 7.16 gezeigt wird. Hierzu wurde die spektrale Leistungsdichte $S(\nu)$ doppelt-logarithmisch gegen die Frequenz ν aufgetragen. Qualitativ fallen dabei sofort unterschiedliche Abhängigkeiten von $S(\nu)$

7.4 Untersuchung des zeitlichen Verhaltens

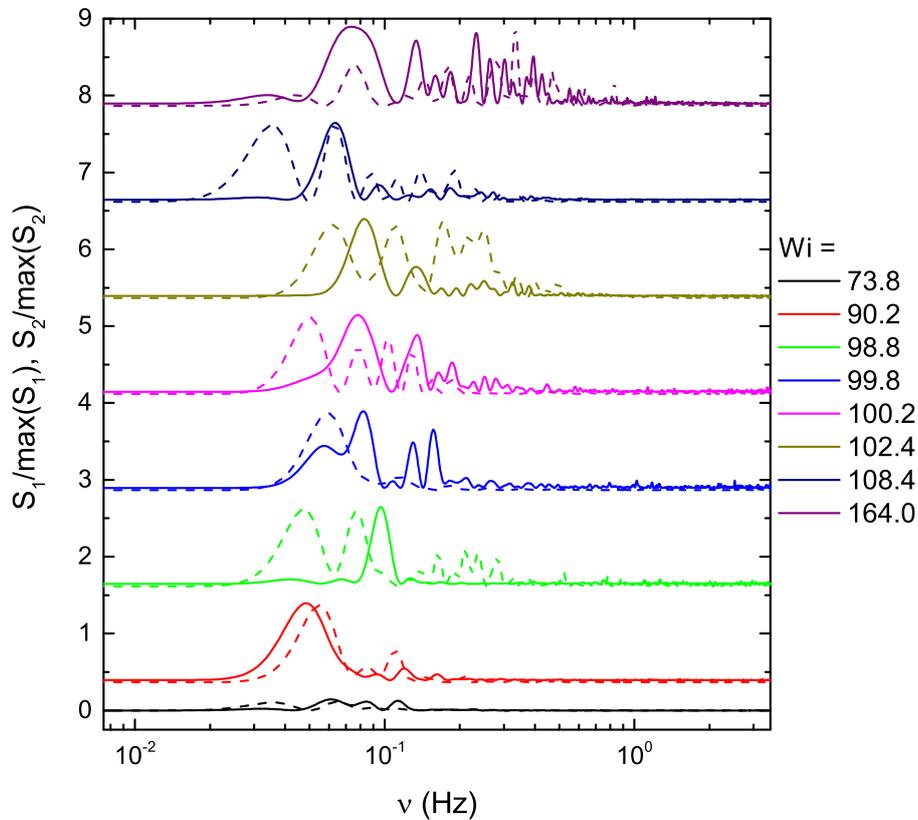


Abbildung 7.15: Änderung der spektralen Leistungsdichte für oszillatorische Strömungen für ausgewählte Weissenbergzahlen. Die mit durchgezogenen Linien bezeichneten Spektren sind während der ersten 50 s einer Messung ausgewertet worden, die gestrichelt eingetragen für die zweiten 50 s.

ins Auge. Im Fall oszillatorischer Strömungen liegt ein Potenzgesetz-Verhalten vor, die Spektrale Leistungsdichte fällt zu höheren Frequenzen proportional zu $\nu^{-1.5}$ ab, genauer messen wir Exponenten zwischen -1.63 und -1.37 .

Frühere Untersuchungen, etwa (Groisman & Steinberg 2000, 2001), widmeten sich unter anderem Auch der Untersuchung des Leistungsspektrums turbulenter viskoelastischer Strömungen. Diesen zufolge ist mit einem Plateau im niedrigen Frequenzbereich zu rechnen, ab einer Eckfrequenz lässt die spektrale Leistungsdichte dann wiederum gemäß einem Potenzgesetz nach. Dieses Verhalten können wir in mehreren Windungen für Weissenbergzahlen im turbulenten Bereich bestätigen.

Als Modell für das Anpassen der Leistungsspektren im turbulenten Fall wählen wir eine Lorenz-artige Funktion

7 Übergang zur Turbulenz

$$S(\nu) = \frac{1}{S_0 + \alpha\nu^p} \quad (7.5)$$

neben dem direkt zugänglichen Exponenten p lässt sich die Eckfrequenz durch die Nullstelle der zweiten Ableitung der Modellfunktion berechnen. Wir definieren die Eckfrequenz als die Frequenz, für die die Kurve der Modellgleichung Gl. (7.5) ihre minimale Krümmung erreicht. Hierzu muss zunächst die dritte Ableitung der Modellgleichung berechnet werden:

$$\frac{d^3 S(\nu)}{d\nu^3} = -\frac{\alpha p}{\nu^3 S^4(\nu)} \left[\alpha^2 \nu^{3p} (p^2 + 3p + 2) + 4\alpha^2 S_0 \nu^{2p} (1 - p^2) + S_0^2 \nu^p (p^2 - 3p + 2) \right], \quad (7.6)$$

Die minimale Krümmung findet man an der Nullstelle dieses Ausdrucks. Substituiert man $x = \nu^p$, so findet man die Nullstellen durch Lösung der kubischen Gleichung mittels *Maple*. Vernachlässigt man komplexe Lösungen, so erhält man als mögliche Nullstellen:

$$\nu_c = \left(\frac{S_0 \pm 2(p^2 - 1) + \sqrt{3p^2(p^2 - 1)}}{\alpha(p^2 + 3p + 2)} \right)^{1/p} \quad (7.7)$$

Aus einem Plot der Ableitungsfunktion Gl. (7.6) ist dann ersichtlich, wo die Stelle minimaler Krümmung liegt. Wir erhalten so exemplarisch für den Fall $Wi = 164.0$ die Eckfrequenz $\nu_c \approx 96.6$ mHz. Weitere gemessene Eckfrequenzen liegen ebenfalls im Bereich von 70...130 mHz. Dieser Bereich markiert etwa das Inverse der Polymerrelaxationszeit, welche auf eine Frequenz $1/\lambda \approx 100$ mHz führen sollte, und deckt sich weiterhin mit Beobachtungen, die wir bei der Untersuchung der Periodizität der Autokorrelationsfunktionen gemacht haben, und die im folgenden beschrieben werden.

Zur Bestimmung der Periodizitäten der oszillatorischen Strömung ziehen wir die Autokorrelationsfunktionen heran, die in Abb. 7.17 exemplarisch für ausgewählte Weissenbergzahlen dargestellt werden. Da Autokorrektationsfunktion und Spektrale Leistungsdichte eng miteinander verwandt sind, ist es möglich, die Autokorrelation durch eine Summe gedämpfter Sinusfunktionen,

$$C_{uu}(\tau) \approx C_0 + \sum_{j=0}^{N_{\max}} C_j \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,j}}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_j}\tau + \phi_j\right) \quad (7.8)$$

anzupassen. Die endlichen Lebensdauern $\tau_{0,j}$ sind dabei ein Artefakt der Tatsache, dass die Autokorrelation endliche Zeitreihen berechnet wird, physikalisch sind sie nicht von näherer Bedeutung. Der maximale Summengrad N_{\max} ist bestimmt durch die Anzahl deutlich erkennbarer Frequenzspitzen, wie sie Abb. 7.14 zu entnehmen sind. Wie zu erwarten, lassen sich insbesondere für Spektren mit

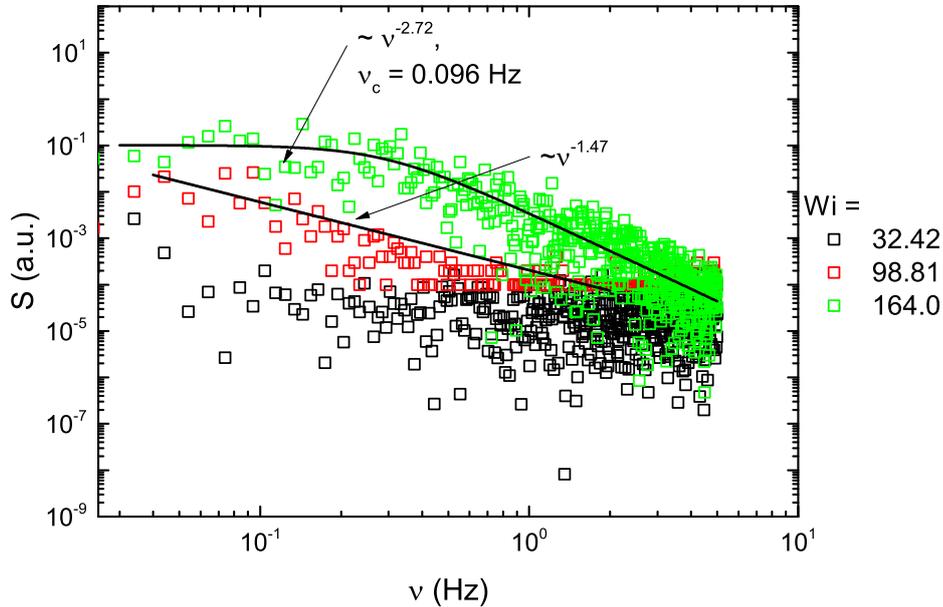


Abbildung 7.16: Spektrale Leistungsdichten oszillatorischer und turbulenter Strömungen im Vergleich. Die spektrale Leistungsdichte fällt gemäß einem Potenzgesetz mit $\nu^{-1.5}$ ab (rote, offene Quadrate). Das Verhalten der spektralen Leistungsdichte turbulenter Strömungen entspricht dem einer Lorenz-Funktion mit einer Eckfrequenz im Bereich von 0.13 Hz, mit einem anschließenden Abfall der Leistungsdichte $\sim \nu^{-2.7}$ (grüne, offene Quadrate).

wenigen Peaks gute Anpassungen erzielen. Die auf diese Art gemessenen Intermittenzen liegen mit 10 . . . 20 s in der Größenordnung der Polymerrelaxationszeit.

Wir haben in Kap. 5.3.4 eine alternative Methode geschildert, die Relaxationszeit aus der Normalspannungsmessung zu ermitteln. In dem Fall erhält man ein Spektrum von Relaxationszeiten, $\lambda \sim \dot{\gamma}^{-1}$, wobei die Größenordnung im Bereich $\mathcal{O}(1$ s) liegt. Berücksichtigt man dies, so erhält man deckung mit den numerischen Ergebnissen, die auf eine Periodizität im Bereich von $T \sim 10\lambda$ hinweisen (Zilz u. a. 2012).

Eine weitere interessante Beobachtung ergibt sich beim Aufstellen eines Phasendiagramms, bei dem die Strömung nach den beiden variierten Parametern N und Wi charakterisiert ist. Eine solche haben wir in Abb. 7.18 vorgenommen. Wir unterscheiden dabei zwischen laminarer Strömung (LAM), oszillatorischer Strömung (OSZ) und voll entwickelter Turbulenz (VET). Bei dieser Untersuchung fallen zwei Dinge auf.

Zunächst ergibt sich ein Verlauf der kritischen Weissenbergzahl $Wi_c(N)$, wie sie aus den Bifurkationsdiagrammen bestimmt werden kann und in der Abbildung

7 Übergang zur Turbulenz

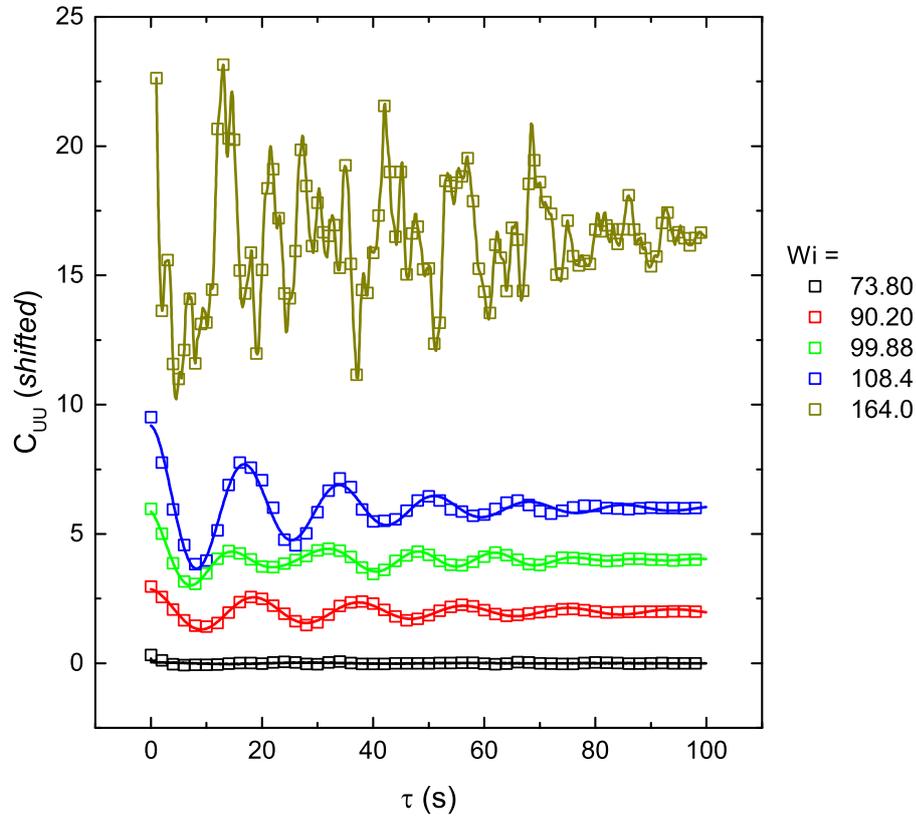


Abbildung 7.17: Autokorrelationsfunktionen oszillatorischer Strömung für ausgewählte Weissenbergzahlen. Die durchgezogenen Linien stellen die Anpassung gemäß dem in Gl. (7.8) dar und erlauben eine genaue Bestimmung der Periodendauer.

durch gefüllte rote Quadrate gekennzeichnet ist. Dieser weist mit zunehmendem N eine fallende Tendenz auf, was die Annahme nahelegt, dass viskoelastische Turbulenz zunächst stromabwärts einsetzt und erst mit zunehmender Weissenbergzahl weiter stromaufwärts beobachtbar ist. Man kann das Phasendiagramm auch in der umgekehrten Richtung lesen und dahingehend interpretieren, dass der viskoelastische Turbulenz mit zunehmender Kanallänge bei stetig kleiner werdenden Weissenbergzahlen einsetzt. Letzteres wird bestätigt durch die Untersuchung der räumlichen Turbulenzverteilung.

Durch schwarze (blaue) Quadrate sind in der Abbildung die niedrigsten (höchsten) Weissenbergzahlen gekennzeichnet, für die oszillatorische Strömungen messbar sind. Zunächst fällt auf, dass dieser Bereich in den letzten funktionalen Einheiten ab $N = 30$ verschwindet. Wir vermuten, dass in diesen Einheiten der Be-

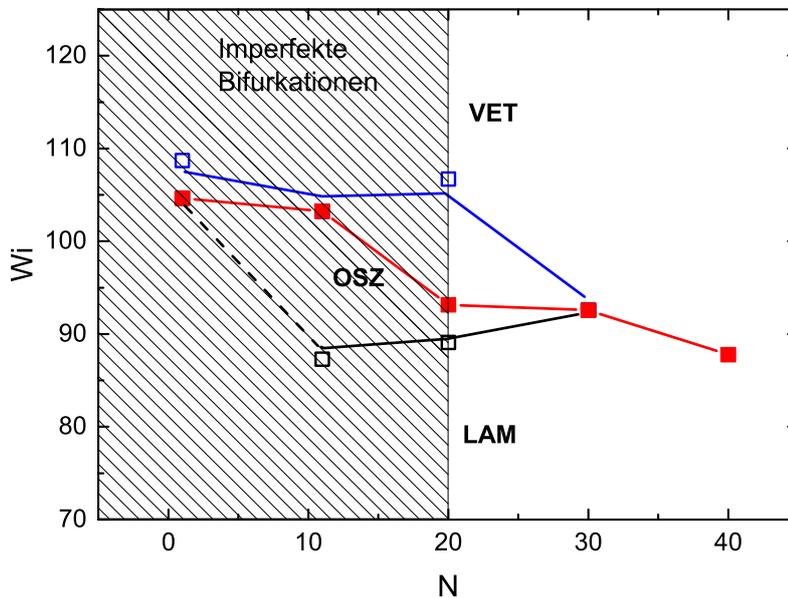


Abbildung 7.18: Phasendiagramm des Strömungsverhaltens (laminar, oszillatorisch oder voll entwickelte Turbulenz, vgl. Text). In Rot eingetragen sind die kritischen Weissenbergzahlen für $N = 1 \dots 40$, wie sie aus den Bifurkationsdiagrammen abzulesen sind. Die schwarzen bzw. blauen Quadrate zeigen die niedrigsten bzw. höchsten Weissenbergzahlen, für die oszillatorisches Strömungsverhalten festgestellt werden konnte.

reich oszillatorischer Strömungen zu schmal war, um mit unseren experimentellen Mitteln aufgelöst zu werden. Weiterhin fällt auf, dass im Bereich imperfekter Bifurkationen für $N \leq 20$ oszillatorische Strömungen in der Nähe der kritischen Weissenbergzahl auftreten, sowohl ober- als auch unterhalb von Wi_c .

Diese Beobachtung kann jedoch mit dem generellen Problem der Definition eines kritischen Kontrollparameters bei einem kontinuierlich erfolgenden Phasenübergang in Verbindung gebracht werden, da insbesondere im vorliegenden Fall ein willkürlicher Schwellwert gewählt werden muss. Dieses Problem lässt sich unter Umständen durch eine dichtere Aufnahme von Datenpunkten und dann durchgeführte Interpolation und numerische Untersuchung der Kurve auf Wendepunkte o.ä. umgehen.

Eine solche Untersuchung würde es erfordern, ein größeres Fluidreservoir als die von uns verwendeten Glasspritzen einzusetzen. In einer weiteren Ausbaustufe des Versuchs könnte man hierzu einen Gasdruckantrieb verwenden, bei dem Druckluft oder ein anderes Inertgas verwendet wird, um das Testfluid durch den Kanal zu treiben.

7.4.2 Lineare Stabilität im geraden Kanal

Wir beschließen unsere Untersuchung des Stabilitätsverhaltens mit einer Untersuchung im geraden Kanal. Wir verwenden hier die dimensionslose Koordinate $\xi = x/a$ zur Bezeichnung der Position und führen an fünf Positionen $\xi = 2, 10, 20, 35$ und 50 Messungen nach dem in Kap. 7.1 beschriebenen Protokoll durch. Der Bezugspunkt $\xi = 0$ liegt dabei am Übergang von der letzten funktionalen Einheit in den geraden Kanal.

Gemäß der eingangs erwähnten Veröffentlichung sind parallele Scherströmungen viskoelastischer Fluide linear stabil (Ho & Denn 1977). Die durch die funktionalen Einheiten hervorgerufenen Fluktuationen sollten demzufolge zeitlich exponentiell abnehmen, betrachtet man zusätzlich die mittlere Geschwindigkeit $\langle U \rangle$ des Fluids, so lässt sich diese zeitliche Abhängigkeit in eine räumliche Abhängigkeit umrechnen (*Taylor-Hypothese*).

In Abb. 7.19 zeigen wir das Bifurkationsdiagramm der normierten Fluktuationsamplitude. Der Bereich an Weissenbergzahlen, auf dem dieses Diagramm aufgenommen wurde, deckt sich mit dem aus Kap. 7.4.1. Es zeigt sich zunächst für $\xi = 2$ noch eine imperfekte Bifurkation, allerdings nimmt die Sättigungsamplitude immer weiter ab, und bereits ab $\xi = 35$ ist die Strömung zum laminaren Fließzustand zurückgekehrt.

Wir führen zusätzlich Untersuchungen des Verhaltens der Fluktuationsamplitude in Abhängigkeit vom Abstand zur letzten funktionalen Einheit ξ durch (s. Abb. 7.20 (a)). Zunächst beobachtet man für Weissenbergzahlen im Bereich laminarer Strömungen keine nennenswerte Änderung, wie dies auch zu erwarten ist. Im Bereich turbulenter Strömungen beobachtet man dagegen eine exponentielle Abnahme, die Längenskalen liegen für diese bei $\xi_0 = 3.10$ für $Wi \approx 95.0$ und steigen auf $\xi_0 = 6.3 \dots 7.1$ für $Wi \approx 112$ bzw. $Wi = 160$. Zu den genannten Weissenbergzahlen sei an dieser Stelle angemerkt, dass diese durch die Mittelung über die Weissenbergzahlen an jeder Messposition zustandekommen.

Aus der Tatsache, dass man für $Wi = 95.0$ und $Wi = 164.0$ eine ungefähr verhältnismäßige Änderung der Längenskala ξ_0 misst, kann die Vermutung abgeleitet werden, dass die Längenskala ihrerseits mit der Weissenbergzahl skaliert. Wir betrachten daher eine neue Auftragung gegen die reskalierte Koordinate ξ/Wi . Deren physikalische Bedeutung wird klar, wenn man die Definitionen einsetzt:

$$\frac{\xi}{Wi} = \frac{x/a}{\lambda \bar{U}/a} = \frac{x}{\lambda \bar{U}} = \frac{x}{\mathcal{L}_{el}} \quad (7.9)$$

wobei \mathcal{L}_{el} die *elastische Länge* beschreibt, über die bei einer gegebenen Geschwindigkeit elastische Effekte abklingen.

Bei einer Auftragung gegen diese Koordinate ermittelt man Längenskalen im Bereich von $0.03\mathcal{L}$ (vgl. Abb. 7.20 (b)). Insbesondere fällt auf, dass für diese Längenskalen für $Wi \approx 164$ und $Wi \approx 95$ nahezu gleich sind, was das Skalenverhalten bestätigen würde. In diesem Zusammenhang nicht näher erklärbar ist die abwei-

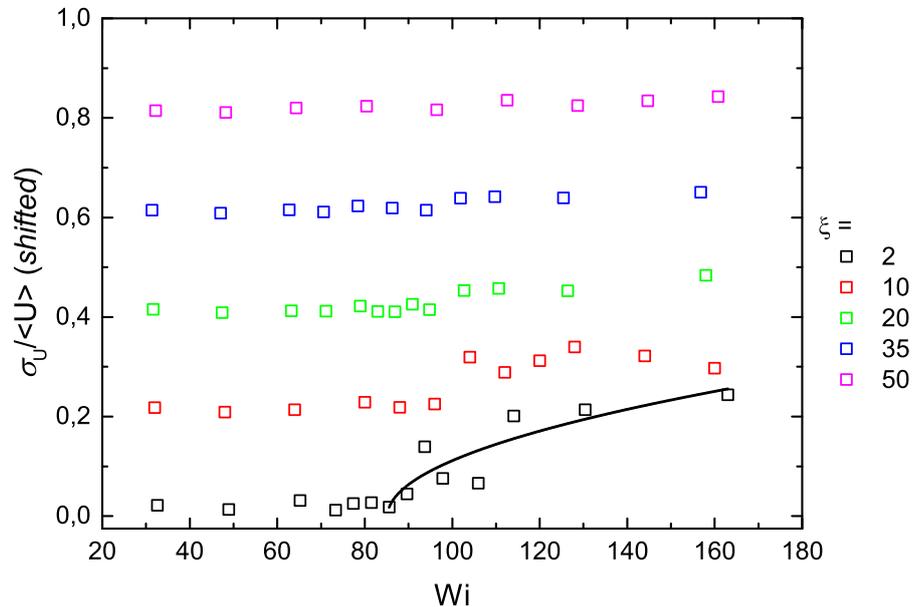


Abbildung 7.19: Bifurkationsdiagramme im geraden Kanal. Mit zunehmendem Abstand ξ von der letzten funktionalen Einheit nehmen die Fluktuationen ab, die Strömung ist wie erwartet linear stabil. Ab $\xi = 35$ kann von einer laminaren Strömung gesprochen werden.

chende Längenskala für $Wi = 112$. Ähnliche Beobachtungen sind auch aus der Gruppe von Steinberg bekannt.

Es bleibt festzustellen, dass die offensichtliche starke Abhängigkeit der Instabilität im geraden Kanal von der Art der Störung (Sequenz zylindrischer Hindernisse (Pan *u. a.* 2013) oder Kurven) gemäß bisher vorliegender Literatur nicht verstanden ist, insbesondere angesichts der Tatsache, dass diese Abhängigkeit bei inertialer Turbulenz nicht beobachtet wird.

Strömungen viskoelastischer Fluide in parallelen Schergeometrien, wie die in diesem Kanalbereich vorliegende Poiseuille-Strömung, sind linear stabil, aber nichtlinear instabil (Bertola *u. a.* 2003; Meulenbroek *u. a.* 2003; Morozov & van Saarloos 2005). Dies bedeutet, dass eine kleine Störung der Stromlinien durch Krümmung alleine nicht ausreicht, um eine Instabilität anzutreiben, allerdings bei vorhandener Krümmung der Stromlinien eine hinzukommende kleine Störung unter Umständen zu einem Anwachsen der Instabilität führen kann (“perturbation on top of a perturbation”, (Morozov & van Saarloos 2007).

Wir interpretieren unsere Ergebnisse dahingehend, dass elastische Effekte zunächst zu dieser Krümmung der Stromlinien führen und so die “Grund”-Störung schaffen, auf deren Basis dann kleine Störungen wachstumsfähig angeregt wer-

7 Übergang zur Turbulenz

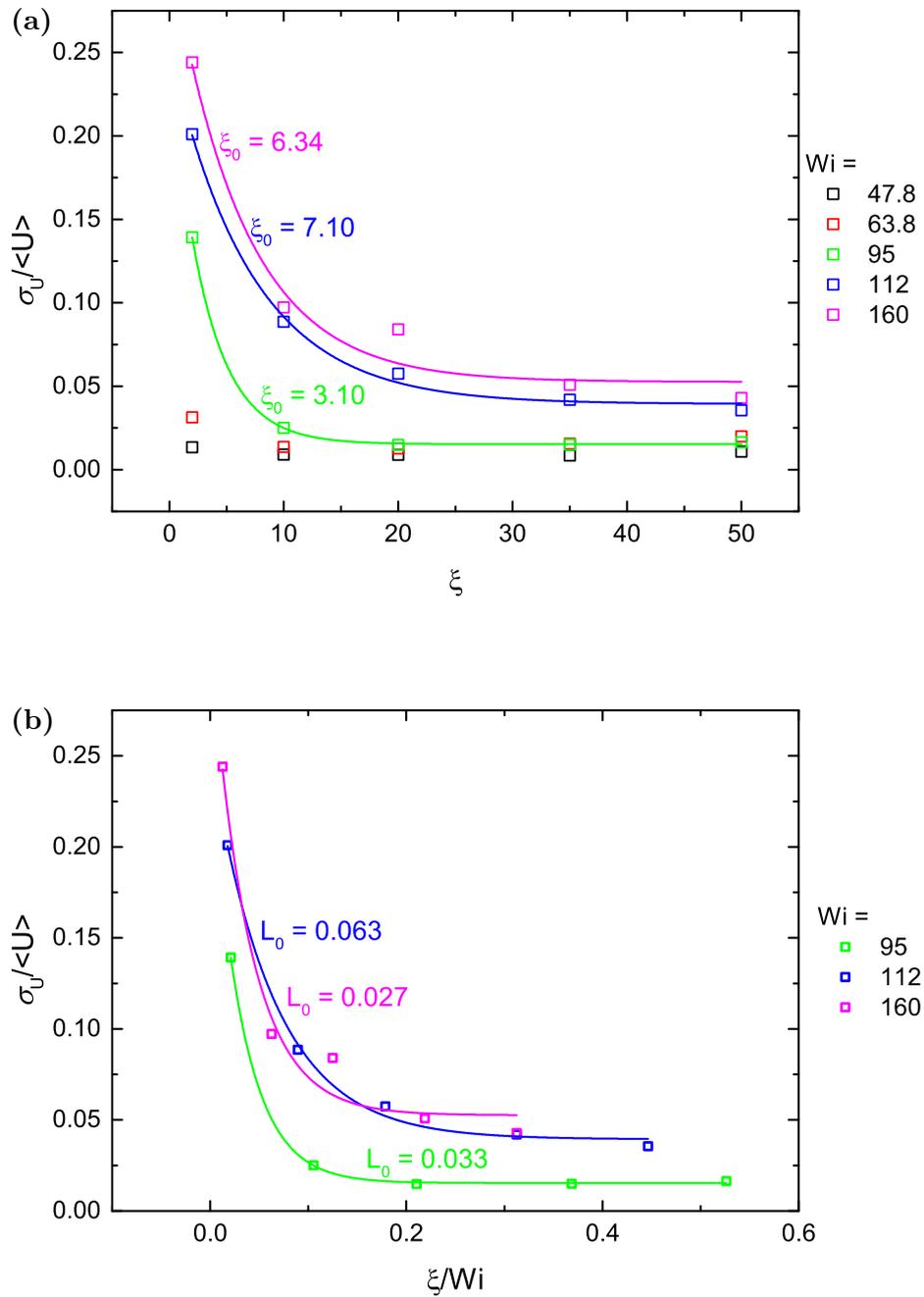


Abbildung 7.20: (a) Abhängigkeit der Fluktuationsamplitude vom Abstand zur letzten funktionalen Einheit. Für Weissenbergzahlen im Bereich turbulenter Strömungen fällt die Amplitude exponentiell ab. (b) Abhängigkeit von der durch die Weissenbergzahl skalierten Entfernung.

7.4 Untersuchung des zeitlichen Verhaltens

den. Nach Abständen, die etwa eine Größenordnung kleiner sind als die elastische Länge, sind die Stromlinien begradigt und kleine Störungen können nicht mehr wachstumsfähig angeregt werden. Insofern bildet die lineare Instabilität in den funktionalen Einheiten die Grundlage der nichtlinearen Instabilität auf dem Beginn der geraden Kanalsektion.

In diesem Zusammenhang könnte es von Interesse sein, die Strömung durch eine Reihe von Hindernissen zu stören und dann zu überprüfen, wie diese Störung sich in einem geraden Kanalstück verhält, bzw. wie weit Störungen in das grade Kanalstück eindringen bevor sie aussterben. Hierzu existiert ein mikrofluidisches Experiment (Pan *u. a.* 2013) mit zylindrischen Strömungshindernissen, allerdings noch keines auf einer makroskopischen Längenskala. Im Rahmen dieses Experimentes könnte auch getestet werden, ob sich die Strömung erfolgreich durch die kollektive Bewegung paramagnetischer Partikel, die durch ein äußeres Magnetfeld angeregt werden, stören lässt.

7 Übergang zur Turbulenz

Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

Das zweite zentrale Thema dieser Arbeit stellt neben der linearen Instabilität das Vorliegen sekundärer Wirbelpaare senkrecht zur Hauptströmung dar, die durch elastische Spannungen angetrieben werden. Im vorliegenden Kapitel stellen wir eine Messmethode zu diesen Strömungen vor und präsentieren nach derzeitigem Stand der Forschung die erste experimentelle Beobachtung dieser Doppelvortices. Wir untersuchen in diesem Zusammenhang auch die Abhängigkeit charakteristischer Parameter wie der Sekundärgeschwindigkeit \dot{S} und der Vortizität Ω von der Messposition und der Weissenbergzahl.

8.1 Modifikation der Versuchsanordnung

8.1.1 Technische Probleme

Als Hauptproblem beim Entwurf einer Versuchsanordnung zur Messung der elastisch getriebenen Vortexströmungen erweist sich, dass grundsätzlich nicht jede Messposition optisch zugänglich ist. Wir entscheiden uns daher für Messungen in der Wendeebene zwischen zwei funktionalen Einheiten. Diese sind einerseits ohne optische Hilfsmittel wie etwa Prismen einsehbar, ferner lässt sich an dieser Position ohne weitere Probleme ein rechtwinkliger Strahlengang realisieren. Mittels Prismen mit verschiedenen Winkeln wäre zusätzlich auch eine Auswahl von Messebenen, die höchstens 80° gegen die Wendeebene gekippt sind, möglich, allerdings müsste hierzu für jede neue Wahl einer Ebene ein anderes Prisma zum Einsatz kommen.

Ein weiteres Problem sind die kleinen Zeitskalen, auf denen sich Bewegungen abspielen. Da die Tiefenschärfe des Objektivs etwas größer ist als die Stärke des Lasersheets in der Beobachtungsebene, kann durch d_{LS}/\bar{U} die Passagezeit

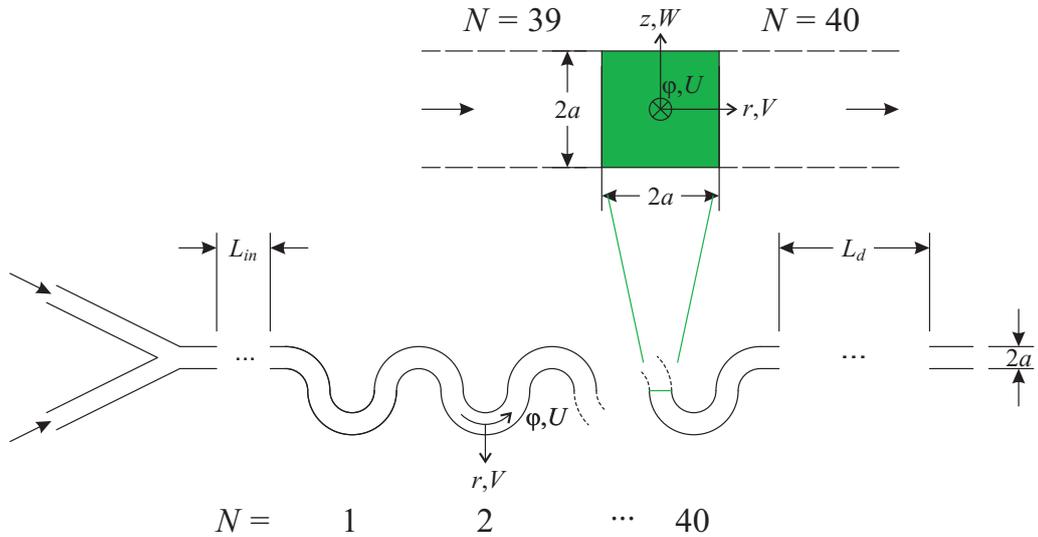


Abbildung 8.1: Versuchsaufbau zur Messung sekundärer Vortexströmungen. Die Messungen werden jeweils in der Wendeebene zwischen benachbarten funktionalen Einheiten durchgeführt, die Nummerierung bezieht dabei auf die Einheit, in die die Strömung eintritt. Gemessen werden die sekundären Geschwindigkeitskomponenten V und W .

t_p eines Partikels durch den ausgeleuchteten Bereich abgeschätzt werden. Mit $d_{LS} \approx 0.06 \text{ mm}$ und $\bar{U} \leq 30.0 \text{ mm/s}$ ergibt sich so eine maximale Passagezeit von 2.0 ms . Diese gibt auch den maximalen zeitlichen Abstand aufeinanderfolgender Bilder eines Paares ab. Dadurch ist auch festgelegt, wie weit sich ein Partikel von einer Aufnahme bis zur nächsten verschiebt. Nimmt man die Geschwindigkeitsdaten von Sznitman als Abschätzung (Sznitman *u. a.* 2012), so kommt man auf eine Verschiebung von etwa 0.012 mm , was bei vierfacher Vergrößerung etwa 4 Kantenlängen eines Pixels des CCD-Chips entspricht.

8.1.2 Versuchsaufbau

Wir führen die Messungen erneut im bereits im letzten Kapitel zum Einsatz gekommenen Kanal mit 40 funktionalen Einheiten durch. Einen Überblick über das diesmal zur Beschreibung von Positionen und Geschwindigkeiten eingesetzte Koordinatensystem gibt Abb. 8.1.

Die Messungen werden, wie bereits eingangs geschildert, in der Wendeebene zwischen benachbarten funktionalen Einheiten durchgeführt, die Nummerierung der Messposition erfolgt dabei nach der Einheit, in die die Strömung eintritt. Gemessen werden jeweils die sekundären Geschwindigkeitskomponenten V und W , aus denen die Vortexgeschwindigkeit

$$\dot{S} = \sqrt{V^2 + W^2} \quad (8.1)$$

8.1 Modifikation der Versuchsanordnung

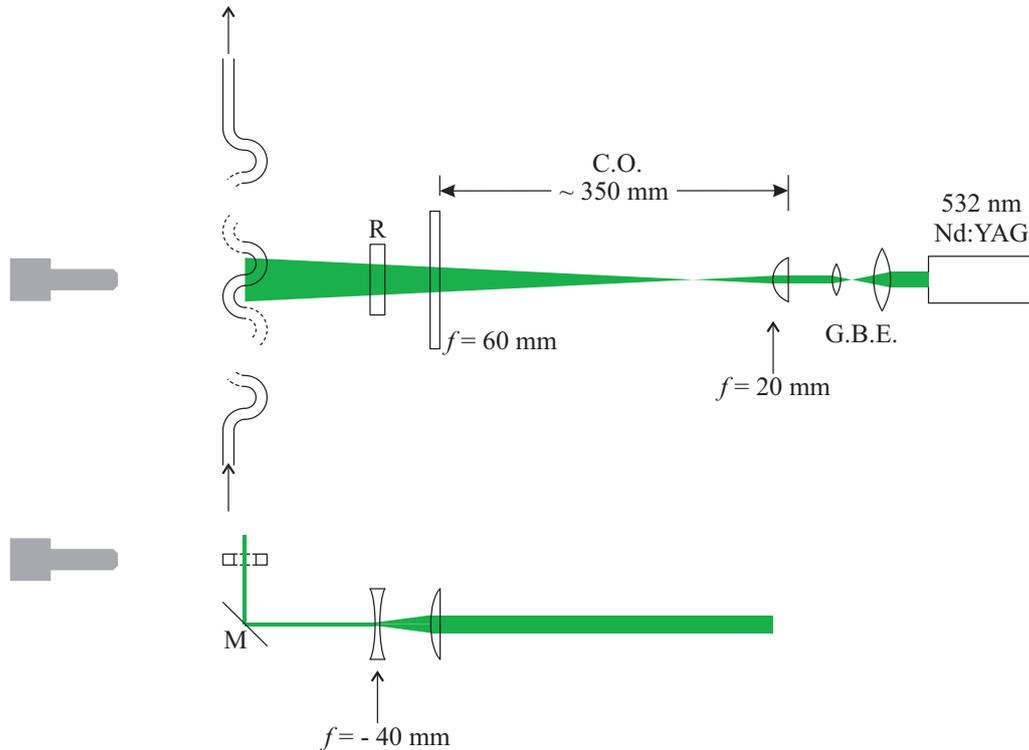


Abbildung 8.2: Optik und Strahlführung zur Messung sekundärer Vortexströmungen. Bis zur Zylinderlinse, die den aufgefächerten Laserstrahl komprimiert, deckt sich der Aufbau mit dem aus Abb. 6.7. Danach verwenden wir eine Streulinse (R) mit Brennweite 40 mm und ein um 45° gekippter Spiegel (M), um die Helligkeitsverteilung homogener zu gestalten und von unten durch den Kanal zu führen.

ausgerechnet wird. Ferner berechnen wir die Vortizität Ω , welche eine abkürzende Schreibweise für die Azimutalkomponente $\Omega_\theta = \partial_r W - \partial_z V$ des Vortizitätsvektors $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_r, \Omega_\theta, \Omega_z)$ darstellt.

Die Beobachtungsebene wird selektiert, indem ein Laserstrahl erneut mittels der bereits in Kap. 6.2.2 beschriebenen Zylinderoptik zum Lasersheet umgeformt wird. Dieses wird mittels eines 45° -Spiegels in der Wendeebene senkrecht durch den Kanal geführt. Die Beobachtung der Strömung erfolgt seitlich durch den Kanal, wobei erneut ein Objektträger aus N-BK7-Glas mit einem Silikonöl passenden Brechungsindex verwendet wird, um eine transparente Oberfläche in Blickrichtung der Kamera zu schaffen. Wir geben in Abb. 8.2 einen Überblick über den optischen Aufbau.

Der Strahl wird durch die bereits beschriebene Zylinderoptik aufgefächert und auf eine Stärke von ca. $0.05 \dots 0.06$ mm komprimiert. Um die Helligkeitsverteilung zu homogenisieren, verwenden wir eine Streulinse mit einer Brennweite von 40 mm. Nach Passage dieser Linse trifft der Strahl unter dem Kanal auf einen um 45° gekippten Spiegel, der ihn nach oben durch den Kanal führt. Der Spiegel ist zusätzlich auf einem Goniometer montiert, um eventuelle Abweichungen des

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

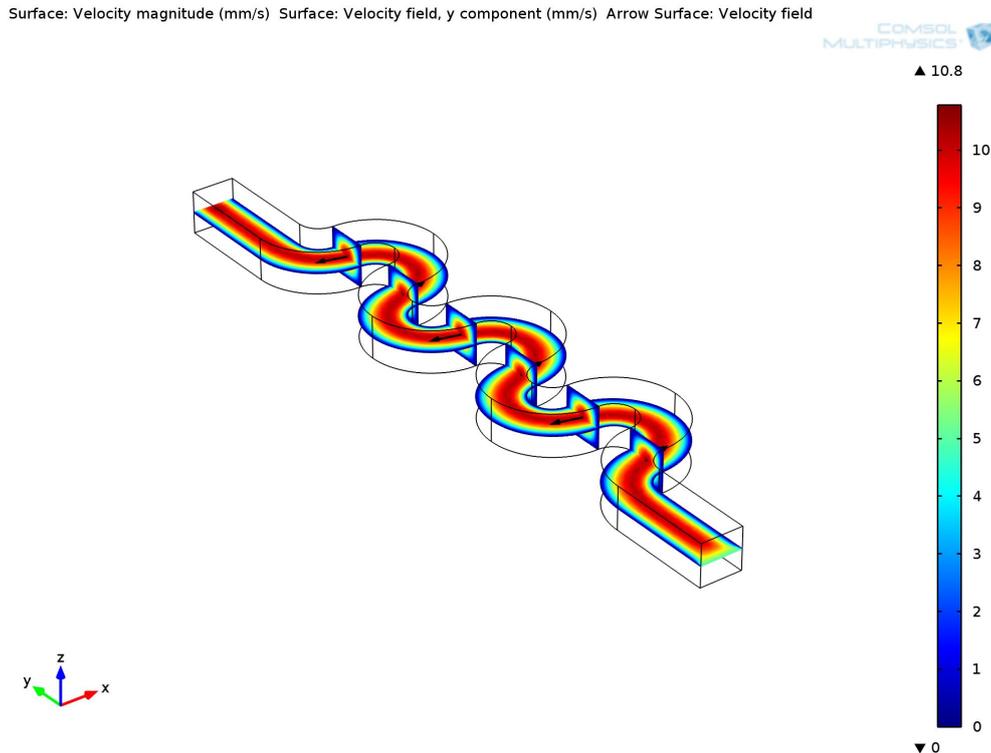


Abbildung 8.3: Simulation einer Newton'schen Strömung durch einen gekrümmten Kanal. Gezeigt werden die Geschwindigkeitsamplitude $|U| = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ in der horizontalen Mittelebene sowie das Geschwindigkeitsfeld V in den Wendeebenen. Zur besseren Verdeutlichung der Strömungsrichtung sind in den Wendeebenen zusätzlich Vektorpfeile eingezeichnet.

Strahls von seiner rechtwinkligen Führung auszugleichen.

8.1.3 Kontrollmessungen im Newton'schen Fluid

Vor der Durchführung von Kontrollmessungen programmieren wir die Strömungssituation in einem verkürzten Kanal mit 2 funktionalen Einheiten (aus Gründen des Rechenaufwands) in der kommerziell verfügbare Simulationssoftware *Comsol Multiphysics 4.4*. Halbweite und Querschnitt des Kanals sind gleich. Wir simulieren in drei Raumrichtungen die Strömung eines Fluids mit den Dichte- und Viskositätsdaten des verwendeten Lösungsmittels ($\rho = 1.208 \text{ g/ml}$, $\eta = 62.6 \text{ mPas}$), ausgegeben wird das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld (U, V, W) in kartesischen Koordinaten (x, y, z) , wie in Abb. 8.3 gezeigt.

In unseren analytischen Betrachtungen zum gekrümmten Kanal (Kap. 4.3.3) sind wir davon ausgegangen, dass die radiale Geschwindigkeit über den gesamten Krümmungsbereich verschwindet, wie es die Massenerhaltung vorgibt. Simulation und Messung ergeben hier für den gezeigten Kanal ein anderes Bild (s. Abb.

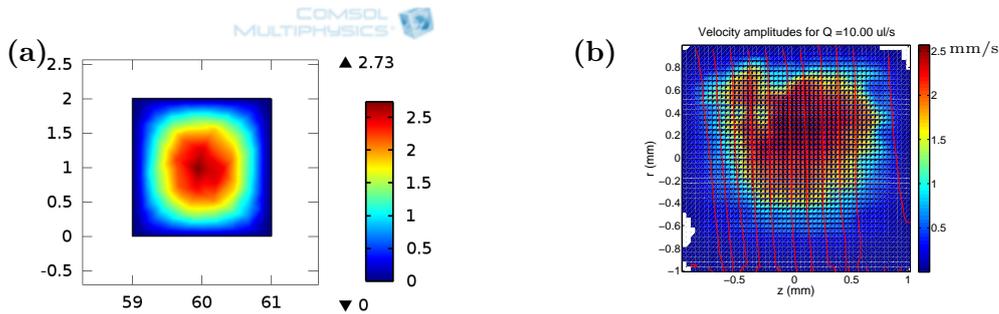


Abbildung 8.4: Sekundärströmungen eines Newton'schen Fluids in der Wendeebene zwischen zwei funktionalen Einheiten. (a) Simuliertes Geschwindigkeitsfeld für die radiale Geschwindigkeitskomponente. (b) Gemessenes Geschwindigkeitsfeld bei $N = 20$, für eine Fließrate von 0.01 ml/s .

8.4, (a) und (b)), so tritt in der Wendeebene eine radiale, nach innen gerichtete Geschwindigkeitskomponente auf, was zunächst einen Widerspruch zur Massenerhaltung darstellt.

Der Fehler liegt in diesem Fall in der Systematik der Betrachtungsweise. Isoliert für eine Krümmung, in die die Strömung durch ein rein azimuthal (in der Grafik mit x bezeichneten) Strömungsrichtung ausgerichtetes Geschwindigkeitsfeld einläuft, darf keine radiale Komponente des Geschwindigkeitsfeldes auftreten. Im vorliegenden Fall muss man allerdings berücksichtigen, dass die Strömung generell entlang der Innenwand eines Halbrings schneller ist. Aus der Sicht eines mitbewegten Referenzsystems wechselt diese Stelle allerdings mit jedem Halbring die Seite. In der Wendeebene muss daher aus Gründen der Massenerhaltung eine sekundäre Strömung in radialer Richtung vorliegen.

Wie aus Abb. 8.5 hervorgeht, stimmen die Größenordnungen der gemessenen und simulierten Geschwindigkeitsamplituden überein. Da die Position, an der das Geschwindigkeitsmaximum vorliegt, gegenüber der simulierten Position verschoben ist, kann durch eine Neuabfrage der Simulationsdaten an einer anderen Stelle eine bessere Übereinstimmung hervorgerufen werden. Theoretisch eignet sich dieses Messverfahren also zur genauen Positionierung des Lasersheets, wir sehen allerdings von einer Anwendung ab, da der Spiegel in unserem Aufbau nicht mit der erforderlichen Präzision umpositioniert werden kann.

Wir betrachten abschließend die Geschwindigkeitsamplituden in den so gemessenen Sekundärströmungen. In Abb. 8.6 sind die Amplituden der radialen Geschwindigkeit V und der axialen Geschwindigkeit W , normiert durch die gemittelte Geschwindigkeit \bar{U} gegen diese aufgetragen. Die Messungen bestätigen die Größenordnungen, die bereits in der Literatur angegeben sind (Guglielmini *u. a.* 2011; Sznitman *u. a.* 2012), mit einer radialen Geschwindigkeitskomponente, die im Bereich von 10 bis 50 % der mittleren Strömungsgeschwindigkeit liegt, und

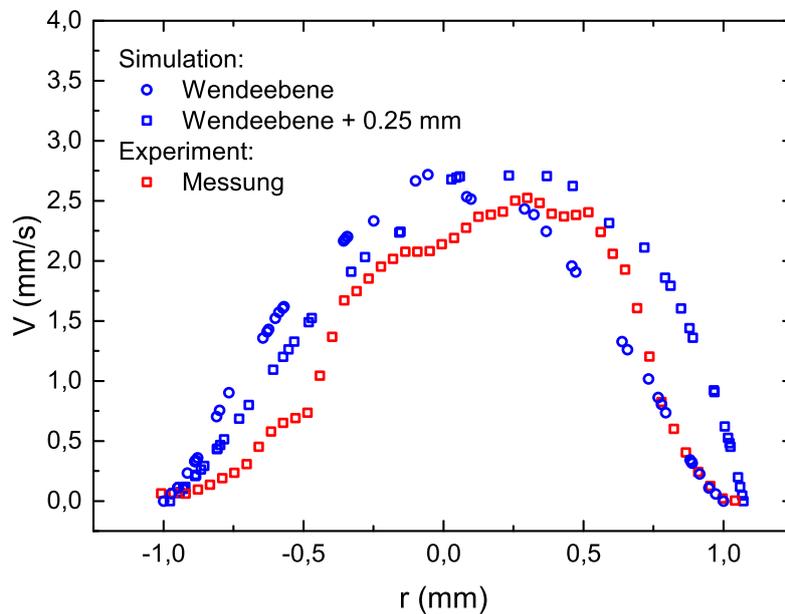


Abbildung 8.5: Vergleich von in der Wendeebene gemessenem Geschwindigkeitsfeld (\square) mit einem an dieser Stelle simulierten (\circ) und einem an einer leicht verschobenen Stelle simulierten (\square).

deiner axialen Geschwindigkeitskomponente, die nur wenige Prozent ausmacht.

8.2 Struktur- und Parameterstudie der Sekundärströmungen im viskoelastischen Fluid

8.2.1 Räumliche Strukturanalyse

Wir legen im Folgenden Ergebnisse unserer Untersuchung zum Aufbau und zu Parameterabhängigkeiten der Sekundärströmungen vor. Hierzu haben wir die Strömungsverhältnisse in der Eingangswendeebene der funktionalen Einheiten $N = 10, 20, 30$ und 40 untersucht. In einer zweiten Versuchsreihe wurden die Strömungen bei $N = 1, 2, 3$ und 4 untersucht. Vorausgreifend sei hier darauf hingewiesen, dass die zweite Versuchsreihe mit dem Ziel durchgeführt wurde, die Entwicklung der Vortizität und der Geschwindigkeitsamplitude \dot{S} zu beobachten. Nähere Ausführungen hierzu sind in Kap. 8.2.3 zu finden.

Zusammenfassend kann hierzu festgestellt werden, dass wir, abhängig von der eingestellten Weissenbergzahl zwei Arten von Vortexströmungen beobachten. Die Struktur der ersten Art wird ausführlich in Abb. 8.7 gezeigt. Diese Art Struk-

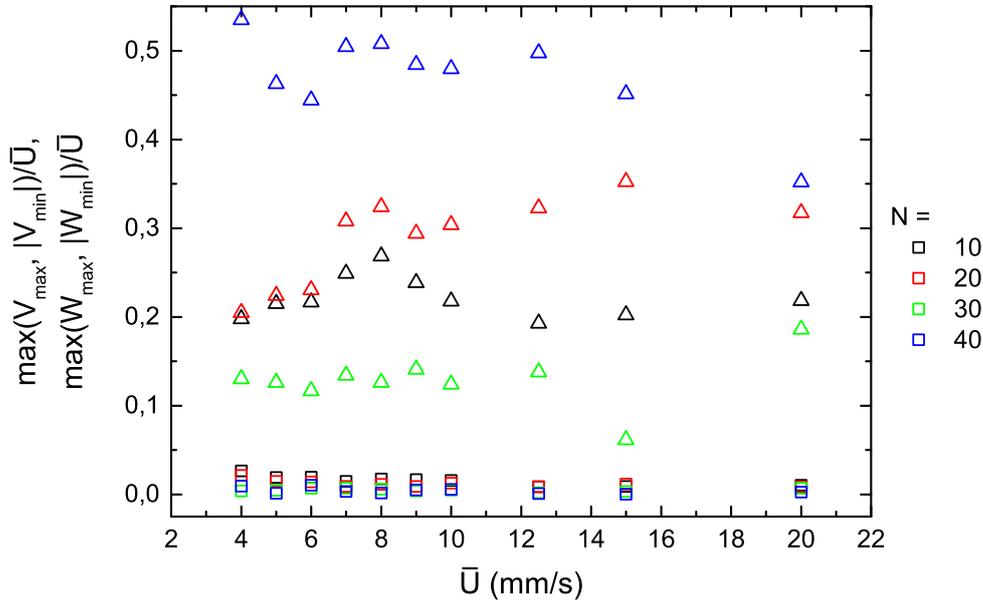


Abbildung 8.6: Amplituden der radialen (Δ) und axialen (\square) Geschwindigkeitskomponenten, als Vergleich mit den Ergebnissen aus (Sznitman *u. a.* 2012). Die Größenordnungen von einigen Prozent für die axiale und einigen zehn Prozent für die radiale Komponente decken sich mit den erwarteten Werten.

tur findet sich bis zu einer Weissenbergzahl, die etwa dem Bereich der in Kap. 7.2 genannten kritischen Weissenbergzahl Wi_c entspricht. Sie ist gekennzeichnet durch eine zeitliche Stationarität, d.h., Vortexzentren und Strömungsverläufe zeigen keine oder nur geringe zeitliche Variationen.

Es zeigt sich, dass die Vortices in Paaren auftreten, ähnlich den von Groisman und Steinberg beschriebenen ‘di-whirls’ (Groisman & Steinberg 1998). Die Strukturen sind dabei in axialer Richtung übereinander “gestapelt”, in der Mitte verläuft eine starke, nach außen gerichtete radiale Strömung. Diese Struktur war gemäß numerischen Simulationen (Fan *u. a.* 2001; Poole *u. a.* 2013; Xue *u. a.* 1995) zu erwarten. Betrachtet man, wie ebenfalls in Abb. 8.7 gezeigt, die Amplituden der radialen (oben) und axialen (unten links) Geschwindigkeitsfelder separat, so zeigt sich, dass im Fall vorhandener Vortexströmungen $|\dot{S}| \approx |V| \approx |W|$ ist, im Gegensatz zu den sekundären Strömungen in Newton’schen Fluiden, wo die axiale Geschwindigkeit um eine Größenordnung unter der radialen Geschwindigkeit lag.

Zur genaueren Untersuchung der axialen und radialen Geschwindigkeiten ist in Abb. 8.8. Hier zeigt sich in erster Linie, dass die Orientierung der radialen Strömung im laminaren Fließbereich gleich bleibt und erst bei fluktuierender

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

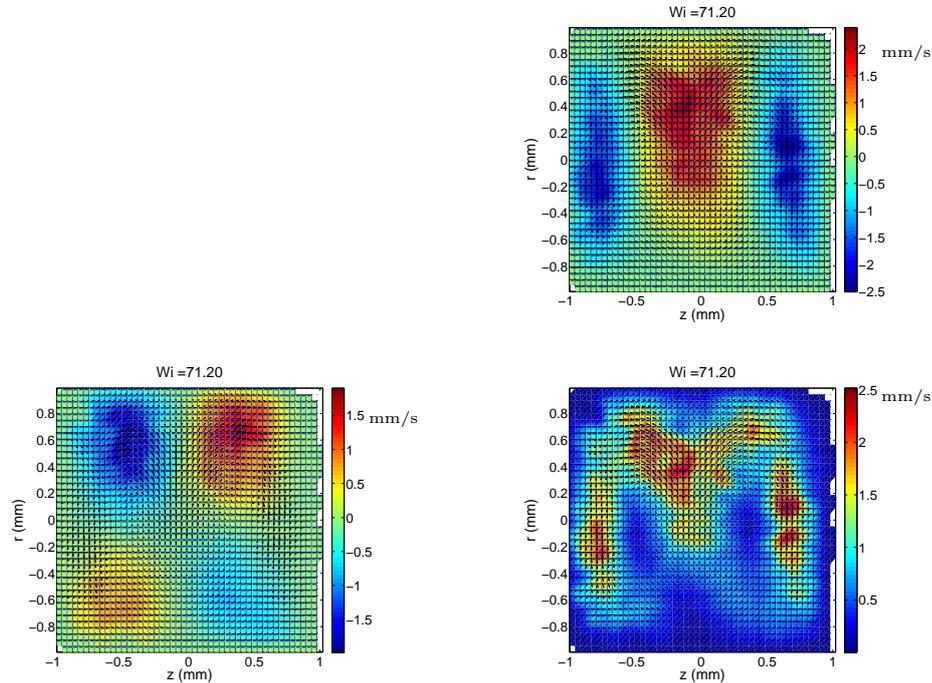


Abbildung 8.7: Geschwindigkeitsfelder stationärer Wirbelstrukturen ($N = 30$, $Wi = 71.2 < Wi_c$). Unten rechts gezeigt ist das Feld der Vortexgeschwindigkeit \dot{S} , oben rechts das der radialen Geschwindigkeitskomponente V , unten links das der axialen Geschwindigkeitskomponente W . Die Rotationsachsen der Vortices sind im Rahmen der Auflösung fast perfekt symmetrisch in der Mittelebene des Kanals angeordnet.

Hauptströmung in die entgegengesetzte Richtung umschwenken kann. Tendenziell beobachtet man bei laminarer Strömung allerdings in allen Fällen eine positiv, d.h. nach außen orientierte radiale Geschwindigkeitskomponente, und auch im Fall nichtstationärer Strömung beobachtet man in erster Linie diesen Fall, eine Umkehrung tritt nur in der Minderzahl der beobachteten Kombinationen von N und Wi auf.

In Abb. 8.9 zeigen wir nochmals die Felder der Vortexgeschwindigkeiten prototypisch anhand der bei $N = 30$ durchgeführten Messung. Hier zeigt sich, wie bereits erwähnt, die Stationarität der Di-Whirl-Struktur bis zu einer Weissenbergzahl $Wi \approx 89$. Bei $Wi \approx 111$ ist die Struktur schon nur noch auf einer Hälfte stationär, für noch höhere Weissenbergzahlen ist effektiv nur noch eine radiale Geschwindigkeitskomponente zu beobachten. Dies ist begründet durch eine im Bereich turbulenter Grundströmung vorhandene Mobilität der Di-Whirl-Struktur, bei der beide Wirbel einander verdrängen und abwechselnd in den “Lebensraum” des jeweils anderen Wirbels eindringen. Ausführlich ist dies nochmals vergleichend für $Wi \approx 89$ und $Wi \approx 132$ in Abb. 8.10 links respektive rechts gezeigt. Einzelne Aufnahmen zeigen dabei jeweils Mittelungen über einen Zeitraum von

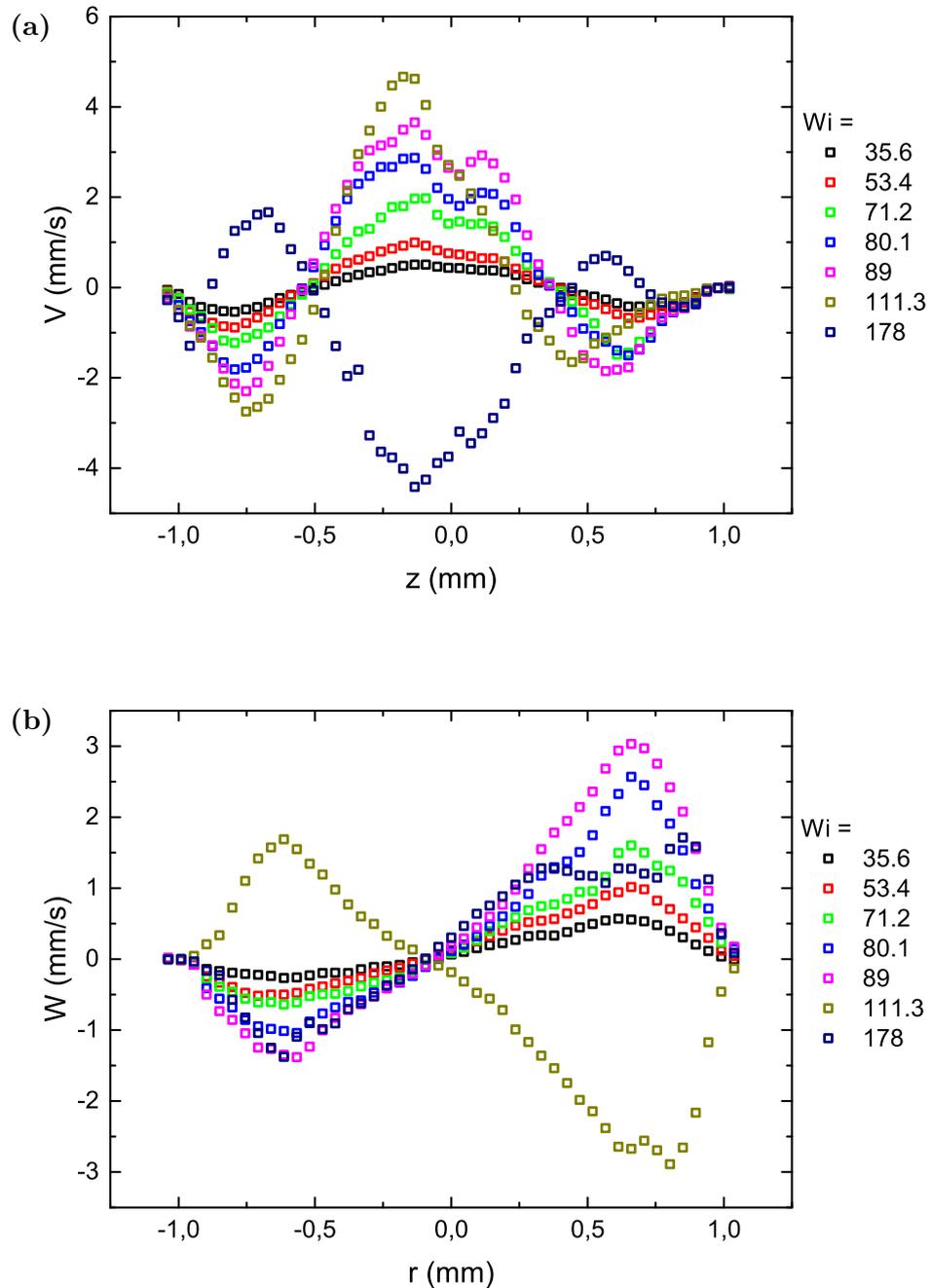


Abbildung 8.8: Axialer (a) und radialer (b) Schnitt durch das Geschwindigkeitsfeld einer Vortexstruktur, in Abb. 8.7 durch magentafarbene Linien angedeutet. Die Ausrichtung der radialen Geschwindigkeitskomponente und die Orientierung der axialen Komponente bleiben bis in den Bereich nichtstationärer Hauptströmung erhalten.

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

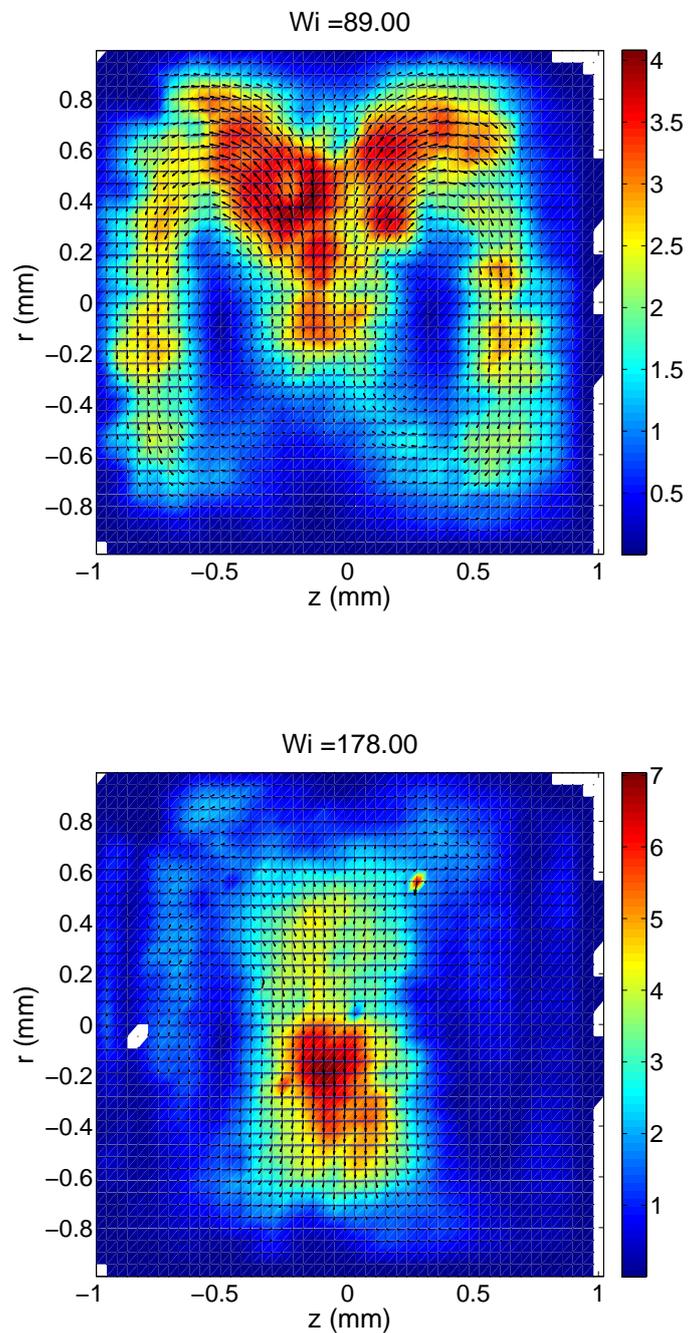


Abbildung 8.9: Felder der Vortexgeschwindigkeit \dot{S} für $N = 30$ im Bereich laminarer ($Wi = 89.0$, oben) und turbulenter Grundströmung ($Wi = 178.0$, unten), in mm/s. Man sieht die im Bereich laminarer Grundströmung stationäre Struktur der Vortexströmung, die für hohe Weissenbergzahlen instationär wird.

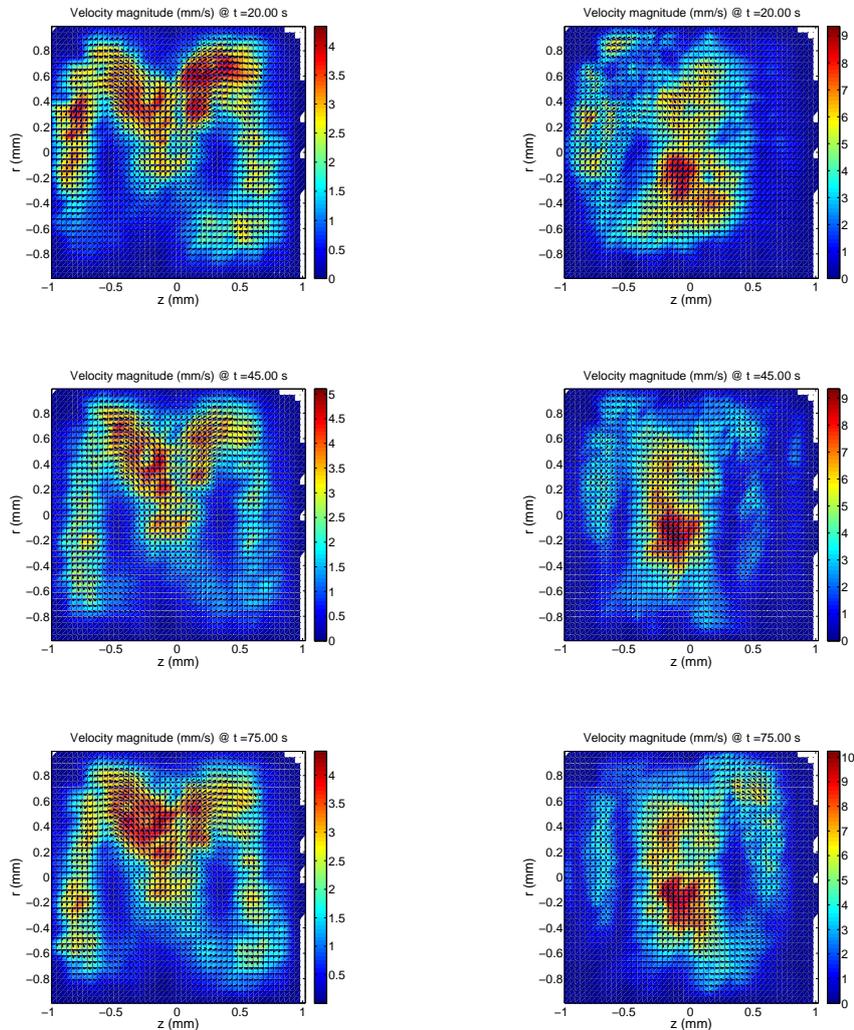


Abbildung 8.10: Instantane Vortex-Geschwindigkeitsfelder für $Wi = 89.0$ (links) und $Wi = 178.0$ (rechts). nach 20, 45 und 75 s, jeweils nach Mittelung über 5 s. Für Weissenbergzahlen im Bereich laminarer Grundströmung weisen auch die instantanen Geschwindigkeitsfelder hohe Ähnlichkeit auf. Die im Bereich turbulenter Grundströmung gemessenen instantanen Geschwindigkeitsfelder weisen dagegen im Detail unterschiedliche Geschwindigkeitsverteilungen auf, die mal den oberen, mal den unteren Wirbel des Paares deutlicher hervortreten lassen.

5 s.

Diese Oszillationen und Fluktuationen sind zu erwarten, betrachtet man die Energietransportmechanismen, die von Joo *et al.* (Joo & Shaqfeh 1992, 1994) beschrieben werden und laut denen ein Energietransfer zwischen Haupt- und Sekundärströmung vorliegt. Treten nun Oszillationen der Hauptströmung auf, so müssen diese auch die Geschwindigkeitsfelder der Sekundärströmung beeinflussen. Ob der dann auftretende Symmetriebruch der Sekundärströmungen mit den Symmetriebrüchen der Hauptströmung begründbar ist und ob zwischen den beiden Wirbeln einer Vortexstruktur eine Konkurrenzsituation um die aus der Hauptströmung transferierte Energie vorliegt, könnte Gegenstand weiterführender Untersuchungen sein.

8.2.2 Zeitliches Verhalten der Sekundärströmungen

Wie bereits in Kap. 8.2.1 beschrieben wurde, beobachtet man bei laminarer Grundströmung symmetrische, zeitlich stationäre Vortexstrukturen, erst bei oszillierender oder fluktuierender Hauptströmung wird diese Symmetrie gebrochen und die räumliche Geschwindigkeitsverteilung wird instationär.

Ergänzend hierzu haben wir die maximale Vortizität Ω_{\max} und den Betrag der minimalen Vortizität, $|\Omega_{\min}|$ auf ihr zeitliches Verhalten hin untersucht. Diese Wahl spiegelt wieder, dass die beiden Wirbel einer Di-Whirl-Struktur gegenläufig sind und ihre Extrema somit vergleichbare Beträge bei entgegengesetzten Vorzeichen aufweisen sollten. Zur Extraktion der Werte wird zunächst wieder in der Langzeitmittelung die Position des Vortexmaximums (-minimums) bestimmt, danach wird aus jedem Vortizitätsfeld der Wert an der gewählten Position extrahiert. Die Ergebnisse haben wir exemplarisch für $N = 10$ (a) und $N = 30$ (b) in Abb. 8.11 dargestellt.

Steinberg und Groisman (Groisman & Steinberg 2004) haben bereits das Auftreten von sekundären Strömungen diskutiert und durch punktuelle LDA-Messungen eine Zeitabhängigkeit einer der Geschwindigkeitskomponenten festgestellt. Diese führen sie auf eine Umkehrung des Vortizitätsvektors zurück, d.h., die Wirbel ändern während der Beobachtungszeit mehrfach ihre Richtung. Um dieses Phänomen genauer zu untersuchen, betrachten wir die instantan aufgenommenen Vortizitätsfelder näher.

Hierzu muss zunächst eine Nachbearbeitung durchgeführt werden. Da die instantanen PIV-Bilder ein gewisses Rauschen aufweisen und die Vortizitätsfelder Gradientenfelder darstellen, sind diese Felder selbst zunächst wenig aussagekräftig (vgl. Abb. 8.12 (a)). Durch Faltung mit einem Glättungsoperator, dessen Gauß'scher Integralkern auf einer 7×7 -Matrix ausgewertet und danach zweifach mit den ursprünglichen Feldern gefaltet wird, ergibt sich dennoch eine plausible Verteilung der instantanen Vortizität (vgl. Abb. 8.12 (b)). Aus diesen Feldern extrahieren wir einen Schnitt in axialer Richtung sowie die axiale Position des Vortizitätsminimums und Maximums. Weiterhin betrachten wir die radiale Ge-

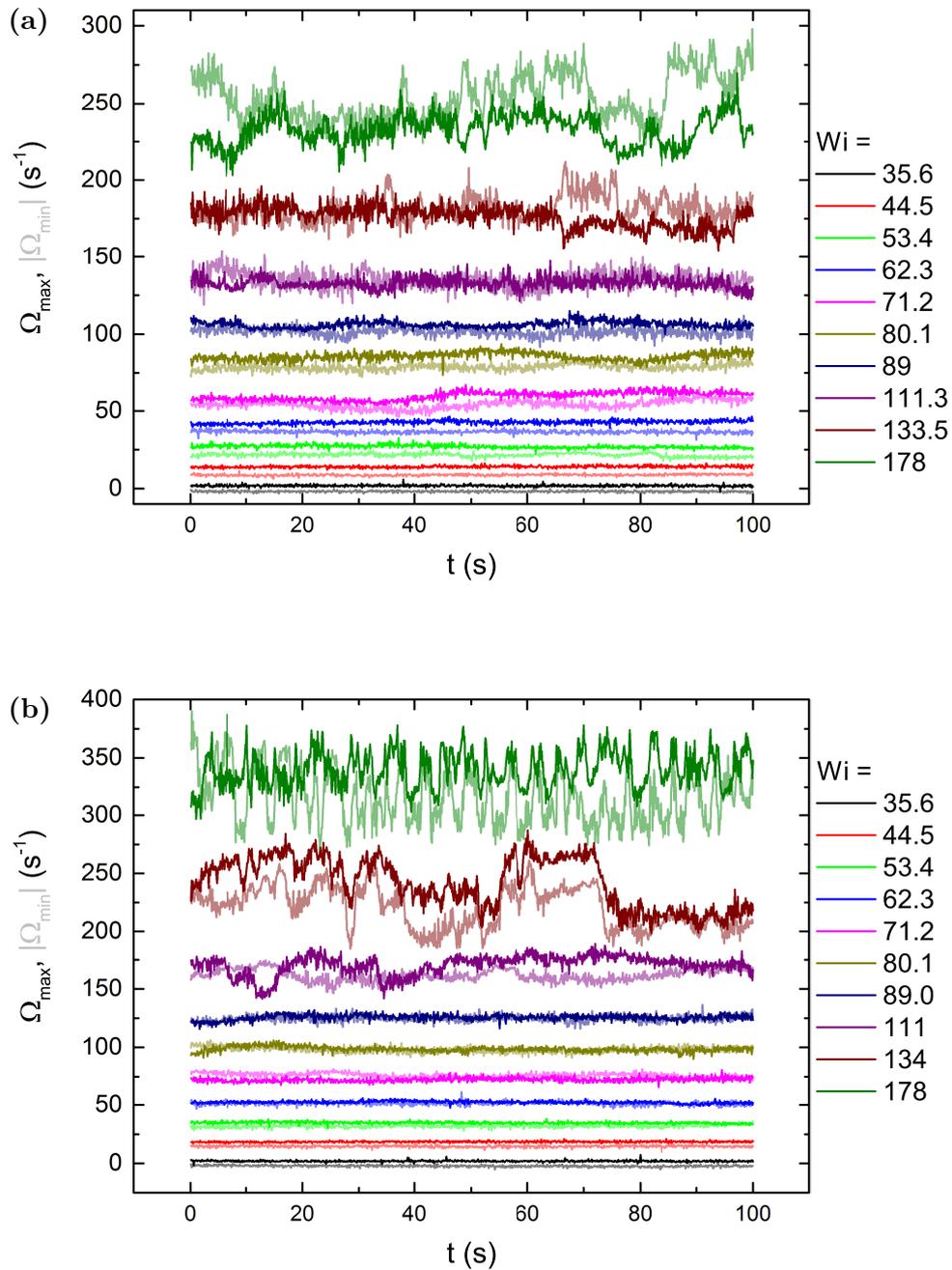


Abbildung 8.11: Zeitabhängigkeit der maximalen und minimalen (gebleichte Kurven) Vortizität bei $N = 10$ (a) und $N = 30$ (b). Die Beträge sind insbesondere im Bereich laminarer Hauptströmung zu jeder Zeit nahezu gleich, bei der einsetzenden Oszillation der Vortizität im Bereich hoher Weissenbergzahlen lässt sich zumindest im langfristigen Mittel noch eine Betragsgleichheit feststellen.

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

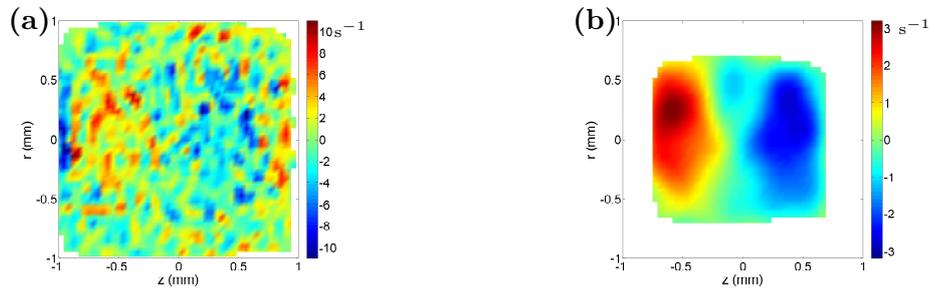


Abbildung 8.12: (a) Aus den unbearbeiteten Geschwindigkeitsfeldern ($N = 30$, $Wi = 35.8$) berechnete Vortizitätsdaten. Nach Anwendung des Glättungsoperators sind die Vortexzentren deutlich erkennbar (b). Der Glättungsoperator besteht dabei aus einer Gauß-Funktion als Integralkern, die auf einer 7×7 -Matrix ausgewertet wird.

schwindigkeitskomponente $V(t)$.

Als Ergebnis dieses Vorgehens lässt sich die axiale Verteilung der Vortizität als Wasserfall-Plot zeitabhängig darstellen. Wir zeigen in den Abbn. 8.13 – 8.16 die Ergebnisse dieser Extraktionen für niedrige, mittlere und hohe Weissenbergzahlen ($Wi = 35.6, 111.25, 133.5$ und 178.0).

Für den Fall niedriger Weissenbergzahlen, bei laminarer Hauptströmung, stellt sich die radiale Strömungskomponente als Struktur aus drei Zonen da, mit einem nach außen gerichteten Fluss in der Mitte und Rezirkulationsströmungen seitlich davon. Dies deckt sich mit der Studie in Abb. 8.8. Eine genauere Studie des Feldes $V(r, z)$ wie in Abb. 8.17 zeigt, dass die Amplituden der Strömung nahezu symmetrisch verteilt sind. Die Vortizität in diesem Fall zeigt eine stationäre Verteilung mit einem links- und einem rechtsdrehenden Wirbel, beide nehmen über den gesamten Beobachtungszeitraum nahezu den gleichen Raum ein.

Beim Übergang zu hohen Weissenbergzahlen tritt ein Symmetriebruch auf, da die beobachteten Vortexstrukturen, wie es schon die Beobachtungen aus Abb. 8.10, räumlich keine stationäre Verteilung mehr aufweisen. Wir untersuchen hierzu die beiden Parameter der Vortizität und der radialen Geschwindigkeitskomponente genauer, da beide Informationen über verschiedene Ausprägungen der Nichtstationarität geben.

Die Vortizität selbst gibt in ihrer räumlichen Verteilung Auskunft über die Ausdehnung der Wirbel zu einem Zeitpunkt. Aus der Verteilung der radialen Geschwindigkeitskomponente $V(r = 0, z, t)$ lässt sich die Position der Vortexzentren und damit die Bewegung der Wirbel selbst beobachten. Wie bereits beschrieben, verläuft diese Verteilung im Fall niedriger Weissenbergzahlen weitestgehend stationär.

Wir beobachten für mittlere Weissenbergzahlen Oszillationen der räumlichen

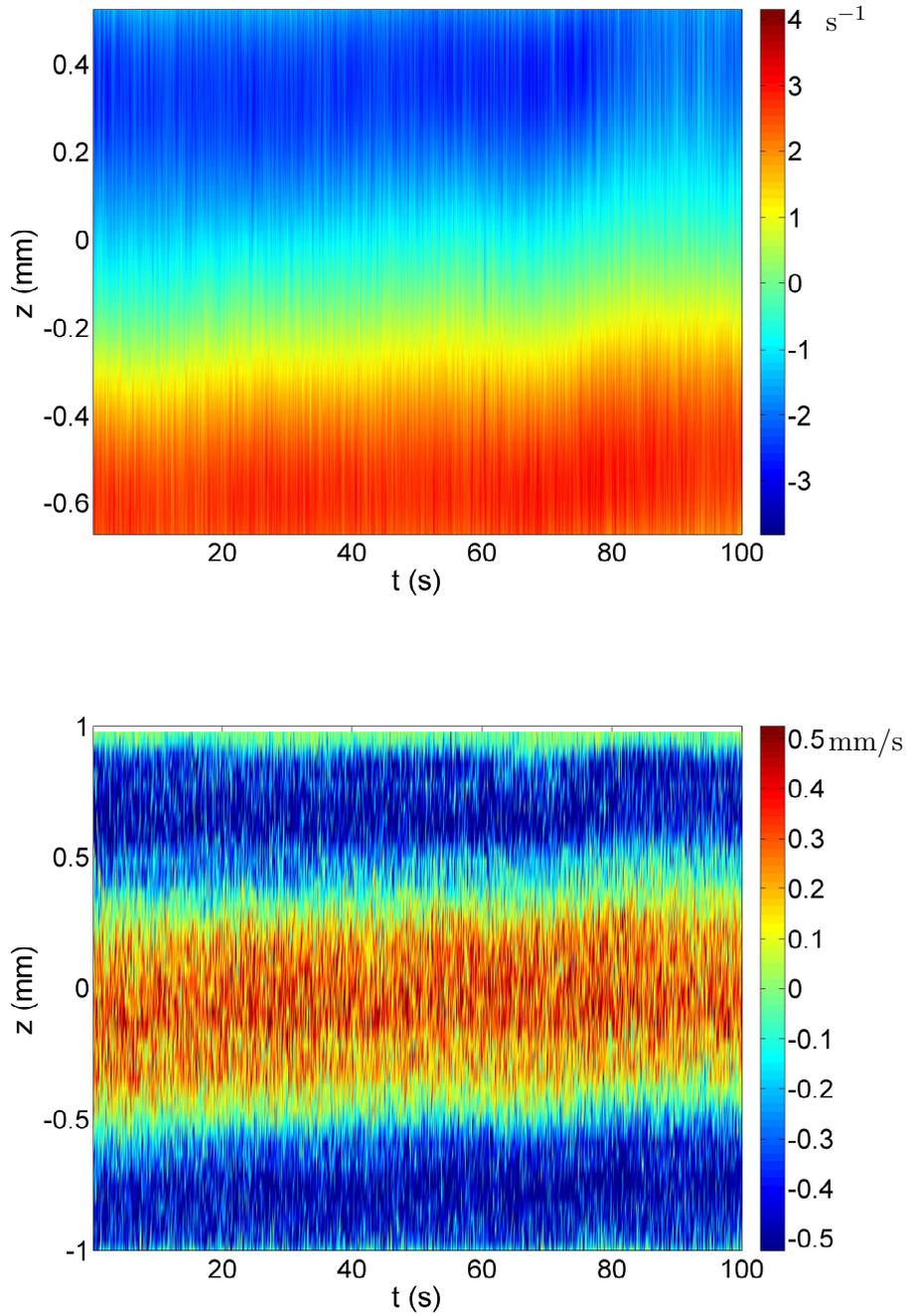


Abbildung 8.13: Oben: Wasserfallplot der Vortizität. Unten: Wasserfallplot der radialen Geschwindigkeitskomponente $V(r = 0, z, t)$ für $N = 30$ und $Wi = 35.6$.

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

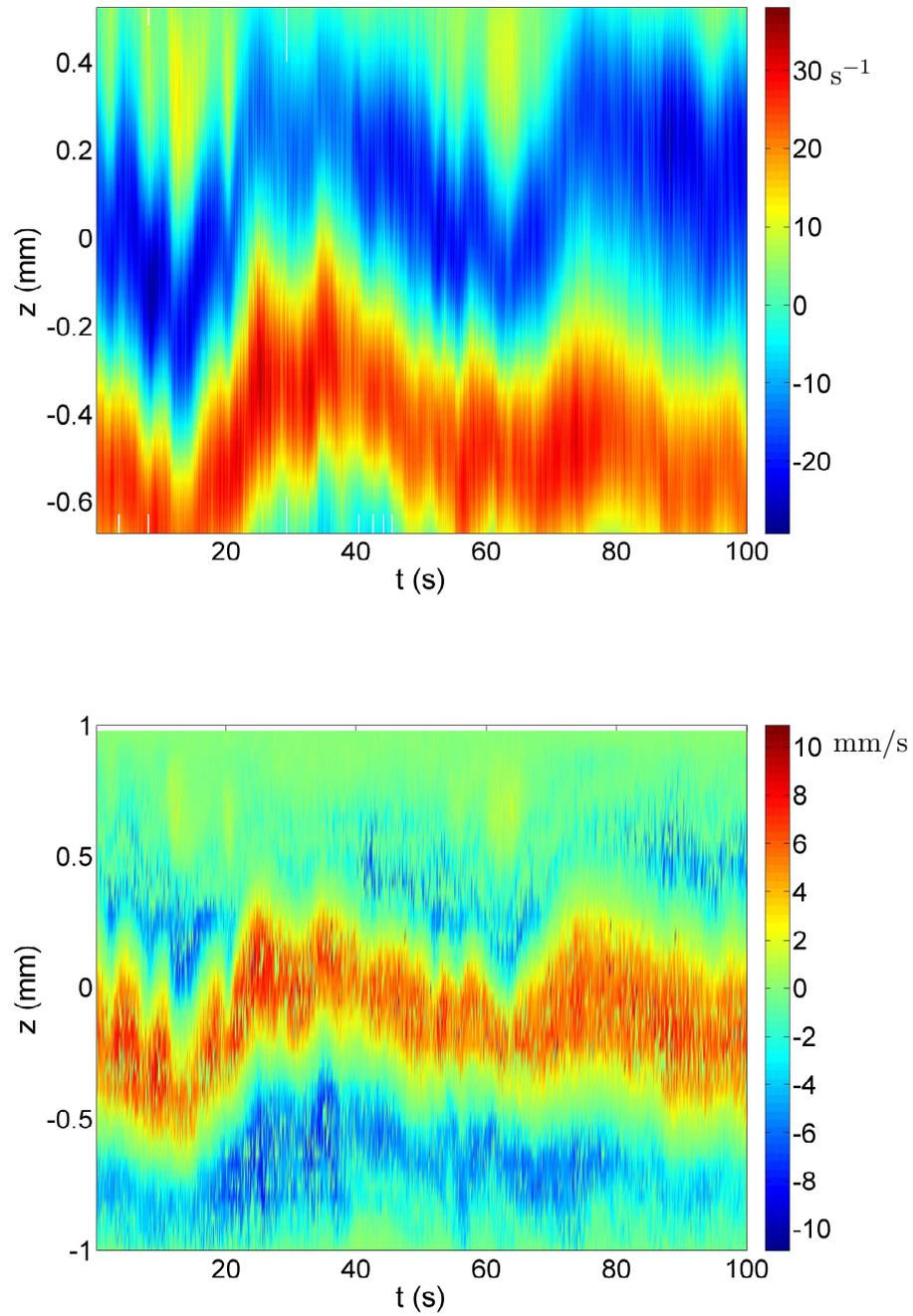


Abbildung 8.14: Oben: Wasserfallplot der Vortizität. Unten: Wasserfallplot der radialen Geschwindigkeitskomponente $V(r=0, z, t)$ für $N = 30$ und $Wi = 111.3$.

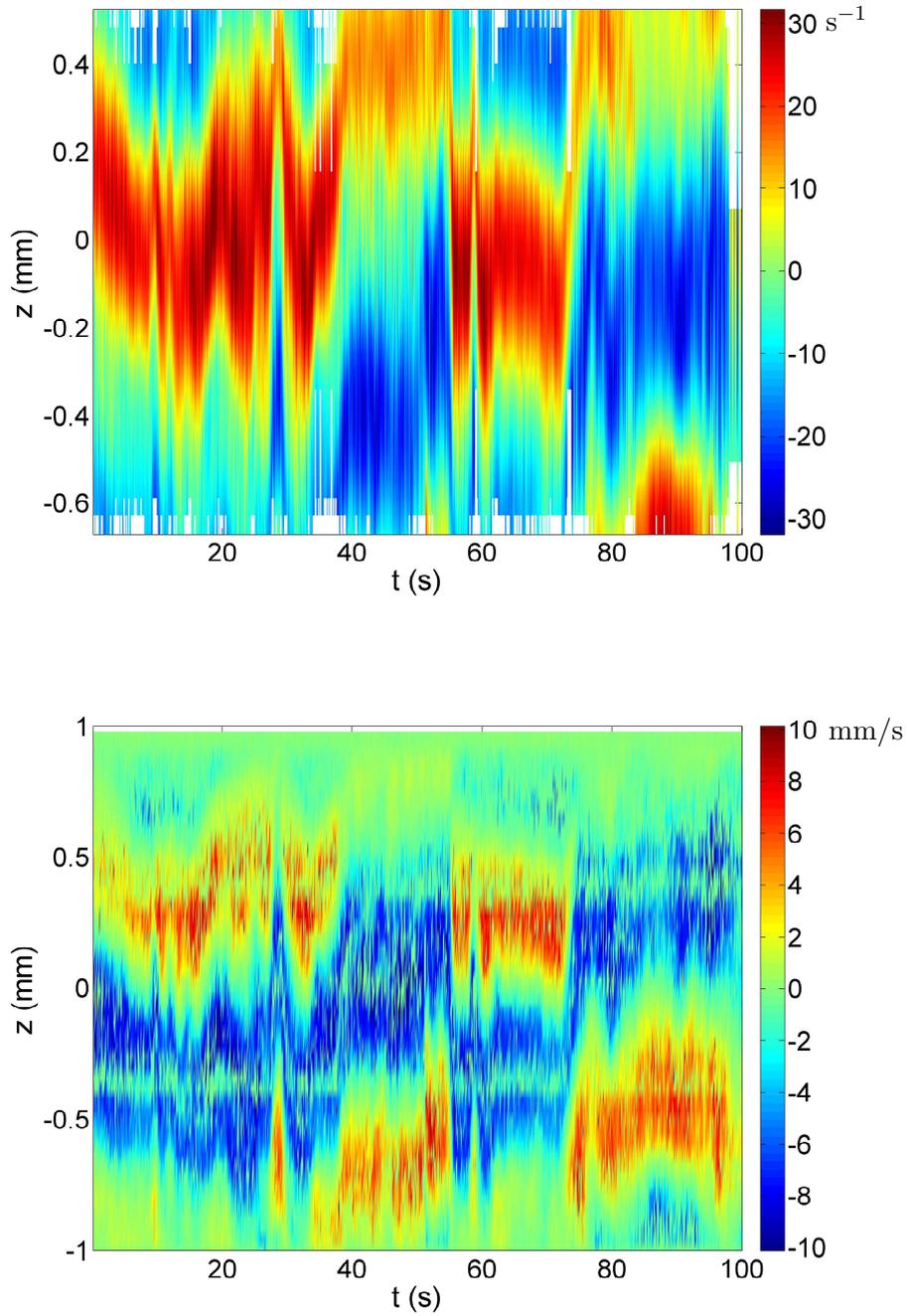


Abbildung 8.15: Oben: Wasserfallplot der Vortizität. Unten: Wasserfallplot der radialen Geschwindigkeitskomponente $V(r = 0, z, t)$ für $N = 30$ und $Wi = 133.5$.

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

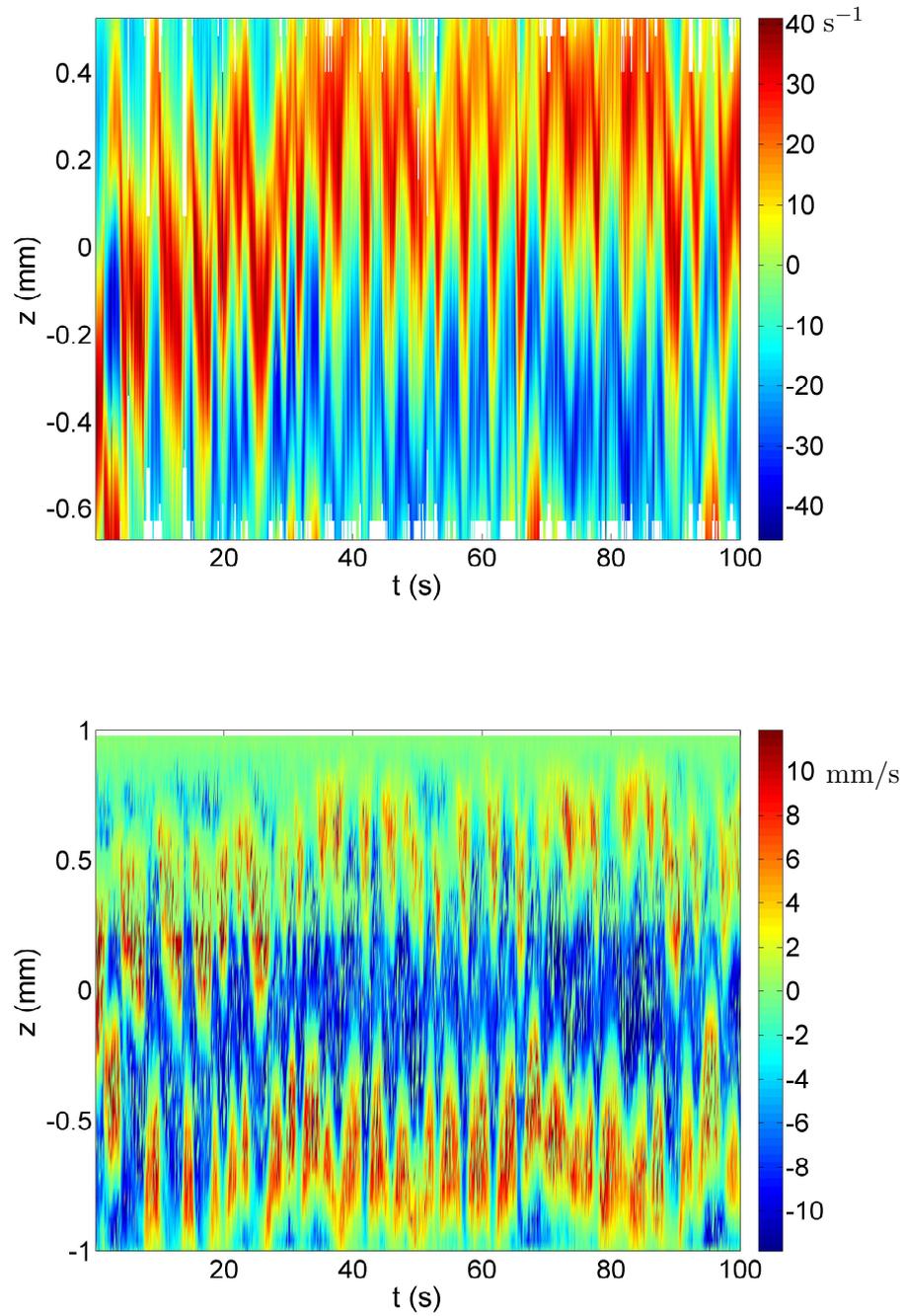


Abbildung 8.16: Oben: Wasserfallplot der Vortizität. Unten: Wasserfallplot der radialen Geschwindigkeitskomponente $V(r=0, z, t)$ für $N = 30$ und $Wi = 178.0$.

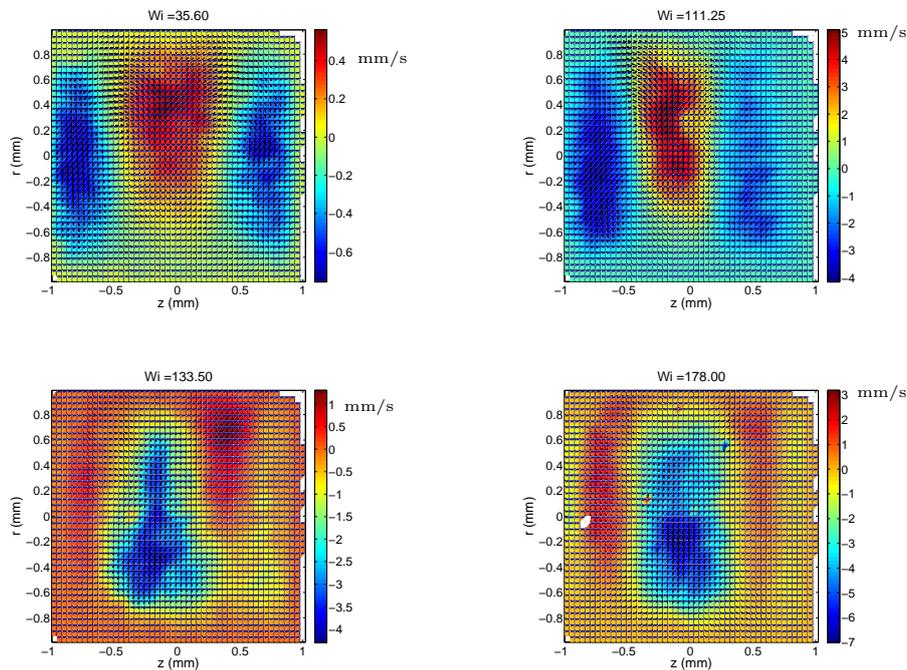


Abbildung 8.17: Langzeitmittelung (100 s) der Felder der radialen Geschwindigkeitskomponente $V(r, z)$, farbkodiert, und Geschwindigkeitsfeld (V, W) (Vektorpfeile). Für niedrige bis mittlere Weissenbergzahlen (oben) zeigt sich eine Struktur aus drei Zonen (Radial auswärtsgerichtet in der Mitte, Rezirkulationen am Rand), bei hohen Weissenbergzahlen ist nur noch der auswärtsgerichtete, radiale Anteil zu beobachten.

Verteilungen von $\Omega(z, t)$ und $V(z, t)$. Dabei muss aber angemerkt werden, dass diese für mittlere Weissenbergzahlen nur schwach ausgeprägt sind, wir stellen daher in Abb. 8.14 den Fall der höchsten Weissenbergzahl mit diesem Verhalten, $Wi = 111.3$, dar. Außerdem lässt sich aus der Verteilung von $\Omega(z, t)$ ableiten, dass die Wirbelpaare einer Struktur eher durch Bewegung denn durch Wachstum auffallen. Die Bewegung ist auch aus der Verteilung von $V(z, t)$ herleitbar. Für noch höhere Weissenbergzahlen (Abbn. 8.15 und 8.16) zeigen sich noch schnellere oszillationen der Vortizität und der radialen Geschwindigkeit.

In Abb. 8.17 zeigen wir die mittlere radiale Geschwindigkeitskomponente (gemittelt über die gesamte Messzeit, das Geschwindigkeitsfeld $\dot{S}(r, z)$ ist zusätzlich als Vektorfeld eingetragen) und deren Entwicklung über den eingestellten Bereich von Weissenbergzahlen. Hier zeigt sich zunächst, dass für niedrige bis mittlere Weissenbergzahlen die beobachtete Struktur aus drei Zonen des radialen Flusses Bestand hat, bei sehr hohen Weissenbergzahlen dagegen nur noch sehr schwach ausgeprägte Rezirkulationsströmungen beobachtbar sind.

Im Zusammenhang mit unseren Beobachtungen stellt sich im Bezug auf die

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

bereits zitierten Beobachtungen von Steinberg der Sachverhalt eher so dar, dass bei einer ortsfesten LDA-Messung (Groisman & Steinberg 2004) im Wechsel links- und rechtsdrehende Vortices beobachtet wurden, der Wechsel der Vortizität allerdings aus der genannten Verdrängungsbewegung herrührt und nicht aus einer Umkehr der Drehrichtung in ihrer Position stationärer Vortices.

Insbesondere in Abb. 8.15 zeigt sich, dass die Wirbel sich gegenseitig komplett aus ihren “angestammten” Domänen verdrängen können. Betrachtet man Beispielsweise die Trajektorie des im positiven Sinne rotierenden Wirbels für $Wi = 178$ (rot-gelbe Färbung), so erkennt man bei einer Zeit von ca. 50 s eine ruckartige Bewegung in die obere Kanalhälfte, ein ähnlicher Vorgang ist für den im negativen Sinn rotierenden Wirbel bei $t \approx 70$ s zu sehen. Aus unserer Sicht ist bei einer lediglich punktuell erfolgenden Geschwindigkeitsmessung dieses Verhalten auch als Umkehrung des Vortizitätsvektors interpretierbar.

In Abb. 8.18 zeigen wir detailliert die axiale und radiale Position des Vortizitätsmaximums während dieses Domänentauschs auf einem Ausschnitt der Zeitachse. Gleichzeitig mit der axialen Bewegung vollführt der positiv orientierte Wirbel eine Bewegung in radialer Richtung, die sich allerdings wenige Sekunden später bereits wieder umkehrt. Die axiale Position bleibt während der radialen Bewegung konstant. Es bleibt anzumerken, dass trotz Glättung das Positionssignal insbesondere in radialer Richtung Schwankungen aufweist. Dennoch kann das gezeigte Bewegungsmuster an weiteren Messpositionen reproduziert werden.

8.2.3 Parameterstudie

Abschließend untersuchen wir das Verhalten von Vortizität und Vortexgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Kontrollparameters Wi und der Messposition N . Bisherige Veröffentlichung sagen aus numerischen Simulationen eine bis in den Bereich oszillatorischer Strömung lineare Beziehung zwischen Wi und \dot{S} voraus (Poole *u. a.* 2013), über die Abhängigkeit von der Messposition N gibt es bislang keine Vorbetrachtungen.

Ein Problem bei diesen Studien ist eine repräsentative Extraktion der Geschwindigkeitsdaten, die auch im Rahmen der Möglichkeiten des Versuchsaufbaus liegt. Orte zur Messung der Vortizität können so noch relativ leicht gefunden werden, da es spätestens nach der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Glättungsmethode möglich ist, die Vortexzentren eindeutig zu bestimmen.

Problematischer ist die Betrachtung des Geschwindigkeitsfeldes. Die größten Geschwindigkeiten treten ringförmig um das Vortexzentrum auf, wo sich Vortexeffekte und die Randbedingungen der starren Wände die Waage halten. Wir stellen allerdings keine gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung entlang dieses Rings fest, sondern finden auch Stellen höherer oder niedrigerer Geschwindigkeit, die wahrscheinlich technisch durch die Ausleuchtung während der PIV-Messung bedingt sind.

Bei der Wahl einer Messposition fokussieren wir uns auf die radiale Geschwin-

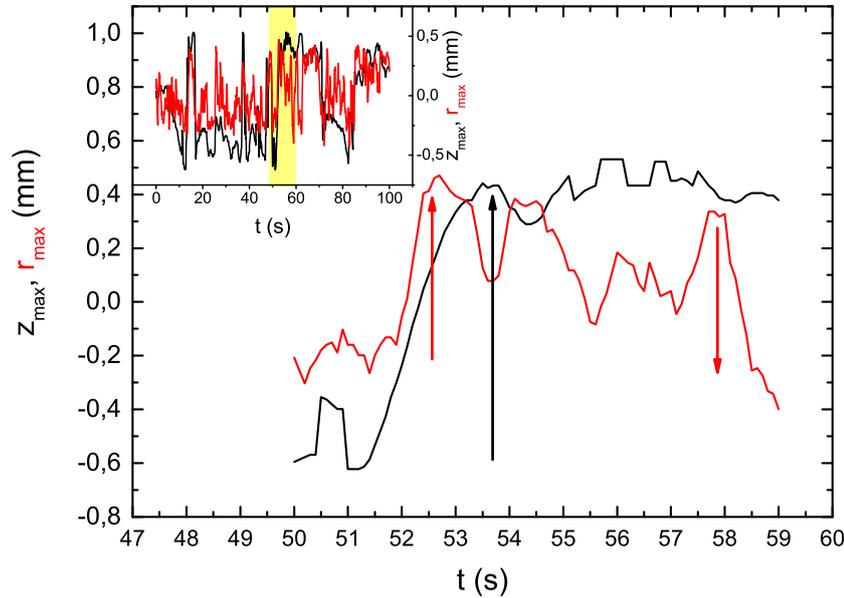


Abbildung 8.18: “Ausweichbewegung” eines Wirbels beim Domänentausch. Inset: Komplette Zeitserie der radialen (rot) und axialen (schwarz) Position des Vortizitätsmaximums. Der gelb hinterlegte Bereich wird vergrößert gezeigt. Es zeigt sich, dass das Vortexzentrum des im positiven Sinn rotierenden Wirbels mit der axialen Bewegung eine radiale Bewegung ausführt, die allerdings nach einigen Sekunden wieder umgekehrt wird, während die axiale Position gleich bleibt.

digkeitskomponente. Mit Blick auf Abb. 8.7 fällt auf, dass die axiale und radiale Geschwindigkeitskomponente nun vergleichbare Amplituden aufweisen, allerdings die Verteilung für die radiale Komponente symmetrischer ist (die axiale Geschwindigkeitskomponente weist eine um die Diagonalen des Kanalquerschnitts in der Wendeebene symmetrische Verteilung auf, allerdings sind die Beträge in der Kanalhälfte für $r < 0$ kleiner als in der Hälfte für $r > 0$).

Da die radiale Geschwindigkeit um $z = 0$ ihr Maximum annimmt, wählen wir diese Position für die Extraktion eines zeitabhängigen Geschwindigkeitssignals. Wir wählen weiterhin $r = 0$, um maximalen Abstand zu den Wänden zu gewährleisten. An dieser Messposition wird wiederum über die umliegenden Geschwindigkeitsvektoren auf einer 7×7 -Matrix gemittelt.

Wir betrachten zunächst die Abhängigkeiten von der Weissenbergzahl. In Abb. 8.19 wird die Abhängigkeit der Vortexgeschwindigkeit von der Weissenbergzahl gezeigt, in Abb. 8.20 die Abhängigkeit der maximalen und des Betrages der minimalen Vortizität gezeigt.

Für den Zusammenhang zwischen \dot{S} und Wi ist die Linearität im Bereich la-

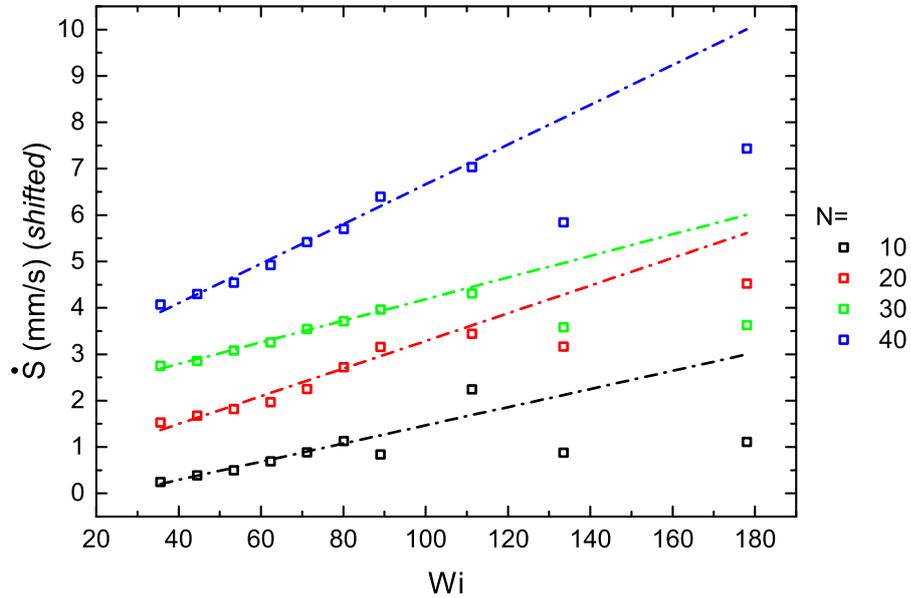


Abbildung 8.19: Abhängigkeit der Vortexgeschwindigkeit \dot{S} von der Weissenbergzahl Wi . Bis in den Bereich oszillierender Grundströmung besteht eine lineare Abhängigkeit, bei turbulenter Hauptströmung nichtmehr.

minarer Grundströmung sehr gut reproduzierbar, auch die in der Literatur durch numerische Simulationen gezeigte sich für $Wi > Wi_c$ verringernde Steigung mit Abweichung vom linearen Verhalten lässt sich reproduzieren (Poole *u. a.* 2013). Der durch Simulationen gefundene Zusammenhang zeigt zwar eine insgesamt glattere Kurve, dies kann allerdings auch darauf zurückzuführen sein, dass Wi nicht allzu weit in den Bereich turbulenter Hauptströmung erhöht wurde und der Datensatz aus der Simulation tendenziell gegenüber lokalen Fluktuationen, die durch die problematische Messtechnik bedingt sind, unempfindlicher ist.

Bei Betrachtung der Vortizität $\Omega(Wi)$ (s. Abb. 8.20) stellt man fest, dass hier bis in den Bereich sehr hoher Weissenbergzahlen von einem linearen Zusammenhang gesprochen werden kann. Dieses Ergebnis scheint im ersten Moment im Widerspruch zu der Beobachtung zu stehen, dass in diesem Wi -Bereich im langzeitigen Mittel keine Vortexströmungen beobachtet werden, sondern nur eine effektive radiale Strömung. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass nach wie vor Vortexstrukturen in der Strömung present sind, diese allerdings bei turbulenter Grundströmung in Bewegung geraten. Die damit assoziierte Bewegung des Vortizitätsmaximums durch den fixen Bereich, auf dem die Vortizität ermittelt wird, sorgt für Abweichungen von der zunächst für unterkritische Weissenbergzahlen gemessenen Linearität von $\Omega(Wi)$.

8.3 Einsetzen und Etablieren sekundärer Strömungen

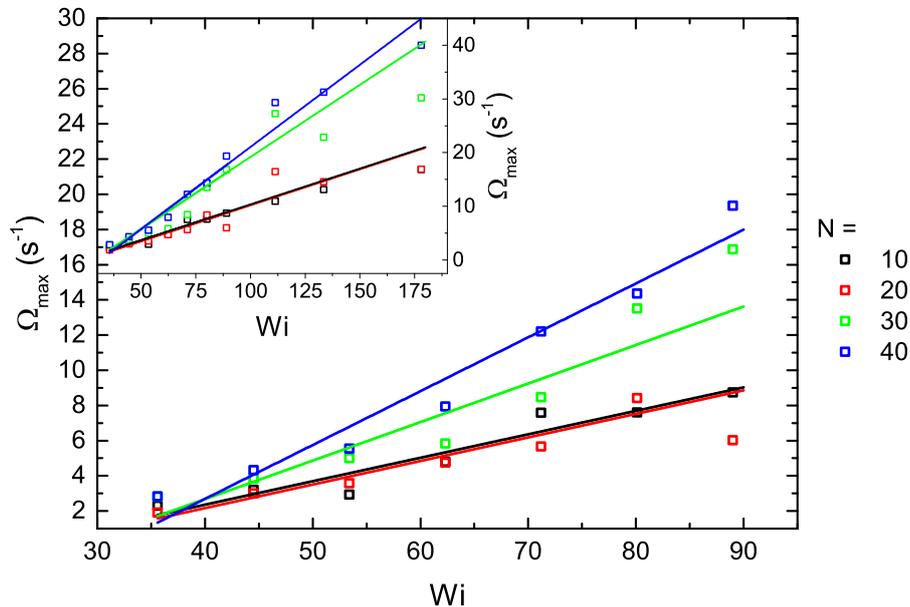


Abbildung 8.20: Die in Abb. 8.19 gezeigte Linearität spiegelt auch das Wi -abhängige Verhalten der maximalen Vortizität wider, die im Bereich laminarer Grundströmung linear verläuft (große Grafik). Im Bereich turbulenter Strömung treten zwar Abweichungen auf (Inset), jedoch unsystematisch und nicht in der von \dot{S} bekannten Form, so dass wir von einem weiterhin gegebenen linearen Zusammenhang sprechen würden.

Das Verhalten der Turbulenz, insbesondere deren räumliche Verteilung, hat sich bei den in Kap. 7.3 als abhängig von der Position N der Messung herausgestellt, insbesondere hat sich gezeigt, dass die Verteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen am Beginn des Kanals wesentlich von der gegen Ende des Kanals beobachteten Verteilung abweicht. Dabei hat sich ein Abtasten in Schritten von $\Delta N = 10$ als hinreichend fein zur Beschreibung der Unterschiede herausgestellt.

Mit diesen Erkenntnissen untersuchen wir auch die N -Abhängigkeit der genannten, zur Beschreibung der Vortexströmungen geeigneten Parameter. Obwohl die in Abb. 8.21a und 8.21b gezeigten Auftragungen mehr oder weniger deutlich auf eine N -Abhängigkeit hinweisen, konnte diese in weiteren Messungen nicht reproduziert werden. Dies führte uns zu der Annahme, dass bei $N = 10$ bereits eine weitgehende Stationarität der Vortizität und der Geschwindigkeitsfelder vorliegt, die Wirbel somit voll ausgeprägt sind.

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

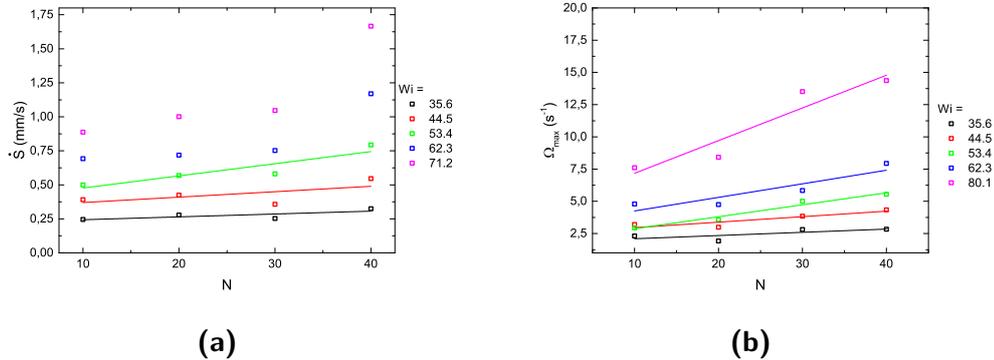


Abbildung 8.21: N -Abhängigkeit von \dot{S} (a) und Ω_{\max} (b). Das sich in dieser Messung abzeichnende Verhalten konnte in einer zweiten Messung nicht reproduziert werden, was die Annahme nahelegt, dass bei $N = 10$ die Sekundärströmungen bereits voll ausgeprägt sind.

8.3 Einsetzen und Etablieren sekundärer Strömungen

Um diese Annahme zu überprüfen, wird im folgenden Abschnitt eine genauere Untersuchung der Geschwindigkeitsfelder in den Windungen zwischen $N = 1$ und $N = 4$ durchgeführt. Dabei liegt der Schwerpunkt der Untersuchung auf der N -Abhängigkeit im Wi -Bereich laminarer Grundströmungen.

In Abb. 8.22 zeigen wir die in den funktionalen Einheiten $N = 1 \dots 4$ vorgefundenen Strukturen für eine Weissenbergzahl von jeweils $Wi = 80.1$. Es zeigt sich bereits in der ersten funktionalen Einheit das Vorliegen einer Vortexstruktur, auch wenn diese noch vergleichsweise geringe Amplituden aufweist, verglichen mit der bei $N = 4$ gemessenen. Ebenfalls fällt bereits augenscheinlich eine Asymmetrie der Positionen der Vortexzentren auf, die mit zunehmendem N zurückgeht. Insgesamt kann man nach diesen Aufnahmen ab $N = 3$ von einer voll etablierten Vortexströmung sprechen.

Eine Möglichkeit, diese Asymmetrie systematisch zu untersuchen, ist durch die Beobachtung der Position der Vortizitätsminima und -maxima gegeben, im unteren Teil von Abb. 8.22 zeigen wir diese extrahierten Positionen. Im Vergleich mit den direkten Plots der Geschwindigkeitsfelder stellt man jedoch fest, dass diese Zentren eher fluktuieren denn eine systematische Bewegung ausführen, dies kann auf die Nachbearbeitung der Geschwindigkeitsfelder mit einem Glättungsoperator zurückzuführen sein, durch die eine systematische Bewegung verwischt würde.

Genauere Untersuchungen der Wi -Abhängigkeit der Geschwindigkeitsamplitude \dot{S} sind in Abb. 8.23 (a) dargestellt. Die Daten der Geschwindigkeitsamplitude \dot{S} wurden dabei zur Verbesserung der Übersichtlichkeit gegeneinander verschoben. Auch ohne diese Verschiebung ist auffällig, dass die mittlere Steigung

8.3 Einsetzen und Etablieren sekundärer Strömungen

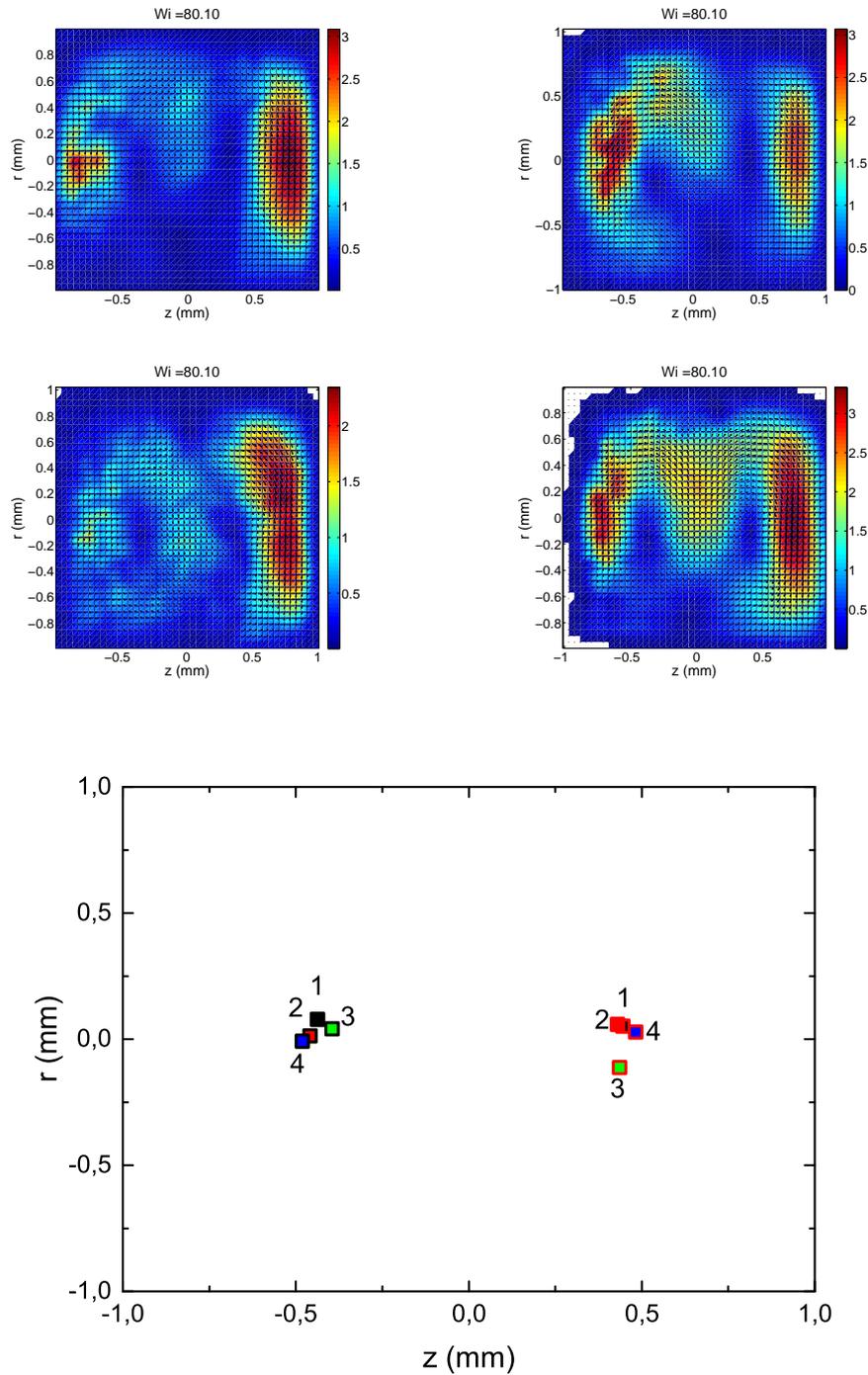


Abbildung 8.22: Vortexstrukturen zwischen $N = 1$ und 4 (von oben nach unten, links nach rechts). Die Grundzüge der Vortexstruktur sind bereits in der ersten funktionalen Einheit sichtbar. Unten: Position der Vortexzentren in Abhängigkeit von der Messposition $N = 1 \dots 4$.

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

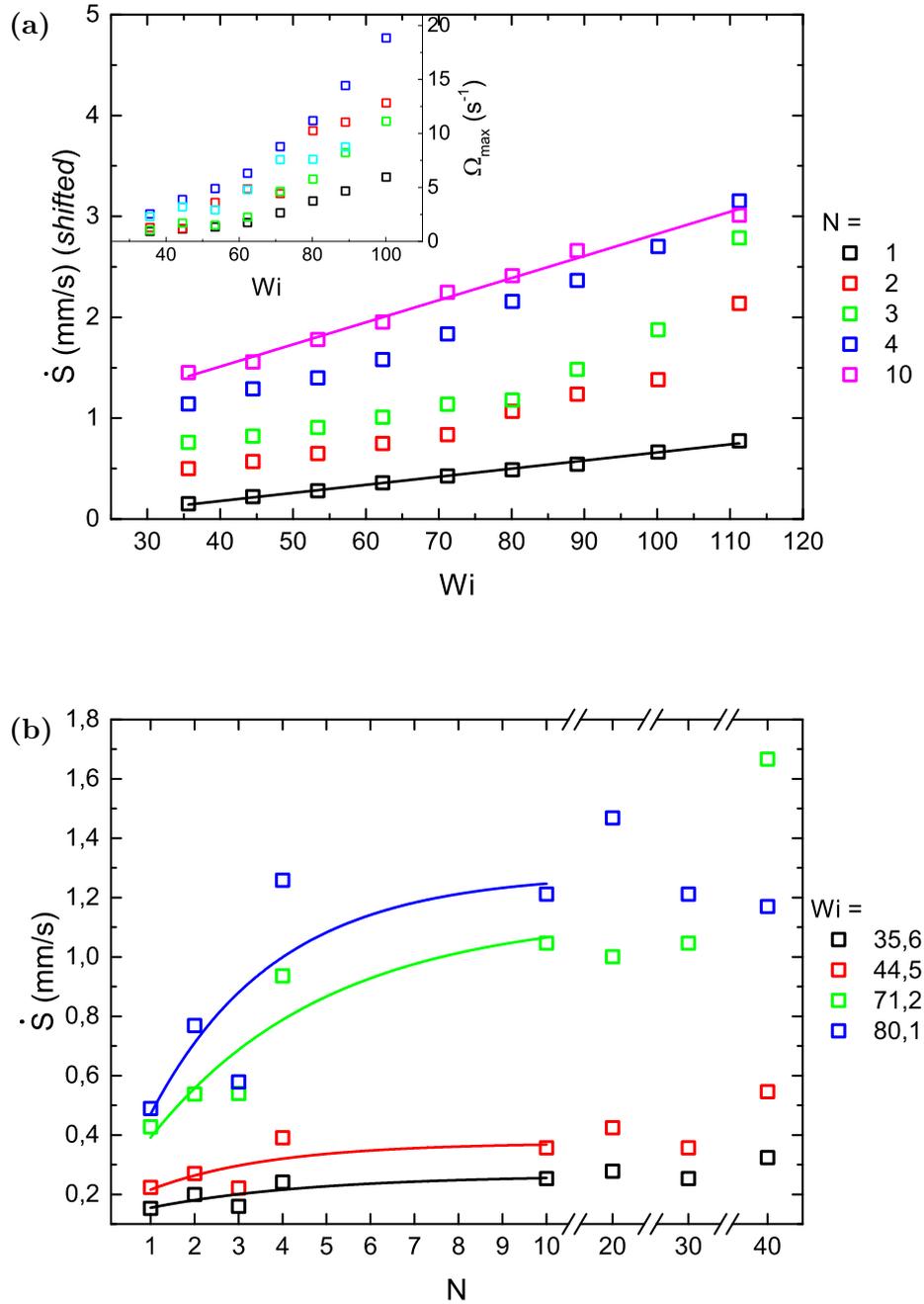


Abbildung 8.23: (a) Wi -Abhängigkeit der Geschwindigkeitsamplitude \dot{S} . Der Zusammenhang ist in den Einheiten bei $N = 1$ und $N = 10$ nahezu linear, mit deutlich geringerer Steigung bei $N = 1$ (Inset: Wi -Abhängigkeit der Vortizität). (b) N -Abhängigkeit der Geschwindigkeitsamplitude \dot{S} , mit Anpassung gemäß einer exponentiellen Wachstumsfunktion zur optischen Führung des Betrachters.

8.3 Einsetzen und Etablieren sekundärer Strömungen

eine gewisse N -Abhängigkeit aufweist, wobei die Graphen insgesamt, insbesondere für $N = 2$ und $N = 3$, eher einen nichtlinearen Zusammenhang aufzeigen. Letzterer Eindruck wird durch das Verhalten der Vortizität unterstützt (Inset in Abb. 8.19 (a)).

Ausgehend von den so extrahierten Daten werten wir zusätzlich die für dieses Kapitel bedeutendere N -Abhängigkeit der Geschwindigkeitsamplitude \dot{S} aus. Die Auftragung hierzu ist in Abb. 8.19 (b) dargestellt. Die eingezeichneten Linien stellen exponentielle Anpassungen der Geschwindigkeitsamplitude dar und sollen eher der Führung des Betrachters dienen als einen funktionalen Zusammenhang unterstellen, für letzteres ist die Datendichte in diesem Fall zu gering.

Dennoch zeigt sich für die gezeigten Weissenbergzahlen ein eindeutiges Bild, nämlich dass die Geschwindigkeitsamplitude von $N = 4$ auf $N = 10$ nur noch geringfügige Änderungen aufweist und somit ab $N = 4$ eine Sättigung eingetreten ist. Dies deckt sich mit der beobachteten Symmetrie der Rotationszentren in Abb. 8.22 und untermauert unsere Schlussfolgerung, dass im vorangegangenen Abschnitt bei der Betrachtung der Vortexstrukturen auf der gesamten Kanallänge keine signifikante N -Abhängigkeit der Geschwindigkeitsamplitude vorliegt.

Dass diese Abhängigkeit durch elastische Effekte bedingt ist, legt eine Abschätzung der Zeitspanne nahe, die das Fluid zur Passage vierer funktionaler Einheiten nahe. Letztere entsprechen einer Weglänge $L = 8\pi\bar{R}$, $\bar{R} = 2.00$ mm. Die Geschwindigkeit, mit der diese Strecke zurückliegt, variiert je nach Weissenbergzahl zwischen 6.25 und $\bar{U} = 12.5$ mm/s. Dies liefert Passagezeiten zwischen 4 und 8 s, was in der Größenordnung der Polymerrelaxationszeit liegt.

Es sei an dieser Stelle ebenfalls angemerkt, dass bei einer Anpassung von $\dot{S}(N)$ mit einer Funktion $\dot{S}(N) \sim (1 - \exp(-N/N_0))$ "Wachstumskonstanten" im Bereich von $N_0 \approx 3$ messbar waren, die wir aber aufgrund der bereits erwähnten Unzuverlässigkeit der Regression hier nur *cum grano salis* angeben.

Insgesamt können wir so als zuverlässiges Ergebnis angeben, dass Vortexströmungen in einem Kanal mit einer Abfolge gekrümmter funktionaler Einheiten sofort mit vorliegen einer Krümmung auftreten, da wir bereits am Eingang zur ersten funktionalen Einheit derartige Strömungen finden. Diese etablieren ihre Amplitude auf den ersten 4 funktionalen Einheiten, im folgenden tritt keine signifikante Änderung mehr auf.

8 Elastizitätsgetriebene Sekundärströmungen

Abschließende Bemerkungen

In den folgenden Abschnitten werden wir noch einmal zentrale Punkte und Ergebnisse dieser Arbeit rekapitulieren, in einen wissenschaftlichen Kontext einordnen und weitergehende Fragestellungen aufzeigen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr erörtert werden konnten, aber dennoch für die Fortführung der Arbeiten an viskoelastischen Instabilitäten von Bedeutung sein können.

9.1 Zusammenfassung und kontextuelle Einordnung

Gegenstand dieser Arbeit war das Strömungsverhalten viskoelastischer Fluide in gekrümmten Kanälen und die dabei auftretenden Strömungsinstabilitäten und Sekundärströmungen. Wir sind dafür ausführlich auf den hydrodynamischen Rahmen der Thematik eingegangen, insbesondere auf die analytische Berechnung von Geschwindigkeitsprofilen auf der Basis konstitutiver Modellgleichungen. Ebenso haben wir die technischen und rheologischen Hintergründe der von uns verwendeten Versuchsanordnung beschrieben.

Wir haben im ersten Teil der Arbeit eine Einführung in das Thema gegeben, die im wesentlichen aus einer Klärung grundlegender Begriffe und einer Orientierung bestand, wo viskoelastische Effekte in industriellen, technischen und biologischen Prozessen eine Rolle spielen. Anschließend wurden wesentliche Beiträge zur wissenschaftlichen Literatur referiert, beginnend mit den ersten Arbeiten Weissenbergs und seiner Unterscheidung beobachteter Fließeffekte an verschiedenen Fluiden, die er noch als “allgemein” (entspricht den komplexen Fluiden) und “speziell” (entspricht den Newton’schen Fluiden) unterschied. Ebenso erwähnt wurden die Arbeiten von Denn und Petrie, die im wesentlichen auf Beobachtungen bei industriellen Verarbeitungsprozessen (besonders dem Faserspinnen und Folienziehen) beruhen und eine systematische Auseinandersetzung theoretischer Natur mit den experimentellen Beobachtungen darstellen.

Für diese Arbeit von größerer Bedeutung sind die referierten Ergebnisse der

9 Abschließende Bemerkungen

Gruppen um Steinberg und Zilz. Beide beschäftigen sich eingehender mit den hydrodynamischen Hintergründen viskoelastischer Turbulenz. Ergänzend zu den Ergebnissen aus ersterer, die sich in erster Linie auf den Fall voll ausgeprägter Turbulenz beschränken, widmen wir uns der primären Instabilität. Numerisch und qualitativ durch Mischungsmessungen mit gefärbter und ungefärbter Lösung wurde diese bereits untersucht (Zilz *u. a.* 2012), eine quantitative Untersuchung des Geschwindigkeitsfeldes stand bisher aus und wird von uns beigetragen.

Wir können die simulativen Ergebnisse einer in der Nähe der kritischen Weissenbergzahl Wi_c oszillatorischen Strömung durch Messungen bestätigen. Die Spektren dieser Strömung weisen eine Frequenzspitze auf, mit zunehmendem Abstand von Wi_c kommen weitere Frequenzen hinzu. Im Fall voll ausgebildeter Turbulenz erhält man ein breites Spektrum mit einer Eckfrequenz und danach einem algebraischen Abfall. Der von uns gemessene Exponent entspricht in der Größenordnung einem Wert, der bereits von Groisman und Steinberg angegeben wurde (Groisman & Steinberg 2001, 2004). Die durch *least-squares*-Regression der Autokorrelation mit einer Summe gedämpfter Sinusfunktionen ermittelte Periodendauer der Oszillationen lag im Bereich der längsten Polymerrelaxationszeit.

Ebenfalls neu ist die von uns vorgenommene räumliche Untersuchung des Turbulenzentstehens. So konnten wir zeigen, dass sich am Beginn des von uns verwendeten Kanals Turbulenz auf dem gesamten Bereich einer funktionalen Einheit ausbildet. Am Ende des Kanals zeigt sich dagegen ein deutlich hervortretender turbulenter Bereich um die Wendeebene zwischen benachbarten Einheiten, von dem aus die Turbulenz in Strömungsrichtung konvektiert wird. Für eine Poiseuilleströmung wie in einem Kanal gegeben ist dies eine neue Erkenntnis, räumliche Studien der Turbulenzverteilung liegen bislang lediglich für Scherströmungen (Batchelor- und Couette-Taylor-Systeme) vor.

Das zweite zentrale Thema der Arbeit waren sekundäre Vortexströmungen. Diese sind in der Theorie bereits durch lineare Stabilitätsanalysen (Joo & Shaqfeh 1991, 1992, 1994) und durch numerische Simulationen (Poole *u. a.* 2013; Zilz *u. a.* 2012) beschrieben worden. Es existieren auch Beobachtungen dieser Strömungsfelder in anderen Geometrien (Eckströmungen), sowohl experimenteller (Sznitman *u. a.* 2012) als auch theoretischer Natur (Guglielmini *u. a.* 2011). Erwähnt wurden derartige Strömungen auch schon in den Arbeiten von Steinberg und seiner Mitarbeiter (Burghelca *u. a.* 2004a; Groisman & Steinberg 2004).

Wir liefern mit dieser Arbeit eine erste experimentelle quantitative Studie der Geschwindigkeitsfelder und der Abhängigkeit der Amplitude der Sekundärströmungen von Kontrollparametern und Position innerhalb des Kanals. Ein erstes Ergebnis ist hier bei die Bestätigung der aus der numerischen Simulation bereits hervorgegangenen Anordnung der Vortices in axialer Stapelung, ähnlich der *di-Whirl*-Strukturen, die Groisman und Steinberg im Couette-Taylor-System gefunden haben. Diese ist im Fall einer laminaren oder oszillatorischen Grundströmung ausgeprägt.

Beim Umschlagen der Hauptströmung in den turbulenten Bereich entwickeln

die Sekundärströmungen eine räumliche Mobilität. Durch Wasserfallplots der axialen Vortizitätsverteilung können wir hier einerseits eine Bewegung der Wirbel beobachten, die in die Domäne des jeweils entgegengesetzt drehenden Wirbels eindringen, andererseits ist allerdings auch eine Größenänderung der Domänen zu beobachten. Dieses Ergebnis deckt sich in seiner Auswirkung mit einer Beobachtung Steinbergs (Groisman & Steinberg 2004), wonach die Richtung der Sekundärströmung sich während der Messung immer wieder umkehrt, allerdings sehen wir den Grund dieser Beobachtung eher in der beschriebenen Mobilität der Struktur als in einer Umkehrung.

Aus den Simulationen (Poole *u. a.* 2013) geht hervor, dass die Amplitude \dot{S} der Vortexgeschwindigkeit zunächst linear anwachsen soll, und ab einer Weissenbergzahl, die in der Nähe des Übergangs zur turbulenten Hauptströmung liegt, nichtlinear weiter anwachsen soll, wobei die Steigung im Mittel flacher ausfällt als in Falle linearer Grundströmung. Dieses Verhalten konnten wir bei Messungen entlang des gesamten Kanals in unterschiedlich starker Ausprägung feststellen. Die Vortizität, gemessen am in positiver Richtung drehenden Wirbel, wächst dagegen über den gesamten betrachteten Wi -Bereich linear an, mit geringen Abweichungen.

Da sich bei einer Gesamtübersicht des Kanals entgegen der ersten Erwartungen keine eindeutige N -Abhängigkeit der gewählten Ordnungsparameter (Vortexgeschwindigkeit und Vortizität) abzeichnet, haben wir zusätzlich eine eingehendere Untersuchung des Aufbauverhaltens der Vortexströmungen in den ersten vier funktionalen Einheiten durchgeführt. Hierbei stellt sich heraus, dass erst ab der vierten Einheit von einer voll ausgebildeten Vortexströmung gesprochen werden kann, deren Geschwindigkeitsamplitude auf dem Niveau der Werte der folgenden Einheiten liegt.

Diese Erkenntnis erschließt sich einerseits aus einer ortsfesten Messung der Geschwindigkeitsamplitude auf der Mittellinie des Kanals ($r = 0, z = 0$), andererseits aus einer Beobachtung der Struktur der Sekundärströmungen. Zwar zeigt diese ab dem Eingang der ersten funktionalen Einheit das aus allen Messungen bekannte ‘di-whirl’-Muster, wenn auch mit geringeren Geschwindigkeitsamplituden nicht so stark ausgeprägter Symmetrie.

Es ist weiterhin von Interesse, was sich aus diesen Erkenntnissen über die Antriebs- und Entstehungsmechanismen hinter den Sekundärströmungen aussagen lässt. Auf der einen Seite sind diese Strömungen eine Auswirkung der gekrümmten Stromlinien, die offensichtlich fast instantan zur Ausprägung sekundärer Wirbel führen. Dies lässt sich daraus schließen, dass der Eingang zur ersten funktionalen Einheit lediglich aus einem rechtwinkligen Bogensegment besteht und nur ein viertel der Länge einer ganzen funktionalen Einheit (oder die halbe Länge eines einzelnen Bogensegments) aufweist.

Dennoch lassen sich gewisse elastische Einflüsse auf die Ausprägung der Sekundärströmungen nicht ausschließen. So zeigt sich etwa, dass (fließratenabhängig) das Fluid für das Zurücklegen der bezeichneten vier funktionalen Einheiten

9 Abschließende Bemerkungen

eine Zeitspanne benötigt, die in der Größenordnung einer Relaxationszeit liegt.

9.2 Weiterführende Fragestellungen

Es liegt in der Natur der Sache, dass im Rahmen dieser Arbeit einige interessante Fragestellungen aus Gründen der Prägnanz, der Priorisierung oder einfach der zeitlichen Einteilung hintangestellt werden mussten. Einige dieser Fragestellungen wollen wir im folgenden kurz referieren und so einen Anstoß zur Fortführung der Arbeiten geben.

9.2.1 Theoretische und simulative Fragestellungen

Teile dieser Arbeit zitieren bereits numerische Simulationen der primären Geschwindigkeitskomponente (in Strömungsrichtung) und der sekundären Strömungskomponenten. Diesen liegt eine Simulation auf Basis des UCM-Modells zugrunde, außerdem wurde ein vergleichsweise kurzer Kanal mit nur fünf funktionalen Einheiten untersucht. Obwohl qualitativ eine Übereinstimmung unserer Ergebnisse erzielt werden konnte, war beispielsweise eine Übereinstimmung bei der Periodendauer der Oszillation nur durch eine Umdefinition der Polymerrelaxationszeit zu erreichen.

Ein weiteres Manko liegt in der Tatsache, dass das UCM-Modell keine Scherverdünnung berücksichtigt, die in dem von uns verwendeten Fluid dennoch in gewissem Maße auftritt. Wir schlagen daher vor, numerische Simulationen aufgrund des lin-PTT-Modells durchzuführen, deren Ergebnisse mit den von uns experimentell erzielten direkt verglichen werden können.

Die von uns gewählte Polymerrelaxationszeit liegt in einem Bereich, der nicht für die Zeitskalen bei numerischen Simulationen eher ungeeignet ist. Die Relaxationszeit ist dabei um ein vielfaches größer als die Advektionszeit, welche die Zeitskala für die Simulation vorgibt, insgesamt wird die Rechenzeit bei der Simulation so stark erhöht. Um Vergleichbarkeit zu erreichen, sollten daher gleichzeitig experimentelle Untersuchungen mit einem Fluid erfolgen, dass bei stetiger Scherung und Anpassung durch die Spannungen im PTT-Modell eine Relaxationszeit in der Größenordnung von $\lambda \approx 1$ s aufweist.

Im Rahmen dieser Simulationen wäre es interessant, die räumliche Turbulenzverteilung näher zu untersuchen bzw. zunächst zu versuchen, ob diese reproduzierbar ist. Weiterhin liegt es nahe, gezielte Simulationen der oszillatorischen Strömung in der Nähe der kritischen Weissenbergzahl vorzunehmen, um das Anwachsen der Moden mit zunehmendem Abstand $|Wi - Wi_c|$ zu untersuchen.

9.2.2 Analyse der linearen Instabilität und der Turbulenzverteilung

In Kap. 7.3 haben wir die räumliche Verteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen vorgestellt, insbesondere in den letzten Windungen, wo von einem stark turbulenten Bereich um die Wendeebene herum die Turbulenz in die funktionale Einheit hinein konvektiert wurde.

Verändert man den mittleren Krümmungsradius \bar{R} , so stellen sich aus unserer Sicht zwei Möglichkeiten dar. Zunächst wäre es möglich, dass die charakteristische Abklinglänge, die man während dieses Konvektionsvorgangs misst, mit dem Radius skaliert, also für einen enger gewundeneren Kanal prinzipiell die gleichen Ergebnisse erhält. Weiterhin wäre es allerdings auch möglich, dass durch eine Verringerung des mittleren Krümmungsradius und der damit verbundenen funktionalen Länge einer Einheit zu einem schnelleren Anwachsen bzw. einer schnelleren Ausprägung der viskoelastischen Turbulenz kommt. Dieser Punkt könnte auch im Zusammenhang mit weiteren Simulationen näher untersucht werden.

Ein weiterer Ansatzpunkt ist durch größere Änderungen der Strömungsgeometrie gegeben, etwa durch die Verwendung zylindrischer Hinternisse und der Untersuchung der Strömung hinter diesen auf ihre Stabilität, bzw. auf die Fluktuationsamplituden in verschiedenen Abständen vom letzten Hindernis. Solche Untersuchungen sind auf einer kleineren Skala bereits durch Pan durchgeführt worden (Pan *u. a.* 2013), diese Ergebnisse könnten zunächst zur Validierung herangezogen werden.

Von ebensolchem Interesse könnte es sein, Strömungsantrieb und Antrieb der Störungen grundsätzlich zu verändern. Um die restlichen Fluktuationen aus der Mechanik der Spritzenpumpe zu eliminieren, wäre eine Umstellung auf eine druckgetriebene Strömung der beste Weg, dieser würde auch noch längere Messzeiten zulassen als die bisher realisierten. Intern bereits von uns vorgeschlagen ist eine Störung des Flusses nicht durch physische Hindernisse, sondern durch magnetische Partikel, die durch ein oszillierendes Magnetfeld variabler Frequenz und Stärke geleitet werden und so zu Krümmungen der Stromlinien an einer Stelle der Strömung führen. Dies würde zu einer Entkopplung von Störungsamplitude und –frequenz führen, die bisher durch die Strömungsgeschwindigkeit miteinander verknüpft sind.

Grade in Zusammenhang mit letzterem Versuchsaufbau könnte auch die (schwach) nichtlineare Instabilität in parallelen Scherströmungen weiter ins Zentrum der Untersuchungen gerückt werden

9.2.3 Sekundäre Strömungen

Ein möglicher Kritikpunkt an den von uns durchgeführten Messungen zu sekundären Strömungen ist die Wahl der Messposition in der Wendeebene zwischen zwei funktionalen Einheiten, da nach gängiger Literatur eine Änderung der Krümmung auch in Newton'schen Fluiden zu sekundären Wirbeln führt.

9 Abschließende Bemerkungen

Durch Kontrollmessungen mit dem Lösungsmittel konnten wir zwar belegen, dass diese Wirbel in unserer Geometrie nicht auftreten, und die in viskoelastischen Fluiden gefundenen Vortexstrukturen decken sich mit denen aus numerischen Simulationen, dennoch bieten sich auch für diesen Versuchsteil Möglichkeiten der Verbesserung und Ergänzung.

Durch eine geänderte Strahlführung besteht die Möglichkeit, das Geschwindigkeitsfeld beispielsweise in einer Position von 45° hinter oder vor dem Scheitelpunkt einer funktionalen Einheit zu untersuchen, durch den Einsatz mehrerer Prismen kann so eventuell die Variation der Geschwindigkeits- und Vortizitätsamplituden verfolgt werden, wir halten letztere Option aber im Vergleich mit den daraus zu erwartenden Ergebnissen für zu aufwendig.

Vom physikalischen Standpunkt interessant ist die Fragestellung nach dem Zusammenhang zwischen der Oszillation der Grundströmung und der beobachteten Nichtstationarität der Struktur der Sekundärströmungen. Hier beobachteten wir fluktuierende Expansions- und Verdrängungsbewegungen eines Wirbels gegenüber dem anderen. Interessant wäre hier, weitergehend zu untersuchen, wie die beiden Wirbel der Struktur miteinander in Konkurrenz um die aus der Hauptströmung abgezogene Energie stehen.

Literaturregister

1. Bertola, V. *u. a.* Experimental Evidence For An Intrinsic Route To Polymer Melt Fracture Phenomena: A Nonlinear Instability Of Viscoelastic Poiseuille Flow. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 114502–1–114502–4 (2003).
2. Binnington, R. J. & Boger, D. V. Constant viscosity elastic liquids. *J. Rheol.* **29**, 887–904 (1985).
3. Bird, R. B., Armstrong, R. C. & Hassager, O. *Dynamics Of Polymeric Liquids (Vol. 1: Fluid Mechanics)* (J. Wiley & Sons, 1987).
4. Bird, R. B., Armstrong, R. C. & Hassager, O. *Dynamics Of Polymeric Liquids (Vol. 2: Kinetic Theory)* (J. Wiley & Sons, 1987).
5. Boger, D. V. A highly elastic constant–viscosity fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **3**, 87–91 (1977).
6. Bonn, D., Ingremeau, F., Amarouchene, Y. & Kellay, H. Large Velocity Fluctuations In Small-Reynolds-Number Pipe Flow Of Polymer Solutions. *Phys. Rev. E* **84**, 045301–1–045301–5 (2011).
7. Burghelea, T., Segre, E., Bar-Joseph, I., Groisman, A. & Steinberg, V. Chaotic Flow And Efficient Mixing In A Microchannel With A Polymer Solution. *Phys. Rev. E* **69**, 066305–1–066305–8 (2004).
8. Burghelea, T., Segre, E. & Steinberg, V. Mixing by Polymers: Experimental Test Of Decay Regime of Mixing. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 164501–1–164501–4 (2004).
9. Burghelea, T., Segre, E. & Steinberg, V. Validity Of The Taylor Hypothesis In A Random Spatially Smooth Flow. *Phys. Fluids* **17**, 103101–1–103101–8 (2005).
10. Byars, J. A., Öztekin, A., Brown, R. A. & McKinley, G. H. Spiral instabilities in the flow of highly elastic fluids between rotating parallel disks. *J. Fluid. Mech.* **271**, 173–218 (1994).
11. Cain, J. J. & Denn, M. M. Multiplicities and Instabilities in Film Blowing. *Polym. Eng. Sci.* **28**, 1527–1541 (1988).
12. Chorin, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comput. Phys.* **2**, 12–26 (1967).

13. Cox, W. P. & Merz, E. H. Correlation of dynamic and steady flow viscosities. *J. Polym. Sci.* **28**, 619–622 (1958).
14. Cross, M. M. Rheology of non-Newtonian fluids: A new flow equation for pseudoplastic systems. *J. Colloid Sci.* **20**, 417–437 (1965).
15. Dean, W. R. Note on the motion of a fluid in a curved pipe. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **4**, 208–223 (1927).
16. Dean, W. R. The stream-line motion of fluid in a curved pipe (Second Paper). *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **5**, 673–695 (1928).
17. Debbaut, B., Avalosse, T., Dooley, J. & Hughes, K. On the development of secondary motions in straight channels induced by the second normal stress difference: experiments and simulations. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **69**, 255–271 (1997).
18. Denn, M. M. & Avenas, P. Mechanics of Steady Spinning of a Viscoelastic Liquid. *AIChE J.* **21**, 791–799 (1975).
19. Devasenathipathy, S., Santiago, J. G., Wereley, S. T., Meinhart, C. D. & Takehara, K. Particle Imaging Techniques For Microfabricated Fluidic Systems. *Exp. Fluids* **34**, 504–514 (2003).
20. Doi, M. & Edwards, S. F. *The Theory of Polymer Dynamics* (Oxford Science Publications, 1986).
21. Fan, Y., Tanner, R. I. & Phan-Thien, N. Fully developed viscous and viscoelastic flows in curved pipes. *J. Fluid. Mech.* **440**, 327–357 (2001).
22. Gagon, D. K. & Denn, M. M. Computer Simulation of Steady Polymer Melt Spinning. *Polym. Eng. Sci.* **21**, 844–853 (1981).
23. Galindo-Rosales, F. J. *u. a.* Viscoelastic instabilities in micro-scale flows. *Exp. Therm. Fluid Sci.* (2014).
24. Gier, S. *Untersuchung der Bildung, des Wachstums und der Bewegung von Tropfen aus komplexen Flüssigkeiten* Diss. (Universität des Saarlandes, 2010).
25. Giesekus, H. *Phänomenologische Rheologie* (Springer, 1994).
26. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. *Table Of Integrals, Series And Products* 5. Aufl. (Academic Press, 1994).
27. Groisman, A. & Steinberg, V. Mechanism Of Elastic Instability In Couette Flow Of Polymer Solutions: Experiment. *Phys. Fluids* **10**, 2451–2463 (1998).
28. Groisman, A. & Steinberg, V. Elastic Turbulence In A Polymer Solution. *Nature* **405**, 53–55 (2000).
29. Groisman, A. & Steinberg, V. Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives. *Nature* **410**, 905–908 (2001).
30. Groisman, A. & Steinberg, V. Elastic Turbulence In Curvilinear Flows Of Polymer Solutions. *New J. Phys.* **6**, 1–48 (2004).

31. Guglielmini, L., Rusconi, R., Lecuyer, S. & Stone, H. A. Three-dimensional features in low-Reynolds-number confined corner flows. *J. Fluid. Mech.* **668**, 33–57 (2011).
32. Guyon, E., Hulin, J. P., Petit, L. & Mitescu, C. D. *Physical Hydrodynamics* (Oxford University Press, 2001).
33. Ho, T. C. & Denn, M. M. Stability of plane Poiseuille flow of a highly elastic liquid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **3**, 179–195 (1977).
34. Hürlimann, H. P. & Knappe, W. Der Zusammenhang zwischen der Dehnspannung von Kunststoffschmelzen im Düseninlauf und im Schmelzbruch. *Rheol. Acta* **11**, 292–301 (1972).
35. Joo, Y. L. & Shaqfeh, E. S. Viscoelastic Poiseuille flow through a curved channel: A new elastic instability. *Phys. Fluids A* **3** (7), 1691–1694 (1991).
36. Joo, Y. L. & Shaqfeh, E. S. A purely elastic instability in Dean and Taylor–Dean flow. *Phys. Fluids A* **4** **3**, 524–543 (1992).
37. Joo, Y. L. & Shaqfeh, E. S. Observations of purely elastic instabilities in the Taylor–Dean flow of a Boger fluid. *J. Fluid. Mech.* **262**, 27–73 (1994).
38. Jun, Y. & Steinberg, V. Mixing Of Passive Tracers In The Decay Batchelor Regime Of A Channel Flow. *Phys. Fluids* **22**, 123101–1–123101–15 (2010).
39. Landau, L. D. & Lifschitz, E. M. *Theoretische Physik: Hydrodynamik* 5. Aufl. (Akademie Verlag Dresden, 1991).
40. Larson, R. G. *Constitutive equations for Polymer Melts and Solutions* (Butterworths, 1988).
41. Larson, R. G. Instabilities In Viscoelastic Flows. *Rheol. Acta* **31**, 213–263 (1992).
42. Larson, R. G. *The Structure and Rheology of Complex Fluids* (Oxford University Press, 1999).
43. Larson, R. G. Turbulence Without Inertia. *Nature* **405**, 27–28 (2000).
44. Larson, R. G., Shaqfeh, E. S. & Muller, S. J. A Purely Elastic Instability In Taylor–Couette Flow. *J. Fluid. Mech.* **218**, 573–600 (1990).
45. Lauga, E., Stroock, A. D. & Stone, H. A. Three-dimensional flows in slowly varying planar geometries. *Phys. Fluids* **16**, 3051–3062 (2004).
46. Macosko, C. W. *Rheology. Principles, Measurements And Applications* (J. Wiley & Sons, 1993).
47. Madsen, P. A. & Schäffer, H. A. A discussion of artificial compressibility. *Coast. Eng.* **53**, 93–98 (2006).
48. Malheiro, J. M., Oliveira, P. J. & Pinho, F. T. Parametric study on the three-dimensional distribution of velocity of a FENE–CR fluid through a curved channel. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **200**, 88–102 (2013).

49. McCarthy, K. J., Burkhardt, C. W. & Parazak, D. P. Mark–Houwink–Sakurada Constants and Dilute Solutions Behavior of Heterodisperse Poly(acrylamide–co–sodium acrylate in 0.5M and 1M NaCl. *J. Appl. Polym. Sci.* **33**, 1699–1714 (1987).
50. McKinley, G. H., Pakdel, P. & Öztekin, A. Rheological And Geometric Scaling Of Purely Elastic Flow Instabilities. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **67**, 19–47 (1996).
51. Meulenbroek, B. *u. a.* Intrinsic Route to Melt Fracture in Polymer Extrusion: A Weakly Nonlinear Subcritical Instability of viscoelastic Poiseuille Flow. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 24502–1–24502–4 (2003).
52. Morozov, A. & van Saarloos, W. Subcritical Finite-Amplitude Solutions For Plane Couette Flow Of Viscoelastic Fluids. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 024501–1–024501–4 (2005).
53. Morozov, A. & van Saarloos, W. An Introductory Essay On Subcritical Instabilities And The Transition To Turbulence In Visco-Elastic Parallel Shear Flows. *Phys. Rep.* **447**, 112–143 (2007).
54. Oldroyd, J. G. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. R. Soc. Lond. A* **200**, 523–541 (1950).
55. Oliveira, P. J. & Pinho, F. T. Analytical Solution for fully developed channel and pipe flow of Phan–Thien–Tanner fluids. *J. Fluid. Mech.* **387**, 271–280 (1999).
56. Pan, L., Morozov, A., Wagner, C. & Arratia, P. E. A nonlinear elastic instability in channel flows at low Reynolds numbers. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 174502–1–174502–5 (Apr. 2013).
57. Paterson, R. W. & Abernathy, F. H. Transition to turbulence in pipe flow for water and dilute solutions of polyethylene oxide. *J. Fluid. Mech.* **51**, 177–185 (1972).
58. Petrie, C. J. S. & Denn, M. M. Instabilities in Polymer Processing. *AIChE J.* **22**, 209–236 (1976).
59. Phan-Thien, N. A nonlinear network viscoelastic model. *J. Rheol.* **22**, 259 (1978).
60. Phan-Thien, N. & Tanner, R. I. A new constitutive equation derived from network theory. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **2**, 353–365 (1977).
61. Poole, R. J., Lindner, A. & Alves, M. A. Viscoelastic secondary flows in serpentine channels. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **201**, 10–16 (2013).
62. Pozrikidis, C. *Introduction To Theoretical And Computational Fluid Dynamics* (Oxford University Press, 1997).
63. Raffel, M., Willert, E. & Kompenhans, J. *Particle Imaging Velocimetry. A Practical Guide.* (Springer, 1998).
64. Ram, A. & Tamir, A. Structural Turbulence in Polymer Solutions. *J. Appl. Polym. Sci.* **8**, 2751–2762 (1964).

65. Reiner, M. The Deborah number. *Physics Today* **17**, 62 (1964).
66. Reynolds, O. An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **35**, 84–99 (1883).
67. Rhodes, R., Handlin, D. & Stevens, C. *Star polymer viscosity index improver for oil compositions* US Patent 5,460,739. 1995.
68. Sadeghi, A., Saidi, M. H. & Mozafari, A. A. Heat transfer due to electroosmotic flow of viscoelastic fluids in a slit microchannel. *Int. J. Heat Mass Tran.* **54**, 4069–4077 (2011).
69. Samanta, D. *u. a.* Elasto-inertial turbulence. *PNAS* **110**, 10557–10562 (2013).
70. Schäfer, C. *Elastic Flow Instabilities of Non-Newtonian Fluids in Shear Flows* Diss. (Universität des Saarlandes, 2013).
71. Schiamberg, B. A., Shereda, L. T., Hu, H. & Larson, R. G. Transitional Pathway To Elastic Turbulence In Torsional, Parallel-Plate Flow Of A Polymer Solution. *J. Fluid. Mech.* **554**, 191–216 (2006).
72. Simmonet, C. & Groisman, A. Chaotic Mixing In A Steady Flow In A Microchannel. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 134501–1–134501–4 (2005).
73. Sveen, J. K. *An introduction to MatPIV v. 1.6.1* 2. Aufl. Dept. of Mathematics, Mechanics und Applied Mathematics, University of Oslo (2004).
74. Sznitman, J. *u. a.* Experimental characterization of three-dimensional corner flows at low Reynolds numbers. *J. Fluid. Mech.* **707**, 37–52 (2012).
75. Tropea, C., Foss, J. & Yarin, A. *Experimental Fluid Mechanics* Springer Handbook (Springer, 2007).
76. Weissenberg, K. A continuum theory of rheological Phenomena. *Nature* **159**, 310–311 (1947).
77. Wereley, S. T. & Meinhart, C. D. in *Microscale Diagnostic Techniques* (Hrsg. Breuer, K.) 51–112 (Springer, 2005).
78. Wilkes, J. O. *Fluid mechanics for chemical engineers* (Prentice Hall, 2006).
79. Xue, S. C., Phan-Thien, N. & Tanner, R. I. Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluids in straight pipes by an implicit finite volume method. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **59**, 191–213 (1995).
80. Yasuda, K., Armstrong, R. C. & Cohen, R. E. Shear flow properties of concentrated solutions of linear and star branched polystyrenes. *Rheol. Acta* **20**, 163–178 (1981).
81. Zilz, J. *u. a.* Geometric scaling of purely-elastic flow instabilities in serpentine channels. *J. Fluid. Mech.* **712**, 203–218 (2012).

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Fluidklassen nach Spannungsverhalten unter Deformation. | 12 |
| 1.2 | Konsequenzen komplexen Fließverhaltens. | 13 |
| 1.3 | Turbulenter Puff | 15 |
| 1.4 | Instabilitätsverhalten bei inertialer und viskoelastischer Turbulenz | 16 |
| 2.1 | Illustration des Instabilitätsmechanismus. | 21 |
| 2.2 | Couette–Taylor–Zelle | 23 |
| 2.3 | Deckelgetriebene Hohlraumströmung | 24 |
| 2.4 | Farbstoffmessungen in mikrofluidischen Kanälen | 27 |
| 3.1 | Zur Veranschaulichung des Spannungstensors | 32 |
| 3.2 | Strömung durch einen geraden Kanal | 34 |
| 3.3 | Normierte Geschwindigkeitsprofile im geraden und gekrümmten Kanal. | 38 |
| 3.4 | Strömung durch einen geraden Kanal | 39 |
| 3.5 | Vergleich gemessener und errechneter Geschwindigkeitsprofile im geraden und gekrümmten Kanal. | 43 |
| 3.6 | Abweichung zwischen berechneter und gemessener Geschwindigkeit | 44 |
| 4.1 | Polymer als elastische Kette und Submolekül. | 47 |
| 4.2 | Zweidimensionaler, gerader Kanal | 52 |
| 4.3 | Wi–abhängiges Geschwindigkeitsprofil eines lin–PTT–Fluids im ge- raden Kanal | 55 |
| 4.4 | Zweidimensionaler, gekrümmter Kanal | 55 |
| 4.5 | Vergleich errechneter und gemessener Geschwindigkeitsdaten im gekrümmten Kanal | 58 |
| 4.6 | Strömung eines komplexen Fluides durch einen geraden Kanal . . . | 60 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.7 | Spannungs-Relaxations-Algorithmus (Schema) | 65 |
| 4.8 | Nach lin-PTT-Modell berechnete Geschwindigkeitsprofile | 65 |
| 5.1 | Rotationsrheometer <i>Thermo Scientific/Haake</i> MARS II | 71 |
| 5.2 | Dehnungsrheometer (CaBER) | 73 |
| 5.3 | Steady-shear Messung der Viskosität und Anpassung im PTT-Oldroyd-B-Modell | 77 |
| 5.4 | Oszillatorische Messung der dynamischen Moduli und Berechnung der Viskosität | 79 |
| 5.5 | Normalspannungs-Relaxations-Messung der Relaxationszeit | 81 |
| 5.6 | Einschnürungsvorgänge bei Dehnungsrheometrie | 82 |
| 5.7 | Scherratenabhängigkeit der Relaxationszeit | 83 |
| 6.1 | Überblick über den verwendeten C-40-Kanal | 86 |
| 6.2 | Schema einer funktionalen Einheit | 86 |
| 6.3 | Fotografische Abbildung des Versuchsaufbaus | 88 |
| 6.4 | Zur Messung der Fließrate der Spritzenpumpe | 89 |
| 6.5 | Anlaufzeit der Strömung | 90 |
| 6.6 | Exemplarischer Ablauf einer PIV-Korrelationsroutine | 93 |
| 6.7 | Überblick über die Versuchsanordnung zur Durchführung von PIV-Messungen | 94 |
| 6.8 | Exemplarische, zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsfelder | 97 |
| 6.9 | Geschwindigkeitsprofile im geraden wie im gekrümmten Kanalbereich | 98 |
| 6.10 | Zur Messung des effektiven Kanalquerschnitts | 100 |
| 6.11 | Geschwindigkeitssignal für Newton'sche Fluide im geraden und gekrümmten Kanal. | 102 |
| 6.12 | Autokorrelationsfunktionen des Geschwindigkeitssignals im geraden und gekrümmten Kanal | 103 |
| 6.13 | Spektrale Leistungsdichte des Geschwindigkeitssignals im geraden und gekrümmten Kanal. | 104 |
| 7.1 | Geschwindigkeitsprofile und Zeitreihen für viskoelastische Fluide | 109 |
| 7.2 | Bifurkationsdiagramm der absoluten Fluktuationsamplituden | 111 |
| 7.3 | Bifurkationsdiagramm der relativen Fluktuationsamplituden | 112 |
| 7.4 | Wi-Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit $\langle U \rangle$ | 113 |
| 7.5 | Bifurkationsdiagramme mit dem Kontrollparameter $\langle Wi \rangle$ | 114 |

| | | |
|------|---|-----|
| 7.6 | Fluktuationsamplitude bei $N = 1$ | 115 |
| 7.7 | Fluktuationsamplitude bei $N = 11$ | 116 |
| 7.8 | Fluktuationsamplitude bei $N = 20$ | 117 |
| 7.9 | Fluktuationsamplitude bei $N = 40$ | 118 |
| 7.10 | Fluktuationsverteilung (farbkodiert) und angedeutetes Geschwindigkeitsfeld. | 119 |
| 7.11 | Verteilung der Strömungsarten nach (Zilz <i>u. a.</i> 2012) | 120 |
| 7.12 | Normierte Fluktuationskomponente des Geschwindigkeitssignals bei $N = 40$ | 122 |
| 7.13 | Geschwindigkeitsverlauf bei $N = 20$ | 123 |
| 7.14 | Spektrale Leistungsdichte für oszillatorische Strömungen | 124 |
| 7.15 | Änderung der spektralen Leistungsdichte für oszillatorische Strömungen | 125 |
| 7.16 | Spektrale Leistungsdichten oszillatorischer und turbulenter Strömungen im Vergleich | 127 |
| 7.17 | Autokorrelationsfunktionen oszillatorischer Strömung für ausgewählte Weissenbergzahlen | 128 |
| 7.18 | Phasendiagramm des Strömungsverhaltens | 129 |
| 7.19 | Bifurkationsdiagramme im geraden Kanal | 131 |
| 7.20 | Abhängigkeit der Fluktuationsamplitude vom Abstand zur letzten funktionalen Einheit | 132 |
| 8.1 | Versuchsaufbau zur Messung sekundärer Vortexströmungen | 136 |
| 8.2 | Optikaufbau und Strahlführung zur Messung sekundärer Vortexströmungen | 137 |
| 8.3 | Simulation einer Newton'schen Strömung durch einen gekrümmten Kanal | 138 |
| 8.4 | Sekundärströmungen eines Newton'schen Fluids in der Wendeebene zwischen zwei funktionalen Einheiten | 139 |
| 8.5 | Vergleich des gemessenen und simulierten Geschwindigkeitsfeldes in der Wendeebene | 140 |
| 8.6 | Amplituden der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponenten | 141 |
| 8.7 | Geschwindigkeitsfelder stationärer Wirbelstrukturen ($N = 30$, $Wi = 71.2$) | 142 |
| 8.8 | Axialer und radialer Schnitt durch das Geschwindigkeitsfeld einer Vortexstruktur | 143 |
| 8.9 | Felder der Vortexgeschwindigkeits \dot{S} für $N = 30$ | 144 |

| | | |
|------|---|-----|
| 8.10 | Dynamik der Vortex-Geschwindigkeitsfelder | 145 |
| 8.11 | Zeitabhängigkeit der maximalen und minimalen Vortizität | 147 |
| 8.12 | Vortizitätsrohdaten (instantan) und nach Faltung mit dem Glät- tungsoperator | 148 |
| 8.13 | Wasserfallplots der Vortizität und der radialen Geschwindigkeit . . | 149 |
| 8.14 | Wasserfallplots der Vortizität und der radialen Geschwindigkeit . . | 150 |
| 8.15 | Wasserfallplots der Vortizität und der radialen Geschwindigkeit . . | 151 |
| 8.16 | Wasserfallplots der Vortizität und der radialen Geschwindigkeit . . | 152 |
| 8.17 | Langzeitmittelung der radialen Geschwindigkeitsfelder | 153 |
| 8.18 | “Ausweichbewegung” eines Wirbels beim Domänentausch | 155 |
| 8.19 | Abhängigkeit der Vortexgeschwindigkeit \dot{S} von der Weissenberg- zahl Wi | 156 |
| 8.20 | Abhängigkeit der maximalen Vortizität Ω_{\max} von der Weissenber- gzahl Wi | 157 |
| 8.21 | N -Abhängigkeit von \dot{S} und Ω_{\max} | 158 |
| 8.22 | Vortexstrukturen zwischen $N = 1$ und 4 | 159 |
| 8.23 | Wi - und N -Abhängigkeit der Geschwindigkeitsamplitude \dot{S} | 160 |

Danke...

Auch wenn mein Name auf dem Titelblatt steht, so standen hinter mir auch eine ganze Reihe von Personen, ohne die diese Arbeit nicht über das Stadium des dritten Kapitels hinausgekommen wäre – oder der Teil über den hydrodynamischen Rahmen *sehr* viel länger geworden wäre.

An erster Stelle möchte ich hier Prof. Dr. Christian Wagner für die Aufnahme als Doktorand danken – und auch für die am ersten Tag erfolgte Belehrung darüber, dass ich im Dienst keine Gefangenen befreien dürfe.

Elke Huschens war mir in vier Jahren Promotionszeit stets eine Hilfe, wenn es um Formalitäten innerhalb des Uni-Verwaltungsapparates ging. Noch wichtiger waren ihre Kenntnisse, im Bedarfsfall Hilfe auch mal ganz informell auf dem sehr schnellen Dienstweg zu organisieren.

Karin Kretschs Dienste als Labortechnikerin waren unverzichtbar für das Vortreiben dieser Arbeit, ihr sei hier nochmals ausdrücklich für ihren Einsatz und ihre präzise Arbeit gedankt (nicht so sehr für die Abrechnung über die im Rahmen der Arbeit verbrauchten Tracerpartikel).

Inspirierende Gespräche hatte ich auch mit Dr. Robert Poole, Dr. Manuel Alves und Prof. Anke Lindner – für die erhaltenen Anregungen und den Austausch an dieser Stelle nochmals herzlichen Dank. Ein besonderer weiterer Dank geht an unseren ehemaligen Doktoranden Dr. Christof Schäfer, der mich an das Teilgebiet der Rheologie herangeführt hat und dessen Arbeitsweise für mich inspirierend war.

Die feinmechanische Werkstatt des Instituts unter der Leitung von Michael Schmidt hat ebenfalls große Teile zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Ob es nun um das Drehen von Aluminiumteilen oder das Fräsen von Plexiglas (s. Kap. 6.1) ging, standen mir hier stets zuverlässige Mitarbeiter zur Verfügung. Ausdrücklich sei hier Peter Wagner für seine Arbeit an der CNC-Fräse gedankt – ohne Kanal keine Dissertation.

Weiterhin ausdrücklich danken möchte ich auch Herrn Stefan Loew aus der Elektronikwerkstatt des Instituts, dessen Geschick bei Reparatur und Umbau einiger Laborgeräte von großer Hilfe war.

Dafür, dass sich drei Jahre Arbeit nicht binnen einer falschen Schalterbetäti-

gung in Luft auflösen, muss ich Tom Knecht, Inhaber von Maintec Data Recovery und ebensolcher (wenn nicht größerer) SAAB-Enthusiast wie der Autor dieser Arbeit, für Rettung in höchster Not danken – Tack så mycket, Tom.

Aus meinem privaten Umfeld möchte ich hier neben meiner Mutter abschließend noch einmal meinem Vater Otmar Bohr danken, nicht nur für die Hilfe beim Druck der Arbeit und die Motivation in all den Jahren, sondern auch für die Unterstützung in den vergangenen Jahren und die Verfügbarkeit als Erdleiter.

Und natürlich Eva, Beate und Manuela... ihr wisst schon, warum.