

Niederfrequenzstabile Potenzialformulierungen zur
Finite-Elemente-Simulation elektromagnetischer
Felder im Frequenzbereich

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Ingenieurwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät II
- Physik und Mechatronik -
der Universität des Saarlandes

von

Martin Thomas Jochum

Saarbrücken

2013

Tag des Kolloquiums: 06.12.2013

Dekan: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Christian Wagner

Mitglieder des
Prüfungsausschusses: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Christoph Becher
Univ.-Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Michael Möller
Prof. Dr. Ir. Herbert De Gersem

Akademischer Mitarbeiter: Dr.-Ing. Björn Martin

*If you want to have good ideas you must have many ideas.
Most of them will be wrong, and what you have to learn is
which ones to throw away.*

Linus Pauling

In Erinnerung an meinen Vater

Danksagung

Besonders danken möchte ich meinem Doktorvater, Prof. Dr. Romanus Dyczij-Edlinger, der mir dieses hochinteressante Thema zur Verfügung gestellt hat. Die hilfreichen Diskussionen, die kritischen Anmerkungen sowie die Freiheiten, die mir bei der Bearbeitung des Themas eingeräumt wurden, weiß ich sehr zu schätzen. Dass mir auch über meine dreijährige Mitarbeiterzeit hinaus bis zum Ende des Promotionsvorhabens ein fester Arbeitsplatz am Lehrstuhl zur Verfügung stand, hat mir vieles erleichtert.

Des Weiteren möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Michael Möller und Prof. Dr. Ir. Herbert De Gerssem für ihr Interesse an dieser Arbeit, ihre Anmerkungen und die Übernahme des Koreferats bedanken. Außerdem danke ich Prof. Dr. Christoph Becher für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission sowie Dr.-Ing. Björn Martin für seine Tätigkeit als Beisitzer.

Weiterhin gilt mein Dank den aktuellen und ehemaligen Mitgliedern des Lehrstuhls für Theoretische Elektrotechnik für das angenehme Arbeitsklima, die vielen Diskussionen und die unterhaltsamen Stunden abseits des Lehrstuhlbetriebs. Außerdem bin ich ihnen sehr dankbar, dass sie im Vorfeld meines Kolloquiums durch ausgiebige Tests die Voraussetzungen für die Konferenzschaltung geschaffen haben.

Danken möchte ich auch meinen Vorgesetzten bei der AG der Dillinger Hüttenwerke, Dr. Thomas Kiefer und Dr. Daniel Wild, für das Verständnis und Entgegenkommen während der letzten Phase der Fertigstellung dieser Arbeit.

Ebenso danke ich meiner Familie, insbesondere meiner Mutter Bärbel Jochum, für den Rückhalt und die Unterstützung während der gesamten Zeit des Studiums und der Promotion. Ich schätze mich glücklich einen Freundeskreis zu besitzen, der in schwierigen Phasen für die nötige Ablenkung gesorgt hat und darüber hinaus mein Interesse für die Wissenschaft teilt.

Zuletzt gilt mein besonderer Dank meiner Frau Anke Jochum. Neben ihren Anmerkungen während des Korrekturlesens hat sie durch ihre Geduld, ihre Unterstützung und ihren Verzicht auf viel gemeinsame Freizeit maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden neue niederfrequenzstabile Finite-Elemente (*FE*) Formulierungen zur numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder im Frequenzbereich vorgestellt. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist eine Analyse der Niederfrequenzeigenschaften und -probleme der weit verbreiteten elektrischen Feldformulierung, welche separat für den verlustlosen und verlustbehafteten Fall durchgeführt wird.

Der Hauptbeitrag der Arbeit besteht in einer Reihe neuer, niederfrequenzstabiler Potenzialformulierungen für den verlustlosen und verlustbehafteten Fall. Die Niederfrequenzeigenschaften der vorgestellten Formulierungen werden in beiden Fällen untersucht und es wird gezeigt, dass die aus der Feldformulierung bekannten Instabilitäten nicht auftreten. Weiterhin wird eine geeignete Kopplung der Formulierungen vorgestellt, welche eine niederfrequenzstabile Simulation teilweise verlustloser und teilweise verlustbehafteter Strukturen erlaubt. Die Zuverlässigkeit und Stabilität aller vorgestellten Formulierungen wird anhand numerischer Ergebnisse belegt.

Abstract

A new class of low-frequency stable finite element (FE) formulations for the simulation of electromagnetic fields in frequency domain is presented in this thesis. The starting point is an analysis of the low-frequency properties and problems of the widespread electric field formulation, which is carried out separately for the lossless and the lossy case.

The main contribution of this thesis is a new class of low-frequency stable potential-formulations for the lossless and lossy case. In both cases, the low-frequency properties of the presented formulations are analyzed and it is shown that the low-frequency instabilities of the field formulation are eliminated. Furthermore it is shown how the formulations for the lossless and lossy case can be coupled to yield a formulation, which is appropriate for the simulation of partially lossless and partially lossy structures. Numerical results are provided for each presented formulation to validate their reliability and stability.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Einleitung und Motivation | 1 |
| 1.1 | Motivation | 1 |
| 1.2 | Stand der Forschung | 3 |
| 1.3 | Aufbau dieser Arbeit | 5 |
| 2 | Mathematische und physikalische Grundlagen | 7 |
| 2.1 | Maxwell-Gleichungen | 7 |
| 2.2 | Übergangsbedingungen an Materialgrenzen | 12 |
| 2.2.1 | Elektrische Feldstärke und magnetische Erregung | 13 |
| 2.2.2 | Flussdichten und elektrische Stromdichte | 13 |
| 2.2.3 | Zusammenfassung der Übergangsbedingungen | 14 |
| 2.3 | Randbedingungen | 15 |
| 2.4 | Elektromagnetische Potenziale | 16 |
| 2.4.1 | Elektrisches Skalar- und magnetisches Vektorpotenzial | 16 |
| 2.4.2 | Eichinvarianz der physikalischen Felder | 17 |
| 2.5 | Angepasste Funktionenräume | 18 |
| 2.5.1 | Allgemeines | 18 |
| 2.5.2 | De Rham-Komplex und exakte Sequenz | 20 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Numerische Berechnung elektromagnetische Felder | 25 |
| 3.1 | Finite Elemente Ansatz | 25 |
| 3.1.1 | Ansatzräume | 26 |
| 3.2 | Ansatzfunktionen | 27 |
| 3.2.1 | Basis des $\mathcal{V}^{h,p}$ | 28 |
| 3.2.2 | Basis des $\mathcal{W}^{h,p}$ | 29 |
| 3.2.3 | Basis des $\mathcal{D}^{h,p}$ und des $\mathcal{Z}^{h,p}$ | 29 |
| 3.3 | Eigenschaften der Ansatzfunktionen | 30 |
| 3.3.1 | Diskreter Gradienten-Operator | 30 |
| 3.3.2 | Baum-Kobaum-Aufspaltung | 31 |
| 4 | Elektrische Feldformulierung | 35 |
| 4.1 | Verlustloser Fall | 35 |
| 4.1.1 | Annahmen und Randwertproblem | 35 |
| 4.1.2 | Schwache Formulierung des Randwertproblems | 39 |
| 4.1.3 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 41 |
| 4.1.4 | Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten | 42 |
| 4.1.5 | Numerische Ergebnisse | 48 |
| 4.2 | Verlustbehafteter Fall | 51 |
| 4.2.1 | Annahmen und Randwertproblem | 51 |
| 4.2.2 | Schwache Formulierung des Randwertproblems | 53 |
| 4.2.3 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 54 |
| 4.2.4 | Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten | 55 |
| 4.2.5 | Numerische Ergebnisse | 61 |
| 4.3 | Anmerkungen | 64 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Potenzialformulierung - Verlustloser Fall | 67 |
| 5.1 | Allgemeine Annahmen | 67 |
| 5.2 | Ungeeichte Formulierung und Baum-Kobaum-Eichung | 69 |
| 5.2.1 | Randwertproblem | 69 |
| 5.2.2 | Schwache Formulierung | 70 |
| 5.2.3 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 72 |
| 5.2.4 | Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten | 77 |
| 5.2.5 | Baum-Kobaum-Eichung | 81 |
| 5.2.6 | Numerische Ergebnisse | 86 |
| 5.3 | Statische Eichung | 89 |
| 5.3.1 | Eichbedingung | 89 |
| 5.3.2 | Schwache Formulierung und Randwertproblem | 91 |
| 5.3.3 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 92 |
| 5.3.4 | Niederfrequenzverhalten und Eigenwerte | 94 |
| 5.3.5 | Numerische Ergebnisse | 97 |
| 5.4 | Gemischte Formulierung | 100 |
| 5.4.1 | Eichbedingung und Randwertproblem | 100 |
| 5.4.2 | Schwache Formulierung | 101 |
| 5.4.3 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 101 |
| 5.4.4 | Frequenzverhalten der Systemmatrix | 103 |
| 5.4.5 | Numerische Ergebnisse | 104 |
| 5.5 | Vergleich der Formulierungen | 108 |
| 6 | Potenzialformulierung - Verlustbehafteter Fall | 111 |
| 6.1 | Allgemein | 111 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.2 | Ungeeichte Formulierung und Baum-Kobaum-Eichung | 113 |
| 6.2.1 | Randwertproblem und schwache Formulierung | 113 |
| 6.2.2 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 115 |
| 6.2.3 | Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten | 116 |
| 6.2.4 | Baum-Kobaum-Eichung | 118 |
| 6.2.5 | Numerische Ergebnisse | 119 |
| 6.3 | Stationäre Eichung | 122 |
| 6.3.1 | Eichbedingung und Randwertproblem | 122 |
| 6.3.2 | Schwache Formulierung | 123 |
| 6.3.3 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 124 |
| 6.3.4 | Eigenwertstruktur und Frequenzverhalten | 126 |
| 6.3.5 | Numerische Ergebnisse | 128 |
| 6.4 | Gemischte Formulierung | 132 |
| 6.4.1 | Eichbedingung | 132 |
| 6.4.2 | Schwache Formulierung | 133 |
| 6.4.3 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 134 |
| 6.4.4 | Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten | 136 |
| 6.4.5 | Numerische Ergebnisse | 141 |
| 6.5 | Vergleich der Formulierungen | 143 |
| 7 | Kopplung der Formulierungen an Grenzflächen | 147 |
| 7.1 | Allgemeines | 147 |
| 7.2 | Testprobleme | 149 |
| 7.2.1 | Teilweise gefüllter Resonator | 149 |
| 7.2.2 | Kondensator mit Dielektrikum | 150 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7.2.3 | <i>RLC</i> -Serienschwingkreis | 151 |
| 7.2.4 | Koaxialkabel | 152 |
| 7.3 | Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen | 152 |
| 7.3.1 | Schwache Formulierung | 152 |
| 7.3.2 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 156 |
| 7.3.3 | Numerische Ergebnisse | 159 |
| 7.4 | Kopplung der statischen Eichung und der stationären Eichung | 166 |
| 7.4.1 | Schwache Formulierung | 166 |
| 7.4.2 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 168 |
| 7.4.3 | Numerische Ergebnisse | 173 |
| 7.5 | Kopplung der gemischten Formulierungen | 180 |
| 7.5.1 | Schwache Formulierung | 180 |
| 7.5.2 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 181 |
| 7.5.3 | Numerische Ergebnisse | 185 |
| 7.6 | Kopplung von Baum-Kobaum-Eichung und gemischter Formulierung | 192 |
| 7.6.1 | Schwache Formulierung | 192 |
| 7.6.2 | Finite-Elemente-Gleichungssystem | 194 |
| 7.6.3 | Numerische Ergebnisse | 198 |
| 7.7 | Vergleich der Formulierungen | 205 |
| 8 | Zusammenfassung und Ausblick | 209 |
| | Abbildungsverzeichnis | 216 |
| | Tabellenverzeichnis | 218 |
| | Literaturverzeichnis | 228 |

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

1.1 Motivation

Aufgrund steigender Betriebsfrequenzen ist in einer Vielzahl technischer Anwendungen heutzutage die Berücksichtigung elektromagnetischer Wellenphänomene erforderlich. Durch die zunehmende Komplexität integrierter elektronischer Schaltungen bei gleichzeitig immer kürzeren Produktlebenszyklen kommt der elektromagnetischen Feldsimulation im Rahmen der Produktentwicklung eine immer größere Bedeutung zu, da sich mit ihrer Hilfe zeit- und kostenintensive Versuche vermeiden oder zumindest in ihrer Anzahl reduzieren lassen. Eine analytische Berechnung der Eigenschaften dieser integrierten Schaltungen ist im Allgemeinen wegen der komplexen Geometrien, Randbedingungen und Materialeigenschaften nicht möglich, sodass numerische Näherungsverfahren eingesetzt werden müssen.

Die hierbei zum Einsatz kommenden Ansätze zur numerischen Lösung der elektromagnetischen Randwertprobleme lassen sich grob in Integral- und Differenzialgleichungsverfahren einteilen:

Die Integralgleichungsverfahren basieren auf einer Diskretisierung der Quellen der elektromagnetischen Felder und besitzen den großen Vorteil, dass die Berücksichtigung unendlicher Feldgebiete, z. B. bei der Betrachtung von Abstrahlung in den Freiraum, ohne zusätzliche Näherungen möglich ist. Da die Integralgleichungsverfahren auf Fundamentallösungen des zugrunde liegenden Differenzialoperators aufbauen, können mit dieser Klasse von Verfahren auch elektrisch sehr große Strukturen behandelt werden, ohne dass numerische Dispersion [Mon08, S. 344ff] auftritt. Weiterhin erfordern sie häufig nur die Diskretisierung von Oberflächen. Die Berücksichtigung nichtlinearer oder inhomogener Materialien erfordert jedoch in der Regel auch bei diesen Verfahren eine Diskretisierung des Volumens.

Im Allgemeinen führt diese Klasse von Verfahren zu vollbesetzten linearen Glei-

chungssystemen, deren Erstellung und Lösung hohe Anforderungen im Hinblick auf die Anzahl der Rechenoperationen und den benötigten Speicher stellt. Zur zumindest teilweisen Behebung dieses Nachteils existieren iterative Verfahren, welche dazu dienen, die Wirkung der Systemmatrix auf einen gegebenen Vektor effizient und ohne die vollständige Bestimmung der Systemmatrix zu berechnen. Hierzu zählen insbesondere schnelle Multipolmethoden (*FMM*, engl. *fast multipole method*) [Rok85, CRW93] und ihre mehrstufigen Verallgemeinerungen [GR87, SLC97], sowie die *adaptive cross approximation* [Beb00] oder hierarchische Matrizen [Hac99]. Mit Hilfe dieser Verfahren ist es auch im Rahmen von Integralgleichungsverfahren möglich, lineare Gleichungssysteme mit mehr als einer Milliarde Unbekannten zu lösen [PPY⁺12]. Allerdings stellen diese Verfahren bei der Implementierung einen mitunter nicht unerheblichen Mehraufwand dar.

Die zweite große Verfahrensklasse zur numerischen Simulation elektromagnetischer Felder stellen die Differenzialgleichungsverfahren dar. Im Gegensatz zu den Integralgleichungsverfahren werden mit ihrer Hilfe die Felder direkt diskretisiert, was dazu führt, dass zunächst nur endliche Feldgebiete betrachtet werden können. Es existieren jedoch unterschiedliche Ansätze, um den umgebenden Freiraum zu berücksichtigen: Für den statischen beziehungsweise quasi-statischen Fall sei hierzu auf den Übersichtsartikel [CK97] verwiesen. Zur Berücksichtigung der Abstrahlung im Hochfrequenzfall werden insbesondere absorbierende Randbedingungen (*ABC*, engl. *absorbing boundary conditions*) [BT80, Giv91, Web99, Giv04], *perfectly matched layers* (*PML*) [Ber94, SKLL95, CJM97] oder auch die Kopplung zu Integralgleichungsverfahren [LVZL05, ZVL06] eingesetzt. Zur Simulation elektromagnetischer Felder im Zeitbereich werden hauptsächlich die Methode der Finiten Differenzen (*FDTD*, engl. *finite difference time domain*) [Yee66] sowie die Finite Integrationstechnik (*FIT*) [Wei96, CW01] verwendet. Das *FDTD*-Verfahren basiert auf einer direkten Approximation der Differenzialoperatoren durch Differenzenquotienten, während die *FIT* in ihrer einfachsten Form mit den integralen Größen der Maxwell-Gleichungen auf zwei zueinander dualen, orthogonalen Gittern arbeitet. Der Vorteil dieser Verfahren liegt darin, dass sie die Verwendung expliziter Zeitschrittverfahren ermöglichen, sodass die Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Felder ohne Faktorisierung einer Matrix möglich ist. Ein weiterer Vorteil, der sich hieraus ergibt, ist die Tatsache, dass sich diese Verfahren sehr gut parallelisieren lassen. Komplexe, krummlinige Geometrien sowie inhomogenes und anisotropes Materialverhalten kann jedoch nur mit einigem Mehraufwand berücksichtigt werden. Die Finite-Elemente-Methode (*FEM*) [SF08] wird bei elektromagnetischen Randwertproblemen hingegen zumeist im Frequenzbereich eingesetzt [SF96]. Zur Zeitbereichssimulation wird die *FEM* hauptsächlich bei nichtlinearen Wirbelstromproblemen [BP89, BPR95] oder in Form *diskontinuierlicher Galerkin Verfahren* eingesetzt [RH73, HW08, GWC09]. Letztere erlauben - im Gegensatz zur normalen *FEM* - den Einsatz expliziter Zeitschrittverfahren mit vertretbarem Aufwand. Der große Vorteil der *FEM* gegenüber den zuvor angesprochenen Differenzenverfahren liegt in ihrer Flexibilität im Hinblick auf die Geometrie und inhomogene Materialeigenschaften sowie in der Tatsache, dass die Realisierung

von Verfahren höherer Ordnung ohne weiteres möglich ist. Im Gegensatz zu den Differenzenverfahren basiert die *FEM* auf einer Variationsformulierung des elektromagnetischen Randwertproblems und nicht direkt auf einer Approximation des zugrunde liegenden Differenzialoperators. In dieser Arbeit werden ausschließlich lineare und zeitinvariante Materialien betrachtet, sodass sich eine Betrachtung im Frequenzbereich anbietet.

Bei der Beschreibung elektromagnetischer Strukturen im Frequenzbereich ist häufig das Verhalten des betrachteten Systems über einen großen Frequenzbereich bis hinab in den statischen beziehungsweise stationären Fall von Interesse. Dies ist z. B. für *Mixed-Signal*-Anwendungen relevant, bei welchen integrierte Schaltungen zur Weiterverarbeitung analoger und digitaler Signale betrachtet werden [DV98]. Aber auch im Hinblick auf die elektromagnetische Verträglichkeit ist die Charakterisierung in einem breiten Frequenzspektrum von Interesse. Diese breitbandige Charakterisierung ist in der Regel sehr aufwändig, da die entsprechenden Gleichungssysteme an sehr vielen Frequenzpunkten gelöst werden müssen. Es existieren jedoch verschiedene Methoden zur *Modellordnungsreduktion* mit denen diese breitbandige Charakterisierung effizient durchgeführt werden kann, vgl. [Fre03, SFDE09, Fhide08, FDE10] und die darin jeweils referenzierte Literatur. Problematisch ist jedoch, dass viele der derzeit verfügbaren Hochfrequenzformulierungen, hierunter insbesondere die häufig verwendete elektrische Feldformulierung, unter Niederfrequenzinstabilitäten leiden, sodass im Rahmen der zuvor erwähnten Verfahren zur Modellordnungsreduktion zum einen der statische beziehungsweise stationäre Grenzfall als Entwicklungspunkt nicht in Frage kommen und zum anderen auch eine Auswertung des reduzierten Modells in diesen Fällen nicht möglich ist.

Ein weiteres Problem stellen Strukturen mit sehr großen Aspektverhältnissen dar. Hierbei kann es vorkommen, dass für die gesamte Struktur Wellenphänomene eine wesentliche Rolle spielen, während bei lokalen Teilstrukturen im wesentlichen statische oder stationäre Verhältnisse vorliegen. Eine im Niederfrequenzfall instabile Formulierung führt in diesem Fall zu Problemen.

1.2 Stand der Forschung

Aktuell existieren verschiedene Ansätze, welche dazu dienen, die zuvor angesprochene Niederfrequenzinstabilität zumindest in Spezialfällen zu beheben. Grundsätzlich können diese Ansätze in drei verschiedene Gruppen eingeteilt werden:

Die Idee der *LU Recombination*, welche im Bereich der Integralgleichungen zur Behebung der dort auftretenden Niederfrequenzinstabilität verwendet wird [KH05], wurde von den gleichen Autoren in [KH08] auf die *FE*-Formulierung der elektrischen Feldformulierung angewendet. Bei diesem Vorgehen handelt es sich um einen rein

algebraischen Ansatz, da versucht wird, die Stabilität der Formulierung durch Manipulation der Faktorisierung der Systemmatrix zu erreichen. Grundsätzlich wurde in [KH08] jedoch ausschließlich der verlustlose Fall betrachtet.

Ein hierzu alternativer Ansatz, welcher auf einer Eigenwertzerlegung der relevanten Systemmatrizen basiert, wurde in [ZJ10b, ZJ10a, ZJ10c, ZJ11] vorgestellt. Hierbei wurden auch explizit verlustbehaftete Strukturen berücksichtigt. Damit das dort vorgestellte Vorgehen praktikabel ist, muss es jedoch möglich sein, die Eigenwertzerlegung des jeweiligen Problems effizient zu berechnen, was mitunter schwer realisierbar sein kann. Wie dieser Nachteil zumindest teilweise behoben werden kann wurde in [ZJ12a, ZJ12b] gezeigt. All diesen Betrachtungen ist gemeinsam, dass innerhalb der leitfähigen Bereiche bei der Eigenwertzerlegung quasi-statische Näherungen gemacht werden, um nicht ein echt quadratisches Eigenwertproblem lösen zu müssen. Bei der Simulation von Strukturen mit hohen Leitfähigkeiten bei nicht allzu hohen Frequenzen ist diese Näherung sicherlich sinnvoll. Im allgemeinsten Fall stellt sie jedoch eine nicht zu vernachlässigende Einschränkung dar.

Die dritte Gruppe von Verfahren basiert letztlich auf einer Umformulierung des ursprünglichen Problems in eine Form, in welcher die Niederfrequenzstabilität gewährleistet ist. Im Wesentlichen werden hierbei Feldformulierungen in Kombination mit Lagrange-Multiplikatoren sowie Potenzialformulierungen verwendet. Insbesondere die in [DV98] im Rahmen der *hp*-adaptiven *FEM* vorgestellte Formulierung stellt eine stabilisierte Feldformulierung dar. Hierauf aufbauend wurde in [SSBS10] eine alternative Formulierung vorgestellt, welche den Ansatz aus [DV98] um einen Strafterm, ähnlich wie in [KMEK90] vorgeschlagen, erweitert. Nachteilig bei diesem Vorgehen ist generell, dass die Rekonstruktion des magnetischen Feldes im statischen beziehungsweise stationären Grenzfall aus der Lösung für das elektrische Feld nicht beziehungsweise nur mit zusätzlichem Aufwand möglich ist.

Potenzialformulierungen stellen hierzu eine Alternative dar, welche diesen Nachteil nicht mit sich bringen. In [DEPL99, DEPL00] wurde eine Klasse von Potenzialformulierungen für den verlustlosen Fall sowie die Zusammenhänge zwischen Potenzialformulierungen und Feldformulierungen mit Lagrange-Multiplikatoren betrachtet. Der Fall $(\beta, \gamma^2) = (1, 0)$ in [DEPL99] ergibt hierbei im Wesentlichen wieder die Formulierung aus [DV98]. Die Wahl $(\beta, \gamma^2) = (k_0, 1)$ in Kombination mit einer Baumeichung [Cen91] wurde in [HFDE03] im Kontext hierarchischer Multigridlöser erfolgreich angewendet. Wie die Feldformulierungen führen die zuvor angesprochenen Potenzialformulierungen zu komplex symmetrischen Gleichungssystemen. Eine hiervon abweichende Potenzialformulierung, welche auch den verlustbehafteten Fall einschließt, wurde in [HKO08] eingeführt. Hier werden unterschiedliche Ansätze für die Potentiale im verlustfreien und verlustbehafteten Fall gemacht, um die Stabilität der Formulierung zu gewährleisten. Die vorgestellte Formulierung hat jedoch den Nachteil, dass das resultierende Gleichungssystem immernoch singular und darüber hinaus unsymmetrisch ist. Die Singularität des Gleichungssystems ist jedoch insofern kein Problem, da gewährleistet ist, dass die rechte Seite im Bildraum der Matrix liegt

und somit eine iterative Lösung möglich ist. Geeignete Vorkonditionierer für die iterative Lösung der Gleichungssysteme aus [HKO08] wurden in [KBOH09, OBHka10] vorgestellt.

1.3 Aufbau dieser Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Klasse von Potenzialformulierungen zur Behebung der Niederfrequenzinstabilität der Feldformulierungen vorgestellt. In Kapitel 2 werden die notwendigen physikalischen und mathematischen Grundlagen, welche zur Beschreibung elektromagnetischer Felder erforderlich sind, eingeführt. Zur Darstellung der Maxwell-Gleichungen wird ein klassischer vektoranalytischer Ansatz gewählt. Für eine Darstellung mit Methoden der Differenzialgeometrie oder algebraischen Topologie sei an dieser Stelle auf die Literatur, wie zum Beispiel [Des81, TK01, HO03, GK11], verwiesen. Auf einige Aspekte, welche bei der Diskretisierung der Gleichungen aus Kapitel 2 zu berücksichtigen sind, wird in Kapitel 3 eingegangen. Im Anschluss hieran wird in Kapitel 4 die elektrische Feldformulierung des elektromagnetischen Randwertproblems sowohl im Kontinuierlichen als auch im Diskreten hergeleitet und ihre Niederfrequenzeigenschaften charakterisiert. Die Betrachtungen werden hierbei für den verlustfreien Fall - Abschnitt 4.1 - und den verlustbehafteten Fall - Abschnitt 4.2 - separat durchgeführt. Kapitel 5 ist dann den Potenzialformulierungen im verlustfreien Fall gewidmet. Hier werden drei unterschiedliche Formulierungen betrachtet und auf ihr Frequenzverhalten hin untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass die resultierenden linearen Gleichungssysteme - abgesehen von den Resonanzfrequenzen - regulär bleiben und daher auch im statischen Grenzfall eine direkte Lösung der Gleichungen möglich ist. Abschließend wird ein Vergleich der vorgestellten Formulierungen durchgeführt. Im Anschluss an die Potenzialformulierungen im verlustfreien Fall wird in Kapitel 6 der verlustbehaftete Fall behandelt. Wiederum werden drei unterschiedliche Potenzialformulierungen vorgestellt, welche die Niederfrequenzinstabilität der Feldformulierung beheben. Das Kapitel schließt mit einem Vergleich der Formulierungen anhand eines Modellproblems. In Kapitel 7 wird der gemischte Fall, das heißt Strukturen welche sowohl verlustfreie als auch verlustbehaftete Teilgebiete besitzen, betrachtet. Um diesen behandeln zu können, werden verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, wie die Formulierungen aus Kapitel 5 und Kapitel 6 an Grenzflächen zwischen Medien zu einer Formulierung für das Gesamtgebiet gekoppelt werden können. Die vier vorgestellten Varianten führen dabei auf lineare Gleichungssysteme mit unterschiedlichen Eigenschaften, welche jedoch alle im statischen Grenzfall regulär bleiben. Abschließend werden diese vier Formulierungen anhand eines Modellproblems einander gegenübergestellt.

Kapitel 2

Mathematische und physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen und physikalischen Grundlagen erläutert, welche zur Beschreibung elektromagnetischer Felder benötigt werden. In Abschnitt 2.1 wird auf die Maxwell-Gleichungen, Materialbeziehungen und die Transformation in den Frequenzbereich eingegangen. Abschnitt 2.2 behandelt die Übergangsbedingungen an Grenzflächen und in Abschnitt 2.3 werden geeignete Randbedingungen vorgestellt. Die Einführung elektromagnetischer Potentiale folgt in Abschnitt 2.4. Das Kapitel schließt mit einem kurzen Überblick über angepasste Funktionenräume in Abschnitt 2.5.

2.1 Maxwell-Gleichungen

Die Grundlage zur mathematischen Modellierung der in dieser Arbeit betrachteten elektromagnetischen Strukturen sind die Maxwell-Gleichungen [Max62, Max65, Max73a, Max73b]. Im Rahmen der klassischen Feldtheorie ist mit ihrer Hilfe eine Beschreibung aller elektromagnetischen Phänomene von der Elektrostatik und stationären Magnetfeldern über Wirbelstromprobleme bis hin zur Wellenausbreitung möglich. Den folgenden Überlegungen wird ein Feldgebiet Ω mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$ zugrunde gelegt, in welchem die Verläufe der elektromagnetischen Feldgrößen betrachtet werden. Beispielhaft ist ein solches Feldgebiet in Abbildung 2.1.1 dargestellt. Auf die Bedeutung der dort aufgeführten Größen wird im Folgenden eingegangen. Im gegebenen Feldgebiet Ω lauten die differenziellen Maxwell-Gleichungen in ihrer allgemeinen zeitabhängigen Form, vgl. [Har01, S. 2], [Jac06, S. 3], [RC09, S. 21],

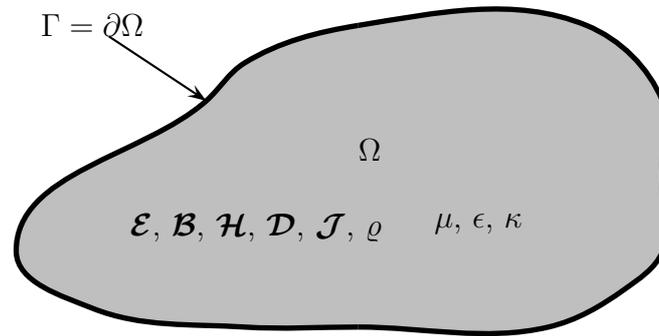


Abbildung 2.1.1: Beispielhaftes Feldgebiet.

| Symbol | Bezeichnung | SI-Einheit |
|---------------|-------------------------------|-------------------|
| \mathcal{E} | Elektrische Feldstärke | V/m |
| \mathcal{H} | Magnetische Erregung | A/m |
| \mathcal{D} | Elektrische Flussdichte | C/m ² |
| \mathcal{B} | Magnetische Flussdichte | Wb/m ² |
| \mathcal{J} | Elektrische Stromdichte | A/m ² |
| ϱ | Elektrische Raumladungsdichte | C/m ³ |

Tabelle 2.1: Elektromagnetische Feldgrößen und ihre SI-Einheiten.

[Str07, S. 1-9]

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + \mathcal{J}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \varrho, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0. \quad (2.1d)$$

Hierin bezeichnet \mathcal{E} die *elektrische Feldstärke*, \mathcal{D} die *elektrische Flussdichte*, \mathcal{H} die *magnetische Erregung*, \mathcal{B} die *magnetische Flussdichte*, \mathcal{J} die *elektrische Stromdichte* und ϱ die *elektrische Raumladungsdichte*. Diese Angaben sind zusammen mit den jeweiligen physikalischen Dimensionen in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Die Gleichungen (2.1) werden in der angegebenen Reihenfolge als *Faradaysches Induktionsgesetz*, *Ampèrescher Durchflutungssatz*, *elektrische Flussbilanz* und *magnetische Flussbilanz* bezeichnet. Ein weiterer wichtiger Zusammenhang, die *Kontinuitätsgleichung für die elektrische Stromdichte*, lautet

$$\nabla \cdot \mathcal{J} + \frac{\partial}{\partial t} \varrho = 0. \quad (2.1e)$$

Sie kann durch Bildung der Divergenz von (2.1b) und unter Ausnutzung von (2.1c) zusammen mit der Identität [Nol06, S. 59], [RC09, S. 625]

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathcal{H}) = 0 \quad (2.2)$$

aus den anderen Maxwell-Gleichungen hergeleitet werden und drückt in differenzieller Form die Erhaltung der elektrischen Ladung aus. Abgesehen von der differentiellen bzw. lokalen Darstellung der Maxwell-Gleichungen ist es möglich, diese in integraler Form anzugeben. Hierzu werden (2.1a) und (2.1b) über eine Fläche A innerhalb des Feldgebietes Ω integriert und anschließend der Satz von Stokes [Kön04, S. 438] angewendet. Bei (2.1c), (2.1d) und (2.1e) erfolgt die Integration über ein Teilvolumen $V \subset \Omega$ und anschließend wird der Satz von Gauß [Kön04, S. 384] angewendet. Hiermit ergeben sich die Maxwell-Gleichungen in integraler Form:

$$\oint_{\partial A} \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot d\boldsymbol{\Gamma}, \quad (2.3a)$$

$$\oint_{\partial A} \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{d}{dt} \int_A \boldsymbol{\mathcal{D}} \cdot d\boldsymbol{\Gamma} + \int_A \boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot d\boldsymbol{\Gamma}, \quad (2.3b)$$

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{\mathcal{D}} \cdot d\boldsymbol{\Gamma} = \int_V \varrho \, d\Omega, \quad (2.3c)$$

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot d\boldsymbol{\Gamma} = 0, \quad (2.3d)$$

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot d\boldsymbol{\Gamma} = -\frac{d}{dt} \int_V \varrho \, d\Omega. \quad (2.3e)$$

Sowohl in der differentiellen als auch in der integralen Darstellung der Maxwell-Gleichungen ist es zweckmäßig die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ in zwei Anteile aufzuspalten, sodass

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{\mathcal{J}}_p + \boldsymbol{\mathcal{J}}_s \quad (2.4)$$

gilt. Mit dem Index p bzw. s werden *feldunabhängige, primäre* bzw. *feldabhängige, sekundäre Quellen* bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit werden als primäre Quellen nur etwaige eingepreßte Stromdichten und als sekundäre Quellen ausschließlich Leitungsströme, welche dem *Ohmschen Gesetz* (2.5c) genügen, betrachtet. Durch die Maxwell-Gleichungen, egal ob in ihrer differentiellen Form (2.1) oder ihrer integralen Form (2.3), werden sowohl die Dynamik als auch die Erhaltungseigenschaften des elektromagnetischen Feldes beschrieben. Für eine vollständige Charakterisierung der Felder sind jedoch zusätzliche Gleichungen erforderlich, welche die Felder untereinander in Beziehung setzen. Diese *Konstitutivgleichungen* dienen dazu, den Einfluss vorhandener Materialien auf den Verlauf der Felder zu berücksichtigen und beschreiben somit das mikroskopische Verhalten der Materie auf makroskopischer Ebene. An dieser Stelle wird die vereinfachende Annahme gemacht, dass nur die Feldpaare $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{J}}_s$ und $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ sowie $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ durch eine entsprechende Konstitutivgleichung miteinander verknüpft sind. Im Allgemeinen können die Abhängigkeiten der Felder untereinander jedoch deutlich komplexer sein, vgl. [RC09, S. 27ff]. Die

Zusammenhänge zwischen den genannten Feldpaaren werden in der Form

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{E}, \quad (2.5a)$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H} = \mu_0 \mu_r \mathcal{H}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H} = \nu \mathcal{B} = \mu_0^{-1} \nu_r \mathcal{B} \quad (2.5b)$$

$$\mathcal{J}_s = \kappa \mathcal{E} \quad (2.5c)$$

angesetzt. Die Größen ϵ_0 , ϵ_r , μ_0 , μ_r , ν_r und κ bezeichnen in der angegebenen Reihenfolge die *Permittivität des Vakuums*, den *relativen Permittivitätstensor*, die *Permeabilität des Vakuums*, den *relativen Permeabilitätstensor*, den *relativen Reluktivitätstensor* sowie den *elektrischen Leitfähigkeitstensor*. Im allgemeinsten Fall sind diese Materialtensoren sowohl vom Ort, von der betrachteten Richtung, von der Zeit sowie von den Feldern selbst abhängig und darüber hinaus hysteresebefahet, vgl. [Fas05], [Hum01]. Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit jedoch ausschließlich der Frequenzbereich betrachtet werden soll, wird an dieser Stelle die zusätzliche Annahme gemacht, dass alle nichtlinearen Effekte sowie die Zeitabhängigkeit vernachlässigt werden können. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass es sich um *reziproke Materialien* handelt, was bedeutet, dass die Materialtensoren symmetrisch sind:

$$\epsilon_r = \epsilon_r^T, \quad \mu_r = \mu_r^T, \quad \kappa = \kappa^T. \quad (2.6)$$

Als letzte Eigenschaft wird für den relativen Permittivitäts- und Permeabilitätstensor gefordert, dass es sich um positiv definite Tensoren handelt, während für den Leitfähigkeitstensor lediglich positiv semi-definites Verhalten gefordert wird:

$$\mathcal{E} \cdot (\epsilon_r \mathcal{E}) > 0, \quad \forall \mathcal{E} \neq 0, \quad (2.7a)$$

$$\mathcal{H} \cdot (\mu_r \mathcal{H}) > 0, \quad \forall \mathcal{H} \neq 0, \quad (2.7b)$$

$$\mathcal{E} \cdot (\kappa \mathcal{E}) \geq 0, \quad \forall \mathcal{E} \neq 0. \quad (2.7c)$$

Abkürzend wird hierfür im weiteren Verlauf der Arbeit die Notation

$$\mathcal{E} \cdot (\epsilon_r \mathcal{E}) > 0, \forall \mathcal{E} \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_r > 0 \quad (2.8a)$$

beziehungsweise

$$\mathcal{E} \cdot (\epsilon_r \mathcal{E}) \geq 0, \forall \mathcal{E} \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_r \geq 0 \quad (2.8b)$$

verwendet. Aufgrund der Linearität der Konstitutivgleichungen ist es möglich, die explizite Zeitabhängigkeit der Felder zu eliminieren, indem zeitharmonische Felder betrachtet werden. Dies entspricht der Einschränkung auf eingeschwungene Zustände bei einer einzelnen Kreisfrequenz ω , nachdem möglicherweise vorhandene anfängliche transiente Vorgänge abgeklungen sind. Für die Felder wird in diesem Zusammenhang eine Zeitabhängigkeit der Form $e^{j\omega t}$ angenommen, wobei $j^2 = -1$ gelten soll. Für die zugehörigen Größen im Zeitbereich ergibt sich hieraus die Darstellung

$$\mathcal{F} = \Re \{ \mathbf{F} e^{j\omega t} \}, \quad (2.9a)$$

$$\mathcal{F} = \Re \{ F e^{j\omega t} \}. \quad (2.9b)$$

Die Betrachtung im Frequenzbereich hat den Nachteil, dass gewisse Einschränkungen hinsichtlich des zulässigen Materialverhaltens gemacht werden müssen, allerdings ergibt sich der Vorteil, dass alle auftretenden Zeitableitungen gemäß der Vorschrift

$$\frac{\partial}{\partial t} \circ \bullet j\omega \quad (2.10)$$

algebraisiert werden können [Che89, S. 335ff], [Har01, S. 16ff]. Werden die Zusammenhänge (2.9) und (2.10) in die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen eingesetzt und die Realteilbildung sowie der allen Termen gemeinsame Faktor $e^{j\omega t}$ unterdrückt, so ergeben sich die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung in differenzieller Form zu

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad (2.11a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}, \quad (2.11b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.11c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.11d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho. \quad (2.11e)$$

Hierin bezeichnen \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{J} und ρ die den Zeitbereichsgrößen \mathcal{E} , \mathcal{D} , \mathcal{H} , \mathcal{B} , \mathcal{J} und ϱ zugeordneten *Phasoren* im Frequenzbereich [RC09, S. 240f]. Durch Integration von (2.11) oder durch Anwenden der Transformationsvorschriften (2.9) und (2.10) auf (2.3) folgt die integrale Darstellung der Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -j\omega \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma}, \quad (2.12a)$$

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = j\omega \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Gamma} + \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma}, \quad (2.12b)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_V \rho d\Omega, \quad (2.12c)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma} = 0, \quad (2.12d)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = -j\omega \int_V \rho d\Omega. \quad (2.12e)$$

Analog zum zeitabhängigen Fall bleiben auch die Aufspaltung der Quellgrößen in primäre und sekundäre Quellen

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_s \quad (2.13)$$

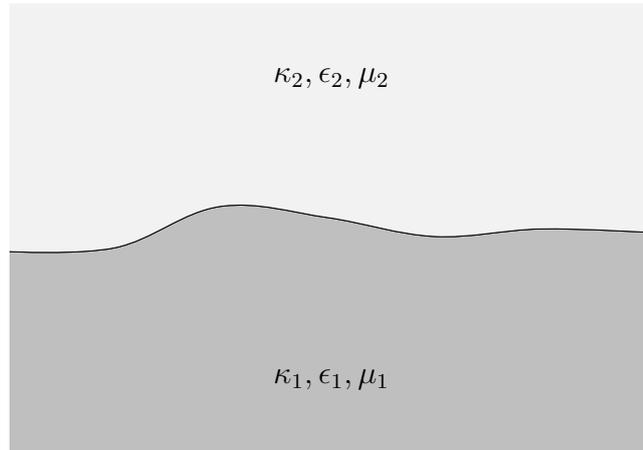


Abbildung 2.2.1: Grenzfläche zwischen zwei Materialbereichen.

sowie die Konstitutivgleichungen

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2.14b)$$

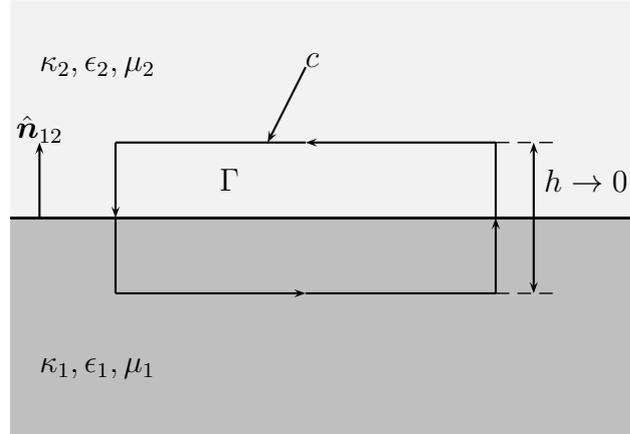
$$\mathbf{J}_s = \kappa \mathbf{E} \quad (2.14c)$$

in unveränderter Form gültig. Da die Materialparameter als linear und zeitinvariant vorausgesetzt wurden, ändern sie sich durch die hier durchgeführte Transformation nicht. Aus diesem Grund werden für die Materialparameter die gleichen Formelzeichen sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich verwendet.

2.2 Übergangsbedingungen an Materialgrenzen

Um das Verhalten der elektromagnetischen Felder bei einer sprunghaften Änderung der Materialeigenschaften zu beschreiben sind Übergangsbedingungen für die einzelnen Feldgrößen erforderlich. Betrachtet wird im Folgenden ein Übergang zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften wie in Abbildung 2.2.1 dargestellt.

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der Übergangsbedingungen dient die integrale Form (2.12) der Maxwell-Gleichungen. Es wird gefordert, dass diese Darstellung auch dann ihre Gültigkeit behält, wenn die entsprechenden Flächen in (2.12a) und (2.12b) bzw. Volumina in (2.12c), (2.12d) und (2.12e) über die Grenzfläche hinweg gehen, siehe [RC09, S. 63ff].

Abbildung 2.2.2: Integrationsgebiete für Übergangsbedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{H} .

2.2.1 Elektrische Feldstärke und magnetische Erregung

Zur Bestimmung der Übergangsbedingungen für die elektrische Feldstärke \mathbf{E} bzw. die magnetische Erregung \mathbf{H} wird in den integralen Maxwell-Gleichungen (2.12a) bzw. (2.12b) ein Integrationsweg, wie in Abbildung 2.2.2 dargestellt, betrachtet und anschließend der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ durchgeführt. Hieraus ergeben sich die Bedingungen [RC09, S. 62]

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.15a)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}, \quad (2.15b)$$

wobei \mathbf{K} eine möglicherweise vorhandene eingeprägte Flächenstromdichte darstellt, welche rein tangential zur Grenzfläche Γ fließt. Im Falle einer verschwindenden Flächenstromdichte \mathbf{K} und einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit endlicher Leitfähigkeit sind somit die Tangentialkomponenten von elektrischer Feldstärke \mathbf{E} und magnetischer Erregung \mathbf{H} stetig, während die Normalkomponenten in beiden Fällen Sprünge aufweisen können.

2.2.2 Flussdichten und elektrische Stromdichte

Analog zum Vorgehen im vorigen Abschnitt, wird zur Bestimmung der Übergangsbedingungen für die elektrische Flussdichte \mathbf{D} , die magnetische Flussdichte \mathbf{B} bzw. die elektrische Stromdichte \mathbf{J} in den integralen Maxwell-Gleichungen (2.11c), (2.11d) bzw. (2.11e) eine Integrationsfläche bzw. ein Integrationsvolumen, wie in Abbildung 2.2.3 dargestellt, betrachtet und der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ durchgeführt. Somit folgen für die Normalkomponenten der betrachteten Feldgrößen die Über-

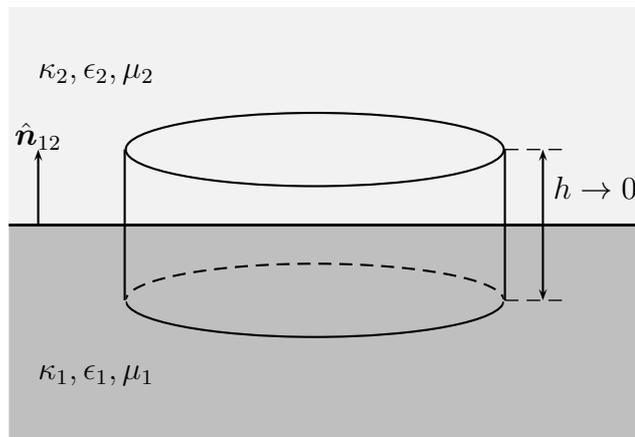


Abbildung 2.2.3: Integrationsgebiete für Übergangsbedingungen für \mathbf{D} , \mathbf{B} und \mathbf{J} .

gangsbedingungen [RC09, S. 63]

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (2.16a)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (2.16b)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -j\omega\sigma - \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{K}, \quad (2.16c)$$

wobei σ eine sich möglicherweise in der Grenzfläche ausbildende Flächenladung, \mathbf{K} - wie zuvor - eine Flächenstromdichte und $\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{K}$ die Oberflächendivergenz von \mathbf{K} ist. Zur Definition der Oberflächendivergenz sei an dieser Stelle auf die Literatur, wie zum Beispiel [Ned01, S. 73], verwiesen. Wird vorausgesetzt, dass die Normalkomponente der eingepprägten Ströme \mathbf{J}_p beim Durchqueren der Grenzfläche stetig ist, so gilt weiterhin die Vereinfachung

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{J}_{s,2} - \mathbf{J}_{s,1}) = -j\omega\sigma - \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{K}. \quad (2.17)$$

2.2.3 Zusammenfassung der Übergangsbedingungen für die Feldgrößen

Mit der zuvor gemachten Annahme hinsichtlich der Stetigkeit der Normalkomponente der eingepprägten Ströme und der zusätzlichen Annahme, dass keine Flächenstromdichte \mathbf{K} entlang der Grenzfläche eingepprägt wird, ergeben sich an einer Grenzfläche zwischen zwei Materialbereichen mit unterschiedlichen Materialparametern $\mu_1, \epsilon_1,$

κ_1 bzw. μ_2 , ϵ_2 , κ_2 die Übergangsbedingungen [RC09, S. 66-67]

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.18a)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (2.18b)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (2.18c)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (2.18d)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{J}_{s,2} - \mathbf{J}_{s,1}) = -j\omega\sigma. \quad (2.18e)$$

Bei der in Kapitel 7 durchgeführten Kopplung verschiedener Formulierungen an Grenzflächen zwischen Leitern und Isolatoren spielen diese Übergangsbedingungen eine wichtige Rolle.

2.3 Randbedingungen

Nachdem im vorigen Abschnitt 2.2 auf das Verhalten der Felder an Grenzflächen innerhalb des Feldgebietes Ω eingegangen wurde, werden in diesem Abschnitt geeignete Bedingungen auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ des Feldgebietes vorgestellt, welche das Verhalten der Felder in diesem Bereich charakterisieren. Diese Randbedingungen haben zwei Aufgaben: Zum einen sollen sie die auf dem Rand zu modellierenden physikalischen Effekte hinreichend genau widerspiegeln, und zum anderen sollen sie die Eindeutigkeit einer Lösung der Maxwell-Gleichungen (2.11) im Feldgebiet Ω gewährleisten. Für die weiteren Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass der Rand Γ aus den komplementären Teilrändern Γ_E und Γ_H besteht, das heißt

$$\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_H, \quad \Gamma_E \cap \Gamma_H = \emptyset. \quad (2.19)$$

Die einfachsten und zugleich am häufigsten vorkommenden Randbedingungen sind in diesem Fall

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (2.20a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (2.20b)$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der äußere Normalenvektor an Γ sein soll und die Verläufe von \mathbf{E}_0 und \mathbf{H}_0 als bekannt vorausgesetzt werden. Wichtige Spezialfälle hiervon sind ihre homogenen Entsprechungen

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (2.21b)$$

Die Randbedingung (2.21a) entspricht der Modellierung einer Grenzfläche zu einem perfekten elektrischen Leiter (engl. *perfect electric conductor*, kurz *PEC*), während (2.21b) einer Grenzfläche zu einem perfekten magnetischen Leiter (engl. *perfect magnetic conductor*, kurz *PMC*) entspricht. Erstere stellen eine Näherung für sehr gute

elektrische Leiter, wie z. B. Kupfer, bei nicht zu hohen Frequenzen dar. Letztere besitzen keine physikalische Entsprechung, dienen aber dazu, Symmetrien, welche in der betrachteten Struktur möglicherweise vorhanden sind, zu berücksichtigen. Im weiteren Verlauf der Arbeit sollen keine anderen Randbedingungen, wie zum Beispiel Impedanz- oder Admittanzrandbedingungen, berücksichtigt werden. Trotz ihrer praktischen Relevanz wird auf die Behandlung dieser Randbedingungen verzichtet, da sie in der Regel selbst Hoch- oder Niederfrequenznäherungen darstellen, was im Rahmen einer Formulierung, welche beide Bereiche abdecken soll, nicht zielführend ist.

2.4 Elektromagnetische Potenziale

In Abschnitt 2.1 wurde die Beschreibung der elektromagnetischen Felder mit Hilfe der Feldgrößen selbst vorgestellt. Die Struktur der Maxwell-Gleichungen erlaubt es jedoch, die Felder alternativ mit Hilfe von elektromagnetischen Potenzialen zu beschreiben. Zur Einführung dieser Potenziale gibt es verschiedene Möglichkeiten, vgl. [Har01, S. 99f, S. 129ff], [vB07, S. 282ff], [Str07, S. 428ff]. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Kombination aus einem elektrischen Skalar- und einem magnetischen Vektorpotenzial betrachtet.

2.4.1 Elektrisches Skalar- und magnetisches Vektorpotenzial

Ausgangspunkt für die Einführung eines elektrischen Skalarpotenzials V und eines magnetischen Vektorpotenzials \mathbf{A} sind die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen (2.11a) und (2.11d) in ihrer differenziellen Form

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mathbf{B} = 0, \quad (2.22a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.22b)$$

Als homogen werden diese deshalb bezeichnet, da in ihnen - im Gegensatz zu (2.11b), (2.11c) und (2.11e) - keine eingepprägten Quellen vorkommen. Aufgrund der Identität (2.2) kann (2.11d) zur Einführung eines magnetischen Vektorpotenzials \mathbf{A} in der Form

$$\nabla \times \mathbf{A} := c_0\mathbf{B} \quad (2.23)$$

verwendet werden, wobei

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (2.24)$$

die *Vakuumlichtgeschwindigkeit* ist. Einsetzen von (2.23) in (2.11a) führt auf

$$\nabla \times (\mathbf{E} + jk_0 \mathbf{A}) = 0, \quad (2.25)$$

wobei $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ die *Freiraumwellenzahl* ist. Mit der weiteren Identität [Nol06, S. 59], [RC09, S. 625]

$$\nabla \times \nabla V = 0 \quad (2.26)$$

kann der wirbelfreie Ausdruck (2.25) als Gradient einer skalaren Funktion V aufgefasst werden, sodass

$$-\nabla V := \mathbf{E} + jk_0 \mathbf{A} \quad (2.27)$$

gilt. Insgesamt lassen sich die Feldgrößen \mathbf{E} und \mathbf{B} somit als

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - jk_0 \mathbf{A} \quad (2.28b)$$

darstellen. Durch die Einführung der beiden Potenziale in dieser Form sind die beiden Maxwell-Gleichungen (2.11a) und (2.11d) automatisch erfüllt. Zur Bestimmung der Potenziale dienen dann die verbleibenden Gleichungen (2.11b) und (2.11c) beziehungsweise (2.11e).

2.4.2 Eichinvarianz der physikalischen Felder

Das Vektorpotenzial \mathbf{A} wurde anhand (2.28a) eingeführt. Durch diese Bedingung sind nur die Wirbel von \mathbf{A} festgelegt. Nach dem Helmholtzschen Zerlegungssatz [Fra03, S. 372], [Mon08, S. 65], [RC09, S. 362] ist ein Vektorfeld im gesamten Raum \mathbb{R}^3 erst durch Angabe seiner Quellen und Wirbel eindeutig bestimmt. Über die Quellen von \mathbf{A} werden durch (2.28a) jedoch keinerlei Aussagen gemacht. Diesen Quellen des Vektorpotenzials kommt im Rahmen der klassischen Feldtheorie keinerlei physikalische Bedeutung zu. Wird ein modifiziertes Vektorpotenzial $\hat{\mathbf{A}}$ der Form

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \Psi \quad (2.29)$$

betrachtet, so gilt

$$\nabla \times \hat{\mathbf{A}} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Psi \quad (2.30a)$$

$$\stackrel{(2.26)}{=} \nabla \times \mathbf{A} \stackrel{(2.23)}{=} c_0 \mathbf{B}, \quad (2.30b)$$

das heißt, obwohl sich die beiden Vektorpotenziale unterscheiden, ist ihre Rotation dennoch identisch, sodass sie zum gleichen physikalischen Feld \mathbf{B} führen. Hinsichtlich der Quellen gilt

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \Psi) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla \Psi = \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta \Psi, \quad (2.31)$$

das heißt, solange Ψ keine harmonische Funktion [Kön04, S. 62] mit

$$\Delta \Psi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.32)$$

ist, haben die beiden Vektorpotenziale \mathbf{A} und $\hat{\mathbf{A}}$ unterschiedliche Quellen. Wird das modifizierte Vektorpotenzial $\hat{\mathbf{A}}$ zusammen mit einem modifizierten Skalarpotenzial \hat{V} in (2.28b) eingesetzt, so gilt

$$\mathbf{E} = -\nabla \hat{V} - jk_0 \hat{\mathbf{A}} = -\nabla \hat{V} - jk_0 (\mathbf{A} + \nabla \Psi) \quad (2.33a)$$

$$= -\nabla (\hat{V} + jk_0 \Psi) - jk_0 \mathbf{A} \quad (2.33b)$$

$$\stackrel{!}{=} -\nabla V - jk_0 \mathbf{A}. \quad (2.33c)$$

Dies bedeutet, dass bei einer Änderung des magnetischen Vektorpotenzials wie in (2.29) nicht nur die magnetische Flussdichte \mathbf{B} unverändert bleibt, sondern ebenso die elektrische Feldstärke \mathbf{E} , sofern das elektrische Skalarpotenzial gemäß

$$\hat{V} = V - jk_0 \Psi \quad (2.34)$$

modifiziert wird. Die so definierten Potenziale $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{V})$ führen zu den gleichen physikalischen Feldern (\mathbf{E}, \mathbf{B}) wie die Potenziale (\mathbf{A}, V) . Eine Transformation der Form

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \Psi, \quad (2.35a)$$

$$\hat{V} = V - jk_0 \Psi \quad (2.35b)$$

wird als *Eichtransformation* [RC09, S. 364] und die Tatsache, dass diese Transformation an den physikalischen Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} nichts ändert, als *Eichinvarianz* bezeichnet. Der Vorgang der Festlegung der Quellen des Vektorpotenzials durch die Vorgabe einer Beziehung für die Quellen wird *Eichung* genannt. Im differenzialgeometrischen Kontext wird hierauf in [KFB99] genauer eingegangen. Die Freiheiten, welche sich durch die Eichinvarianz der Felder und die Möglichkeit, die Quellen des Vektorpotenzials willkürlich festzulegen, ergeben, werden im Rahmen der Potenzialformulierungen in Kapitel 5 und Kapitel 6 genutzt, um die Niederfrequenzinstabilitäten der Feldformulierungen aus Kapitel 4 zu beheben.

2.5 Angepasste Funktionenräume

2.5.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt werden einige angepasste Funktionenräume vorgestellt, welche sich im Rahmen von Variationsformulierungen und darauf aufbauenden numerischen

Verfahren zur Beschreibung elektromagnetischer Felder anbieten, da sie die Stetigkeitseigenschaften der Felder aus Abschnitt 2.2 sowie die Endlichkeit der elektromagnetischen Energie sicherstellen. Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen sind die Räume der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen und Vektorfelder [Red98, S. 67ff]

$$L^2(\Omega) = \left\{ f(\mathbf{r}) \mid \|f(\mathbf{r})\|_{L^2(\Omega)} < \infty \right\}, \quad (2.36a)$$

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3 = \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mid \|\mathbf{F}(\mathbf{r})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} < \infty \right\}, \quad (2.36b)$$

wobei $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ die durch die Skalarprodukte

$$(f_1, f_2)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f_2^*(\mathbf{r}) f_1(\mathbf{r}) \, d\Omega \quad (2.37a)$$

und

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_2^H(\mathbf{r}) \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) \, d\Omega \quad (2.37b)$$

induzierten Normen sind. Hierin wird mit f^* die konjugiert komplexe Zahl zu f und mit \mathbf{F}^H der hermitesche, also konjugiert komplex transponierte, Vektor zu \mathbf{F} bezeichnet. Mit den Skalarprodukten (2.37) handelt es sich bei (2.36) um *Hilberträume* [For07, S. 97], [Wer05, S. 198]. Im Hinblick auf die Maxwell-Gleichungen sind die folgenden Funktionenräume von besonderer Bedeutung:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ V \in L^2(\Omega) \mid \nabla V \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\}, \quad (2.38a)$$

$$\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{E} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \nabla \times \mathbf{E} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\}, \quad (2.38b)$$

$$\mathcal{H}(\text{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{B} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{B} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (2.38c)$$

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \left\{ \rho \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (2.38d)$$

Da diese Räume bei der Beschreibung von Randwertproblemen verwendet werden sollen, werden die Unterräume

$$\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_V) = \left\{ V \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid V = 0 \text{ auf } \Gamma_V \right\}, \quad (2.39a)$$

$$\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) = \left\{ \mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega) \mid \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ auf } \Gamma_E \right\}, \quad (2.39b)$$

$$\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_B) = \left\{ \mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) \mid \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ auf } \Gamma_B \right\} \quad (2.39c)$$

definiert. Bis auf (2.38d) sind alle Räume aus (2.38) und (2.39) bezüglich des L^2 - bzw. \mathbb{L}^2 -Skalarprodukts nicht vollständig und daher keine Hilberträume. Aus diesem Grund werden die Skalarprodukte

$$(V_1, V_2)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (V_1, V_2)_{L^2(\Omega)} + (\nabla V_1, \nabla V_2)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad (2.40a)$$

$$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (\nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{E}_2)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad (2.40b)$$

$$(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)_{\mathcal{H}(\text{div}; \Omega)} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (\nabla \cdot \mathbf{B}_1, \nabla \cdot \mathbf{B}_2)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.40c)$$

$$(\rho_1, \rho_2)_{\mathcal{H}^0(\Omega)} = (\rho_1, \rho_2)_{L^2(\Omega)}. \quad (2.40d)$$

eingeführt, womit die Räume nach (2.38) bzw. (2.39) zu Hilberträumen werden, siehe [Bos97, S. 128], [Mon08, Kapitel 3]. Werden Randwertproblemen mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen betrachtet, spielen die affinen Unterräume

$$\mathcal{A}^1(\Omega; \Gamma_V) = \{V \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid V = V_0 \text{ auf } \Gamma_V\}, \quad (2.41a)$$

$$\mathcal{A}(\text{rot}; \Omega; \Gamma_E) = \{\mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega) \mid \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \text{ auf } \Gamma_E\}, \quad (2.41b)$$

$$\mathcal{A}(\text{div}; \Omega; \Gamma_B) = \{\mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) \mid \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \text{ auf } \Gamma_B\} \quad (2.41c)$$

eine wichtige Rolle. Im Hinblick auf die Untersuchung unterschiedlicher Eichungen bietet es sich weiterhin an, zusätzlich noch Räume von Funktionen mit nicht verschwindender Rotation, das heißt

$$\mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega) \mid \nabla \times \mathbf{A} \neq 0\}, \quad (2.42a)$$

$$\mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega) \mid \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ auf } \Gamma_E\} \quad (2.42b)$$

sowie

$$\mathcal{A}^c(\text{rot}; \Omega; \Gamma_E) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega) \mid \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \text{ auf } \Gamma_E\} \quad (2.42c)$$

einzuführen. Hierbei handelt sich um Quotienten-Räume, wobei jeweils zwei Elemente des Raumes als äquivalent angesehen werden, sofern ihre Differenz im Nullraum der Rotation liegt [KFB99].

2.5.2 De Rham-Komplex und exakte Sequenz

Abgesehen davon, dass die im vorigen Abschnitt genannten Hilberträume eine reichhaltige Struktur besitzen, existiert eine Reihe von Beziehungen der Räume untereinander. Die Charakterisierung dieser Beziehungen zwischen den Räumen ist eng mit den Differenzialoperatoren verbunden, welche für die jeweiligen Räume charakteristisch sind. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist der Raum $\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$. Sofern $\Gamma_E = \emptyset$ gilt, hat der Gradienten-Operator einen nichttrivialen Nullraum, welcher den im Feldgebiet Ω konstanten Funktionen entspricht, das heißt

$$\ker \{\text{grad}\} = \{V \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid V = \text{const. in } \Omega\}. \quad (2.43)$$

Im Fall $\Gamma_E \neq \emptyset$ ist der Nullraum des Gradienten die leere Menge. Wird andererseits der Gradient einer Funktion $V \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ betrachtet, so gilt

$$\nabla V \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \quad \forall V \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E), \quad (2.44a)$$

$$\Rightarrow \nabla \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E). \quad (2.44b)$$

Der Nullraum der Rotation kann in zwei Unterräume aufgespalten werden. Der erste Unterraum ist unabhängig von der Topologie des Feldgebietes und ergibt sich aus der Identität (2.26). Der zweite Unterraum ist, ähnlich wie im vorherigen Fall, abhängig

von der Topologie des Feldgebietes und wird als *erste de Rham-Kohomologiegruppe* bezeichnet und mit $H^1(\Omega)$ abgekürzt. Somit gilt für den Nullraum der Rotation die Darstellung

$$\ker \{\text{rot}\} = \{ \mathbf{E} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{E} = \nabla V, V \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \} \oplus H^1(\Omega). \quad (2.45)$$

Bei $H^1(\Omega)$ handelt es sich um einen Quotientenraum [Sch99, S. 150], [Fra03, S. 356], dessen Dimension von der Topologie des Feldgebietes Ω abhängig ist und als *erste Betti-Zahl* β_1 [Sch99, S. 152], [Fra03, S. 346] bezeichnet wird. Anschaulich entspricht diese der Anzahl der geschlossen Schleifen in Ω , welche nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden können. Die Anzahl dieser Schleifen wiederum entspricht gerade der Anzahl der Henkel im Feldgebiet. Besitzt das betrachtete Feldgebiet Ω keine derartigen Henkel, so gilt

$$\beta_1 = \dim(H^1(\Omega)) = 0 \quad (2.46)$$

und der Nullraum der Rotation entspricht dem Bildraum des Gradienten, das heißt, es gilt

$$\text{ran}\{\text{grad}\} = \ker\{\text{rot}\}. \quad (2.47)$$

Wird die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ betrachtet, so liegt diese in $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$, und es gilt

$$\nabla \times \mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E) \quad \forall \mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E), \quad (2.48a)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \subset \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E). \quad (2.48b)$$

Ebenso wie die Rotation besitzt die Divergenz einen nichttrivialen Nullraum, welcher in zwei Unterräume aufgespalten werden kann. Der von der Topologie unabhängige Unterraum ergibt sich aus der Identität (2.2) während der Topologie abhängige Unterraum als *zweite de Rham-Kohomologiegruppe* bezeichnet und mit $H^2(\Omega)$ abgekürzt. Für den Nullraum der Divergenz folgt hieraus die Darstellung

$$\ker \{\text{div}\} = \{ \mathbf{B} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E}, \mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \} \oplus H^2(\Omega). \quad (2.49)$$

Die von der Topologie abhängige Dimension des $H^2(\Omega)$ wird als *zweite Betti Zahl* β_2 bezeichnet. Anschaulich kann β_2 als Anzahl der geschlossenen Hohlräume oder Kavitäten in Ω , welche jedoch nicht zu Ω dazu gehören, interpretiert werden. Ist Ω frei von derartigen Kavitäten, so ist $\beta_2 = 0$ und es gilt

$$\text{ran}\{\text{rot}\} = \ker\{\text{div}\}. \quad (2.50)$$

Aufgrund der Definition des $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$ liegt die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$ in $\mathcal{H}^0(\Omega)$, sodass

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{H}^0(\Omega) \quad \forall \mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E), \quad (2.51)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E) \subset \mathcal{H}^0(\Omega) \quad (2.52)$$

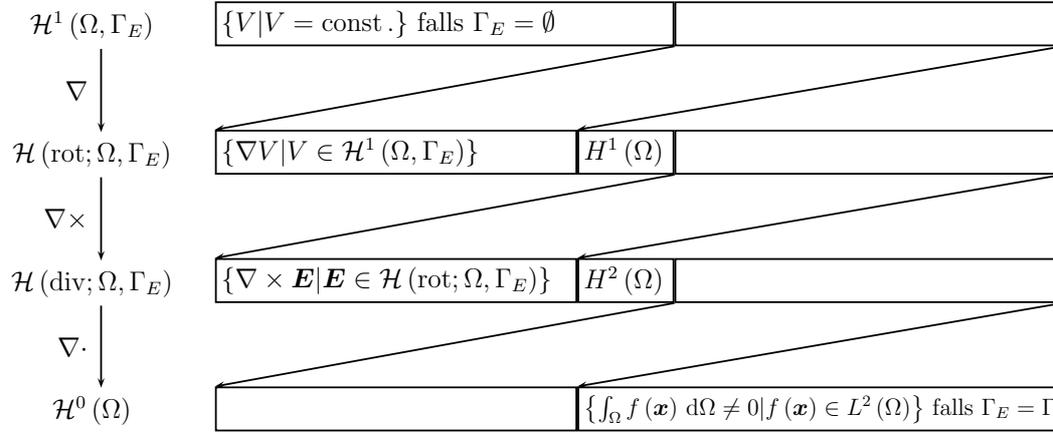


Abbildung 2.5.1: De Rham-Komplex.

gilt. Falls inhomogene Randbedingungen auf Γ_E vorgegeben sind oder $\Gamma_E \neq \partial\Omega$, das heißt, falls nicht der komplette Rand $\partial\Omega$ des Feldgebietes ein Dirichlet-Rand ist, so gilt für $\mathcal{H}^0(\Omega)$ die Darstellung

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \nabla \cdot \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E). \quad (2.53)$$

Sofern $\Gamma_E = \Gamma = \partial\Omega$ sowie

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (2.54)$$

gilt, müssen zu $\nabla \cdot \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$ noch all jene Funktionen mit nicht verschwindendem Mittelwert hinzugenommen werden, um ganz $\mathcal{H}^0(\Omega)$ zu erhalten. Gilt nämlich $\Gamma_E = \partial\Omega$, so folgt für ein beliebiges $\mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{B} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=0} \, d\Gamma = 0. \quad (2.55)$$

Die Zusammenhänge der Räume untereinander sind schematisch in Abbildung 2.5.1 zusammengefasst. Für die Räume untereinander gelten somit die Beziehungen

$$\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \xrightarrow{\nabla \times} \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E) \xrightarrow{\nabla \cdot} \mathcal{H}^0(\Omega). \quad (2.56)$$

Aufgrund der Sequenzeigenschaft der auftretenden Operatoren

$$\text{ran}\{\text{grad}\} \subset \ker\{\text{rot}\}, \quad (2.57a)$$

$$\text{ran}\{\text{rot}\} \subset \ker\{\text{div}\} \quad (2.57b)$$

wird (2.56) als de Rham-Komplex bezeichnet. Ist das betrachtete Feldgebiet Ω darüberhinaus stetig auf einen Punkt zusammenziehbar [Boo03, S. 258ff], [Fra03,

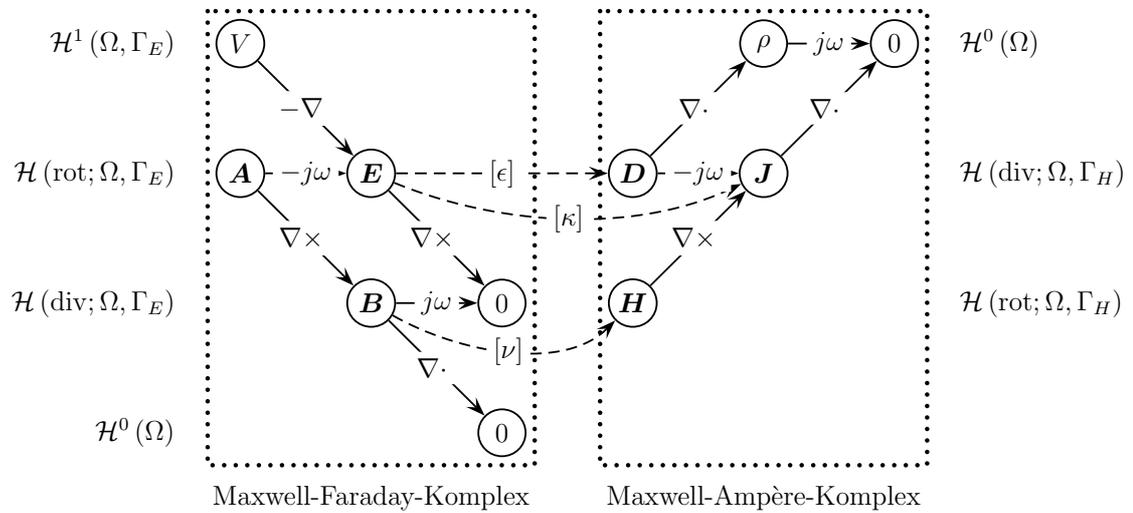


Abbildung 2.5.2: Tonti-Diagramm für die Maxwell-Gleichungen.

S. 161], [GS89, S. 106-107] und besitzt es einen zusammenhängenden Dirichlet-Rand $\Gamma_E \neq \Gamma$, so gilt zusätzlich

$$\emptyset = \ker \{\text{grad}\}, \tag{2.58a}$$

$$\text{ran} \{\text{grad}\} = \ker \{\text{rot}\}, \tag{2.58b}$$

$$\text{ran} \{\text{rot}\} = \ker \{\text{div}\}, \tag{2.58c}$$

$$\text{ran} \{\text{div}\} = \mathcal{H}^0(\Omega) \tag{2.58d}$$

und die Räume in (2.56) bilden eine exakte Sequenz [Bos97, S. 145ff, S. 299f]. Diese Eigenschaft besagt, dass jedes wirbelfreie Vektorfeld als Gradient eines skalaren Feldes und jedes quellenfreie Vektorfeld als Rotation eines anderen Vektorfeldes dargestellt werden kann, das heißt

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V, \tag{2.59a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2.59b}$$

Insbesondere bei der Verwendung einer Potenzialdarstellung, wie in Abschnitt 2.4, spielt diese Eigenschaft eine wesentliche Rolle. Eine weitere schematische Darstellung der Beziehungen zwischen den Funktionenräumen und den jeweiligen Feldgrößen, unter Berücksichtigung der Materialbeziehungen zwischen den Feldgrößen, ist in Form eines Tonti-Diagramms [Ton01] in Abbildung 2.5.2 dargestellt. An den Pfeilen steht jeweils die Operation, welche auf die Größe innerhalb des Kreises, von dem der Pfeil ausgeht, angewendet werden muss. Die Größe innerhalb eines Kreises ergibt sich dann als Summe der Größen deren Pfeile an ihr enden.

Kapitel 3

Numerische Berechnung elektromagnetische Felder

Nachdem in Kapitel 2 die für die folgenden Betrachtungen relevanten physikalischen Grundlagen vorgestellt wurden, behandelt dieses Kapitel einige Punkte, welche bei der numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder berücksichtigt werden müssen. In Abschnitt 3.1 werden die Finiten Elemente (*FE*) in abstrakter Form eingeführt und auf die Diskretisierung der Funktionenräume aus Abschnitt 2.5 eingegangen. In Abschnitt 3.2 werden geeignete Ansatzfunktionen vorgestellt und in Abschnitt 3.3 einige ihrer Eigenschaften angegeben.

3.1 Finite Elemente Ansatz

Wie in Kapitel 1 erwähnt findet die *FEM* vielfältige Anwendung bei der numerischen Simulation von Feldproblemen aus unterschiedlichsten physikalischen Gebieten. Die Vorteile der *FEM* liegen in ihrer hohen Flexibilität im Hinblick auf die Diskretisierung der betrachteten Strukturen, der Möglichkeit auch sehr inhomogene Materialien zu berücksichtigen sowie der vergleichsweise einfachen Umsetzbarkeit von Näherungsmethoden höherer Ordnung. Nach [Cia78, S. 78] bzw. [Mon08, S. 101] lautet die abstrakte Definition eines Finiten Elements

Definition 3.1 (Finites Element). *Ein Finites Element ist ein Tripel $\{K, P_K, \Sigma_K\}$, wobei*

- K ein geometrisches Objekt darstellt,
- P_K ein auf K definierter Raum von Funktionen ist, und
- Σ_K ein Satz von linearen Funktionalen auf P_K ist, welche als Freiheitsgrade bezeichnet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden als geometrische Objekte K in der Definition der Finiten Elemente geradlinige Tetraeder betrachtet. Als Raum der Ansatzfunktionen P_K für die einzelnen Elemente werden Räume skalar- und vektorwertiger Polynome verwendet. Was bei der Konstruktion dieser Räume zu beachten ist und welche Eigenschaften diese haben müssen, wird in 3.1.1 dargelegt. Die konkret verwendeten Basen der jeweiligen Räume werden in 3.2 angegeben. Werden Ansätze niedrigster Ordnung betrachtet, so sind die Freiheitsgrade gleich den Funktionswerten in den Tetraederknoten im Falle der skalaren Größen aus dem Raum $\mathcal{H}^1(K)$ beziehungsweise den Wegintegralen entlang der Tetraederkanten für die vektoriellen Größen aus dem Raum $\mathcal{H}(\text{rot}; K)$. Für Details zur Wahl der Freiheitsgrade im Falle von Ansätzen höherer Ordnung wird an dieser Stelle auf die Literatur, insbesondere [Néd80, Ing06], verwiesen.

3.1.1 Ansatzräume

Wie in Abschnitt 2.5.2 gezeigt wurde, gilt für die in 2.5.1 vorgestellten Funktionenräume die (exakte) Sequenzeigenschaft (2.56)

$$\mathcal{H}^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega) \xrightarrow{\nabla \times} \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} \mathcal{H}^0(\Omega) = L^2(\Omega). \quad (3.1)$$

Gesucht sind somit geeignete endlich dimensionale Teilräume skalar- oder vektorwertiger Polynome höchstens p -ten Grades $\mathcal{V}^{h,p}$, $\mathcal{W}^{h,p}$, $\mathcal{D}^{h,p}$ und $\mathcal{Z}^{h,p}$ mit

$$\mathcal{V}^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega), \quad N_{\mathcal{V}^{h,p}} = \dim \mathcal{V}^{h,p} < \infty, \quad (3.2a)$$

$$\mathcal{W}^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega), \quad N_{\mathcal{W}^{h,p}} = \dim \mathcal{W}^{h,p} < \infty, \quad (3.2b)$$

$$\mathcal{D}^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{div}; \Omega), \quad N_{\mathcal{D}^{h,p}} = \dim \mathcal{D}^{h,p} < \infty, \quad (3.2c)$$

$$\mathcal{Z}^{h,p} \subset \mathcal{H}^0(\Omega), \quad N_{\mathcal{Z}^{h,p}} = \dim \mathcal{Z}^{h,p} < \infty, \quad (3.2d)$$

welche - ebenso wie die kontinuierlichen Räume - einer Sequenzeigenschaft der Form

$$\mathcal{V}^{h,p} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{W}^{h,p} \xrightarrow{\nabla \times} \mathcal{D}^{h,p} \xrightarrow{\nabla \cdot} \mathcal{Z}^{h,p} \quad (3.3)$$

genügen. Da es sich bei den Differenzialoperatoren in (3.3) um lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Räumen handelt, können diese durch Matrizen dargestellt werden. Welche Gestalt diese Matrizen im einzelnen besitzen wird anhand des Gradienten in Abschnitt 3.3.2 näher betrachtet. Außerdem wird auf die Literatur, wie zum Beispiel [ZC06, S. 51f], verwiesen. Werden mit π_h , \mathbf{r}_h , \mathbf{w}_h und $P_{0,h}$, wie in [Mon08, S. 100], die Interpolationsoperatoren von den kontinuierlichen Funktionenräumen auf die zugeordneten diskreten Funktionenräume bezeichnet, so wird gefordert, dass weiterhin das in Abbildung 3.1.1 dargestellte kommutative Diagramm gilt. Hierdurch wird zum Ausdruck gebracht, dass die Reihenfolge von Diskretisierung und Differenziation vertauscht werden kann, das heißt für $V \in \mathcal{H}^1(\Omega)$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{H}^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega) & \xrightarrow{\nabla \times} & \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) & \xrightarrow{\nabla \cdot} & \mathcal{H}^0(\Omega) \\
\pi_h \downarrow & & \mathbf{r}_h \downarrow & & \mathbf{w}_h \downarrow & & P_{0,h} \downarrow \\
\mathcal{V}^{h,p} & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{W}^{h,p} & \xrightarrow{\nabla \times} & \mathcal{D}^{h,p} & \xrightarrow{\nabla \cdot} & \mathcal{Z}^{h,p}
\end{array}$$

Abbildung 3.1.1: De Rham-Komplex im Diskreten.

$\mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ und $\mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$ gilt

$$\mathbf{r}_h(\nabla V) = \nabla(\pi_h(V)), \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{w}_h(\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times (\mathbf{r}_h(\mathbf{E})), \quad (3.4b)$$

$$P_{0,h}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{w}_h(\mathbf{B})). \quad (3.4c)$$

Diese Differenziationen sind somit im Diskreten ohne zusätzliche Näherungen und ohne weiteren Genauigkeitsverlust mit Hilfe der diskreten Differenzialoperatoren durchführbar.

3.2 Ansatzfunktionen

Bei den Ansatzfunktionen werden zwei verschiedene Arten von Ansätzen unterschieden: zum einen die interpolierenden und zum anderen die hierarchischen Ansätze. Die interpolierenden Ansätze haben den Vorteil, dass die berechneten Koeffizienten der Ansatzfunktionen eine direkte Interpretation besitzen, zum Beispiel als Wert einer Feldgröße in einem bestimmten Punkt. Von Nachteil ist bei diesen Ansätzen, dass bei einer Erhöhung des polynomiellen Grades der Ansätze alle Ansatzfunktionen, auch jene niedrigerer Ordnung, angepasst werden müssen. Bei hierarchischen Ansätzen ist das nicht der Fall. Die Koeffizienten der Ansatzfunktionen können in diesem Fall nicht mehr direkt als Wert einer gesuchten Feldgröße interpretiert werden, jedoch bleiben bei einer Erhöhung des polynomiellen Grades die Ansatzfunktionen niedrigerer Ordnung unverändert. Diese Eigenschaft kann bei iterativen Lösungsverfahren, insbesondere bei Multigrid- bzw. Multilevel-Lösern [HFDE03], [HFDE04], [HFIDE07], [LS04] ausgenutzt werden. Bei den in dieser Arbeit verwendeten Ansätzen handelt es sich um hierarchische Ansätze, welche aus [Ing06] übernommen wurden. Auf die Wahl der Basen der einzelnen Räume wird in den folgenden Abschnitten eingegangen. Zur Darstellung der Ansatzfunktionen innerhalb eines Tetraeders werden baryzentrische Koordinaten verwendet, für deren Definition an dieser Stelle auf die Literatur [Bos97, S. 74ff], [SF96, S. 127ff], [ZC06, S. 28] verwiesen sei.

| Raum | Ansatzfunktion | Simplex |
|-----------------------------|--|---|
| $\tilde{\mathcal{V}}^{h,1}$ | λ_i | N_i |
| $\tilde{\mathcal{V}}^{h,2}$ | $\lambda_i \lambda_j$ | E_{ij} |
| $\tilde{\mathcal{V}}^{h,3}$ | $\lambda_i \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k$ | E_{ij} D_{ijk} |
| $\tilde{\mathcal{V}}^{h,4}$ | $\lambda_i \lambda_j (\lambda_i^2 - 3\lambda_i \lambda_j + \lambda_j^2)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_k - \lambda_i)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l$ | E_{ij} D_{ijk} D_{ijk} T_{ijkl} |
| $\tilde{\mathcal{V}}^{h,5}$ | $\lambda_i \lambda_j (\lambda_i^3 - 6\lambda_i^2 \lambda_j + 6\lambda_i \lambda_j^2 - \lambda_j^3)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_j^2 - 3\lambda_j \lambda_k + \lambda_k^2)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_k^2 - 3\lambda_k \lambda_i + \lambda_i^2)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_i^2 - 3\lambda_i \lambda_j + \lambda_j^2)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_i - \lambda_j)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_j - \lambda_k)$ $\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_k - \lambda_l)$ | E_{ij} D_{ijk} D_{ijk} D_{ijk} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} |

Tabelle 3.1: Basis des $\tilde{\mathcal{V}}^{h,p}$ für $p = 1 \dots 5$ nach [Ing06].

3.2.1 Basis des $\mathcal{V}^{h,p}$

Die Verwendung einer hierarchischen Basis für den Raum der skalarwertigen Ansatzfunktionen $\mathcal{V}^{h,p}$ erlaubt eine Darstellung des Raumes in der Form

$$\mathcal{V}^{h,p} = \begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}^{h,1} & \text{für } p = 1, \\ \mathcal{V}^{h,p-1} \oplus \tilde{\mathcal{V}}^{h,p} & \text{für } p > 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

das heißt, der Raum $\mathcal{V}^{h,p}$ ist die direkte Summe des Raumes $\mathcal{V}^{h,p-1}$ und des inkrementellen Raumes $\tilde{\mathcal{V}}^{h,p}$. Die verwendeten Basen für die inkrementellen Räume $\tilde{\mathcal{V}}^{h,p}$, $p = 1 \dots 5$ sind in Tabelle 3.1 dargestellt.

Bei den durch (3.5) definierten Räumen $\mathcal{V}^{h,p}$ handelt es sich um polynomiell vollständige Räume vom Grad p , das heißt, jedes im Gebiet Ω definierte Polynom p -ten Grades kann exakt durch eine Linearkombination der Ansatzfunktionen aus $\mathcal{V}^{h,p}$ dargestellt werden. Da per Konstruktion die Beziehung

$$\mathcal{V}^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega) \quad (3.6)$$

gilt, sind Ansätze aus dem $\mathcal{V}^{h,p}$ zur Approximation von Größen aus dem $\mathcal{H}^1(\Omega)$ geeignet. Hierzu zählen insbesondere die Skalarpotenziale Ψ und V aus Abschnitt 2.4.

3.2.2 Basis des $\mathcal{W}^{h,p}$

Für den Fall der vektorwertigen Ansatzfunktionen wird eine ähnliche Aufspaltung wie in Abschnitt 3.2.1 durchgeführt, sodass für den Raum $\mathcal{W}^{h,p}$ die Darstellung

$$\mathcal{W}^{h,p} = \begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}^{h,1} & \text{für } p = 1, \\ \mathcal{W}^{h,p-1} \oplus \tilde{\mathcal{R}}^{h,p} \oplus \nabla \tilde{\mathcal{V}}^{h,p} & \text{für } p > 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

bzw.

$$\mathcal{W}^{h,p} = \begin{cases} \mathcal{R}^{h,1} & \text{für } p = 1, \\ \mathcal{R}^{h,p} \oplus \nabla \mathcal{V}^{h,p} & \text{für } p > 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

mit

$$\mathcal{R}^{h,p} = \begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}^{h,1} & \text{für } p = 1, \\ \mathcal{R}^{h,p-1} \oplus \tilde{\mathcal{R}}^{h,p} & \text{für } p > 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

gilt, wobei die Basen für die Räume $\tilde{\mathcal{R}}^{h,p}$, $p = 1 \dots 4$ in Tabelle 3.2 gegeben sind. Bei den durch (3.7) gegebenen Räumen handelt es sich, im Gegensatz zu (3.5), um polynomiell unvollständige Räume. Ein beliebiges vektorwertiges Polynom p -ten Grades lässt sich durch diese Basis nicht darstellen, da die Gradienten der skalaren Ansätze $(p+1)$ -ter Ordnung in diesem Fall noch hinzugenommen werden müssten. Jedoch ist sowohl die gewählte Basis als auch ihre Rotation vollständig vom Grad $(p-1)$. Die polynomiell vollständigen und unvollständigen Räume unterscheiden sich bei den in dieser Arbeit vorgestellten *FE*-Formulierungen hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens nicht, siehe [Web99]. Aus diesem Grund werden im Weiteren die polynomiell unvollständigen Räume nach (3.7) verwendet, die eine geringere Dimension besitzen, was wiederum die Dimension der resultierenden linearen Gleichungssysteme reduziert. Da es sich beim $\mathcal{W}^{h,p}$ um einen endlich dimensionalen Unterraum des $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ handelt, eignen sich Linearkombinationen der Ansatzfunktionen aus dem $\mathcal{W}^{h,p}$ zur Approximation von Größen aus dem $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$. Hierunter fallen insbesondere die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und das magnetische Vektorpotenzial \mathbf{A} .

3.2.3 Basis des $\mathcal{D}^{h,p}$ und des $\mathcal{Z}^{h,p}$

Die Räume $\mathcal{D}^{h,p}$ und $\mathcal{Z}^{h,p}$ werden in dieser Arbeit nicht verwendet und an dieser Stelle nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Eine mögliche Wahl für die Basen dieser Räume findet sich im Falle des $\mathcal{D}^{h,p}$ in [ZC06, S. 39ff] beziehungsweise im Falle des $\mathcal{Z}^{h,p}$ in [ZC06, S. 48f]. Kombinationen aus Ansätzen aus dem $\mathcal{D}^{h,p}$ und dem $\mathcal{Z}^{h,p}$ werden bei niederfrequenzstabilisierten Randintegralgleichungsverfahren [TYO05], [QC09] eingesetzt. Hierbei werden die $\mathcal{D}^{h,p}$ -Ansätze zur Diskretisierung der Oberflächenstromdichte und die $\mathcal{Z}^{h,p}$ -Ansätze zur Diskretisierung der Oberflächenladung verwendet.

| Raum | Ansatzfunktion | Simplex |
|-----------------------------|--|--|
| $\tilde{\mathcal{R}}^{h,1}$ | $\lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i$ | E_{ij} |
| $\tilde{\mathcal{R}}^{h,2}$ | $3\lambda_j \lambda_k \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k)$ $3\lambda_k \lambda_i \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k)$ | D_{ijk} D_{ijk} |
| $\tilde{\mathcal{R}}^{h,3}$ | $4\lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k) \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k))$ $4\lambda_k \lambda_i (\lambda_k - \lambda_i) \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_k - \lambda_i))$ $4\lambda_i \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_i - \lambda_j))$ $4\lambda_j \lambda_k \lambda_l \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l)$ $4\lambda_k \lambda_l \lambda_i \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l)$ $4\lambda_l \lambda_i \lambda_j \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l)$ | D_{ijk} D_{ijk} D_{ijk} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} |
| $\tilde{\mathcal{R}}^{h,4}$ | $5\lambda_j \lambda_k (\lambda_j^2 - 3\lambda_j \lambda_k + \lambda_k^2) \nabla \lambda_i$ $\quad - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_j^2 - 3\lambda_j \lambda_k + \lambda_k^2))$ $5\lambda_k \lambda_i (\lambda_k^2 - 3\lambda_k \lambda_i + \lambda_i^2) \nabla \lambda_j$ $\quad - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_k^2 - 3\lambda_k \lambda_i + \lambda_i^2))$ $5\lambda_i \lambda_j (\lambda_i^2 - 3\lambda_i \lambda_j + \lambda_j^2) \nabla \lambda_k$ $\quad - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_i^2 - 3\lambda_i \lambda_j + \lambda_j^2))$ $(6\lambda_i - \lambda_j - \lambda_k) (\lambda_j - \lambda_k) \lambda_j \lambda_k \nabla \lambda_i$ $\quad + (6\lambda_j - \lambda_k - \lambda_i) (\lambda_k - \lambda_i) \lambda_k \lambda_i \nabla \lambda_j$ $\quad + (6\lambda_k - \lambda_i - \lambda_j) (\lambda_i - \lambda_j) \lambda_i \lambda_j \nabla \lambda_k$ $5\lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_j - \lambda_k) \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_j - \lambda_k))$ $5\lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_k - \lambda_l) \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_k - \lambda_l))$ $5\lambda_k \lambda_l \lambda_i (\lambda_k - \lambda_l) \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_k - \lambda_l))$ $5\lambda_k \lambda_l \lambda_i (\lambda_l - \lambda_i) \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_l - \lambda_i))$ $5\lambda_l \lambda_i \lambda_j (\lambda_l - \lambda_i) \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_l - \lambda_i))$ $5\lambda_l \lambda_i \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_i - \lambda_j))$ $5\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_i - \lambda_j) \nabla \lambda_l - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_i - \lambda_j))$ $5\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k) \nabla \lambda_l - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_j - \lambda_k))$ | D_{ijk} D_{ijk} D_{ijk} D_{ijk} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} T_{ijkl} |

Tabelle 3.2: Basis des $\tilde{\mathcal{R}}^{h,p}$ für $p = 1 \dots 4$ nach [Ing06].

3.3 Eigenschaften der Ansatzfunktionen

3.3.1 Diskreter Gradienten-Operator

Wegen der in Abschnitt 2.5 gezeigten Beziehung der Funktionenräume $\mathcal{H}^1(K)$ und $\mathcal{H}(\text{rot}; K)$

$$\nabla \mathcal{H}^1(K) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; K) \quad (3.10a)$$

bzw. im Diskreten

$$\nabla \mathcal{V}^{h,p} \subset \mathcal{W}^{h,p} \quad (3.10b)$$

lassen sich die Gradienten der skalaren Ansatzfunktionen durch Linearkombinationen der vektoriellen Ansatzfunktionen darstellen. Aufgrund der gewählten Konstruktion der Basis des $\mathcal{W}^{h,p}$ ist dies für die Ansätze höherer Ordnung, also $p \geq 2$, offensichtlich, da die Gradientenfelder in der entsprechenden Basis explizit berücksichtigt werden. Im Fall der Ansätze niedrigster Ordnung, also $p = 1$, ist die Tatsache

$$\nabla \mathcal{V}^{h,1} \subset \mathcal{W}^{h,1} \quad (3.11)$$

nicht offensichtlich. Mit der Matrix $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N_e \times N_v}$, wobei N_e die Anzahl der Kanten und N_v die Anzahl der Knoten des betrachteten *FE*-Netzes sein sollen und weiterhin

$$(\mathbf{G})_{kl} = \begin{cases} -1 & \text{falls Kante } k \text{ bei Knoten } l \text{ beginnt} \\ +1 & \text{falls Kante } k \text{ bei Knoten } l \text{ endet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.12a)$$

gelten soll, können die Gradienten der skalaren Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung in der Form

$$[\nabla v_1 \quad \nabla v_2 \quad \dots \quad \nabla v_{N_v}] = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_{N_e}] \mathbf{G} \quad (3.12b)$$

dargestellt werden. Die Matrix \mathbf{G} , welche die Inzidenzmatrix der Knoten und Kanten des *FE*-Netzes darstellt, kann als diskrete Form des Gradienten-Operators interpretiert werden. Da die Gradienten der skalaren Ansätze höherer Ordnung explizit in der Basis des $\mathcal{W}^{h,p}$ vorliegen, kann die Definition des Gradienten-Operators auch direkt auf diese verallgemeinert werden. Hieraus ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} & [\nabla v_1 \quad \nabla v_2 \quad \dots \quad \nabla v_{N_v}] \\ & = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_{N_e} \quad \dots \quad \mathbf{e}_{N_w} \quad \nabla v_{N_v+1} \quad \dots \quad \nabla v_{N_v}] \tilde{\mathbf{G}} \end{aligned} \quad (3.12c)$$

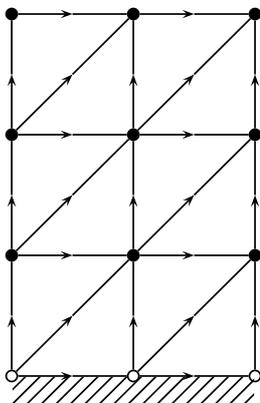
mit

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_v - N_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_w \times N_v}, \quad (3.12d)$$

wobei \mathbf{I}_n für die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix steht. Vereinfachend wird der diskrete Gradienten-Operator im Folgenden immer mit \mathbf{G} bezeichnet und keine Unterscheidung zwischen \mathbf{G} und $\tilde{\mathbf{G}}$ vorgenommen.

3.3.2 Baum-Kobaum-Aufspaltung

Bei der Simulation elektromagnetischer Felder finden aufgrund ihrer Einfachheit im Diskreten die Baum-Kobaum-Aufspaltung und die damit eng verbundene Baum-Kobaum-Eichung häufig Anwendung. Zur Definition eines Baumes eines Graphen

Abbildung 3.3.1: Beispielhaftes 2D FE -Netz.

sei an dieser Stelle auf die Literatur, wie zum Beispiel [CLRS09, Kapitel 23], verwiesen. Für die weiteren Betrachtungen dieses Abschnitts wird angenommen, dass das zugrunde liegende Feldgebiet topologisch einfach ist und einen zusammenhängenden Dirichlet-Rand besitzt. Welche Modifikationen im Falle nicht zusammenhängender Dirichlet-Ränder zu berücksichtigen sind, findet sich zum Beispiel in [Hil06, S. 26]. Ein einfaches zwei dimensionales FE -Netz, welches den angegebenen Anforderungen genügt, ist in Abbildung 3.3.1 dargestellt. Ziel der Baum-Kobaum-Aufspaltung ist im Diskreten die Zerlegung eines gegebenen Vektorfeldes $\mathbf{A} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ in jene Anteile mit nicht verschwindender Rotation $\mathbf{A}_c \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ und reine Gradientenfelder $\nabla\Psi \in \nabla\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ gemäß

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_c + \nabla\Psi \quad \text{mit } \nabla \times \mathbf{A}_c \neq 0. \quad (3.13)$$

Hierbei handelt es sich nicht um eine Helmholtz-Zerlegung, da die beiden Anteile nicht L^2 -orthogonal sind und für die Anteile mit nicht verschwindender Zirkulation in der Regel auch

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_c \neq 0 \quad (3.14)$$

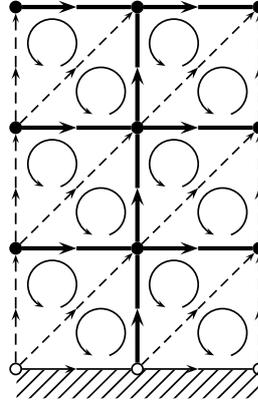
gilt, das heißt \mathbf{A}_c ist nicht quellenfrei. Da sich die Konstruktion der Ansatzräume für $p = 1$ und $p \geq 2$ im Hinblick auf die Hinzunahme der reinen Gradienten unterscheidet, werden diese beiden Fälle separat betrachtet. Für $p = 1$ gilt wie in Abschnitt 3.3.1 bereits gezeigt

$$\nabla\mathcal{V}^{h,1} \subset \mathcal{W}^{h,1} = \tilde{\mathcal{R}}^{h,1} \quad (3.15a)$$

mit

$$\dim \mathcal{V}^{h,1} = N_{\mathcal{V}} = N_n, \quad (3.15b)$$

$$\dim \mathcal{W}^{h,1} = N_{\mathcal{W}} = N_e, \quad (3.15c)$$

Abbildung 3.3.2: Baum-Kobaum-Aufspaltung des FE -Netzes aus Abbildung 3.3.1

wobei N_n die Anzahl der freien Knoten und N_e die Anzahl der freien Kanten des FE -Netzes sind. Unter den gemachten Einschränkungen hinsichtlich der Topologie existieren im $\mathcal{W}^{h,1}$ daher

$$N_c = N_e - N_n \quad (3.16)$$

Ansatzfunktionen, welche keine reinen Gradientenfelder sind und eine nicht verschwindende Rotation besitzen. Dieser Unterraum des $\tilde{\mathcal{R}}^{h,1}$ wird im Folgenden mit $\tilde{\mathcal{R}}_c^{h,1}$ und seine Dimension mit $N_{\mathcal{R}_c^{h,1}}$ bezeichnet. Für letztere gilt

$$N_{\mathcal{R}_c^{h,1}} = N_e - N_n. \quad (3.17)$$

Als Basis des $\tilde{\mathcal{R}}_c^{h,1}$ werden mit Hilfe der Baum-Kobaum-Aufspaltung des FE -Netzes aus den N_e Ansatzfunktionen des $\tilde{\mathcal{R}}^{h,1}$ N_c Ansatzfunktionen ausgewählt. Zur Bestimmung eines Baumes wird im Rahmen dieser Arbeit der Kruskal-Algorithmus [Kru56] verwendet. Zur Berücksichtigung von etwaigen Restriktionen bei der Konstruktion des Baumes sei auf [Hal61] verwiesen. Eine mögliche Baum-Kobaum-Aufspaltung des FE -Netzes aus Abbildung 3.3.1 ist in Abbildung 3.3.2 dargestellt, wobei die Baum-Kanten als dicke schwarze Linien, die Kobaum-Kanten als gestrichelte schwarze Linien, die freien Knoten als ausgefüllte schwarze Punkte und die am Dirichlet-Rand liegenden und zu einem Superknoten zusammengefassten Knoten als weiß gefüllte Punkte dargestellt sind. Die unabhängigen Zirkulationen sind in den einzelnen Elementen als Kreise angedeutet. Da die Anzahl der Baum-Kanten N_t gleich der Anzahl der freien Knoten N_n ist, gilt für die Anzahl der Kobaum-Kanten

$$N_c = N_e - N_t = N_e - N_n = N_{\mathcal{R}_c^{h,1}}, \quad (3.18)$$

das heißt, ihre Anzahl entspricht der Dimension des $\tilde{\mathcal{R}}_c^{h,1}$. Werden als Basis für den $\tilde{\mathcal{R}}_c^{h,1}$ die den Kobaum-Kanten zugeordneten Ansatzfunktionen verwendet, so sind

dadurch alle linear unabhängigen Zirkulationen aber keine reinen Gradientenfelder darstellbar. Die gesuchte Aufspaltung des $\mathcal{W}^{h,1}$ ergibt sich daher zu

$$\mathcal{W}^{h,1} = \tilde{\mathcal{R}}_c^{h,1} \oplus \nabla \mathcal{V}^{h,1}. \quad (3.19)$$

Aufgrund der gewählten Konstruktion für die Basis des $\mathcal{W}^{h,p}$ nach [Ing06] ist die Aufspaltung für die Ansätze höherer Ordnung $p \geq 2$ direkt gegeben, sofern für den Raum $\mathcal{R}_c^{h,p}$ die Wahl

$$\mathcal{R}_c^{h,p} = \begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}_c^{h,1} & \text{für } p = 1, \\ \mathcal{R}_c^{h,p-1} \oplus \tilde{\mathcal{R}}^{h,p} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.20)$$

getroffen wird. Für den $\mathcal{W}^{h,p}$ ergibt sich hieraus die Darstellung

$$\mathcal{W}^{h,p} = \mathcal{R}_c^{h,p} \oplus \mathcal{V}^{h,p}, \quad (3.21)$$

womit die gewünschte Aufspaltung erreicht ist.

Kapitel 4

Elektrische Feldformulierung

Ausgehend von den in Kapitel 2 und Kapitel 3 dargestellten Grundlagen wird in diesem Kapitel die elektrische Feldformulierung des elektromagnetischen Randwertproblems behandelt. Da sich die Formulierungen in einigen Punkten unterscheiden, werden der verlustlose und der verlustbehaftete Fall getrennt voneinander in Abschnitt 4.1 und Abschnitt 4.2 betrachtet. Nach der Vorstellung einiger vereinfachender Annahmen und des vollständigen Randwertproblems in Abschnitt 4.1.1 beziehungsweise Abschnitt 4.2.1 erfolgt die Herleitung der schwachen Formulierung in Abschnitt 4.1.2 beziehungsweise Abschnitt 4.2.2 und der FE -Gleichungssysteme in Abschnitt 4.1.3 beziehungsweise Abschnitt 4.2.3. Abschließend wird in Abschnitt 4.1.4 beziehungsweise Abschnitt 4.2.4 auf die Niederfrequenzeigenschaften beider Formulierungen eingegangen.

4.1 Verlustloser Fall

4.1.1 Annahmen und Randwertproblem

Grundlage der weiteren Betrachtungen ist die beispielhafte Geometrie aus Abbildung 4.1.1, in welcher zur Vereinfachung des Problems einige Annahmen getroffen werden:

Für den in diesem Kapitel betrachteten verlustlosen Fall wird angenommen, dass die elektrische Leitfähigkeit im gesamten Feldgebiet Ω verschwindet, das heißt

$$\kappa = 0. \tag{4.1}$$

Es wird vorausgesetzt, dass alle Randbedingungen auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ vom

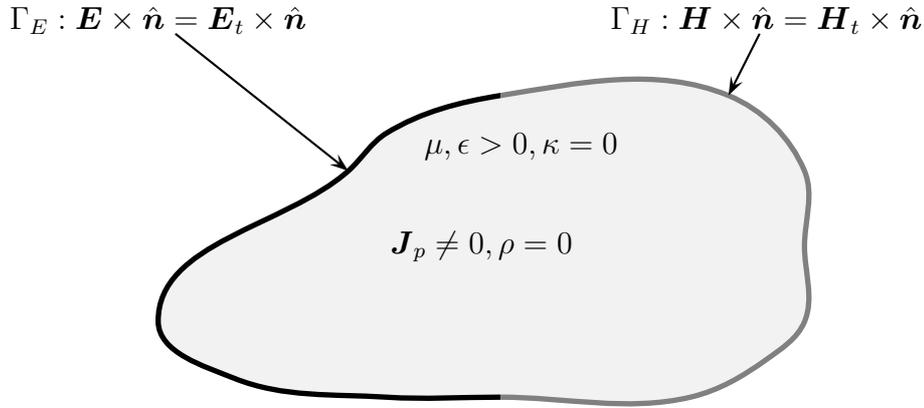


Abbildung 4.1.1: Verlustloses Randwertproblem.

Dirichlet- oder Neumann-Typ sind, wobei gelten soll:

$$\Gamma_E \cup \Gamma_H = \Gamma, \quad (4.2)$$

$$\Gamma_E \cap \Gamma_H = \emptyset, \quad (4.3)$$

$$\Gamma_E \neq \emptyset. \quad (4.4)$$

Sofern nicht anders erwähnt, wird angenommen, dass das Feldgebiet Ω eine triviale Topologie und einen zusammenhängenden Rand Γ_E besitzt. Für die eingepprägten Ströme \mathbf{J}_p aus (2.13) wird vorausgesetzt, dass sie divergenzfrei sind und dass keinerlei Ströme über den Rand eingepprägt werden, sodass

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{J}_p \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \quad (4.5b)$$

gilt. Aufgrund der gemachten Einschränkungen reduziert sich die Kontinuitätsgleichung (2.11e) in diesem Fall auf

$$\rho = 0, \quad (4.6)$$

und das elektromagnetische Randwertproblem lautet

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad \text{in } \Omega, \quad (4.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_p, \quad \text{in } \Omega, \quad (4.7b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (4.7c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (4.7d)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.7e)$$

$$\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (4.7f)$$

mit den Konstitutivgleichungen nach (2.14)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad \text{in } \Omega. \quad (4.8b)$$

Für nicht verschwindende Kreisfrequenzen $\omega > 0$ folgen die beiden Divergenzgleichungen (4.7c) und (4.7d) aufgrund der Identität (2.2) aus den Rotationsgleichungen (4.7a) und (4.7b). Mit Hilfe der Konstitutivgleichungen ist es möglich, eine der beiden Feldgrößen \mathbf{E} oder \mathbf{H} aus den beiden verbleibenden Gleichungen zu eliminieren und eine einzelne vektorielle Gleichung für die jeweils verbliebene Größe zu erhalten. Beispielhaft wird an dieser Stelle die elektrische Feldformulierung betrachtet. Die Herleitung der magnetischen Feldformulierung erfolgt auf analoge Weise. Um die magnetische Erregung \mathbf{H} aus den Gleichungen zu eliminieren wird (4.7a) mit ν multipliziert, sodass sich für \mathbf{H} die Darstellung

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega} \nu \nabla \times \mathbf{E} \quad (4.9)$$

ergibt. Wird dieser Zusammenhang zusammen mit (2.14a) in den Durchflutungssatz nach (4.7b) eingesetzt, folgt

$$\nabla \times \left(-\frac{1}{j\omega} \nu \nabla \times \mathbf{E} \right) = j\omega \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}_p. \quad (4.10)$$

Werden die Randbedingungen nach (4.7e) und (4.7f) ebenfalls ausschließlich durch die elektrische Feldstärke ausgedrückt, ergibt sich das Randwertproblem

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \epsilon \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.11b)$$

$$(\nu \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -j\omega \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (4.11c)$$

welches als *elektrische Feldformulierung* bezeichnet wird. Im Gegensatz zu den Maxwell-Gleichungen kommt nur noch die elektrische Feldstärke \mathbf{E} als unbekannte Größe vor. Durch die Elimination der magnetischen Erregung \mathbf{H} ergibt sich in (4.11a) zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung, während die Maxwell-Gleichungen (2.11) ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung darstellen. Anstatt die elektrische Feldformulierung wie in (4.11) in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω anzugeben, ist es möglich, diese mit Hilfe der Freiraumwellenzahl k_0 zu formulieren. In diesem Fall lautet die elektrische Feldformulierung

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.12b)$$

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (4.12c)$$

wobei

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (4.13)$$

die *Feldwellenimpedanz des Vakuums* ist. Im Hinblick auf eine numerische Berechnung der Felder ist die Umformulierung in Abhängigkeit der Wellenzahl sinnvoll, da so die Einträge in den vorkommenden Matrizen in einer vergleichbaren Größenordnung liegen, was sich vorteilhaft auf die Kondition der resultierenden Gleichungssysteme auswirkt. Das so gegebene Randwertproblem (4.12) mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen kann aufgrund der angenommenen Linearität durch eine Aufspaltung der elektrischen Feldstärke der Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_h \quad (4.14)$$

in ein Randwertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen für das Teilfeld \mathbf{E}_h transformiert werden. Hierbei wird vorausgesetzt, dass für \mathbf{E}_d und \mathbf{E}_h die Zusammenhänge

$$\mathbf{E}_d \in \mathcal{A}(\text{rot}; \Omega; \Gamma_E), \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{E}_h \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \quad (4.15b)$$

mit den jeweiligen Räumen nach (2.41) bzw. (2.39) gelten und \mathbf{E}_d weiterhin der Bedingung

$$\mathbf{E}_d \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (4.16)$$

genügt. Einsetzen der Aufspaltung (4.14) in (4.12) führt somit auf

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}_h) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_h = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_p - \nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}_d) + k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_d \quad \text{in } \Omega, \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{E}_h \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.17b)$$

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{E}_h) \times \hat{\mathbf{n}} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} - (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}_d) \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (4.17c)$$

Die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen können somit auch über eine Modifikation der eingepprägten Quellen und der Neumann-Randbedingungen berücksichtigt werden. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf nur das Randwertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen betrachtet, was der Bedingung

$$\mathbf{E}_0 = 0 \quad (4.18)$$

entspricht, und auf den Index h zur Hervorhebung der homogenen Lösung verzichtet. Das betrachtete Randwertproblem lautet somit

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) + (jk_0)^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (4.19a)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.19b)$$

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (4.19c)$$

4.1.2 Schwache Formulierung des Randwertproblems

Das Randwertproblem (4.19) besitzt nur in Sonderfällen eine klassische Lösung. Insbesondere bei sprunghaften Änderungen der Materialeigenschaften an Grenzflächen innerhalb des Feldgebietes existiert keine klassische Lösung im gesamten Feldgebiet. Um die entsprechenden Fälle zu behandeln wird im Folgenden die schwache Form des Randwertproblems (4.19) hergeleitet. Hierzu gibt es verschiedene Zugänge über Variationsformulierungen, vgl. [Cen91], [SF96, S. 96], oder über die Methode der gewichteten Residuen, vgl. [Jin02, S. 22], [ZC06, S. 92f]. Die beiden Verfahren sind äquivalent [Bos97] und führen zu den selben Bestimmungsgleichungen für die Felder. Der Vorteil der Methode der gewichteten Residuen im Vergleich zu den Variationsformulierungen liegt darin, dass die Kenntnis eines geeigneten Funktionals, welches stationär gemacht werden soll, a priori nicht erforderlich ist, weshalb sich die im Folgenden dargestellte Vorgehensweise an dieser Methode orientiert. Hierzu wird in (4.19) das Skalarprodukt mit einer beliebigen Testfunktion $\mathbf{e} \in \mathcal{H}_0(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ gebildet und anschließend über das Feldgebiet Ω integriert, was auf

$$\int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{E})) \, d\Omega + (jk_0)^2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) \, d\Omega = -jk_0 \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega \quad (4.20)$$

führt. Mit der Identität

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) \quad (4.21)$$

und dem Gaußschen Satz ergibt sich für das erste Integral in (4.20)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{E})) \, d\Omega &= \oint_{\partial\Omega} ((\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{e} \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Einsetzen von (4.22) in (4.20) und Umsortieren der Terme führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{e} \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \, d\Omega + (jk_0)^2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) \, d\Omega &= \\ -jk_0 \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} ((\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{e} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Gemäß (4.2) kann für das Randintegral auf der rechten Seite von (4.23) eine Aufspaltung in der Form

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} ((\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{e} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_E} ((\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{e} \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_H} ((\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{e} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.24)$$

durchgeführt werden. Aufgrund der zyklischen Vertauschbarkeit des Spatprodukts und der Tatsache, dass $\mathbf{e} \in \mathcal{H}_0(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ gewählt wurde, weshalb

$$\mathbf{e} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (4.25)$$

gilt, folgt, dass das erste Randintegral auf der rechten Seite von (4.24) verschwindet. Im zweiten vorkommenden Integral kann die Randbedingung (4.19c) ausgenutzt werden, um die unbekannte elektrische Feldstärke durch eine bekannte Größe auszudrücken. Für den Beitrag durch das Randintegral folgt daher

$$\oint_{\partial\Omega} ((\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{e} \, d\Gamma = -jk_0\eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma. \quad (4.26)$$

Zusammenfassend lautet die schwache Formulierung des Randwertproblems (4.19): Finde $\mathbf{E} \in \mathcal{H}_0(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$, sodass für alle $\mathbf{e} \in \mathcal{H}_0(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{e} \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \, d\Omega + (jk_0)^2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) \, d\Omega = \\ -jk_0\eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega - jk_0\eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.27)$$

gilt. Hinreichende Glattheit der Materialparameter ν_r und ϵ_r sowie der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} und Regularität des Randes Γ vorausgesetzt, kann gezeigt werden, dass die Lösung von (4.27) mit der klassischen Lösung von (4.19) übereinstimmt. Zur Motivation des Vorgehens sei hierbei auf [EEHJ96, S. 179ff] verwiesen. Um im weiteren Verlauf die Notation etwas kompakter zu halten, werden die Bilinear- und Linearformen

$$S^\nu(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w} \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (4.28a)$$

$$T^\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\epsilon \mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (4.28b)$$

$$b_J(\mathbf{w}) = \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega, \quad (4.28c)$$

$$b_H(\mathbf{w}) = \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma \quad (4.28d)$$

eingeführt. Mit diesen kann die schwache Formulierung (4.29) in der äquivalenten Form

$$S^\nu(\mathbf{E}, \mathbf{e}) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{E}, \mathbf{e}) = -jk_0 b_J(\mathbf{e}) - jk_0 b_H(\mathbf{e}) \quad (4.29)$$

angegeben werden. Da die Materialtensoren als symmetrisch, reellwertig und positiv definit vorausgesetzt wurden, sind die beiden Bilinearformen $S_\nu(\cdot, \cdot)$ bzw. $T_\epsilon(\cdot, \cdot)$ ebenfalls symmetrisch und positiv semidefinit bzw. positiv definit. Die Bilinearform $S_\nu(\cdot, \cdot)$ ist nur positiv semidefinit, da wegen der Identität (2.26) für den Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$

$$S_\nu(\nabla v, \cdot) = 0, \quad (4.30a)$$

$$S_\nu(\cdot, \nabla v) = 0 \quad (4.30b)$$

und somit auch

$$S_\nu(\nabla v, \nabla v) = 0 \quad (4.30c)$$

gilt, auch wenn $\nabla v \neq 0$ ist.

4.1.3 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Die schwache Formulierung des elektromagnetischen Randwertproblems aus Abschnitt 4.1.2 dient als Ausgangspunkt für die Herleitung des *FE*-Gleichungssystems. Da der Raum $\mathcal{H}_0(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ unendlich dimensional ist, ist auch das durch (4.27) gegebene Problem unendlich dimensional und somit für eine numerische Lösung ungeeignet. Aus diesem Grund wird der Raum, in welchem die elektrische Feldstärke gesucht wird, auf den zuvor in Kapitel 3 definierten endlich dimensionalen Unterraum $\mathcal{W}_0^{h,p}$ eingeschränkt. Für die elektrische Feldstärke \mathbf{E} ergibt sich hieraus die Darstellung

$$\mathbf{E} = \sum_l x_{E,l} \mathbf{e}_l \quad \text{mit } \mathbf{e}_l \in \mathcal{W}_0^{h,p}. \quad (4.31)$$

Die so definierte elektrische Feldstärke \mathbf{E} wird im Allgemeinen nicht mit der exakten Lösung des Randwertproblem übereinstimmen, sodass (4.29) nicht mehr für alle $\mathbf{e} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ erfüllt ist. Der Raum der Testfunktionen muss daher ebenfalls auf einen endlich dimensionalen Teilraum $\mathcal{W}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ eingeschränkt werden. Im allgemeinsten Fall müssen die Räume der Ansatz- und Testfunktionen nicht übereinstimmen, was gerade im Bereich der Integralgleichungsverfahren als zusätzlicher Freiheitsgrad genutzt wird, wie zum Beispiel in [PRM97, S. 418] oder [BC07], um die Eigenschaften der resultierenden Matrizen zu beeinflussen. Da in dieser Arbeit ein Galerkin-Ansatz betrachtet wird, werden als Testfunktionen die gleichen Funktionen gewählt wie für die Ansatzfunktionen, woraus für (4.29)

$$S^\nu(\mathbf{E}, \mathbf{e}_k) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{E}, \mathbf{e}_k) = -jk_0 b_J(\mathbf{e}_k) - jk_0 b_H(\mathbf{e}_k) \quad \forall \mathbf{e}_k \in \mathcal{W}_0^{h,p} \quad (4.32)$$

folgt. Dieser Zusammenhang kann wegen der Darstellung der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} wie in (4.31) als lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $x_{E,l}$ in der Form

$$(\mathbf{S}_{EE}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{x}_E = -jk_0 (\mathbf{b}_{E,J} + \mathbf{b}_{E,H}) \quad (4.33)$$

angegeben werden, wobei

$$\mathbf{S}_{EE}^\nu \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{W}_0} \times N_{\mathcal{W}_0}}, \quad (\mathbf{S}_{EE}^\nu)_{kl} = S^\nu(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k) = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{e}_k \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{e}_l) \, d\Omega, \quad (4.34a)$$

$$\mathbf{T}_{EE}^\epsilon \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{W}_0} \times N_{\mathcal{W}_0}}, \quad (\mathbf{T}_{EE}^\epsilon)_{kl} = T^\epsilon(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k) = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot (\epsilon_r \mathbf{e}_l) \, d\Omega, \quad (4.34b)$$

$$\mathbf{x}_E \in \mathbb{C}^{N_{\mathcal{W}_0}}, \quad (\mathbf{x}_E)_k = x_{E,k}, \quad (4.34c)$$

$$\mathbf{b}_{E,J} \in \mathbb{C}^{N_{\mathcal{W}_0}}, \quad (\mathbf{b}_{E,J})_k = b_J(\mathbf{e}_k) = \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{J} \, d\Omega, \quad (4.34d)$$

$$\mathbf{b}_{E,H} \in \mathbb{C}^{N_{\mathcal{W}_0}}, \quad (\mathbf{b}_{E,H})_k = b_H(\mathbf{e}_k) = \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma \quad (4.34e)$$

gelten soll. Die so definierten Matrizen \mathbf{S}_{EE}^ν und \mathbf{T}_{EE}^ϵ haben die gleichen Eigenschaften wie die Bilinearformen (4.28a) und (4.28b), aus denen sie hervorgehen. Dies bedeutet, dass \mathbf{S}_{EE}^ν eine reelle, symmetrische, positiv semidefinite Matrix ist, während \mathbf{T}_{EE}^ϵ reell, symmetrisch und positiv definit ist.

4.1.4 Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten

Die folgenden Betrachtungen orientieren sich am Vorgehen aus [DEB96, DEPL99, DEPL00]. Es wird angenommen, dass der Dirichletrand Γ_E in N_{el} nicht zusammenhängende Komponenten $\Gamma_{E,i}$ zerfällt, das heißt

$$\Gamma_E = \bigcup_{i=1}^{N_{el}} \Gamma_{E,i}, \quad (4.35)$$

wobei

$$\Gamma_{E,i} \cap \Gamma_{E,j} = \emptyset \quad \text{falls } i \neq j \quad (4.36)$$

gelten soll. Wird unter diesen Voraussetzungen das zu (4.33) gehörende verallgemeinerte Eigenwertproblem in der Form

$$\mathbf{S}_{EE}^\nu \mathbf{x}_{E,i} = k_{E,i}^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{x}_{E,i} \quad (4.37)$$

betrachtet, so gilt für die Eigenpaare $(k_{E,i}^2, \mathbf{x}_{E,i})$ aufgrund der Eigenschaften der Matrizen \mathbf{S}_{EE}^ν und \mathbf{T}_{EE}^ϵ , dass

$$k_{E,i}^2 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}_{E,i} \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{W}_0}}, \quad i = 1, \dots, N_{\mathcal{W}_0}, \quad (4.38)$$

wobei eine Sortierung der Eigenwerte in der Form

$$0 \leq k_{E,1}^2 \leq k_{E,2}^2 \leq \dots \leq k_{E,N}^2 \quad (4.39)$$

angenommen wird. Die Eigenvektoren können so normiert werden, dass sie \mathbf{T}_{EE}^ϵ -normal sind, das heißt

$$\mathbf{x}_{E,i}^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{x}_{E,j} = \delta_{ij}, \quad (4.40)$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (4.41)$$

darstellt. Mit der durch die Eigenvektoren $\mathbf{x}_{E,i}$ gebildeten Matrix

$$\mathbf{X}_E = (\mathbf{x}_{E,1} | \mathbf{x}_{E,2} | \dots | \mathbf{x}_{E,N_{\mathcal{W}_0}}) \quad (4.42)$$

folgt für die beiden Matrizen \mathbf{T}_{EE}^ϵ und \mathbf{S}_{EE}^ν

$$\mathbf{X}_E^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{X}_E = \mathbf{I}_{N_{\mathcal{W}_0}}, \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{X}_E^T \mathbf{S}_{EE}^\nu \mathbf{X}_E = \text{diag}\{k_{E,i}^2\}, \quad (4.43b)$$

wobei $\text{diag}\{k_{E,i}^2\}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten entlang der Hauptdiagonalen ist. Die resultierenden Eigenpaare $(k_{E,i}^2, \mathbf{x}_{E,i})$ gehören einer der drei folgenden Klassen an:

- a) Es handelt sich um unphysikalische Quellenfelder, welche im Nullraum der Rotation liegen, aber der Divergenz-Bedingung (4.7c) nicht genügen, sodass

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}_a \neq 0 \quad (4.44)$$

beziehungsweise in schwacher Form

$$\exists v \in \mathcal{V}_0^{h,p} : \quad T^\epsilon(\mathbf{E}_a, \nabla v) \neq 0 \quad (4.45)$$

gilt. Die zu diesen Eigenwerten gehörenden Felder können durch Gradienten skalarer Felder dargestellt werden, sodass sich im FE -Kontext aufgrund der diskreten Sequenzeigenschaft (3.3) und der Konstruktion der Räume $\mathcal{V}_0^{h,p}$ und $\mathcal{W}_0^{h,p}$ für die Felder die Darstellung

$$\mathbf{E}_a = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} x_{V,a,k} \nabla v_k, \quad v_k \in \mathcal{V}_0^{h,p} \quad (4.46)$$

ergibt, während der Koeffizientenvektor $\mathbf{x}_{E,a}$ mit Hilfe des diskreten Gradienten-Operators (3.12) in der Form

$$\mathbf{x}_{E,a} = \mathbf{G}\mathbf{x}_{V,a} \quad (4.47)$$

angegeben werden kann. Mit (4.46) und (4.47) lautet (4.45) in Matrixform

$$\exists \mathbf{x}_V \in \mathbb{R}^{N_{V_0}} : \quad \mathbf{x}_V^T \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{G} \mathbf{x}_{V,a} \neq 0 \quad (4.48)$$

beziehungsweise äquivalent hierzu

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{G} \mathbf{x}_{V,a} \neq 0. \quad (4.49)$$

Die Anzahl a_N dieser Art von Nulleigenwerten entspricht der Dimension des $\mathcal{V}_0^{h,p}$, sodass gilt:

$$a_N = N_{V_0} = \dim \mathcal{V}_0^{h,p}. \quad (4.50)$$

- b) Neben den zuvor genannten unphysikalischen Nulleigenwerten existiert unter den gemachten Voraussetzungen hinsichtlich des Randes eine weitere Klasse von Nulleigenwerten $k_{E,b}^2 = 0$. Hierbei handelt es sich um Approximationen statischer Moden für die

$$T^\epsilon(\mathbf{E}_b, \nabla v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_0^{h,p} \quad (4.51)$$

gilt, welche in $\mathcal{V}_0^{h,p}$ im schwachen Sinne divergenzfrei sind. Ihre Anzahl entspricht der Dimension des $H^1(\Omega)$ aus (2.45) und ist um eins geringer als die Anzahl der nicht zusammenhängenden Komponenten des Dirichlet-Randes, das heißt

$$b_N = \dim H^1(\Omega) = N_{el} - 1. \quad (4.52)$$

- c) Bei den restlichen Eigenpaaren handelt es sich um Näherungen für die physikalischen Resonanzen der betrachteten Struktur mit nicht verschwindendem Eigenwert $k_{E,c}^2 > 0$. Für ihre Anzahl c_N gilt

$$c_N = \dim \mathcal{W}_0^{h,p} - \dim \mathcal{V}_0^{h,p} - \dim H^1(\Omega). \quad (4.53)$$

Somit hat das verallgemeinerte Eigenwertproblem (4.37) neben den physikalischen Nulleigenwerten eine weitere Klasse von Nulleigenwerten, deren Anzahl von der Dimension des $\mathcal{V}_0^{h,p}$ und somit vom gegebenen FE -Netz und dem polynomiellen Grad der Ansatzfunktionen abhängig ist. Mit Hilfe dieser Betrachtungen können auch im Anregungsfall (4.33) Aussagen über das Verhalten der Eigenwerte der dort auftretenden Systemmatrix

$$\mathbf{M}_{EE} = \mathbf{S}_{EE}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \quad (4.54)$$

für den Fall $k_0^2 > 0$ gemacht werden. Wird der Rayleigh-Koeffizient dieser Systemmatrix mit einem der Eigenvektoren $\mathbf{x}_{E,i}$ des verallgemeinerten Eigenwertproblems (4.37) gebildet, so gilt

$$\rho(\mathbf{x}_{E,i}) = \frac{\mathbf{x}_{E,i}^T (\mathbf{S}_{EE}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{x}_{E,i}}{\mathbf{x}_{E,i}^T \mathbf{x}_{E,i}} \quad (4.55a)$$

$$\stackrel{(4.37)}{=} (k_{E,i}^2 - k_0^2) \frac{\mathbf{x}_{E,i}^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{x}_{E,i}}{\mathbf{x}_{E,i}^T \mathbf{x}_{E,i}} \quad (4.55b)$$

$$\stackrel{(4.40)}{=} \frac{k_{E,i}^2 - k_0^2}{\|\mathbf{x}_{E,i}\|^2}. \quad (4.55c)$$

Wird das Anregungsproblem (4.33) von links mit der Matrix \mathbf{X}_E^T aus (4.43a) multipliziert und außerdem die Variablentransformation

$$\mathbf{x}_E = \mathbf{X}_E \tilde{\mathbf{x}}_E \quad (4.56)$$

durchgeführt, so gilt

$$\mathbf{X}_E^T (\mathbf{S}_{EE}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{X}_E \tilde{\mathbf{x}}_E = -jk_0 \mathbf{X}_E^T (\mathbf{b}_{E,J} + \mathbf{b}_{E,H}). \quad (4.57)$$

Wegen (4.43) folgt für $\tilde{\mathbf{x}}_E$ bzw. \mathbf{x}_E die Darstellung

$$\tilde{\mathbf{x}}_E = -jk_0 \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{k_{E,i}^2 - k_0^2}\right\} \mathbf{X}_E^T (\mathbf{b}_{E,J} + \mathbf{b}_{E,H}), \quad (4.58a)$$

$$\mathbf{x}_E = -jk_0 \mathbf{X}_E \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{k_{E,i}^2 - k_0^2}\right\} \mathbf{X}_E^T (\mathbf{b}_{E,J} + \mathbf{b}_{E,H}) \quad (4.58b)$$

$$= -jk_0 \sum_{i=1}^{N_{W_0}} \mathbf{x}_{E,i} \frac{\mathbf{x}_{E,i}^T (\mathbf{b}_{E,J} + \mathbf{b}_{E,H})}{k_{E,i}^2 - k_0^2}. \quad (4.58c)$$

Aus dem Trägheitssatz von Sylvester [Par98, S. 11] und dem Courant-Fischer-Theorem [Par98, S. 206] folgen für die Eigenwerte $\lambda_{E,i}$ der Systemmatrix \mathbf{M}_{EE} des ursprünglichen Gleichungssystems die Aussagen

$$\operatorname{sgn}(\lambda_{E,i}) = \operatorname{sgn}(k_{E,i}^2 - k_0^2), \quad (4.59a)$$

$$|k_{E,i}^2 - k_0^2| \tau_{\min} \leq |\lambda_{E,i}| \leq |k_{E,i}^2 - k_0^2| \tau_{\max}, \quad (4.59b)$$

wobei τ_{\min} den kleinsten und τ_{\max} den größten Eigenwert der symmetrischen, positiv definiten Matrix \mathbf{T}_{EE}^ϵ bezeichnet. Die Eigenpaare $(\lambda_{E,i}, \mathbf{x}_{E,i})$ der Systemmatrix \mathbf{M}_{EE} können, wie zuvor beim verallgemeinerten Eigenwertproblem (4.37), in drei Klassen unterteilt werden:

- A) Hierbei handelt es sich um negative Eigenwerte $\lambda_{E,A} < 0$, welche mit den unphysikalischen Quellenfeldern des Typs a des verallgemeinerten Eigenwertproblems assoziiert sind. Ihre Anzahl A_N entspricht ebenfalls der Dimension des $\mathcal{V}_0^{h,p}$, das heißt es gilt

$$A_N = \dim \mathcal{V}_0^{h,p}. \quad (4.60)$$

- B) Die Eigenwerte dieses Typs sind ebenfalls negativ und sind mit den Eigenwerten des Typs b des verallgemeinerten Eigenwertproblems assoziiert. Für ihre Anzahl gilt daher

$$B_N = \dim H^1(\Omega) = N_{el} - 1. \quad (4.61)$$

- C) Die Eigenwerte des Typs C sind jenen des Typs c des verallgemeinerten Eigenwertproblems zugeordnet. Ihre Anzahl C_N entspricht der Anzahl der Eigenwerte c_N , sodass

$$C_N = \dim \mathcal{W}_0^{h,p} - \dim \mathcal{V}_0^{h,p} - \dim H^1(\Omega) \quad (4.62)$$

gilt. Hinsichtlich ihres Vorzeichens unterteilen sie sich im Gegensatz zu den beiden anderen Typen jedoch in zwei Klassen. Wird angenommen, dass

$$k_{E,c_1}^2 \leq k_{E,c_2}^2 \leq \dots \leq k_{E,c_n}^2 \leq k_0^2 \leq k_{E,c_{n+1}}^2 \leq \dots \leq k_{E,c_N}^2 \quad (4.63)$$

sowie

$$k_{E,c_i} \neq k_0, \quad i = 1, \dots, c_N, \quad (4.64)$$

gilt, so folgt, dass

$$C_n = c_n \quad (4.65a)$$

Eigenwerte des Typs C negativ sind, während die restlichen

$$C_p = C_N - C_n \quad (4.65b)$$

Eigenwerte ein positives Vorzeichen haben. Ist das betrachtete Feldgebiet Ω im Vergleich zur Wellenlänge nicht zu groß, was in praxisrelevanten Fällen gegeben ist, so gilt $C_n \ll C_p$.

Die Verteilung der positiven und negativen Eigenwerte ist für das Konvergenzverhalten von iterativen Lösern von Interesse [Hil06], worauf an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen werden soll. Wichtig für die Stabilitätseigenschaften der verwendeten Formulierung sind jedoch die Eigenwerte der Typen A und B der Systemmatrix, also gerade jene Eigenwerte welche Nulleigenwerten des verallgemeinerten Eigenwertproblems zugeordnet sind. Wie aus (4.59b) hervorgeht, konvergieren diese im Anregungsfall mit sinkender Wellenzahl $k_0 \rightarrow 0$ gegen Null. Jene Eigenwerte, welche den statischen Moden entsprechen, lassen sich durch die Vorgabe geeigneter integraler Randbedingungen entfernen, sodass diese kein Problem mehr darstellen. Für den Fall eines magnetostatischen Randwertproblems werden die entsprechenden integralen Randbedingungen zum Beispiel in [Bos97, S. 164] vorgestellt, wobei das Vorgehen im Fall der vorliegenden elektrischen Feldformulierung analog ist. Als Ursache für die Niederfrequenzinstabilität der elektrischen Feldformulierung verbleiben

die Eigenwerte des Typs *A*. Das liegt daran, dass die Forderung nach Quellenfreiheit des elektrischen Feldes (4.7c) in der elektrischen Feldformulierung (4.12a) nur in frequenzskalierter Form berücksichtigt wird, was durch Divergenzbildung unter Ausnutzung der Identität (2.2) erkennbar ist:

$$\underbrace{\nabla \cdot [\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{E})]}_{(2.2)_0} - k_0^2 \nabla \cdot \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{J}_p}_{=0} \Leftrightarrow k_0^2 \nabla \cdot \epsilon_r \mathbf{E} = 0. \quad (4.66)$$

In der schwachen Form (4.27) beziehungsweise (4.29) entspricht das Bilden der Divergenz dem Testen mit reinen Gradientenfeldern, das heißt

$$\underbrace{S^\nu(\mathbf{E}, \nabla v)}_{(4.30)_0} + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{E}, \nabla v) = -jk_0 \underbrace{b_{E,J}(\nabla v)}_{(4.5)_0} - jk_0 b_{E,H}(\nabla v). \quad (4.67)$$

Im Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ verschwinden alle Terme der Gleichung und es zeigt sich, dass jene Funktionen aus dem Nullraum der Rotation, welche den Randbedingungen genügen, im Fall $k_0 = 0$ keinen weiteren Bedingungen unterworfen sind. Solange $k_0 \neq 0$ gilt, ist die Divergenzbedingung (4.7c) aufgrund der Sequenzeigenschaft (2.56) implizit in der schwachen Form (4.27) enthalten. Im Grenzfall $k_0 = 0$ gilt dies jedoch nicht mehr. Insbesondere ergibt sich ausgewertet für die Nulleigenwerte von (4.37) aus (4.59a) und (4.59b) für die den Nulleigenwerten zugeordneten Eigenwerte $\lambda_{E,i}$ des Anregungsproblems die Abschätzung

$$|k_{E,i}^2 - k_0^2| \tau_{\min} \leq |\lambda_{E,i}| \leq |k_{E,i}^2 - k_0^2| \tau_{\max} \stackrel{k_{E,i}^2=0}{\Leftrightarrow} -k_0^2 \tau_{\max} \leq \lambda_{E,i} \leq -k_0^2 \tau_{\min}. \quad (4.68)$$

Hieraus wird deutlich, dass die Eigenwerte im Fall $k_0 \rightarrow 0$ mit k_0^2 gegen Null konvergieren, da $\tau_{\min}, \tau_{\max} < \infty$ gilt. Im diskreten Fall wird der gleiche Sachverhalt durch (4.33) wiedergegeben. Da die Ansatzfunktionen so gewählt wurden, dass sie der diskreten Sequenzeigenschaft (3.3) genügen, ist die Bedingung der Divergenzfreiheit der Felder ebenfalls implizit im entsprechenden Gleichungssystem enthalten. Wegen der endlichen Genauigkeit bei der Darstellung der Matrixeinträge von (4.33) kommt es jedoch bereits bei der Betrachtung von Wellenzahlen $0 < k_0 \ll 1 \text{ m}^{-1}$ aufgrund von Auslöschung zu Schwierigkeiten. Es kann daher immer eine Wellenzahl $k_0 > 0$ gefunden werden, sodass der mit k_0^2 skalierte Beitrag der Matrix \mathbf{T}_{EE}^ϵ zur Gesamtsystemmatrix im Rahmen der Maschinengenauigkeit nicht mehr vollständig berücksichtigt wird. Selbst für den Fall, dass die elektrische Feldformulierung stabilisiert wird, zum Beispiel unter Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren zur expliziten Berücksichtigung der Divergenzbedingung wie in [KMEK90, SSBS10], wird dadurch das Niederfrequenzproblem nicht vollständig gelöst. Zwar ist eine Approximation der elektrischen Feldstärke mit diesem Vorgehen im Niederfrequenzfall möglich, aber da elektrische und magnetische Felder im verlustfreien Fall bei Betrachtung des statischen Grenzfalls vollständig voneinander entkoppelt sind, ist eine Rekonstruktion der magnetischen Felder aus den berechneten elektrischen Feldern nicht möglich.

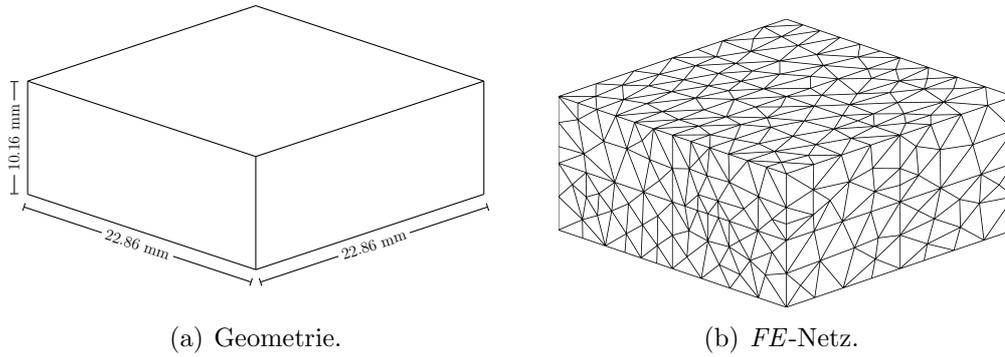


Abbildung 4.1.2: Verlustloser Hohlraumresonator. Die zugrunde liegende Geometrie und das FE -Netz sind dargestellt. Für die Materialparameter wird $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ und $\kappa = 0$ angenommen, auf dem Rand gilt $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0$.

Die Bestimmung von Netzwerkparametern, welche mit der im System gespeicherten magnetischen Energie zusammenhängen, wie zum Beispiel Induktivitäten, kann somit in diesem Fall nicht durchgeführt werden.

4.1.5 Numerische Ergebnisse

Als Randwertproblem wird die Struktur aus Abbildung 4.1.2 betrachtet, welche einen einfachen leeren Hohlraumresonator darstellt, das heißt, es gilt

$$\mu = \mu_0, \quad (4.69)$$

$$\epsilon = \epsilon_0, \quad (4.70)$$

$$\kappa = 0 \quad (4.71)$$

im Feldgebiet Ω und auf dem Rand $\Gamma = \Gamma_E = \partial\Omega$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (4.72)$$

Dieses Randwertproblem hat den Vorteil, dass die Eigenwerte und -funktionen analytisch berechenbar und in der Literatur, siehe [Har01, S. 155ff], [Poz05, S. 278ff], dokumentiert sind. Außerdem ist die Geometrie bei Verwendung geradliniger Tetraeder im FE -Kontext exakt darstellbar, sodass sich keine zusätzlichen Fehler in der Lösung aufgrund einer Approximation des Feldgebietes ergeben. Da das Feldgebiet nur einen einzigen zusammenhängenden Dirichlet-Rand besitzt, existieren keine physikalisch sinnvollen Nulleigenwerte. In Tabelle 4.1 sind die ersten physikalischen Eigenmoden aufgelistet. Die analytischen Eigenwellenzahlen ergeben sich nach [Har01, S. 155ff] zu

$$\gamma_{lmn} = \pm j \sqrt{\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \quad (4.73)$$

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | 194.3518j | $4.6 \cdot 10^{-4}$ | $6.2 \cdot 10^{-6}$ | $8.6 \cdot 10^{-9}$ |
| TE_{210} | 307.2972j | $4.9 \cdot 10^{-4}$ | $2.0 \cdot 10^{-5}$ | $8.7 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{120} | 307.2972j | $2.4 \cdot 10^{-3}$ | $5.8 \cdot 10^{-5}$ | $3.3 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{011} | 338.3760j | $5.7 \cdot 10^{-3}$ | $8.9 \cdot 10^{-7}$ | $7.5 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{101} | 338.3760j | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $2.9 \cdot 10^{-5}$ | $1.5 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{111} | 365.2186j | $4.3 \cdot 10^{-3}$ | $1.5 \cdot 10^{-5}$ | $1.9 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{111} | 365.2186j | $3.7 \cdot 10^{-4}$ | $3.5 \cdot 10^{-5}$ | $2.1 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 4.1: Eigenwerte der Feldformulierung im verlustlosen Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des verlustlosen Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

mit $a = b = 0.9$ in = 22.86 mm und $c = 0.4$ in = 10.16 mm und der relative Fehler $e_{lmn,i}$ wird anhand von

$$e_{lmn,i} = \frac{|\gamma_{lmn,i} - \gamma_{lmn}|}{|\gamma_{lmn}|} \quad (4.74)$$

bestimmt, wobei $\gamma_{lmn,i}$ der aus dem Eigenwertproblem

$$(\mathbf{S}^\nu + \gamma_{lmn,i}^2 \mathbf{T}^\epsilon) \mathbf{x}_{lmn,i} = 0 \quad (4.75)$$

bestimmte Eigenwert bei Verwendung von Ansätzen i -ter Ordnung ist. Wie anhand von Tabelle 4.1 zu erkennen ist, werden die physikalischen Eigenwerte durch das diskretisierte System sehr gut angenähert. Wie zuvor bereits diskutiert und in Abbildung 4.1.3 dargestellt, ergeben sich aus der elektrischen Feldformulierung neben den physikalisch sinnvollen Eigenwerten auch unphysikalische Nulleigenwerte. Da das System verlustfrei ist, liegen alle Eigenwerte auf der imaginären Achse.

Abschließend ist in Abbildung 4.1.4 die Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ [TB97, S. 94f] der Systemmatrix \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_{EE}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \quad (4.76)$$

des Resonatorproblems in Abhängigkeit der Wellenzahl beziehungsweise Frequenz dargestellt. Während die Konditionszahl im Hochfrequenzfall vergleichsweise kleine Werte annimmt, zeigt sich beim Übergang $k_0 \rightarrow 0$, dass das Gleichungssystem immer schlechter konditioniert und die Lösung daher immer anfälliger für Rundungsfehler wird. Die Ausbildung des Plateaus bei niedrigen Frequenzen ist hierbei auf die Maschinengenauigkeit zurückzuführen, da die reinen Gradientenfelder niedriger Ordnung nur implizit vorliegen und deren Berechnung daher Rundungsfehler behaftet ist.

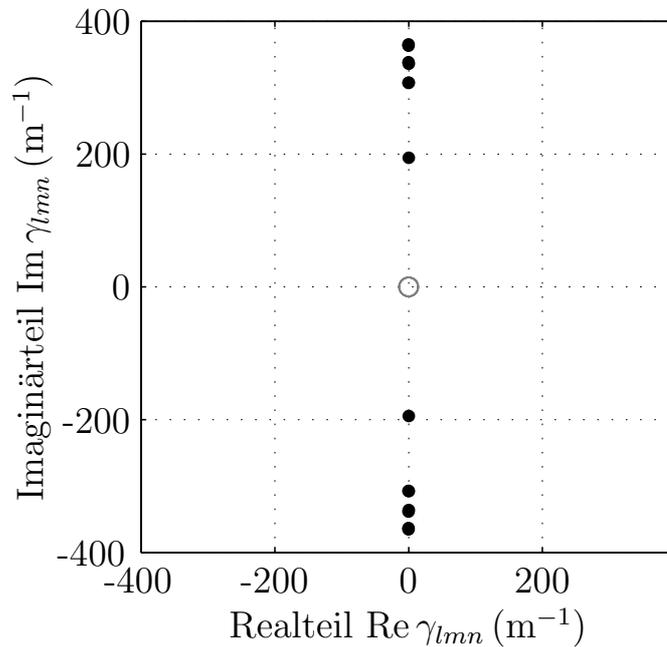


Abbildung 4.1.3: Eigenwertverteilung der Feldformulierung im verlustlosen Fall: Lage der Eigenwerte des verlustlosen Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte und unphysikalische Eigenwerte als graue Kreise dargestellt.

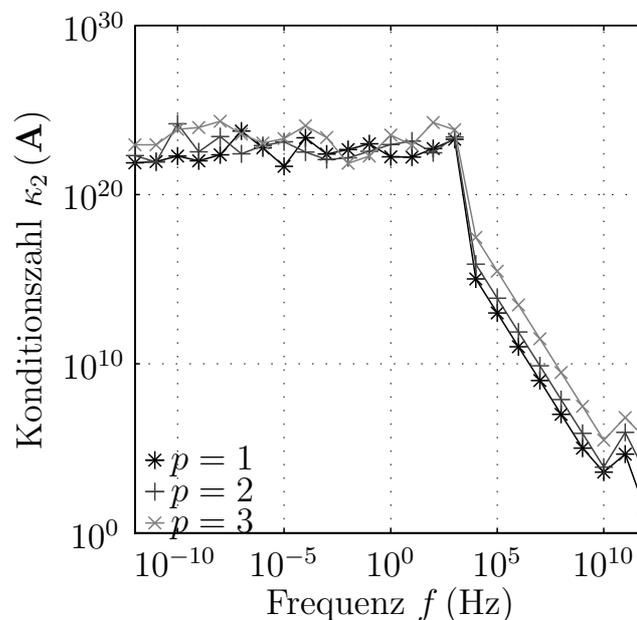


Abbildung 4.1.4: Konditionierung der Feldformulierung im verlustlosen Fall: Frequenzabhängigkeit der Konditionszahl κ_2 (\mathbf{A}) der Systemmatrix der Feldformulierung für das verlustlose Resonatorproblem für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

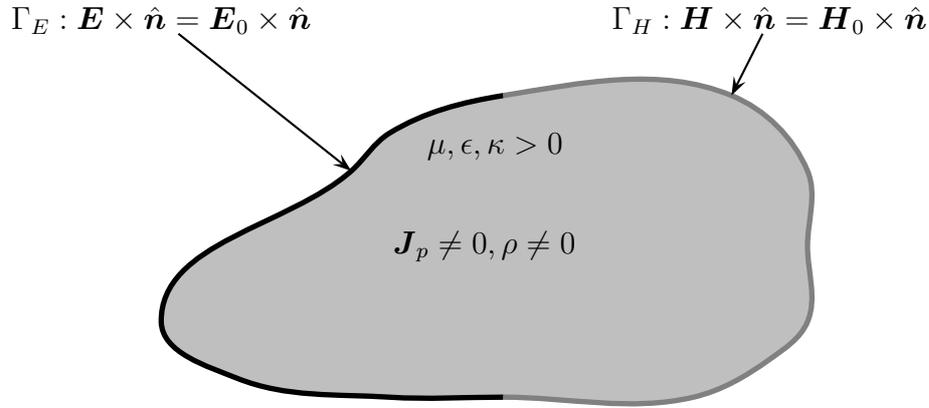


Abbildung 4.2.1: Verlustbehaftetes Randwertproblem.

4.2 Verlustbehafteter Fall

Im Folgenden werden ähnliche Betrachtungen wie in Abschnitt 4.1 für den verlustbehafteten Fall durchgeführt, um zu zeigen, dass auch in diesem Fall eine Niederfrequenzinstabilität der elektrischen Feldformulierung auftritt.

4.2.1 Annahmen und Randwertproblem

Im Gegensatz zum verlustlosen Fall aus Abschnitt 4.1 wird in diesem Abschnitt angenommen, dass, wie in Abbildung 4.2.1 dargestellt, im gesamten betrachteten Feldgebiet Ω für die elektrische Leitfähigkeit $\kappa > 0$ gilt.

Außer den durch die nicht verschwindende Leitfähigkeit verursachten Leitungsverlusten sollen keine weiteren Verluste auftreten, das heißt, Polarisationsverluste oder Verluste durch Impedanzrandbedingungen werden nicht betrachtet. Die betrachteten Randbedingungen sind, wie in Abschnitt 4.1, vom Dirichlet- oder Neumann-Typ, und es gilt:

$$\Gamma_E \cup \Gamma_H = \Gamma, \quad (4.77a)$$

$$\Gamma_E \cap \Gamma_H = \emptyset, \quad (4.77b)$$

$$\Gamma_E \neq \emptyset. \quad (4.77c)$$

Ebenso wie in Abschnitt 4.1.1 wird für die eingeprägte Stromdichte \mathbf{J}_p angenommen, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.78)$$

gilt. Die Voraussetzung (4.5b) wird im verlustbehafteten Fall gelockert, sodass

$$\mathbf{J}_p \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (4.79a)$$

$$\mathbf{J}_p \cdot \hat{\mathbf{n}} \neq 0 \quad \text{auf } \Gamma_H \quad (4.79b)$$

erlaubt wird. Während in Abschnitt 4.1 aus der Quellenfreiheit der eingepprägten Ströme das Verschwinden der Raumladungsdichte ρ folgt, gilt dies für das aktuell betrachtete Problem wegen

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega\rho \stackrel{(2.13)}{=} \nabla \cdot (\mathbf{J}_p + \mathbf{J}_s) + j\omega\rho \stackrel{(4.78)}{=} \nabla \cdot \mathbf{J}_s + j\omega\rho \stackrel{(2.11e)}{=} 0 \quad (4.80)$$

nicht. Die relevanten Gleichungen für das vorliegende Randwertproblem lauten daher

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.81a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} + \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (4.81b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -j\omega\rho \quad \text{in } \Omega, \quad (4.81c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{in } \Omega, \quad (4.81d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.81e)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.81f)$$

$$\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (4.81g)$$

Dabei ist zu beachten, dass (4.81c) und (4.81d) zu

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s + j\omega\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.82)$$

zusammengefasst werden können, was der Divergenz von (4.81b) entspricht. Die Raumladungsdichte ρ kann im Anschluss an die Berechnung der Felder aus (4.81d) bestimmt werden und tritt aufgrund der gemachten Annahmen nicht als unabhängige Quellgröße in den Gleichungen auf. Werden diese Zusammenhänge berücksichtigt, so lautet das Randwertproblem

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.83a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} + \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (4.83b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s + j\omega\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.83c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.83d)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.83e)$$

$$\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (4.83f)$$

zusammen mit den Konstitutivgleichungen nach (2.14)

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.84a)$$

$$\mathbf{H} = \nu\mathbf{B} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.84b)$$

$$\mathbf{J}_s = \kappa\mathbf{E} \quad \text{in } \Omega. \quad (4.84c)$$

Für nicht verschwindende Kreisfrequenzen $\omega > 0$ gilt, analog zum verlustfreien Fall, dass (4.83c) und (4.83d) aus (4.83b) und (4.83a) folgen. Multiplikation von (4.83a) mit ν , Ausnutzen der Konstitutivgleichungen (2.14), anschließendes Bilden der Rotation dieser Gleichung und Einsetzen von (4.83b) führt auf die, zu (4.83) äquivalente, elektrische Feldformulierung in frequenzabhängiger Form:

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\kappa\mathbf{E} - \omega^2\epsilon\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (4.85a)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.85b)$$

$$(\nu \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -j\omega\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (4.85c)$$

Hierbei wurde die Darstellung von \mathbf{H} nach (4.9) verwendet. Die zu (4.12) analoge Formulierung von (4.85) in Abhängigkeit der Freiraumwellenzahl k_0 lautet

$$\nabla \times \nu_r \nabla \times \mathbf{E} + jk_0\kappa_r\mathbf{E} + (jk_0)^2 \epsilon_r\mathbf{E} = -jk_0\eta_0\mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (4.86a)$$

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.86b)$$

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -jk_0\eta_0\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (4.86c)$$

mit der zusätzlichen Abkürzung $\kappa_r = \eta_0\kappa$. Bis auf den Term $jk_0\kappa_r\mathbf{E}$ und die abweichenden Annahmen bezüglich der eingepprägten Ströme ist die Formulierung identisch mit jener aus (4.12). Der Einfachheit halber wird im Folgenden angenommen, dass

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (4.87)$$

gilt. Die Berücksichtigung von nicht verschwindenden Randbedingungen ist jedoch kein prinzipielles Hindernis und kann analog zum verlustfreien Fall erfolgen.

4.2.2 Schwache Formulierung des Randwertproblems

Wie im verlustlosen Fall existiert auch für das Randwertproblem (4.86) nur in Sonderfällen eine klassische Lösung im gesamten Feldgebiet Ω . Insbesondere im Fall einer sprunghaften Änderung der Materialeigenschaften existiert eine solche klassische Lösung im gesamten Feldgebiet nicht. Um diesen Nachteil der Formulierung (4.86) zu beheben, wird im Folgenden eine schwache Formulierung hergeleitet. Hierzu wird (4.86a) mit einer beliebigen Testfunktion $\mathbf{e} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ multipliziert und über das Feldgebiet Ω integriert:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \, d\Omega + jk_0 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\kappa_r \mathbf{E}) \, d\Omega \\ + (jk_0)^2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) \, d\Omega = -jk_0\eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Ein zum verlustlosen Fall analoges Vorgehen führt auf die schwache Formulierung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{e} \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{E}) \, d\Omega + jk_0 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\kappa_r \mathbf{E}) \, d\Omega + (jk_0)^2 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) \, d\Omega \\ = -jk_0 \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega - jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Durch die Verwendung der Bilinear- und Linearformen aus (4.28), zusammen mit der Einführung der neuen Bilinearform

$$T^\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\kappa_r \mathbf{v}) \, d\Omega = \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\kappa \mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (4.90)$$

kann (4.89) kompakter als

$$S^\nu(\mathbf{E}, \mathbf{e}) + jk_0 T^\kappa(\mathbf{E}, \mathbf{e}) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{E}, \mathbf{e}) = -jk_0 b_{E,J}(\mathbf{e}) - jk_0 b_{E,H}(\mathbf{e}) \quad (4.91)$$

dargestellt werden. Die neu eingeführte Bilinearform $T^\kappa(\cdot, \cdot)$ ist aufgrund der Annahme $\kappa > 0$ in ganz Ω positiv definit und - wie anhand von (4.90) zu sehen ist - ebenfalls symmetrisch. Die schwache Formulierung (4.91) des Randwertproblems im verlustbehafteten Fall unterscheidet sich durch einen zusätzlichen Term, der durch die nicht verschwindende Leitfähigkeit hervorgerufen wird, von der schwachen Formulierung (4.29) des verlustlosen Falls.

4.2.3 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Zur Bestimmung einer Näherungslösung der schwachen Formulierung und zur Herleitung des FE -Gleichungssystems wird

$$\mathbf{E} = \sum_l^{N_{\mathcal{W}_0}} x_{E,l} \mathbf{e}_l \quad (4.92)$$

mit $\mathbf{e}_l \in \mathcal{W}_0^{h,p}$ angesetzt. Da wie im verlustlosen Fall ein Galerkin-Ansatz betrachtet wird, werden auch die Testfunktionen auf den $\mathcal{W}_0^{h,p}$ beschränkt, sodass sich das lineare Gleichungssystem

$$[\mathbf{S}_{EE}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{EE}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon] \mathbf{x}_E = -jk_0 (\mathbf{b}_{E,J} + \mathbf{b}_{E,H}) \quad (4.93)$$

für den unbekanntenen Koeffizientenvektor \mathbf{x}_E ergibt, wobei \mathbf{S}_{EE}^ν , \mathbf{T}_{EE}^κ , \mathbf{x}_E , $\mathbf{b}_{E,J}$ und $\mathbf{b}_{E,H}$ wie in (4.34) definiert sind und zusätzlich für \mathbf{T}_{EE}^κ

$$\mathbf{T}_{EE}^\kappa \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{W}_0} \times N_{\mathcal{W}_0}}, \quad (\mathbf{T}_{EE}^\kappa)_{kl} = T^\kappa(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k) = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \cdot (\kappa_r \mathbf{e}_l) \, d\Omega \quad (4.94)$$

gilt. Die resultierende Matrix ist, ebenso wie die zugehörige Bilinearform, reell, symmetrisch und positiv definit. Hier zeigt sich einer der wesentlichen Unterschiede zwischen dem verlustfreien Fall (4.33) und dem verlustbehafteten Fall (4.93). Während die resultierende Systemmatrix in (4.33) reell und symmetrisch ist, ist die Systemmatrix im verlustbehafteten Fall komplex symmetrisch. Einen weiteren Unterschied stellt das (4.93) zugeordnete Eigenwertproblem dar. Während es sich im verlustfreien Fall um ein lineares verallgemeinertes Eigenwertproblem für die Eigenwerte $k_{E,i}^2$ mit symmetrisch positiv (semi-)definiten Matrizen handelt, ergibt sich im verlustbehafteten Fall ein echt quadratisches Eigenwertproblem (*QEP*) für die Eigenwerte $\gamma_{E,i}$. Im Rahmen der Betrachtungen des Niederfrequenzverhaltens der vorliegenden Feldformulierung wird für einen Spezialfall noch näher auf die Eigenwerte dieses Eigenwertproblems eingegangen.

4.2.4 Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten

Ebenso wie im verlustfreien Fall ist es möglich, ein entsprechendes Eigenwertproblem zu erhalten, indem die Freiraumwellenzahl k_0 in (4.93) direkt durch den gesuchten Eigenwert $k_{E,i}$ und der Vektor $\mathbf{x}_{E,i}$ durch den entsprechenden Eigenvektor $\mathbf{x}_{E,i}$ ersetzt werden, was auf

$$(\mathbf{S}_{EE}^\nu + j k_{E,i} \mathbf{T}_{EE}^\kappa - k_{E,i}^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{x}_{E,i} = 0 \quad (4.95)$$

führt. Durch einen Vergleich dieses Zusammenhangs mit der Standarddarstellung eines *QEP*

$$(\mathbf{A}_0 + \lambda_i \mathbf{A}_1 + \lambda_i^2 \mathbf{A}_2) \mathbf{x}_i = 0 \quad (4.96)$$

wird ersichtlich, dass bei dieser Darstellung die Eigenschaften der resultierenden Matrizen des Eigenwertproblems ungünstig sind, da mit

$$\lambda_i = k_{E,i}, \quad (4.97a)$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{S}_{EE}^\nu, \quad (4.97b)$$

$$\mathbf{A}_1 = j \mathbf{T}_{EE}^\kappa, \quad (4.97c)$$

$$\mathbf{A}_2 = -\mathbf{T}_{EE}^\epsilon \quad (4.97d)$$

sowohl positiv semidefinite, komplex symmetrische als auch negativ definite Matrizen darin vorkommen. Eine alternative Darstellung des Eigenwertproblems kann gewonnen werden, wenn (4.93) als Ausgangspunkt genommen wird. Im Gegensatz zum Vorgehen bei der Herleitung des *QEP* (4.95) wird nicht k_0 sondern der Faktor $j k_0$ durch den gesuchten Eigenwert $\gamma_{E,i}$ ersetzt, sodass sich das (4.93) zugeordnete Eigenwertproblem in der Form

$$(\mathbf{S}_{EE}^\nu + \gamma_{E,i} \mathbf{T}_{EE}^\kappa + \gamma_{E,i}^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{x}_{E,i} = 0 \quad (4.98a)$$

beziehungsweise durch Ausklammern des Eigenwerts $\gamma_{E,i}$ aus den letzten beiden Termen

$$[\mathbf{S}_{EE}^\nu + \gamma_{E,i} (\mathbf{T}_{EE}^\kappa + \gamma_{E,i} \mathbf{T}_{EE}^\epsilon)] \mathbf{x}_{E,i} = 0, \quad (4.98b)$$

ergibt, wobei in diesem Fall alle vorkommenden Matrizen reellwertig, symmetrisch und positiv (semi-)definit sind. Da es sich im Gegensatz zum verlustlosen Fall um ein echt quadratisches Eigenwertproblem handelt, sind allgemeine Aussagen über die Verteilung der Eigenwerte deutlich schwieriger zu treffen, da es in der Regel ohne zusätzliche Annahmen nicht möglich ist, die drei vorkommenden Matrizen simultan zu diagonalisieren. Für einen umfangreichen Überblick über die Theorie quadratischer Eigenwertprobleme sei auf [TM01] und die dort angegebene Literatur verwiesen. Hinsichtlich reiner Gradientenfelder als Eigenvektoren sowie der Nulleigenwerte sind jedoch weitere Aussagen möglich, ohne dass weitere Annahmen im Bezug auf die Eigenschaften und Struktur der Matrizen gemacht werden müssen. Für reine Gradientenfelder gilt

$$\mathbf{S}_{EE}^\nu \mathbf{x}_{E,i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_{E,i} \in \ker \mathbf{S}_{EE}^\nu. \quad (4.99)$$

Als Eigenvektor von (4.98) muss $\mathbf{x}_{E,i}$ weiterhin der Beziehung

$$\gamma_{E,i} (\mathbf{T}_{EE}^\kappa + \gamma_{E,i} \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{x}_{E,i} = 0 \quad (4.100)$$

genügen. Hierfür gibt es die beiden Möglichkeiten

$$\gamma_{E,i} = 0 \quad (4.101)$$

sowie

$$(\mathbf{T}_{EE}^\kappa + \gamma_{E,i} \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{x}_{E,i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_{E,i} \in \ker (\mathbf{T}_{EE}^\kappa + \gamma_{E,i} \mathbf{T}_{EE}^\epsilon). \quad (4.102)$$

Die beiden Varianten lassen sich in der Form

$$\gamma_{E,i} = 0 : \quad \mathbf{x}_{E,i} \in \ker \mathbf{S}_{EE}^\nu \quad (4.103a)$$

$$\gamma_{E,i} \neq 0 : \quad \mathbf{x}_{E,i} \in \ker \mathbf{S}_{EE}^\nu \cap \ker (\mathbf{T}_{EE}^\kappa + \gamma_{E,i} \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \quad (4.103b)$$

darstellen. Ob Eigenwerte der zweiten Klasse existieren und wie deren Verteilung aussieht, hängt von den Eigenschaften der Matrizen \mathbf{T}_{EE}^κ und \mathbf{T}_{EE}^ϵ und somit von den Eigenschaften der Materialtensoren κ und ϵ ab. Für den Spezialfall, dass für den Leitfähigkeitstensor κ und den relativen Permittivitätstensor ϵ_r

$$\kappa_r = c\epsilon_r \quad (4.104)$$

mit einer Konstanten $0 < c \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich

$$\mathbf{T}_{EE}^\kappa = c\mathbf{T}_{EE}^\epsilon \quad (4.105)$$

und für die zweite Klasse von Eigenwerten aus (4.103b) folgt

$$\gamma_{E,i} = -c. \quad (4.106)$$

Da diese Eigenwerte von Null verschieden sind, stellen sie im Hinblick auf die Niederfrequenzeigenschaften der Formulierung kein Problem dar. Aus diesem Grund werden sie bei den weiteren Betrachtungen außer Acht gelassen. Wie in (4.103a) dargestellt, gilt für die Nulleigenwerte des quadratischen Eigenwertproblems (4.98)

$$\mathbf{S}_{EE}^\nu \mathbf{x}_{E,i} = 0. \quad (4.107)$$

Die zu den Nulleigenwerten gehörenden Eigenvektoren spannen - wie im verlustlosen Fall - den Nullraum der positiv semidefiniten Matrix \mathbf{S}_{EE}^ν auf. Hierbei ist eine Einteilung in zwei Klassen möglich:

- a) Die erste Klasse entspricht unphysikalischen Quellenfeldern. Diese können durch Gradienten skalarer Felder, welche homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf Γ_E genügen, dargestellt werden, sodass

$$\mathbf{E}_a = \sum_{l=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} x_{a,l} \nabla v_l \quad v_l \in \mathcal{V}_0^{h,p} \quad (4.108)$$

mit $N_{\mathcal{V}_0} = \dim \mathcal{V}_0^{h,p}$ gilt. Im Bezug auf den Koeffizientenvektor ergibt sich mit der Darstellung des diskreten Gradienten nach (3.12)

$$\mathbf{x}_{E,a} = \mathbf{G} \mathbf{x}_{V,a} \quad (4.109)$$

und für die Anzahl a_N dieser unphysikalischen Nulleigenwerte gilt:

$$a_N = N_{\mathcal{V}_0}. \quad (4.110)$$

Im Gegensatz zu den physikalisch sinnvollen Nulleigenwerten genügen diese nicht der schwachen Form der stationären Kontinuitätsgleichung

$$\exists v \in \mathcal{V}_0^{h,p} : \quad T^\kappa(\mathbf{E}_a, \nabla v) \neq 0, \quad (4.111)$$

was im FE -Kontext in der Form

$$\exists \mathbf{x}_V \in \mathbb{C}^{N_{\mathcal{V}}} : \quad \mathbf{x}_V^T \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\kappa \mathbf{G} \mathbf{x}_{V,a} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\kappa \mathbf{G} \mathbf{x}_{V,a} \neq 0 \quad (4.112)$$

angegeben werden kann. Die linke Seite von (4.112) entspricht einer diskreten Form der Poisson-Gleichung, welcher stationäre Strömungsfelder in Leitern genügen müssen [Leh04, S. 235ff].

- b) Die zweite Klasse wird von jenen Feldern gebildet, welche im Nullraum der Rotation liegen und gleichzeitig der Kontinuitätsgleichung genügen. Hierbei

handelt es sich um Approximationen stationärer Strömungsfelder, sodass für sie im Gegensatz zu den Nulleigenwerten der zuvor genannten Klasse

$$\forall \mathbf{x}_V \in \mathbb{C}^{N_V} : \quad \mathbf{x}_V^T \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\kappa \mathbf{x}_{E,b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{G}^T \mathbf{T}_\kappa \mathbf{x}_{E,b} = 0 \quad (4.113)$$

gilt. Dieser Nullraum entspricht der ersten Kohomologie-Gruppe $H^1(\Omega, \Gamma_E)$, sodass die Anzahl b_N dieser Nulleigenwerte wie im verlustlosen Fall der ersten Bettizahl β_1 aus Abschnitt 2.5.2 entspricht

$$b_N = \beta_1 = \dim H^1(\Omega, \Gamma_E). \quad (4.114)$$

Um qualitativ einige weitere Aussagen über das Verhalten der Eigenwerte und -vektoren von (4.98) zu machen, wird im Folgenden der Spezialfall

$$\kappa_r = c\epsilon_r \quad \text{mit } 0 < c \in \mathbb{R} \quad (4.115)$$

betrachtet. Für (4.98) ergibt sich hieraus die Darstellung

$$(\mathbf{S}_{EE}^\nu + \gamma_{E,i} \mathbf{T}_{EE}^\kappa + \gamma_i^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{x}_{E,i} \stackrel{(4.115)}{=} [\mathbf{S}_{EE}^\nu + (c\gamma_{E,i} + \gamma_{E,i}^2) \mathbf{T}_{EE}^\epsilon] \mathbf{x}_{E,i} = 0. \quad (4.116)$$

Mit der Abkürzung

$$k_{E,i}^2 = - (c\gamma_{E,i} + \gamma_{E,i}^2) \quad (4.117)$$

folgt das gleiche verallgemeinerte Eigenwertproblem (4.37) wie im verlustlosen Fall, und die $\gamma_{E,i}$ können über

$$\gamma_{E,i,\pm} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - k_{E,i}^2} \quad (4.118)$$

aus den $k_{E,i}$ berechnet werden. Sofern $k_{E,i} \neq 0$ können für die einzelnen Eigenwerte ähnlich wie beim *RLC*-Schwingkreis [Phi00, S. 730ff] drei Fälle unterschieden werden:

- a) Ist $\frac{c^2}{4} > k_{E,i}^2$ ergibt sich der *aperiodische Fall* beziehungsweise *Kriechfall*, wobei zwei rein reelle Eigenwerte vorliegen, welche aufgrund der gemachten Annahmen beide negativ sind. Die entsprechenden Eigenwerte und Eigenvektoren stellen nicht oszillierende exponentiell abklingende Felder dar.
- b) Gilt $\frac{c^2}{4} = k_{E,i}^2$ handelt es sich um den *aperiodischen Grenzfall*, wobei nur ein negativer Eigenwert $-\frac{c}{2}$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 existiert.
- c) Für $\frac{c^2}{4} < k_{E,i}^2$ stellt sich der *periodische Fall* ein. Die beiden zugeordneten Eigenwerte sind konjugiert komplex und besitzen einen negativen Realteil, wodurch sich eine exponentiell gedämpfte Schwingung ergibt.

Anhand von (4.118) werden auch die Nulleigenwerte von (4.98) sichtbar, welche der Beziehung (4.107) genügen, da für $k_{E,i} = 0$ aus (4.118) $\gamma_{E,i,+} = 0$ folgt. Ausgehend hiervon wird die Systemmatrix \mathbf{M}_{EE} des Anregungsproblems (4.93)

$$\mathbf{M}_{EE} = \mathbf{S}_{EE}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{EE}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \stackrel{(4.115)}{=} \mathbf{S}_{EE}^\nu + jk_0 (c + jk_0) \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \quad (4.119)$$

für den Fall $k_0 > 0$ betrachtet. Eine Transformation von \mathbf{M}_{EE} mit der Matrix der Eigenvektoren (4.42) wie in (4.57) führt auf

$$\mathbf{X}_E^T \mathbf{M}_{EE} \mathbf{X}_E = \mathbf{X}_E^T (\mathbf{S}_{EE}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{EE}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{X}_E \quad (4.120a)$$

$$= \mathbf{X}_E^T (\mathbf{S}_{EE}^\nu + jk_0 (c - jk_0) \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{X}_E \quad (4.120b)$$

$$= \text{diag}\{(k_{E,i}^2 - k_0^2 + jk_0 c)\}. \quad (4.120c)$$

Zwar lässt sich die Matrix \mathbf{M}_{EE} unter den gemachten Annahmen mit Hilfe der Eigenvektoren des verlustfreien Systems diagonalisieren, allerdings ist es nicht direkt möglich, hieraus eine Aussage über das Verhalten der Eigenwerte von \mathbf{M}_{EE} abzuleiten, da \mathbf{X}_E keine orthogonale Matrix ist und es sich bei (4.120a) somit nicht um eine Ähnlichkeitstransformation handelt. Da es sich bei \mathbf{M}_{EE} um eine komplex symmetrische Matrix handelt, sind auch die Aussagen aus dem verlustfreien Fall nicht ohne weiteres übertragbar, da es für komplexe Matrizen keine zum Trägheitssatz von Sylvester analoge Aussage gibt. Allerdings gilt auch im komplexen Fall für einen Eigenwert $\gamma_{E,i}$ der Matrix \mathbf{M}_{EE} die Darstellung mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten

$$\gamma_{E,i} = \frac{\mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{M}_{EE} \mathbf{x}_{E,i}}{\mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{x}_{E,i}}. \quad (4.121)$$

Da die Matrix \mathbf{X}_E der Eigenvektoren von (4.37) vollen Rang besitzt, ist für einen Eigenvektor $\mathbf{x}_{E,i}$ von \mathbf{M}_{EE} eine Darstellung in der Form

$$\mathbf{x}_{E,i} = \mathbf{X}_E \tilde{\mathbf{x}}_{E,i} \quad (4.122)$$

möglich. Für den Eigenwert $\gamma_{E,i}$ folgt daher

$$\gamma_{E,i} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{E,i}^H \mathbf{X}_E^T \mathbf{M}_{EE} \mathbf{X}_E \tilde{\mathbf{x}}_{E,i}}{\tilde{\mathbf{x}}_{E,i}^H \mathbf{X}_E^T \mathbf{X}_E \tilde{\mathbf{x}}_{E,i}} \quad (4.123a)$$

$$= \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{E,i}^H \mathbf{X}_E^T \mathbf{M}_{EE} \mathbf{X}_E \tilde{\mathbf{x}}_{E,i} \mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{x}_{E,i}}{\tilde{\mathbf{x}}_{E,i}^H \tilde{\mathbf{x}}_{E,i} \mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{x}_{E,i}} \quad (4.123b)$$

$$= \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{E,i}^H \text{diag}\{k_{E,l}^2 - k_0^2 + jk_0 c\} \tilde{\mathbf{x}}_{E,i} \mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{x}_{E,i}}{\mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{x}_{E,i} \mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{x}_{E,i}}. \quad (4.123c)$$

Wird der Eigenwert $\gamma_{E,i}$ in Real- und Imaginärteil aufgespalten

$$\tilde{\mathbf{x}}_{E,i} = \text{Re } \tilde{\mathbf{x}}_{E,i} + j \text{Im } \tilde{\mathbf{x}}_{E,i} = \tilde{\mathbf{y}}_{E,i} + j \tilde{\mathbf{z}}_{E,i}, \quad (4.124)$$

$$\gamma_{E,i} = \text{Re } \gamma_{E,i} + j \text{Im } \gamma_{E,i} = \alpha_{E,i} + j \beta_{E,i} \quad (4.125)$$

und die Abkürzung

$$t_i = \frac{\mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{x}_{E,i}}{\mathbf{x}_{E,i}^H \mathbf{x}_{E,i}} \quad (4.126)$$

eingeführt, so folgen die Darstellungen

$$\alpha_{E,i} = t_i \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{E,i}^H \text{diag}\{k_{E,l}^2 - k_0^2\} \tilde{\mathbf{x}}_{E,i}}{\tilde{\mathbf{x}}_{E,i}^H \tilde{\mathbf{x}}_{E,i}}, \quad (4.127)$$

$$\beta_{E,i} = ct_i k_0. \quad (4.128)$$

Wegen (4.39) ergibt sich für den Betrag des Realteils zu der Abschätzung

$$t_i \Delta k_{E,\min}^2 \leq |\alpha_{E,i}| \leq t_i \Delta k_{E,\max}^2. \quad (4.129)$$

mit

$$\Delta k_{E,\min}^2 = \min_{k_{E,l}} |k_{E,l}^2 - k_0^2|, \quad (4.130)$$

$$\Delta k_{E,\max}^2 = \max_{k_{E,l}} |k_{E,l}^2 - k_0^2| = \max\{k_{E,N}^2 - k_0^2, k_0^2\}. \quad (4.131)$$

Für das Betragsquadrat des Eigenwerts $\gamma_{E,i}$ ergibt sich hieraus die Abschätzung

$$\left((\Delta k_{E,\min}^2)^2 + c^2 k_0^2 \right) t_i^2 \leq |\gamma_{E,i}|^2 \leq \left((\Delta k_{E,\max}^2)^2 + c^2 k_0^2 \right) t_i^2. \quad (4.132)$$

Als untere und obere Schranke für die t_i in (4.132) können der kleinste und größte Eigenwert der Matrix \mathbf{T}_{EE} , siehe (4.59b), angegeben werden, sodass

$$\tau_{\min} \leq t_i \leq \tau_{\max} \quad (4.133)$$

und damit für (4.132)

$$\left((\Delta k_{E,\min}^2)^2 + c^2 k_0^2 \right) \tau_{\min}^2 \leq |\gamma_{E,i}|^2 \leq \left((\Delta k_{E,\max}^2)^2 + c^2 k_0^2 \right) \tau_{\max}^2 \quad (4.134)$$

gilt. Im Falle kleiner Wellenzahlen $k_0 \rightarrow 0$ vereinfacht sich dieser Zusammenhang zu

$$(1 + c^2) k_0^2 \tau_{\min}^2 \leq |\gamma_{E,i}|^2 \leq k_{E,N}^4 \tau_{\max}^2 \quad (4.135)$$

beziehungsweise

$$\tilde{c} k_0 \tau_{\min} \leq |\gamma_{E,i}| \leq k_{E,N}^2 \tau_{\max} \quad (4.136)$$

mit $\tilde{c} = \sqrt{1 + c^2}$. Solange $k_0 \neq 0$ gilt, folgt hieraus, dass die Systemmatrix \mathbf{M}_{EE} regulär bleibt. Im Grenzfall $k_0 = 0$ gilt nur noch

$$0 \leq |\gamma_{E,i}| \leq k_N^2 \tau_{\max} \quad (4.137)$$

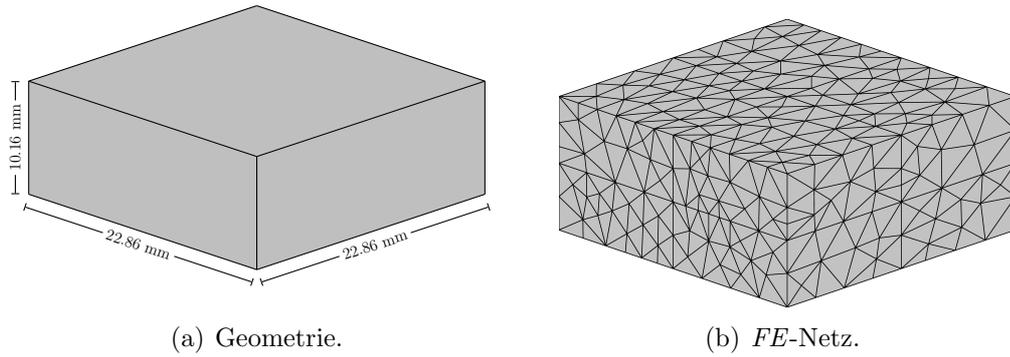


Abbildung 4.2.2: Resonator mit verlustbehaftetem Dielektrikum. Die zugrunde liegende Geometrie und das FE -Netz sind dargestellt. Für die Materialparameter wird $\mu = \mu_0$, $\epsilon = 2\epsilon_0$, $\kappa = 1\frac{1}{\Omega_m}$ angenommen und auf dem Rand gilt $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0$.

und ein Vergleich von (4.119) mit (4.98) zeigt, dass die Eigenwerte von \mathbf{M}_{EE} in diesem Fall mit den Eigenwerten der symmetrisch, positiv semidefiniten Matrix \mathbf{S}_{EE}' zusammenfallen. Insbesondere besitzt die Matrix \mathbf{M}_{EE} in diesem Fall, wie bereits gezeigt, die gleichen Nulleigenwerte und -vektoren wie das quadratische Eigenwertproblem (4.98), sodass \mathbf{M}_{EE} singulär wird. Ähnlich wie im verlustlosen Fall gilt, dass die Instabilität bei Rechnungen in exakter Arithmetik ausschließlich für die Wahl $k_0 = 0$ auftritt, während in allen anderen Fällen $0 < k_0 \ll 1 \text{ m}^{-1}$ die Matrix schlecht konditioniert ist, aber regulär bleibt. Bei Rundungsfehlerbehafteten Rechnungen führen die gegen Null konvergierenden Eigenwerte dazu, dass ab einer gewissen Wellenzahl ihr Beitrag nur noch fehlerhaft beziehungsweise überhaupt nicht mehr in der Systemmatrix berücksichtigt werden kann. In der Geschwindigkeit, mit der die Eigenwerte gegen Null konvergieren, zeigt sich ein Hauptunterschied zum verlustlosen Fall, Während anhand von (4.59b) ersichtlich wird, dass sie im verlustlosen Fall mit k_0^2 gegen Null konvergieren, so konvergieren sie im verlustbehafteten Fall - wie aus (4.136) hervorgeht - höchstens linear gegen Null. Ein Versagen der Formulierung ist aus diesem Grund im verlustbehafteten Fall erst bei niedrigeren Frequenzen zu erwarten als im verlustlosen Fall.

4.2.5 Numerische Ergebnisse

Als numerisches Beispiel wird das Resonatorproblem aus Abbildung 4.2.2 betrachtet. Hierbei handelt es sich um einen Resonator, welcher mit einem verlustbehafteten Dielektrikum gefüllt ist. Für die Materialparameter bedeutet dies

$$\mu = \mu_0, \tag{4.138}$$

$$\epsilon = 2\epsilon_0, \tag{4.139}$$

$$\kappa = 1\frac{1}{\Omega_m} \tag{4.140}$$

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | $-94.1826 + 100.0798j$ | $6.3 \cdot 10^{-4}$ | $8.6 \cdot 10^{-6}$ | $4.6 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{210} | $-94.1826 + 195.8199j$ | $5.4 \cdot 10^{-4}$ | $2.2 \cdot 10^{-5}$ | $1.8 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{120} | $-94.1826 + 195.8199j$ | $2.7 \cdot 10^{-3}$ | $6.4 \cdot 10^{-5}$ | $1.6 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{011} | $-94.1826 + 219.9518j$ | $6.2 \cdot 10^{-3}$ | $9.1 \cdot 10^{-7}$ | $3.0 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{101} | $-94.1826 + 219.9518j$ | $4.4 \cdot 10^{-4}$ | $3.2 \cdot 10^{-5}$ | $9.4 \cdot 10^{-8}$ |
| TM_{111} | $-94.1826 + 240.4620j$ | $4.7 \cdot 10^{-3}$ | $1.6 \cdot 10^{-5}$ | $9.1 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{111} | $-94.1826 + 240.4620j$ | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $3.8 \cdot 10^{-5}$ | $2.1 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 4.2: Eigenwerte der Feldformulierung im verlustbehafteten Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des verlustbehafteten Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für $p = 1, 2, 3$.

und für die Felder auf dem Rand $\Gamma = \Gamma_E = \partial\Omega$ wird angenommen, dass gilt:

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (4.141)$$

Da das betrachtete Randwertproblem nur einen einzigen zusammenhängenden Dirichlet-Rand Γ_E besitzt, existieren im zugeordneten Eigenwertproblem keine physikalischen Nulleigenwerte. Die analytisch berechneten Eigenwellenzahlen sowie die relativen Fehler der numerisch berechneten Näherungen sind für $p = 1, 2, 3$ in Tabelle 4.2 aufgelistet. Die analytischen Eigenwerte ergeben sich zu

$$\gamma_{lmn} = -\frac{\kappa\eta_0}{2\epsilon_r} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa\eta_0}{2\epsilon_r}\right)^2 - \frac{1}{\epsilon_r} \left(\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \right)} \quad (4.142)$$

mit $a = b = 0.9 \text{ in} = 22.86 \text{ mm}$ und $c = 0.4 \text{ in} = 10.16 \text{ mm}$ und der relative Fehler $e_{lmn,i}$ wird anhand von

$$e_{lmn,p} = \frac{|\gamma_{lmn,p} - \gamma_{lmn}|}{|\gamma_{lmn}|} \quad (4.143)$$

bestimmt, wobei $\gamma_{lmn,p}$ der aus dem diskretisierten Eigenwertproblem

$$(\mathbf{S}_{EE}^\nu + \gamma_{lmn,p} \mathbf{T}_{EE}^\kappa + \gamma_{lmn,p}^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon) \mathbf{x}_{E,lmn,p} = 0 \quad (4.144)$$

bestimmte Eigenwert bei Verwendung von Ansätzen p -ter Ordnung ist. Die physikalischen Eigenwerte des verlustbehafteten Eigenwertproblems werden - wie im verlustlosen Fall - sehr gut angenähert, wie anhand von Tabelle 4.2 zu erkennen ist. Wie in Abbildung 4.2.3 für $p = 1$ dargestellt ergeben sich auch im vorliegenden Fall unphysikalische Nulleigenwerte. Abgesehen hiervon zeigt sich auch die zweite Klasse unphysikalischer Eigenwerte nach (4.103b). Abschließend ist in Abbildung 4.2.4 die Frequenzabhängigkeit der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_{EE}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{EE}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \quad (4.145)$$

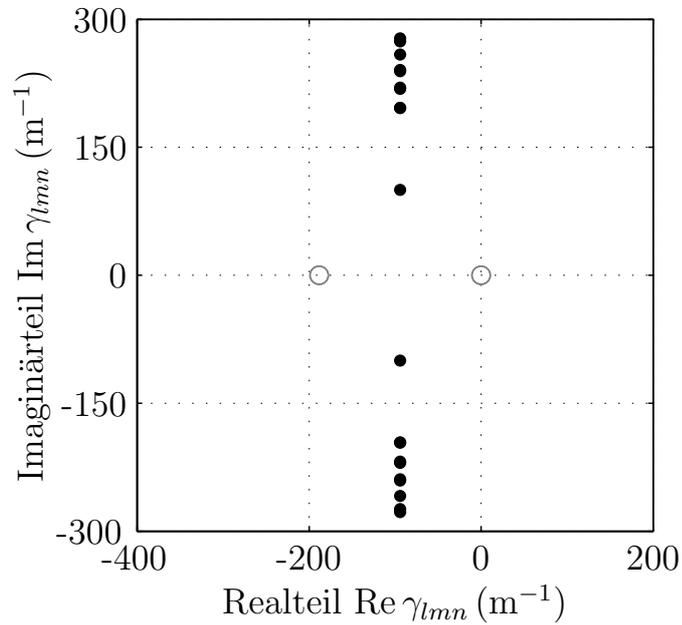


Abbildung 4.2.3: Eigenwertverteilung der Feldformulierung im verlustbehafteten Fall: Lage der Eigenwerte des verlustbehafteten Resonators in der komplexen Ebene für $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte und unphysikalische Eigenwerte als graue Kreise dargestellt.

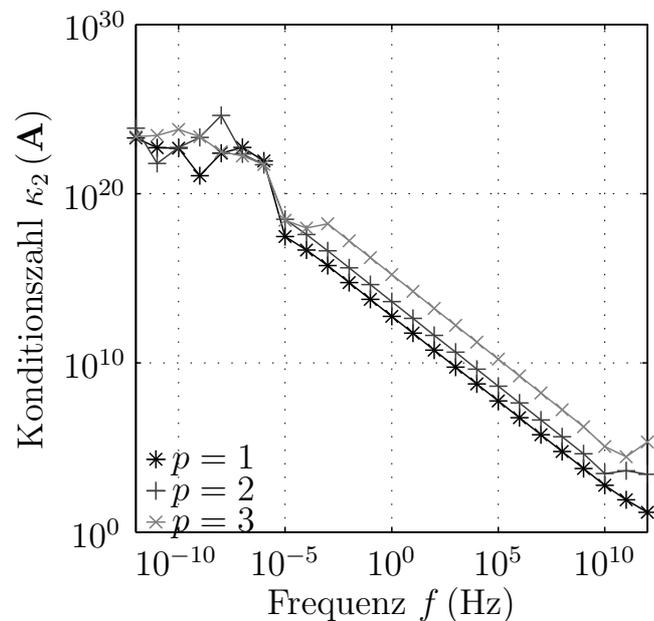


Abbildung 4.2.4: Konditionszahl für die Feldformulierung im verlustbehafteten Fall: Frequenzabhängigkeit der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix der Feldformulierung für das verlustbehaftete Resonatorproblem für $p = 1, 2, 3$.

dargestellt. Das zuvor anhand von (4.136) in Abschnitt 4.2.4 beschriebene Verhalten, dass die Niederfrequenzinstabilität im verlustbehafteten Fall erst bei niedrigeren Frequenzen zum Tragen kommt als im verlustlosen Fall, siehe Abbildung 4.1.4, da die Eigenwerte in Abhängigkeit von k_0 langsamer gegen Null konvergieren, wird hieraus deutlich.

4.3 Anmerkungen

Während die elektrische Feldformulierung des elektromagnetischen Randwertproblems im Hochfrequenzfall eine geeignete Wahl darstellt, führt sie im Niederfrequenzfall zu Problemen. Wie in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt wurde, ergeben sich im Fall der elektrischen Feldformulierung des elektromagnetischen Randwertproblems im Niederfrequenzfall sowohl für verlustlose als auch verlustbehaftete Randwertprobleme Schwierigkeiten, die damit zusammenhängen, dass in diesem Bereich die von den physikalisch sinnvollen Feldern zu erfüllenden Divergenzbedingungen - (2.11c) im verlustlosen und (2.11e) im verlustbehafteten Fall - im Rahmen des FE -Gleichungssystems nicht mehr korrekt berücksichtigt werden. Eine weitere Instabilität der Feldformulierung, welche im verlustlosen und verlustbehafteten Fall in gleicher Art und Weise auftritt und insbesondere für hp -adaptive FE -Methoden [DV98] von Bedeutung ist, hängt eng mit der zugrunde liegenden FE -Diskretisierung zusammen. Für den Beitrag eines einzelnen Tetraederelements T_k zu den Gesamtsystemmatrizen gilt die Darstellung

$$(\mathbf{S}_{EE}^\nu)_{ij}^{T_k} = \int_{T_k} \nabla \times \mathbf{e}_i \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{e}_j) \, d\Omega, \quad (4.146a)$$

$$(\mathbf{T}_{EE}^\kappa)_{ij}^{T_k} = \eta_0 \int_{T_k} \mathbf{e}_i \cdot (\kappa \mathbf{e}_j) \, d\Omega, \quad (4.146b)$$

$$(\mathbf{T}_{EE}^\epsilon)_{ij}^{T_k} = \int_{T_k} \mathbf{e}_i \cdot (\epsilon_r \mathbf{e}_j) \, d\Omega. \quad (4.146c)$$

Wird mit h die Netzweite [Mon08, S. 112] des FE -Netzes bezeichnet, so gilt für die Ansatzfunktionen $\mathbf{e}_i \in \mathcal{W}_0^{h,p}$ aus Abschnitt 3.2.2, deren Rotation sowie das Volumen des Tetraeders $\text{vol } T_k$

$$\|\mathbf{e}_i\| = \mathcal{O}(h^{-1}), \quad (4.147a)$$

$$\|\nabla \times \mathbf{e}_i\| = \mathcal{O}(h^{-2}), \quad (4.147b)$$

$$\text{vol } T_k = \mathcal{O}(h^3). \quad (4.147c)$$

Werden die Materialparameter als elementweise konstant angenommen folgt für die Matrizen

$$|(S_{ij})_{T_k}| = \mathcal{O}(h^{-1}), \quad (4.148a)$$

$$|(T_{ij}^\kappa)_{T_k}| = \mathcal{O}(h), \quad (4.148b)$$

$$|(T_{ij}^\epsilon)_{T_k}| = \mathcal{O}(h). \quad (4.148c)$$

Da auch hier ähnlich wie bei der Frequenzabhängigkeit eine unterschiedliche Skalierung der Teilmatrizen vorliegt, zeigen sich bei einer Verfeinerung des FE -Netzes und einer damit einhergehenden Verkleinerung von h die gleichen Instabilitäten wie im Niederfrequenzfall. Außerdem ist selbst bei Berücksichtigung der Divergenz-Bedingungen mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren eine Rekonstruktion des magnetischen Feldes aus dem elektrischen Feld nicht oder nur mit einem hohen zusätzlichen Aufwand möglich, da elektrische und magnetische Felder im statischen Grenzfall voneinander entkoppelt sind. Wird alternativ zur hier untersuchten elektrischen Feldformulierung die magnetische Feldformulierung betrachtet, zeigt sich, dass diese die gleichen Niederfrequenzeigenschaften und -probleme besitzt, weshalb auf diese Formulierung nicht näher eingegangen wird. Im Weiteren werden in Kapitel 5 und Kapitel 6 verschiedene neue Potenzialformulierungen zur Beseitigung der Niederfrequenzinstabilität der Feldformulierung im verlustlosen und verlustbehafteten Fall vorgestellt.

Kapitel 5

Potenzialformulierung - Verlustloser Fall

Um die in Abschnitt 4.1.4 aufgezeigte Niederfrequenzinstabilität der elektrischen Feldformulierung im verlustlosen Fall zu beseitigen, werden im aktuellen Kapitel, aufbauend auf den Überlegungen aus Abschnitt 2.4, drei unterschiedliche Potenzialformulierungen vorgeschlagen. In Abschnitt 5.1 werden vorab einige Annahmen vorgestellt, welche allen weiteren Abschnitten dieses Kapitels zugrunde liegen. Im Anschluss wird in Abschnitt 5.2 auf die ungeeichte Potenzialformulierung eingegangen. Um ein reguläres Gleichungssystem zu erhalten, wird im FE -Kontext eine Baum-Kobaum-Eichung durchgeführt. Die beiden weiteren Formulierungen basieren auf der Vorgabe expliziter Eichbedingungen für das Vektorpotenzial. In Abschnitt 5.3 wird eine Eichung durchgeführt, welche im Folgenden als statische Eichung bezeichnet wird. Das Vorgehen in Abschnitt 5.4 hingegen entspricht einer klassischen gemischten Variationsformulierung. Abschließend erfolgt ein Vergleich der verschiedenen Formulierungen anhand der Eigenschaften der sich ergebenden Gleichungssysteme in Abschnitt 5.5.

5.1 Allgemeine Annahmen

Wie bei der elektrischen Feldformulierung werden auch die Potenzialformulierungen zur Behebung der Niederfrequenzinstabilität separat für den verlustlosen und den verlustbehafteten Fall betrachtet. Dieses Kapitel behandelt den verlustlosen Fall. Den Betrachtungen wird ein Feldgebiet Ω wie in Abbildung 5.1.1 zugrunde gelegt. Dieses entspricht jenem aus Abbildung 4.1.1, und auch die weiteren Annahmen, die getroffen werden, sollen jenen der elektrischen Feldformulierung im verlustlosen Fall entsprechen. Im Einzelnen bedeutet dies:

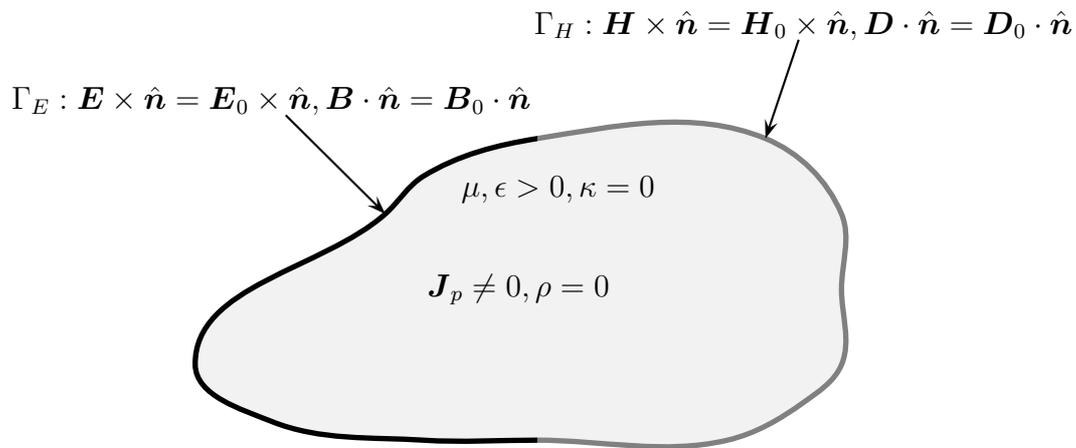


Abbildung 5.1.1: Verlustloses Randwertproblem.

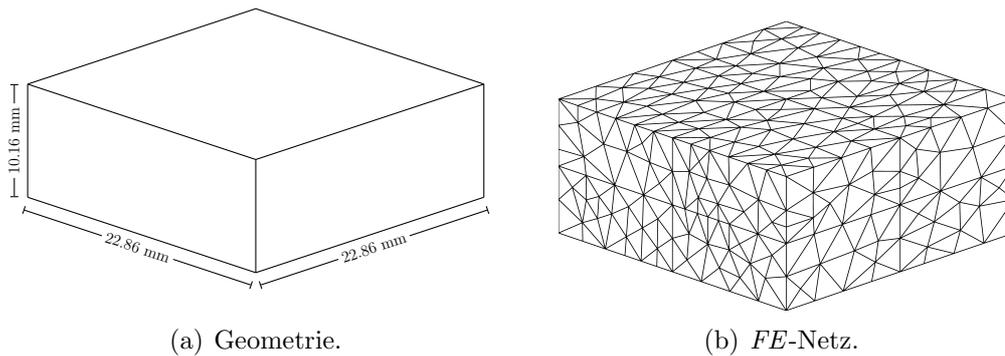


Abbildung 5.1.2: Verlustloses Randwertproblem zum Testen der Formulierungen. Die zugrunde liegende Geometrie und das *FE*-Netz sind dargestellt. Für die Materialparameter wird $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ und $\kappa = 0$ angenommen.

- $\kappa = 0$ in Ω ,
- $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H$, $\Gamma_E \cap \Gamma_H = \emptyset$ und $\Gamma_E \neq \emptyset$,
- sowie $\nabla \cdot \mathbf{J}_p = 0$ in Ω , $\mathbf{J}_p \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ auf Γ .

Wie zuvor auch, folgt aus der ersten und letzten Annahme zusammen mit der Kontinuitätsgleichung die zusätzliche Bedingung $\rho = 0$. Als Randwertproblem zur Bestimmung numerischer Ergebnisse für die einzelnen Formulierungen wird die Struktur aus Abbildung 5.1.2 betrachtet, welche einen einfachen leeren Hohlraumresonator darstellt, das heißt, es gilt

$$\mu = \mu_0, \tag{5.1a}$$

$$\epsilon = \epsilon_0, \tag{5.1b}$$

$$\kappa = 0 \tag{5.1c}$$

sowie

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (5.2)$$

auf dem gesamten Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Dieses Randwertproblem hat den Vorteil, dass die Eigenwerte und -funktionen analytisch berechenbar und in der Literatur, vgl. [Har01, S. 155ff], [Poz05, S. 278ff] dokumentiert sind. Außerdem ist die Geometrie bei Verwendung geradliniger Tetraeder im *FE*-Kontext exakt darstellbar, sodass sich keine zusätzlichen Fehler, aufgrund einer Approximation des Feldgebietes, in der Lösung ergeben.

5.2 Ungeeichte Formulierung und Baum-Kobaum-Eichung

Auf die Vorgabe konkreter Eichbedingungen wird in Abschnitt 5.3 und 5.4 eingegangen, wohingegen im vorliegenden Abschnitt zunächst die ungeeichte Potenzialformulierung und das zugeordnete Randwertproblem vorgestellt werden. Hierbei wird auf einige grundsätzliche Eigenschaften der Potenzialformulierung eingegangen, welche die Potenzial- von der Feldformulierung unterscheiden.

5.2.1 Randwertproblem

Ausgangspunkt der ungeeichten Potenzialformulierung ist die Darstellung der Felder durch die Potentiale nach (2.28)

$$\mathbf{E} = -\nabla V - jk_0 \mathbf{A}, \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c_0} \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.3b)$$

In [DEPL00] werden die Potentiale im verlustlosen Fall - abweichend von der in (5.3) verwendeten Konvention - durch

$$\mathbf{E} = \nabla V + k_0 \mathbf{A}, \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{j}{c_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.4b)$$

eingeführt. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass sie in weiterer Folge auf rein reelle Gleichungssysteme führt. Ein analoges Vorgehen ist im verlustbehafteten Fall allerdings nicht möglich, und eine Kopplung der Formulierungen, wie sie in Kapitel 7 durchgeführt wird, wird durch Unterschiede in den Konventionen unnötig erschwert. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit auch im verlustlosen Fall auf eine entsprechende Skalierung wie in [DEPL00] verzichtet und der Nachteil komplexer

Systemmatrizen, der sich mit der Wahl der Potentiale nach (5.3) ergibt, in Kauf genommen.

Mit (5.3) sind (2.11a) und (2.11d) per Konstruktion erfüllt und Einsetzen von (2.28) zusammen mit den Konstitutivgleichungen (2.14) und $\rho = 0$ in (2.11b) beziehungsweise (2.11c) führt auf

$$\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + j\omega\epsilon (\nabla V + jk_0 \mathbf{A}) = \mathbf{J}_p, \quad (5.5a)$$

$$-\nabla \cdot [\epsilon (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] = 0. \quad (5.5b)$$

Ausschließlich über relative Materialgrößen und die Freiraumwellenzahl k_0 ausgedrückt, ergibt sich hieraus

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) + jk_0 [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] = \eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (5.6a)$$

$$\nabla \cdot [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] = 0. \quad (5.6b)$$

Zusammen mit den Randbedingungen lautet das vollständige Randwertproblem

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) + jk_0 \epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A}) = \eta_0 \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (5.7a)$$

$$\nabla \cdot [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (5.7b)$$

$$-(\nabla V + jk_0 \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (5.7c)$$

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}} = \eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (5.7d)$$

Aufgrund der Annahmen aus Abschnitt 5.1 hinsichtlich der Quellgröße \mathbf{J}_p folgt (5.7b) für Wellenzahlen $k_0 > 0$ durch Divergenzbildung aus (5.7a). Für $k_0 > 0$ steht somit nur eine unabhängige vektorielle Gleichung zur Bestimmung der Größe $\nabla V + jk_0 \mathbf{A}$ zur Verfügung, während (5.7a) für $k_0 = 0$ einen Nullraum der entsprechenden Dimension hat. Wie bereits in Abschnitt 4.1, wird für den Rest des Kapitels angenommen, dass

$$\mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (5.8)$$

gilt. Die Berücksichtigung inhomogener Randbedingungen kann jedoch auf die gleiche Art und Weise wie in Abschnitt 4.1 realisiert werden.

5.2.2 Schwache Formulierung

Die schwache Formulierung des Randwertproblems (5.7) ergibt sich durch Testen von (5.7a) beziehungsweise (5.7b) mit Funktionen $\mathbf{a} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ beziehungsweise $v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot [\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A})] \, d\Omega + jk_0 \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] \, d\Omega \\ = \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega, \quad (5.9a) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} v \{ \nabla \cdot [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] \} d\Omega = 0. \quad (5.9b)$$

Der erste Term auf der linken Seite von (5.9a) kann wie im Fall der elektrischen Feldformulierung partiell integriert werden, sodass mit der Randbedingung (5.7d) sowie $\mathbf{a} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot [\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A})] d\Omega &= -\eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{a} \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) d\Omega \end{aligned} \quad (5.10)$$

und hieraus für (5.9a)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{a} \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) d\Omega + jk_0 \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] d\Omega \\ = \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{J}_p d\Omega + \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.11)$$

folgt. Ein ähnliches Vorgehen ist bei (5.9b) möglich. Mit der Identität [RC09, S. 625]

$$\nabla \cdot (v\mathbf{a}) = \nabla v \cdot \mathbf{a} + v \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (5.12)$$

und dem Satz von Gauß ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \{ \nabla \cdot [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] \} d\Omega \\ = \int_{\partial\Omega} v [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] d\Omega \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Aufgrund der Wahl $v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ vereinfacht sich die Darstellung weiter zu

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot [\epsilon_r (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] d\Omega = -\eta_0 c_0 \int_{\Gamma_H} v \mathbf{D}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma. \quad (5.14)$$

Die dem Randwertproblem (5.7) entsprechende schwache Form lautet somit: Finde $\mathbf{A} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ und $V \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$, sodass für alle $\mathbf{a} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ und $v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$

$$S^v(\mathbf{A}, \mathbf{a}) + (jk_0)^2 T^e(\mathbf{A}, \mathbf{a}) + jk_0 T^e(\nabla V, \mathbf{a}) = b_J(\mathbf{a}) + b_H(\mathbf{a}), \quad (5.15a)$$

$$jk_0 T^e(\mathbf{A}, \nabla v) + T^e(\nabla V, \nabla v) = -b_D(v), \quad (5.15b)$$

mit den Linear- und Bilinearformen aus (4.28) sowie der neu eingeführten Linearform

$$b_D(v) = \eta_0 c_0 \int_{\Gamma_H} v \mathbf{D}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (5.16)$$

gilt. Da - wie in Abschnitt 2.5 erwähnt - $\nabla \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ ist, gilt für die Wahl $\mathbf{a} = \nabla v$ für (5.15a)

$$S^\nu(\mathbf{A}, \nabla v) + (jk_0)^2 T_\epsilon(\mathbf{A}, \nabla v) + jk_0 T^\epsilon(\nabla V, \nabla v) = b_J(\nabla v) + b_H(\nabla v). \quad (5.17)$$

Der erste Term auf der linken Seite verschwindet aufgrund der Eigenschaften der Bilinearform $S^\nu(\cdot, \cdot)$, ebenso der erste Term auf der rechten Seite, aufgrund der gemachten Annahmen hinsichtlich der eingepprägten Ströme \mathbf{J}_p , sodass

$$(jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}, \nabla v) + jk_0 T^\epsilon(\nabla V, \nabla v) = b_H(\nabla v) \quad (5.18)$$

verbleibt. Wird (5.15b) mit jk_0 multipliziert und zu (5.18) hinzu addiert, folgt

$$-jk_0 b_D(v) + b_H(\nabla v) = 0 \quad \stackrel{k_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad b_D(v) = \frac{1}{jk_0} b_H(\nabla v). \quad (5.19)$$

Sofern also für $k_0 > 0$ der Verlauf der Tangentialkomponente der magnetischen Erregung \mathbf{H} auf dem Rand Γ_H bekannt ist, lässt sich hieraus der Verlauf der Normalkomponente der elektrischen Flussdichte \mathbf{D} auf Γ_H rekonstruieren. Im statischen Fall sind beide Größen jedoch entkoppelt und können unabhängig voneinander vorgegeben werden.

5.2.3 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Um ein endlich dimensionales lineares Gleichungssystem zu erhalten, wird - wie im Fall der elektrischen Feldformulierung - ein Galerkin-Ansatz gewählt. Für die Felder \mathbf{A} und V werden Ansätze der Form

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{W}_0}} x_{A,k} \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{a}_k \in \mathcal{W}_0^{h,p}, \quad (5.20a)$$

$$V = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} x_{V,k} v_k, \quad v_k \in \mathcal{V}_0^{h,p} \quad (5.20b)$$

durchgeführt, und die Testfunktionen werden auf die endlich dimensionalen Räume

$$\mathbf{a} \in \mathcal{W}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E), \quad (5.21a)$$

$$v \in \mathcal{V}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \quad (5.21b)$$

eingeschränkt. Insgesamt folgt für (5.15) somit das diskrete Analogon

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{AV}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{VA}^\epsilon & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A,J} + \mathbf{b}_{A,H} \\ -\mathbf{b}_{V,D} \end{bmatrix} \quad (5.22a)$$

beziehungsweise mit (5.19)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{AV}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{VA}^\epsilon & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\mathbf{b}_{A,J} + \mathbf{b}_{A,H} \\ \frac{1}{jk_0} \mathbf{b}_{V,H} \end{bmatrix}. \quad (5.22b)$$

Für die Matrizen \mathbf{S}_{AA}^ν , \mathbf{T}_{AA}^ϵ und die Vektoren $\mathbf{b}_{A,J}$ und $\mathbf{b}_{A,H}$ gilt

$$\mathbf{S}_{AA}^\nu = \mathbf{S}_{EE}^\nu, \quad (5.23a)$$

$$\mathbf{T}_{AA}^\epsilon = \mathbf{T}_{EE}^\epsilon, \quad (5.23b)$$

$$\mathbf{b}_{A,J} = \mathbf{b}_{E,J}, \quad (5.23c)$$

$$\mathbf{b}_{A,H} = \mathbf{b}_{E,H}, \quad (5.23d)$$

mit den Matrizen aus (4.34). Zusätzlich werden die neuen Matrizen

$$\mathbf{M}_{AV}^\epsilon \in \mathbb{R}^{N_{w_0} \times N_{v_0}}, \quad (\mathbf{M}_{AV}^\epsilon)_{kl} = T^\epsilon (\nabla v_l, \mathbf{a}_k) = \int_{\Omega} \mathbf{a}_k \cdot (\epsilon_r \nabla v_l) \, d\Omega, \quad (5.24a)$$

$$\mathbf{M}_{VA}^\epsilon \in \mathbb{R}^{N_{v_0} \times N_{w_0}}, \quad (\mathbf{M}_{VA}^\epsilon)_{kl} = T^\epsilon (\mathbf{a}_l, \nabla v_k) = \int_{\Omega} \nabla v_l \cdot (\epsilon_r \mathbf{a}_k) \, d\Omega, \quad (5.24b)$$

$$\mathbf{S}_{VV}^\epsilon \in \mathbb{R}^{N_{v_0} \times N_{v_0}}, \quad (\mathbf{S}_{VV}^\epsilon)_{kl} = T^\epsilon (\nabla a_l, \nabla v_k) = \int_{\Omega} \nabla v_l \cdot (\epsilon_r \nabla a_k) \, d\Omega \quad (5.24c)$$

sowie die Vektoren

$$\mathbf{x}_A \in \mathbb{R}^{N_{w_0}}, \quad (\mathbf{x}_A)_k = x_{A,k}, \quad (5.24d)$$

$$\mathbf{x}_V \in \mathbb{R}^{N_{v_0}}, \quad (\mathbf{x}_V)_k = x_{V,k}, \quad (5.24e)$$

$$\mathbf{b}_{V,D} \in \mathbb{R}^{N_{v_0}}, \quad (\mathbf{b}_{V,D})_k = b_D(v_k) = \eta_0 c_0 \int_{\Gamma_H} v_k \mathbf{D}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma, \quad (5.24f)$$

$$\mathbf{b}_{V,H} \in \mathbb{R}^{N_{v_0}}, \quad (\mathbf{b}_{V,H})_k = b_H(\nabla v_k) = \eta_0 \int_{\Gamma_H} \nabla v_k \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma \quad (5.24g)$$

eingeführt. Aufgrund der Symmetrie der Bilinearformen und der diskreten Sequenzeigenschaft der verwendeten Räume sowie der diskreten Darstellung des Gradientenoperators gilt weiterhin

$$\mathbf{M}_{AV}^\epsilon = (\mathbf{M}_{VA}^\epsilon)^T = \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} = \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{G}, \quad (5.25a)$$

$$\mathbf{S}_{VV}^\epsilon = \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} = \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{G}, \quad (5.25b)$$

$$\mathbf{b}_{V,H} = \mathbf{G}^T \mathbf{b}_{A,H} = \mathbf{G}^T \mathbf{b}_{E,H}, \quad (5.25c)$$

sodass das Gleichungssystem (5.22) in der alternativen Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ jk_0 \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A,J} + \mathbf{b}_{A,H} \\ -\mathbf{b}_{V,D} \end{bmatrix} \quad (5.26a)$$

beziehungsweise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ jk_0 \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A,J} + \mathbf{b}_{A,H} \\ \frac{1}{jk_0} \mathbf{G}^T \mathbf{b}_{A,H} \end{bmatrix} \quad (5.26b)$$

angegeben werden kann. Die Systemmatrix, der Vektor der Unbekannten und die rechte Seite des Gleichungssystems werden im Folgenden mit

$$\mathbf{A}^{i,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ jk_0 \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5.27a)$$

$$\mathbf{x}^{i,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} \quad (5.27b)$$

$$\mathbf{b}^{i,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A,J} + \mathbf{b}_{A,H} \\ -\mathbf{b}_{V,D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A,J} + \mathbf{b}_{A,H} \\ \frac{1}{jk_0} \mathbf{G}^T \mathbf{b}_{A,H} \end{bmatrix} \quad (5.27c)$$

bezeichnet, wobei der obere Index i, u andeuten soll, dass es sich um die Systemmatrix der ungeeichten Formulierung im verlustlosen Fall handelt ($i = \text{Isolator/insulator}$, $u = \text{ungeeicht/ungauged}$). Bei der $\frac{1}{jk_0}$ -Skalierung der rechten Seite von (5.26b) beziehungsweise (5.27c) handelt es sich nicht um eine Instabilität der Formulierung. Hieraus ergeben sich lediglich gewisse Anforderungen, welchen die rechte Seite genügen muss, damit das Problem auch beim Grenzübergang $k_0 \rightarrow 0$ wohl definiert bleibt und

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{jk_0} \mathbf{G}^T \mathbf{b}_{A,H} \right\| < \infty \quad (5.28)$$

gilt. Da hier ausschließlich das Niederfrequenzverhalten der Felder von Interesse ist, werden im Durchflutungssatz (2.11b)

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_p \quad (5.29)$$

für die Felder \mathbf{H} , \mathbf{D} und \mathbf{J}_p die Rayleigh-Reihen [Kle65]

$$\mathbf{H} = \sum_{n=0}^{\infty} (jk_0)^n \mathbf{H}^{(n)}, \quad (5.30a)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{n=0}^{\infty} (jk_0)^n \mathbf{D}^{(n)}, \quad (5.30b)$$

$$\mathbf{J}_p = \sum_{n=0}^{\infty} (jk_0)^n \mathbf{J}_p^{(n)} \quad (5.30c)$$

eingesetzt. Ein Vergleich der Koeffizienten von $(jk_0)^i$ ergibt

$$(jk_0)^0 : \quad \nabla \times \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{J}_p^{(0)}, \quad (5.31a)$$

$$(jk_0)^1 : \quad \nabla \times \mathbf{H}^{(1)} = c_0 \mathbf{D}^{(0)} + \mathbf{J}_p^{(1)}, \quad (5.31b)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \vdots \\ (jk_0)^n : & \quad \nabla \times \mathbf{H}^{(n)} = c_0 \mathbf{D}^{(n-1)} + \mathbf{J}_p^{(n)}. \end{aligned} \quad (5.31c)$$

Da hier das Niederfrequenzverhalten von Interesse ist, wird im weiteren die Rayleigh-Reihe nach dem linearen Term abgebrochen. Wird alternativ die Darstellung der Felder im Frequenzbereich als Fourier-Integral verwendet, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^k}{k!} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dt - j\omega \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{H} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^k}{k!} \right) dt, \end{aligned} \quad (5.32a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^k}{k!} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D} dt - j\omega \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{D} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^k}{k!} \right) dt, \end{aligned} \quad (5.32b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_p &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_p e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^k}{k!} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_p dt - j\omega \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{J}_p dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_p \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^k}{k!} \right) dt. \end{aligned} \quad (5.32c)$$

Im Grenzfall kleiner Kreisfrequenzen $\omega \ll 1$ rad/s folgt hieraus aufgrund der Eigenschaften der Fourier-Transformation [OL05, S. 61]

$$\mathbf{H} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dt - j\omega \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{H} dt = \mathbf{H}|_{\omega=0} + j\omega \left. \frac{d}{d\omega} \mathbf{H} \right|_{\omega=0}, \quad (5.33a)$$

$$\mathbf{D} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D} dt - j\omega \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{D} dt = \mathbf{D}|_{\omega=0} + j\omega \left. \frac{d}{d\omega} \mathbf{D} \right|_{\omega=0}, \quad (5.33b)$$

$$\mathbf{J}_p \approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_p dt - j\omega \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{J}_p dt = \mathbf{J}_p|_{\omega=0} + j\omega \left. \frac{d}{d\omega} \mathbf{J}_p \right|_{\omega=0} \quad (5.33c)$$

und ein Vergleich mit den Rayleigh-Reihen zeigt

$$\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dt, \quad (5.34a)$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = c_0 \frac{d}{d\omega} \mathbf{H} \Big|_{\omega=0} = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{H} dt, \quad (5.34b)$$

$$\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{D}|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D} dt, \quad (5.34c)$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = c_0 \frac{d}{d\omega} \mathbf{D} \Big|_{\omega=0} = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{D} dt, \quad (5.34d)$$

$$\mathbf{J}_p^{(0)} = \mathbf{J}_p|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_p dt, \quad (5.34e)$$

$$\mathbf{J}_p^{(1)} = c_0 \frac{d}{d\omega} \mathbf{J}_p \Big|_{\omega=0} = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} t \mathcal{J}_p dt. \quad (5.34f)$$

Die rechte Seite von (5.27c) ergibt sich aus der Linearform (4.28d) durch Testen mit reinen Gradientenfeldern

$$\frac{1}{jk_0} b_H (\nabla v) = \frac{\eta_0}{jk_0} \int_{\Gamma_H} \nabla v \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma. \quad (5.35)$$

Hinreichende Glattheit des Randes Γ vorausgesetzt, folgt durch partielle Integration

$$\frac{\eta_0}{jk_0} \int_{\Gamma_H} \nabla v \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma = -\frac{\eta_0}{jk_0} \int_{\Gamma_H} v (\nabla \times \mathbf{H}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma. \quad (5.36)$$

Wird auf der rechten Seite für \mathbf{H} die nach dem linearen Glied abgebrochene Rayleigh-Reihe eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} -\frac{\eta_0}{jk_0} \int_{\Gamma_H} v (\nabla \times \mathbf{H}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma &\approx -\frac{\eta_0}{jk_0} \int_{\Gamma_H} v (\nabla \times \mathbf{H}_0^{(0)}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \\ &\quad - \eta_0 \int_{\Gamma_H} v (\nabla \times \mathbf{H}_0^{(1)}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.37)$$

und für (5.28) ergeben sich hieraus die beiden Bedingungen

$$\int_{\Gamma_H} v (\nabla \times \mathbf{H}_0^{(0)}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad \stackrel{(5.31a)}{\Leftrightarrow} \quad \int_{\Gamma_H} v \mathbf{J}_p^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (5.38a)$$

und

$$\left| \int_{\Gamma_H} v \left(\nabla \times \mathbf{H}_0^{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \right| < \infty \quad \stackrel{(5.31b)}{\Leftrightarrow} \quad \left| \int_{\Gamma_H} v \left(c_0 \mathbf{D}_0^{(0)} + \mathbf{J}_p^{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \right| < \infty. \quad (5.38b)$$

Aus (5.38a) ergibt sich somit eine Forderung an die eingepprägten Quellen. Da für diese in Abschnitt 5.1 angenommen wurde, dass

$$\mathbf{J}_p \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (5.39)$$

gilt, ergeben sich hierdurch aber keine weiteren Einschränkungen. Für die vorgegebene Tangentialkomponente der magnetischen Erregung wird durch die Forderung (5.38a) sichergestellt, dass die Vorgabe verträglich mit den eingepprägten Strömen ist. Unter Verwendung von (5.39) lautet die zweite Bedingung (5.38b)

$$\left| c_0 \int_{\Gamma_H} v \mathbf{D}_0^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \right| < \infty \quad (5.40)$$

was der Vorgabe einer endlichen Flächenladung auf dem Rand entspricht. Mit Hilfe von (5.34) können die Bedingungen (5.38) weiterhin in äquivalente Bedingungen für die Frequenzableitungen der Felder im Frequenzbereich und in Forderungen an die zeitliche Entwicklung der Felder umformuliert werden.

5.2.4 Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten

Im Folgenden wird angenommen, dass der Dirichlet-Rand Γ_E des betrachteten Feldgebietes Ω zusammenhängend und Ω selbst einfach zusammenhängend ist. Diese Annahmen führen dazu, dass die erste Kohomologiegruppe $H^1(\Omega, \Gamma_E)$ trivial ist und daher

$$\beta_1 = \dim H^1(\Omega, \Gamma_E) = 0. \quad (5.41)$$

Somit wird der Nullraum der Rotation ausschließlich durch reine Gradientenfelder gebildet, sodass

$$\text{ran } \{\text{grad}\} = \ker \{\text{rot}\}. \quad (5.42)$$

Während die elektrische Feldformulierung im verlustlosen Fall auf das verallgemeinerte lineare Eigenwertproblem (4.37) führt, ergibt sich für die Potenzialformulierung auch ohne Verluste durch die Substitution $jk_0 = \lambda$ in der Systemmatrix (5.27a) ein echt quadratisches Eigenwertproblem in der Form

$$\left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{array} \right] + \lambda \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{0} \end{array} \right] + \lambda^2 \left[\begin{array}{cc} \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.43)$$

Wird $\lambda \neq 0$ angenommen, folgt durch Multiplikation der zweiten Zeile von (5.43) mit λ und der Variablentransformation

$$x_V = \lambda y_V \quad (5.44)$$

das modifizierte Eigenwertproblem

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = 0. \quad (5.45)$$

Das Eigenwertproblem (5.45) ist wiederum rein quadratisch und entspricht dem Eigenwertproblem der Feldformulierung (4.37). Die physikalisch sinnvollen Eigenwerte der beiden Formulierungen sind somit identisch. Für den Fall $\lambda \rightarrow \infty$ wird (5.43) durch λ^2 dividiert und die Substitution

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad (5.46)$$

durchgeführt, womit sich

$$\left(\mu^2 \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = 0 \quad (5.47)$$

ergibt. Der Fall $\lambda \rightarrow \infty$ entspricht dann $\mu = 0$ womit sich das Eigenwertproblem zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = 0 \quad (5.48)$$

vereinfacht. Aufgrund der Regularität von \mathbf{T}_{AA}^ϵ folgen hieraus die Eigenvektoren

$$\lambda \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mu \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{N_{V_0}} \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

bei welchen es sich um reine Gradientenfelder handelt. Da für die Niederfrequenzinstabilität die Nulleigenwerte von Interesse sind und außerdem nur reine Gradientenfelder von der Niederfrequenzinstabilität betroffen sind, werden im Folgenden diese beiden Fälle betrachtet. Für $\lambda = 0$ vereinfacht sich (5.43) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = 0. \quad (5.50)$$

Aufgrund der gemachten Annahmen hinsichtlich des Dirichlet-Randes, ist die Matrix $\mathbf{S}_{VV}^\epsilon = \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G}$ positiv definit, sodass $\mathbf{x}_V = \mathbf{0}$ folgt. Da die Matrix \mathbf{S}_{AA}^ν nur positiv semidefinit ist und einen Nullraum besitzt, welcher durch reine Gradientenfelder aufgespannt wird, folgt

$$\mathbf{x}_A = \mathbf{G} \mathbf{x}_\Psi \quad (5.51)$$

für ein beliebiges \mathbf{x}_Ψ . Die Anzahl der Nulleigenwerte ist daher gleich der Dimension $N_{\mathcal{V}_0}$ des $\mathcal{V}_0^{h,p}$. Insgesamt ergibt sich hiermit für die Nulleigenwerte und -vektoren die Darstellung

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}_{G,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

sodass es sich bei ihnen um reine Gradientenfelder handelt. Werden ohne die Annahme $\lambda = 0$ reine Gradientenfelder mit

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

als mögliche Kandidaten für Eigenvektoren betrachtet, so reduziert sich (5.43) aufgrund der Eigenschaften der Matrix \mathbf{S}_{AA}' im Bezug auf reine Gradientenfelder auf

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.54)$$

beziehungsweise nach Ausmultiplikation, Ausnutzung der Regularität von $\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G}$ sowie der Annahme $\lambda \neq 0$ weiter zu

$$\mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} (\lambda \mathbf{x}_\Psi + \mathbf{x}_V) = \mathbf{0}, \quad (5.55a)$$

$$\lambda \mathbf{x}_\Psi + \mathbf{x}_V = \mathbf{0}. \quad (5.55b)$$

Mit der Wahl

$$\mathbf{x}_V = -\lambda \mathbf{x}_\Psi \quad (5.56)$$

sind beide Gleichungen für ein beliebiges λ erfüllt, sodass für reine Gradientenfelder λ ein $N_{\mathcal{V}_0}$ -facher Eigenwert ist und sich für die zugehörigen Eigenvektoren in Matrix-Form die Darstellung

$$\mathbf{X}_{G,\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ -\lambda \mathbf{I}_{N_{\mathcal{V}_0}} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

ergibt. Dabei entspricht jede Spalte von $\mathbf{X}_{G,\lambda}$ einem Eigenvektor. Insbesondere folgen die beiden zuvor betrachteten Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda \rightarrow \infty$ hieraus als Spezialfall. Aufbauend auf diesen Resultaten wird für den Rest dieses Abschnittes das Eigenwertproblem für die Systemmatrix $\mathbf{A}^{i,u}$

$$\mathbf{A}^{i,u} \mathbf{x}_k^{i,u} = \mu_k^{i,u} \mathbf{x}_k^{i,u} \quad (5.58)$$

betrachtet. Aus den zuvor gemachten Überlegungen folgt für

$$\lambda = j k_0 \quad (5.59)$$

sowie

$$\mathbf{x}_k^{i,u} = \mathbf{X}_{G,jk_0} \mathbf{e}_k \quad (5.60)$$

mit $k = 1, \dots, N_{\mathcal{V}_0}$ die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ jk_0 \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ -jk_0 \mathbf{I}_{N_{\mathcal{V}_0}} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

und somit

$$\mu_k^{i,u} = 0. \quad (5.62)$$

Die Matrix $\mathbf{A}^{i,u}$ hat daher unabhängig von der betrachteten Wellenzahl einen $N_{\mathcal{V}_0}$ -fachen Nulleigenwert und der zugehörige $N_{\mathcal{V}_0}$ -dimensionale Nullraum wird durch reine Gradientenfelder der Form

$$\mathbf{X}_{G,jk_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ -jk_0 \mathbf{I}_{N_{\mathcal{V}_0}} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

aufgespannt. Im Gegensatz zur elektrischen Feldformulierung ändern sich die Eigenschaften der Systemmatrix nicht erst beim Grenzübergang $k_0 \rightarrow 0$, sondern der entsprechende Nullraum ist bei beliebigen Wellenzahlen vorhanden. Wird die Systemmatrix $\mathbf{A}^{i,u}$ im statischen Grenzfall betrachtet, so gilt

$$\mathbf{A}^{i,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \\ jk_0 \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix} \stackrel{k_0=0}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Der obere linke Block entspricht der Systemmatrix, die sich im ungeeichten Fall in der Magnetostatik ergibt [ZC06, S. 74ff.], während der rechte untere Block eine diskretisierte Form des Laplace-Operators darstellt, was dem elektrostatischen Fall entspricht [ZC06, S. 65ff.]. Die Forderung nach Quellenfreiheit im elektrostatischen Fall, welche bei der Betrachtung der elektrischen Feldformulierung im Niederfrequenzfall zu Problemen geführt hat, bleibt bei der ungeeichten Potenzialformulierung somit stets erfüllt. Die darüber hinaus im statischen Fall vorliegende völlige Entkopplung der elektrischen und magnetischen Felder wird ebenfalls erhalten und im Gegensatz zur elektrischen Feldformulierung können im statischen Fall sowohl die elektrischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{D} als auch die magnetischen Felder \mathbf{H} und \mathbf{B} aus der Lösung rekonstruiert werden. Das Vektorpotenzial \mathbf{A} kann nach den bisherigen Betrachtungen zwar nicht eindeutig bestimmt werden, da eine geeignete Eichung zur Festlegung seiner Quellen fehlt, die aus dem Vektorpotenzial \mathbf{A} berechnete und physikalisch relevante magnetische Flussdichte \mathbf{B} ist jedoch eindeutig festgelegt, vgl. Abschnitt 2.4.2. Auch wenn die Systemmatrix singularär ist, sind die physikalischen Felder eindeutig bestimmt. Durch die Singularität der Systemmatrix wird daher im Diskreten keine Instabilität der Formulierung, sondern die Eichinvarianz der physikalischen Felder ausgedrückt. Wird das Gleichungssystem iterativ gelöst, und liegt die rechte Seite $\mathbf{b}_{AV}^{i,u}$ des Gleichungssystems im Bildraum der Matrix, so stellt die Singularität

der Matrix nicht unbedingt ein Problem dar, was zum Beispiel in der Potenzialformulierung nach [HKO08] ausgenutzt wird. Für eine direkte Lösung mit Hilfe einer geeigneten Matrixfaktorisierung ist diese Art der Formulierung jedoch ungeeignet. Insbesondere bei iterativen Lösern, welche einen Multigrid-Vorkonditionierer verwenden, ist es erforderlich, auf dem größten zur Verfügung stehenden Gitter direkt zu lösen, um die Konvergenz des gesamten Verfahrens zu beschleunigen [Hil06]. Aus diesem Grund werden in den folgenden Abschnitten unterschiedliche Formulierungen vorgestellt, welche zu einer regulären Systemmatrix führen, sodass eine Faktorisierung möglich wird.

5.2.5 Baum-Kobaum-Eichung

Zunächst wird nur der Fall betrachtet, der sich bei Verwendung von Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung, das heißt Polynomgrad $p = 1$, ergibt. Die diskreten Approximationen der Felder werden daher in den Räumen $\mathcal{V}_0^{h,1}$ beziehungsweise $\mathcal{W}_0^{h,1}$ gesucht. Die einfachste Möglichkeit eine Eichung des magnetischen Vektorpotenzials zu erzielen, ist in diesem Fall die sogenannte Baum-Kobaum-Eichung - vgl. [AR88], [AR90], [MC95] - welche auf der in Abschnitt 3.3.2 vorgestellten Baum-Kobaum-Zerlegung des FE -Netzes aufbaut. Wegen der (exakten) Sequenzeigenschaft nach (2.56)

$$\nabla \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \quad (5.65a)$$

beziehungsweise ihrem diskreten Analogon nach (3.3)

$$\nabla \mathcal{V}_0^{h,1} \subset \mathcal{W}_0^{h,1} \quad (5.65b)$$

gilt, wie in (2.45) dargestellt, die Zerlegung des Raums $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ in die L^2 -orthogonalen Komponenten

$$\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) = \nabla \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \oplus (\nabla \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E))^\perp \oplus H^1(\Omega). \quad (5.66)$$

Aufgrund der gemachten Einschränkungen hinsichtlich der Eigenschaften des Feldgebietes und des Randes des Feldgebietes gilt $H^1(\Omega) = \emptyset$ und die verbleibende Zerlegung entspricht der klassischen Helmholtz-Zerlegung. Es ist zwar grundsätzlich auch im FE -Kontext möglich eine vollständige Helmholtz-Zerlegung durchzuführen, allerdings ist diese mit großem numerischem Aufwand verbunden, da die Forderung der Divergenzfreiheit der Ansatzfunktionen zu Ansatz- und Testfunktionen führt, deren Träger deutlich vergrößert wird, was sich negativ auf die Besetzungsstruktur der FE -Matrizen auswirkt. Um diesen Nachteil zu vermeiden, wird keine vollständige, sondern nur eine näherungsweise Helmholtz-Zerlegung durchgeführt. Hierbei wird das Vektorpotenzial in einen Anteil aufgespalten, welcher aus reinen Gradientenfeldern besteht, und einen, welcher nicht verschwindende Zirkulationen

darstellt. Insgesamt gilt also die Darstellung

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_c + \nabla\Psi, \quad (5.67a)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass

$$\nabla \times \mathbf{A}_c \neq 0 \quad (5.67b)$$

erfüllt ist. Im Allgemeinen gilt bei dieser Art der Zerlegung

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_c = 0 \quad (5.67c)$$

nicht. Wesentlich ist jedoch, dass die reinen Gradientenfelder explizit vorliegen. Der Gradientenanteil des Vektorpotenzials in (5.67a) kann auch im *FE*-Kontext durch entsprechende Gradienten skalarer Ansätze dargestellt werden, sodass

$$\nabla\Psi = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} \nabla\psi_k x_{\Psi,k}. \quad (5.68)$$

Wegen der diskreten Sequenzeigenschaft (3.3) und der daraus resultierenden Darstellung des diskreten Gradienten mit Hilfe der Matrix $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{W}_0} \times N_{\mathcal{V}_0}}$ gilt weiterhin

$$\nabla\Psi = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} \nabla\psi_k x_{\Psi,k} = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} \left(\sum_{l=1}^{N_{\mathcal{W}_0}} \mathbf{a}_l \mathbf{G}_{lk} \right) x_{\Psi,k} = \sum_{l=1}^{N_{\mathcal{W}_0}} \mathbf{a}_l \left(\sum_{k=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} \mathbf{G}_{lk} x_{\Psi,k} \right). \quad (5.69)$$

Somit ist eine Darstellung des Gradientenanteils von (5.67a) mit Hilfe der ursprünglichen Ansatzfunktionen für das Vektorpotenzial möglich. Die weiteren Betrachtungen dienen dazu, auch den Anteil des Vektorpotenzials mit nicht verschwindender Zirkulation durch die ursprüngliche Basis auszudrücken. Durch einen *FE*-Ansatz dargestellt, hat das Vektorpotenzial die Form

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{W}_0}} \mathbf{a}_k x_{A,k}, \quad \mathbf{a}_k \in \mathcal{W}_0^{h,1} \quad \forall k. \quad (5.70)$$

Wird die Anzahl der nicht am Dirichlet-Rand liegenden Kanten beziehungsweise Knoten des *FE*-Netzes mit N_E beziehungsweise N_N bezeichnet, so gelten die Zusammenhänge

$$N_{\mathcal{V}_0} = \dim \mathcal{V}_0^{h,1} = N_N, \quad (5.71a)$$

$$N_{\mathcal{W}_0} = \dim \mathcal{W}_0^{h,1} = N_E. \quad (5.71b)$$

Mit der Baum-Kobaum-Zerlegung des *FE*-Netzes nach Abschnitt 3.3.2 ist weiterhin

$$N_E = N_E^t + N_E^c, \quad (5.71c)$$

sowie

$$N_E^t = N_N, \quad (5.71d)$$

wobei N_E^t beziehungsweise N_E^c der Anzahl der Baum- beziehungsweise Kobaum-Kanten entspricht. Werden die Kanten des FE -Netzes so nummeriert, dass zunächst die Kobaum-Kanten und anschließend die Baum-Kanten aufgelistet werden, so ergibt sich die FE -Darstellung des Vektorpotenzials zu

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{W}_0}} \mathbf{a}_k x_{A,k} = \sum_{k=1}^{N_E^c} \mathbf{a}_{c,k} x_{A,c,k} + \sum_{k=1}^{N_E^t} \mathbf{a}_{t,k} x_{A,t,k}, \quad (5.72a)$$

wobei infolge der gewählten Nummerierung

$$\mathbf{a}_{c,k} = \mathbf{a}_k \quad k = 1, \dots, N_E^c, \quad (5.72b)$$

$$\mathbf{a}_{t,k} = \mathbf{a}_{(k+N_E^c)} \quad k = 1, \dots, N_E^t \quad (5.72c)$$

sowie

$$x_{A,k}^c = x_{A,k} \quad k = 1, \dots, N_E^c, \quad (5.72d)$$

$$x_{A,k}^t = x_{A,(k+N_E^c)} \quad k = 1, \dots, N_E^t \quad (5.72e)$$

gelten. In vektorieller Schreibweise impliziert dies für den Koeffizientenvektor \mathbf{x}_A eine Zerlegung in der Form

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^c \\ \mathbf{x}_A^t \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Da die Anzahl der Freiheitsgrade unabhängig von der konkreten Wahl der Darstellung des Vektorpotenzials bleiben muss, werden nach (5.70) in der ursprünglichen Darstellung des Vektorpotenzials gerade $N_{\mathcal{W}_0}$ Freiheitsgrade benötigt. Da sich der zuvor identifizierte Gradientenanteil (5.68) aus insgesamt $N_{\mathcal{V}_0}$ Freiheitsgraden zusammensetzt, verbleiben für den Anteil des Vektorpotenzials mit nicht verschwindender Rotation noch

$$N_{\mathcal{W}_0} - N_{\mathcal{V}_0} = N_E - N_N = N_E - N_E^t = N_E^c \quad (5.74)$$

Freiheitsgrade. Die Zerlegung (5.67a) kann daher erreicht werden, indem zunächst alle Koeffizienten von Ansatzfunktionen, welche den Baum-Kanten zugeordnet sind, gleich Null gesetzt werden und anschließend für jede entfernte Baumkanten-Ansatzfunktion der Gradient einer skalaren Funktion hinzugefügt wird. Die Baumkanten werden gewählt, da die verbliebenen Kobaumkanten ausreichen, um jede mögliche

Zirkulation darzustellen, siehe Abschnitt 3.3.2. Mit der Darstellung des diskreten Gradienten nach (3.12) ergibt sich das Vektorpotenzial in der Form

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N_E^c} \mathbf{a}_k^c x_{A,k}^c + \sum_{l=1}^{N_{V_0}} \mathbf{a}_l \left(\sum_{k=1}^{N_{V_0}} \mathbf{G}_{lk} x_{\Psi,k} \right) \quad (5.75a)$$

$$= \sum_{k=1}^{N_E^c} \mathbf{a}_k x_{A,k} + \sum_{l=1}^{N_E} \mathbf{a}_l \left(\sum_{k=1}^{N_N} \mathbf{G}_{lk} x_{\Psi,k} \right) \quad (5.75b)$$

$$= \sum_{l=1}^{N_E} \mathbf{a}_l \left[\left(\sum_{k=1}^{N_E^c} \mathbf{C}_{lk} x_{A,k} \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_E^l} \mathbf{G}_{lk} x_{\Psi,k} \right) \right] \quad (5.75c)$$

mit

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_E^c} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{V_0} \times N_E^c}. \quad (5.75d)$$

Der Koeffizientenvektor \mathbf{x}_A kann demzufolge durch

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A,c} \\ \mathbf{x}_{\Psi} \end{bmatrix}. \quad (5.76)$$

dargestellt werden. Um die Systemmatrix des modifizierten Gleichungssystems unter Berücksichtigung der Aufspaltung zu erhalten, kann diese Darstellung des Koeffizientenvektors direkt in (5.26) eingesetzt werden. Es ist jedoch zu beachten, dass auch die Testfunktionen entsprechend modifiziert werden müssen, damit gewährleistet ist, dass auch mit Funktionen mit nichtverschwindender Rotation und reinen Gradientenfeldern separat getestet wird. Dies lässt sich durch eine Multiplikation der ersten Zeile von (5.26) von links mit der Matrix $[\mathbf{C} \ \mathbf{G}]^T$ erreichen, woraus für das *FE*-Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^{\nu} + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^{\epsilon} & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^{\epsilon} & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^{\epsilon} \\ (jk_0)^2 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^{\epsilon} & (jk_0)^2 \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^{\epsilon} & jk_0 \mathbf{M}_{\Psi V}^{\epsilon} \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^{\epsilon} & jk_0 \mathbf{M}_{V \Psi}^{\epsilon} & \mathbf{S}_{V V}^{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_{\Psi} \\ \mathbf{x}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c} \\ \mathbf{b}_{\Psi} \\ \mathbf{b}_V \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

mit den neueingeführten Matrizen

$$\mathbf{S}_{A_c A_c}^{\nu} = \mathbf{C}^T \mathbf{S}_{AA}^{\nu} \mathbf{C}, \quad (5.78a)$$

$$\mathbf{T}_{A_c A_c}^{\epsilon} = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_{AA}^{\epsilon} \mathbf{C}, \quad (5.78b)$$

$$\mathbf{M}_{A_c \Psi}^{\epsilon} = (\mathbf{M}_{\Psi A_c}^{\epsilon})^T = \mathbf{M}_{A_c V}^{\epsilon} = (\mathbf{M}_{V A_c}^{\epsilon})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_{AA}^{\epsilon} \mathbf{G}, \quad (5.78c)$$

$$\mathbf{S}_{\Psi \Psi}^{\epsilon} = \mathbf{M}_{\Psi V}^{\epsilon} = \mathbf{M}_{V \Psi}^{\epsilon} = \mathbf{S}_{V V}^{\epsilon} = \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^{\epsilon} \mathbf{G} \quad (5.78d)$$

und den Vektoren

$$\mathbf{b}_{A_c} = \mathbf{C}^T \mathbf{b}_A, \quad (5.78e)$$

$$\mathbf{b}_{\Psi} = \mathbf{G}^T \mathbf{b}_A \quad (5.78f)$$

folgt. Das Gleichungssystem ist in dieser Form immer noch singulär, da es sich um eine reine Umformulierung des ursprünglichen Gleichungssystems (5.26) handelt. In der vorliegenden Darstellung sind die zweite und die dritte Zeile linear abhängig, da sie sich nur um einen Faktor jk_0 voneinander unterscheiden. Im statischen Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ gilt darüber hinaus

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ (jk_0)^2 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{\Psi V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{V \Psi}^\epsilon & \mathbf{S}_{V V}^\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{V V}^\epsilon \end{bmatrix}, \quad (5.79)$$

was für das lineare Gleichungssystem (5.77) die reduzierte Darstellung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{V V}^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c} \\ \mathbf{b}_V \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

$$\mathbf{b}_\Psi = 0 \quad (5.81)$$

zur Folge hat. Der Gradientenanteil des magnetischen Vektorpotenzials ist demnach in diesem Fall völlig unbestimmt, die elektrischen und magnetischen Felder können allerdings nach wie vor aus den verbliebenen Größen eindeutig rekonstruiert werden. Für die rechte Seite von (5.27) ergibt sich hieraus zusätzlich die Bedingung, dass \mathbf{b}_Ψ im statischen Grenzfall gleich Null sein muss, damit ein konsistentes Gleichungssystem vorliegt. Vorausgesetzt die Bedingung

$$\mathbf{b}_\Psi = jk_0 \mathbf{b}_V \quad (5.82)$$

ist für alle Frequenzen erfüllt, kann ein reguläres Gleichungssystem erzeugt werden, indem der Gradientenanteil des Vektorpotenzial in der Form

$$\mathbf{x}_\Psi = 0 \quad (5.83)$$

gewählt wird, was als Baum-Eichung [MC95] bezeichnet wird. Die entsprechenden Unbekannten und zugehörigen Gleichungen entfallen aus dem Gleichungssystem und es ergibt sich die reduzierte Form

$$\mathbf{A}^{i,tc} \mathbf{x}^{i,tc} = \mathbf{b}^{i,tc} \quad (5.84a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{i,tc} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V V}^\epsilon \end{bmatrix}, \quad (5.84b)$$

$$\mathbf{x}^{i,tc} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}, \quad (5.84c)$$

$$\mathbf{b}^{i,tc} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c} \\ \mathbf{b}_V \end{bmatrix}, \quad (5.84d)$$

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{m}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|---|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | 194.3518j | $4.6 \cdot 10^{-4}$ | $6.2 \cdot 10^{-6}$ | $1.1 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{210} | 307.2972j | $2.4 \cdot 10^{-3}$ | $5.8 \cdot 10^{-5}$ | $3.3 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{120} | 307.2972j | $4.9 \cdot 10^{-4}$ | $2.0 \cdot 10^{-5}$ | $8.9 \cdot 10^{-8}$ |
| TM_{011} | 338.3760j | $5.7 \cdot 10^{-3}$ | $8.8 \cdot 10^{-7}$ | $7.5 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{101} | 338.3760j | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $2.9 \cdot 10^{-5}$ | $1.5 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{111} | 365.2186j | $3.7 \cdot 10^{-4}$ | $3.5 \cdot 10^{-5}$ | $2.1 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{111} | 365.2186j | $4.3 \cdot 10^{-3}$ | $1.5 \cdot 10^{-5}$ | $1.9 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 5.1: Eigenwerte im verlustlosen Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

wobei der obere Index tc für die Baum-Kobaum-Eichung beziehungsweise im Englischen *tree-cotree-gauge* steht. Von Vorteil ist bei diesem Vorgehen, dass eine Baum-Eichung auf der Grundlage rein topologischer Betrachtungen im Hinblick auf das FE -Netz durchgeführt werden kann und nicht die Assemblierung weiterer Matrizen benötigt wird. Nachteilig ist jedoch die Tatsache, dass die Baum-Kobaum-Zerlegung des FE -Netzes nicht eindeutig ist und je nach Wahl des Baumes zu schlecht konditionierten Systemmatrizen führen kann, vgl. [GT94], [Mun02]. Die Verallgemeinerung dieses Vorgehens auf Ansätze höherer Ordnung stellt keine grundsätzliche Schwierigkeit dar, solange die Basen der Ansatzräume höherer Ordnung wie in Abschnitt 3.2 aufgebaut sind. Wichtig ist hierbei, dass für die reinen Gradientenfelder höherer Ordnung eine explizite Basis vorliegt. Diese Gradienten höherer Ordnung können dann - wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt - aus dem Gleichungssystem eliminiert werden, um letztlich eine reguläre Systemmatrix zu erhalten. Das Vorgehen im Fall höherer Ordnung wird zum Beispiel in [DEPL99] für den Fall $p = 2$ vorgestellt. Da auch die Verallgemeinerung auf Ansätze noch höherer Ordnung keine weiteren Neuerungen mit sich bringt, wird im Folgenden nicht näher darauf eingegangen.

5.2.6 Numerische Ergebnisse

Die numerischen Ergebnisse dieses Abschnitts beziehen sich auf die Baum-Kobaum-Eichung und das verlustlose Randwertproblem aus Abschnitt 5.1. Die analytisch bestimmten physikalischen Eigenwerte sind zusammen mit den relativen Fehlern der numerisch berechneten Näherungen für die Eigenwerte in Tabelle 5.1 für die ersten sieben Moden und den Polynomgrad $p = 1, 2, 3$ dargestellt. Wie anhand von Tabelle 5.1 zu erkennen, werden die physikalischen Eigenwerte durch das diskretisierte System sehr gut angenähert. In Abbildung 5.2.1 ist die Verteilung der Eigenwerte in der komplexen Ebene dargestellt. Wie zuvor gezeigt, wird hieraus deutlich, dass die Potenzialformulierung im verlustlosen Fall bei Verwendung der Baum-Kobaum-

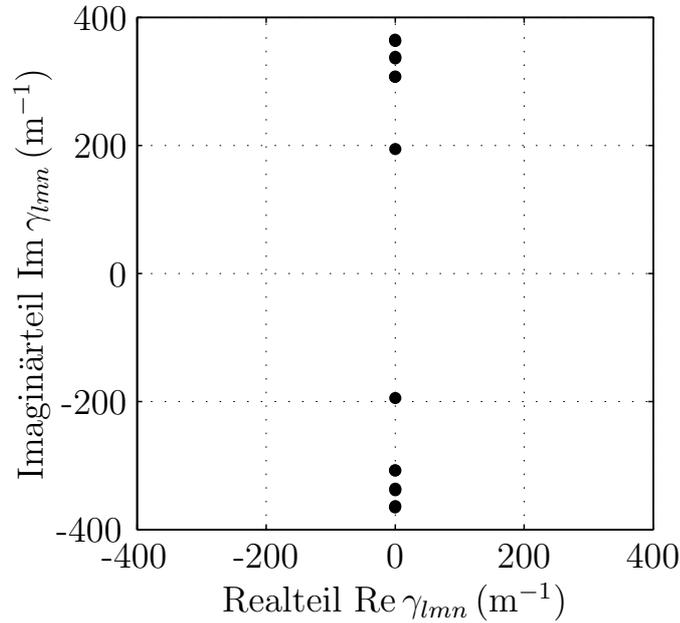


Abbildung 5.2.1: Eigenwertverteilung im verlustlosen Fall: Lage der Eigenwerte des Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte dargestellt.

Eichung - im Gegensatz zur elektrischen Feldformulierung - keine unphysikalischen Nulleigenwerte besitzt.

Zur Beurteilung der Frequenzabhängigkeit der Systemmatrix \mathbf{A} mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V V}^\epsilon \end{bmatrix}, \quad (5.85)$$

ist in Abbildung 5.2.2 die Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ in Abhängigkeit der Wellenzahl dargestellt. Im Vergleich zu den Resultaten der elektrischen Feldformulierung aus Abbildung 4.1.4 ist deutlich zu erkennen, dass sich die Konditionszahl der Systemmatrix auch im Niederfrequenzfall nicht verschlechtert. Im Hochfrequenzfall liegt die Konditionszahl der Baum-Kobaum-Eichung jedoch deutlich über jener der Feldformulierung. Insbesondere zeigt sich, dass die Konditionszahl bei höheren Frequenzen quadratisch mit der Frequenz ansteigt, sofern keine weiteren Maßnahmen ergriffen werden. Wird, um der Verschlechterung der Konditionszahl entgegen zu wirken, eine Diagonalskalierung der Systemmatrix durchgeführt, sodass alle Hauptdiagonaleinträge Betrag 1 besitzen, so kann eine deutliche Verbesserung der Konditionszahl erzielt werden, wie in Abbildung 5.2.3 dargestellt ist. Insbesondere verschlechtert sich die Konditionszahl nicht mehr quadratisch sondern nur noch linear mit der Frequenz. Der Knick in beiden Verläufen bei $f \approx 100$ GHz kommt dadurch zu Stande, dass hier sehr dicht an einer Eigenfrequenz des Resonators ausgewertet wird.

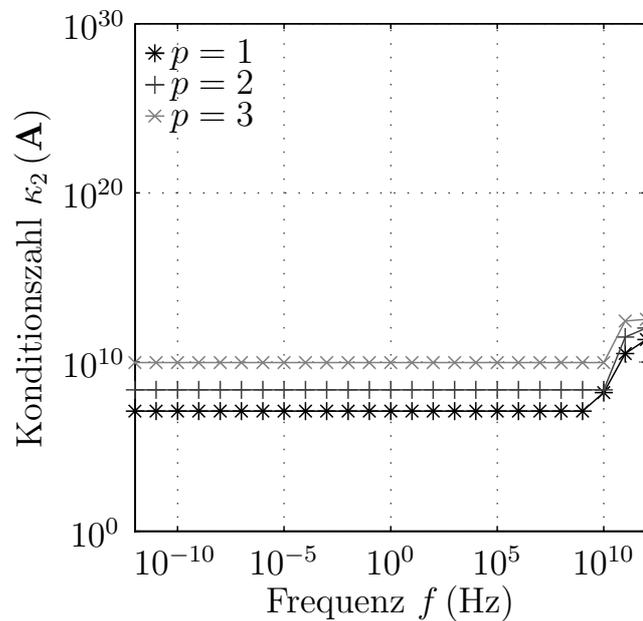


Abbildung 5.2.2: Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

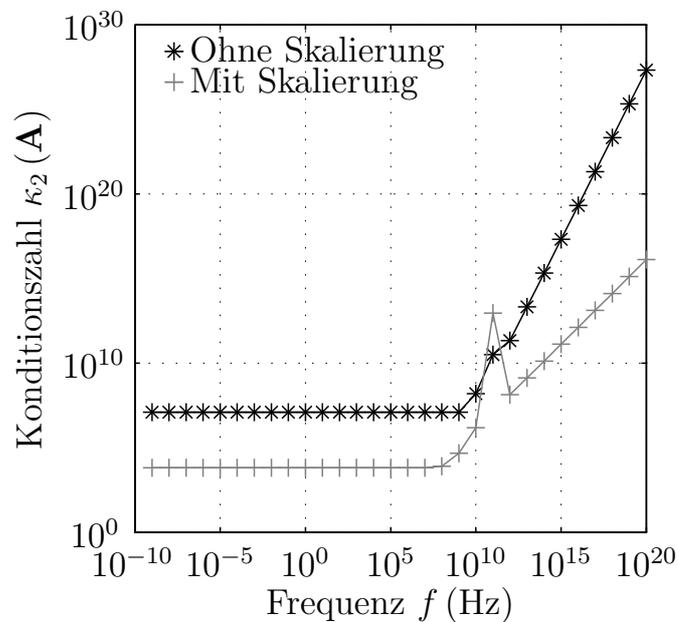


Abbildung 5.2.3: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit und ohne Skalierung.

5.3 Statische Eichung

Nachdem im vorigen Abschnitt die ungeeichte \mathbf{A} - V -Potenzialformulierung und die rein topologische Baum-Kobaum-Eichung betrachtet wurden, wird in diesem Abschnitt eine explizite Eichung des Vektorpotenzials \mathbf{A} durch Vorgabe einer geeigneten Eichbedingung vorgestellt. Im Gegensatz zur Baum-Kobaum-Eichung des letzten Abschnittes führt diese Art der Eichung jedoch nicht zu einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten im resultierenden FE -Gleichungssystem. Das im Folgenden betrachtete Randwertproblem basiert wiederum auf den in Abschnitt 5.1 gemachten Annahmen.

5.3.1 Eichbedingung

Ausgangspunkt sind die Gleichungen der ungeeichten Potenzialformulierung nach (5.7)

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) + (jk_0)^2 \epsilon_r \mathbf{A} + jk_0 \epsilon_r \nabla V = \eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (5.86a)$$

$$jk_0 \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) = 0. \quad (5.86b)$$

Wie in Abschnitt 5.2 erläutert, ist diese Formulierung im statischen Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ nicht grundsätzlich instabil, da die elektrische Flussbilanz (2.11c) im Gegensatz zur elektrischen Feldformulierung auch in diesem Fall als Gleichung erhalten bleibt. Aufgrund der Eichinvarianz der Felder gilt für $k_0 > 0$ jedoch, dass die zweite Gleichung aus der ersten durch Divergenzbildung und anschließender Skalierung mit jk_0 folgt, sodass die Gleichungen in dieser Form nicht linear unabhängig sind. Um dieses Problem zu umgehen, wird eine Eichbedingung für das Vektorpotenzial \mathbf{A} in der Form

$$\nabla \cdot \epsilon_r \mathbf{A} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.87a)$$

explizit vorgegeben, was einer mit dem Materialtensor ϵ bzw. ϵ_r gewichteten Variante der Coulomb-Eichung [Str07, S. 226] entspricht. Da diese Nebenbedingung frequenzunabhängig ist, ergeben sich durch sie keinerlei Probleme im Niederfrequenzfall. Darüber hinaus kann die Eichbedingung in (5.7b) eingesetzt werden, sodass für das Skalarpotenzial V die vereinfachte und ebenfalls frequenzunabhängige Beziehung

$$\nabla \cdot \epsilon_r \nabla V = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.87b)$$

folgt. Da es sich bei (5.87b) gerade um die verallgemeinerte Laplace-Gleichung der Elektrostatik handelt [RC09, S. 126],[Str07, S. 162], wird diese Art der Eichung im Folgenden auch als statische Eichung bezeichnet. Zusammenfassend lauten die partiellen Differenzialgleichungen, welchen die Potenziale im Falle der vorliegenden

Eichung genügen müssen

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) + (jk_0)^2 \epsilon_r \mathbf{A} + jk_0 \epsilon_r \nabla V = \eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (5.88a)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{A}) = 0, \quad (5.88b)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) = 0, \quad (5.88c)$$

woraus sich mit der Aufspaltung nach (5.67a)

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) + (jk_0)^2 \epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi) + jk_0 \epsilon_r \nabla V = \eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (5.89a)$$

$$\nabla \cdot [\epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] = 0, \quad (5.89b)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) = 0 \quad (5.89c)$$

ergibt. Durch die Vorgabe von (5.89b) ist die Eichung jedoch noch nicht vollständig festgelegt, da geeignete Randbedingungen für die Normalkomponenten von \mathbf{A} auf dem Rand Γ_H des Feldgebietes fehlen. Für die statische Eichung werden hierzu die Bedingungen

$$[\epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (5.90a)$$

$$(\epsilon_r \nabla V) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\eta_0 c_0 \mathbf{D}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (5.90b)$$

$$\stackrel{(5.19)}{=} \frac{\eta_0}{jk_0} (\nabla \times \mathbf{H}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H \quad (5.90c)$$

vorgegeben. Wichtig ist hierbei, dass in (5.90c) die Normalkomponente der Rotation $(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ auf Γ_H bereits durch die Kenntnis der Tangentialkomponenten $\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}$ bestimmt ist. Mit dieser Wahl der Randbedingungen ist die Eichung vollständig festgelegt und das hieraus resultierende Randwertproblem lautet

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) + (jk_0)^2 \epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi) + jk_0 \epsilon_r \nabla V = \eta_0 \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (5.91a)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{A}_c) + \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \Psi) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (5.91b)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.91c)$$

zusammen mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$\mathbf{A}_c \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (5.91d)$$

$$\Psi = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (5.91e)$$

$$V = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (5.91f)$$

und den Neumann-Randbedingungen

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) \times \hat{\mathbf{n}} = \eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (5.91g)$$

$$[\epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (5.91h)$$

$$(\epsilon_r \nabla V) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\eta_0 c_0 \mathbf{D}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\eta_0}{jk_0} (\nabla \times \mathbf{H}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (5.91i)$$

5.3.2 Schwache Formulierung und Randwertproblem

Zur Herleitung der schwachen Formulierung werden (5.89a), (5.89b) und (5.89c) mit Testfunktionen $\mathbf{a}_c \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$, $\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ und $v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ multipliziert und anschließend partiell integriert, was auf

$$S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla\Psi, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\epsilon(\nabla V, \mathbf{a}_c) = b_{A_c}^s(\mathbf{a}_c), \quad (5.92a)$$

$$T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla\Psi, \nabla\psi) = b_\Psi^s(\psi), \quad (5.92b)$$

$$T^\epsilon(\nabla V, \nabla v) = b_V^s(v) \quad (5.92c)$$

mit den bereits zuvor eingeführten Linear- und Bilinearformen sowie den neuen Linearformen

$$b_{A_c}^s(\mathbf{a}_c) = b_J(\mathbf{a}_c) + b_H(\mathbf{a}_c), \quad (5.93a)$$

$$b_\Psi^s(\psi) = \int_{\Gamma_H} \psi [\epsilon_r(\mathbf{A}_c + \nabla\Psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma, \quad (5.93b)$$

$$b_V^s(v) = \int_{\Gamma_H} v (\epsilon_r \nabla V) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (5.93c)$$

führt. Unter Verwendung der durch die Eichung festgelegten Randbedingungen folgt

$$b_\Psi^s(\psi) = 0, \quad (5.94)$$

$$b_V^s(v) = -b_D(v) = \frac{1}{jk_0} b_H(\nabla v) \quad (5.95)$$

und hieraus für die schwache Formulierung

$$S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla\Psi, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\epsilon(\nabla V, \mathbf{a}_c) = b_A^s(\mathbf{a}_c), \quad (5.96a)$$

$$T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla\Psi, \nabla\psi) = 0, \quad (5.96b)$$

$$T^\epsilon(\nabla V, \nabla v) = b_V^s(v). \quad (5.96c)$$

Für den zu $\frac{1}{k_0}$ proportionalen Term der rechten Seite von (5.90c) gelten wiederum die Überlegungen aus Abschnitt 5.2.3, sodass hierdurch keine Instabilität der Formulierungen hervorgerufen wird. Die äquivalente Formulierung der Randbedingung mit Hilfe der elektrischen Flussdichte \mathbf{D}_0 (5.90b) entspricht der Neumann-Randbedingung des elektrostatischen Randwertproblems [ZC06, S. 63f] und stellt hinsichtlich der Frequenzabhängigkeit keinerlei Problem dar. Da mit den Überlegungen aus Abschnitt 5.2.3 auch die Anregung mit Hilfe der magnetischen Erregung ohne Niederfrequenzprobleme realisiert werden kann, wird im Folgenden ausschließlich die Darstellung der rechten Seite - aufbauend auf (5.90c) - verwendet. Unabhängig von den Betrachtungen aus Abschnitt 5.2.3 kann die Frequenzskalierung der rechten Seite durch eine Variablentransformation der Form

$$\tilde{V} = jk_0 V \quad (5.97)$$

beseitigt werden. Hiermit ergibt sich für (5.96)

$$S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla\Psi, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\epsilon(\nabla\tilde{V}, \mathbf{a}_c) = b_A^s(\mathbf{a}_c), \quad (5.98a)$$

$$T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla\Psi, \nabla\psi) = 0, \quad (5.98b)$$

$$T^\epsilon(\nabla\tilde{V}, \nabla v) = b_H(v). \quad (5.98c)$$

Diese Darstellung entspricht bei der Definition der Potentiale im Wesentlichen der Konvention nach [DEPL99, Gl. (31)] für den Fall $\beta = 1$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{jk_0} \nabla\tilde{V} + jk_0(\mathbf{A}_c + \nabla\Psi). \quad (5.99)$$

Das zugehörige Gleichungssystem kann problemlos gelöst werden, die Rekonstruktion des elektrischen Feldes im statischen Grenzfall ist hiermit allerdings nicht möglich.

5.3.3 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Zur Herleitung des *FE*-Gleichungssystems werden die unendlich dimensionalen Ansatz- und Testräume wiederum durch endliche dimensionale Unterräume ersetzt. Für den Anteil des Vektorpotenzials \mathbf{A}_c , welcher über eine nicht verschwindende Rotation verfügt, werden Ansätze aus dem $\mathcal{R}_{c,0}^{h,p}$ gewählt, um das Auftreten reiner Gradientenfelder zu verhindern. Für die beiden Skalarpotentiale Ψ und V werden Ansätze aus dem $\mathcal{V}_0^{h,p}$ verwendet. Hiermit ergibt sich - wie in ähnlicher Form bereits in (5.20) gezeigt - für die Potentiale die Darstellung

$$\mathbf{A}_c = \sum_{k=1}^{N_A} x_{A_c,k} \mathbf{a}_{c,k}, \quad \mathbf{a}_{c,k} \in \mathcal{R}_{c,0}^{h,p}, \quad (5.100a)$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N_\Psi} x_{\Psi,k} \psi_k, \quad \psi_k \in \mathcal{V}_0^{h,p}, \quad (5.100b)$$

$$V = \sum_{k=1}^{N_V} x_{V,k} v_k, \quad v_k \in \mathcal{V}_0^{h,p}. \quad (5.100c)$$

Mit den entsprechenden Testfunktionen folgt das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Koeffizientenvektoren \mathbf{x}_{A_c} , \mathbf{x}_Ψ und \mathbf{x}_V in der Form

$$\mathbf{A}^{i,s} \mathbf{x}^{i,s} = \mathbf{b}^{i,s} \quad (5.101a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix}, \quad (5.101b)$$

$$\mathbf{x}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}, \quad (5.101c)$$

$$\mathbf{b}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c, H} + \mathbf{b}_{A_c, J} \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{jk_0} \mathbf{b}_{V, H} \end{bmatrix}. \quad (5.101d)$$

Im Gegensatz zur Baum-Kobaum-Eichung aus Abschnitt 5.2.5 kommt es hier nicht zu einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten, und das resultierende lineare Gleichungssystem ist darüber hinaus unsymmetrisch. Der erstgenannte Punkt stellt allerdings keinen direkten Nachteil dar, da in der vorgestellten Formulierung das elektrische Skalarpotenzial V unabhängig von den anderen Potenzialen nur mit Hilfe der letzten Gleichung berechnet werden kann

$$\mathbf{S}_{VV}^\epsilon \mathbf{x}_V = \frac{1}{jk_0} \mathbf{b}_{V, H}, \quad (5.102)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}_V = \frac{1}{jk_0} (\mathbf{S}_{VV}^\epsilon)^{-1} \mathbf{b}_{V, H} = -(\mathbf{S}_{VV}^\epsilon)^{-1} \mathbf{b}_{V, D}. \quad (5.103)$$

Liegt die entsprechende Lösung \mathbf{x}_V für V vor, kann das reduzierte Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_{A_c \Psi}^{i,s} \mathbf{x}_{A_c \Psi}^{i,s} = \mathbf{b}_{A_c \Psi}^{i,s} \quad (5.104a)$$

mit den reduzierten Größen

$$\mathbf{A}_{A_c \Psi}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon \end{bmatrix}, \quad (5.104b)$$

$$\mathbf{x}_{A_c \Psi}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_\Psi \end{bmatrix}, \quad (5.104c)$$

$$\mathbf{b}_{A_c \Psi}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c, H} + \mathbf{b}_{A_c, J} - \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon (\mathbf{S}_{VV}^\epsilon)^{-1} \mathbf{b}_{V, H} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.104d)$$

für die verbleibenden Potenziale gelöst werden. Es muss somit ein Gleichungssystem mit N_V und ein Gleichungssystem mit $N_{A_c} + N_\Psi$ Unbekannten gelöst werden, wobei im Allgemeinen $N_V = N_\Psi$ gilt. In der Regel ist somit der zusätzliche Aufwand, welcher durch das Lösen des Gleichungssystems für \mathbf{x}_V entsteht, im Vergleich zum Aufwand der Lösung des Gleichungssystems für \mathbf{x}_{A_c} und \mathbf{x}_Ψ vernachlässigbar. Nachteilig bleibt der Umstand, dass es sich um ein nicht symmetrisches Gleichungssystem handelt. Da das elektrische Skalarpotenzial V von den anderen Potenzialen

entkoppelt ist, kann das Gleichungssystem jedoch in der Form

$$\mathbf{S}_{VV}^\epsilon \mathbf{x}_V = \frac{1}{jk_0} \mathbf{b}_{V,H} \quad (5.105)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c,H} + \mathbf{b}_{A_c,J} - jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \mathbf{x}_V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

angegeben werden. Die Systemmatrix \mathbf{S}_{VV}^ϵ des entkoppelten linearen Gleichungssystems für V ist unter den gegebenen Voraussetzungen reell, symmetrisch und positiv definit [ZC06, S. 67]. Ist die Wellenzahl $k_0 \neq 0$, so kann die Variablentransformation

$$\mathbf{x}_\Psi = \frac{1}{jk_0} \mathbf{y}_\Psi \quad (5.107)$$

durchgeführt werden, sodass nach Skalierung der zweiten Zeile von (5.106) mit jk_0 auch hier ein symmetrisches Gleichungssystem der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{y}_\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c,H} + \mathbf{b}_{A_c,J} - jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \mathbf{x}_V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

vorliegt. Sofern $k_0 = 0$ gilt, ändert sich an den Voraussetzungen zur Berechnung des elektrischen Skalarpotenzials nichts und es gilt weiterhin (5.105). Es ist lediglich darauf zu achten, dass in diesem Fall eine Formulierung der rechten Seite mit Hilfe der elektrischen Flussdichte wie in (5.19) erforderlich ist, beziehungsweise dass die magnetische Erregung den am Ende von Abschnitt 5.2.3 durchgeführten Überlegungen genügt. Aufgrund der Struktur von $\mathbf{A}_{A_c \Psi}^{i,s}$ gilt für diese

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{i,s} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

und eine entsprechende Skalierung, um ein lineares Gleichungssystem mit symmetrischer Systemmatrix zu erhalten, ist nicht möglich. Da es sich jedoch um eine untere Block-Dreiecksmatrix handelt, müssen zur Bestimmung der Lösung jeweils nur die Faktorisierungen der Diagonalblöcke berechnet werden, welche ihrerseits symmetrisch sind.

5.3.4 Niederfrequenzverhalten und Eigenwerte

Zur Beurteilung des Niederfrequenzverhaltens der vorgestellten Formulierung werden die Eigenschaften der Systemmatrix

$$\mathbf{A}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

in Abhängigkeit der Wellenzahl k_0 sowie das dieser Matrix zugeordnete quadratische Eigenwertproblem

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AcAc}^\nu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\Psi Ac}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix} + \lambda_k^{i,s} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{AcV}^\epsilon \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + (\lambda_k^{i,s})^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AcAc}^\epsilon & \mathbf{M}_{Ac\Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac,k} \\ \mathbf{x}_{\Psi,k} \\ \mathbf{x}_{V,k} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.112)$$

betrachtet. Aus (5.111) ergibt sich für den statischen Grenzfall

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \mathbf{A}^{i,s} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AcAc}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AcAc}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{AcV}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi Ac}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.113a)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AcAc}^\nu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\Psi Ac}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.113b)$$

und aus der Regularität der Diagonalblöcke folgt sofort die Regularität der Gesamtmatrix. Der linke obere Block

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AcAc}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\Psi Ac}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.114)$$

entspricht hierbei der Systemmatrix, welche sich auch im Falle stationärer Magnetfelder bei Verwendung der Coulomb-Eichung [ZC06, S. 84f] ergibt. Der rechte untere Block

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \mathbf{A}_V^{i,s} = \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \quad (5.115)$$

stellt eine diskretisierte Version der Laplace-Gleichung der Elektrostatik [ZC06, S. 63ff] dar. Auch wenn die Niederfrequenzstabilität der Formulierung durch die zuvor gemachten Betrachtungen bereits gewährleistet ist, werden im Folgenden das quadratische Eigenwertproblem (5.112) sowie die Eigenwerte der wellenzahlabhängigen Systemmatrix $\mathbf{A}^{i,s}$ näher untersucht. Für die Eigenvektoren von (5.112) gilt insbesondere aufgrund der letzten Zeile von (5.112) und der Regularität von \mathbf{S}_{VV}^ϵ

$$\mathbf{x}_{V,k} = \mathbf{0} \quad (5.116)$$

solange für den Eigenwert $\lambda_k^{i,s}$ die Bedingung

$$|\lambda_k^{i,s}| < \infty \quad (5.117)$$

erfüllt ist. Wird dieses Ergebnis in (5.112) ausgenutzt, so reduziert sich das quadratische Eigenwertproblem auf ein verallgemeinertes lineares Eigenwertproblem der Form

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon \end{bmatrix} + (\lambda_k^{i,s})^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c, k} \\ \mathbf{x}_{\Psi, k} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.118)$$

für den Eigenwert $(\lambda_k^{i,s})^2$. Hieraus kann $\mathbf{x}_{\Psi, k}$ mit Hilfe der zweiten Zeile von (5.118) eliminiert werden, und es ergibt sich

$$\left(\mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (\lambda_k^{i,s})^2 (\mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon - \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon (\mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon)^{-1} \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon) \right) \mathbf{x}_{A_c, k} = 0. \quad (5.119)$$

Das ursprünglich nicht symmetrische quadratische Eigenwertproblem reduziert sich somit auf ein verallgemeinertes, symmetrisches Eigenwertproblem. Wird weiterhin der Fall $\lambda_k^{i,s} \rightarrow \infty$ untersucht, ergibt sich für den Eigenvektor $\mathbf{x}_k^{i,s}$ die Darstellung

$$\mathbf{x}_k^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c, k} \\ \mathbf{x}_{\Psi, k} \\ \mathbf{x}_{V, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon)^{-1} \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{V_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\Psi, k} \\ \mathbf{x}_{V, k} \end{bmatrix}, \quad (5.120)$$

wobei $\mathbf{x}_{\Psi, k}$ und $\mathbf{x}_{V, k}$ beliebig sind.

Für die Systemmatrix $\mathbf{A}^{i,s}$ aus (5.111) wird abschließend untersucht, ob das Eigenwertproblem

$$\mathbf{A}^{i,s} \mathbf{x}_k^{i,s} = \mu_k^{i,s} \mathbf{x}_k^{i,s} \quad (5.121)$$

reine Gradientenfelder der Form

$$\mathbf{x}_k^{i,s} = \mathbf{x}_{\Psi V, k}^{i,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{\Psi, k} \\ \mathbf{x}_{V, k} \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

als Eigenvektoren besitzt und wie die zugehörigen Eigenwerte in Abhängigkeit der Wellenzahl verteilt sind. Mit (5.122) und $\mathbf{A}^{i,s}$ wie in (5.111) zerfällt (5.121) in die drei Gleichungen

$$jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon (jk_0 \mathbf{x}_{\Psi, k} + \mathbf{x}_{V, k}) = 0, \quad (5.123a)$$

$$\mathbf{S}_{V V}^\epsilon \mathbf{x}_{\Psi, k} = \mu_k^{i,s} \mathbf{x}_{\Psi, k}, \quad (5.123b)$$

$$\mathbf{S}_{V V}^\epsilon \mathbf{x}_{V, k} = \mu_k^{i,s} \mathbf{x}_{V, k}, \quad (5.123c)$$

wobei in den ersten beiden Gleichungen (5.78) ausgenutzt wurde. Ist $k_0 = 0$, so ist (5.123a) trivialerweise erfüllt und $\mathbf{x}_{\Psi, k}$ und $\mathbf{x}_{V, k}$ können unabhängig voneinander als Eigenvektoren der symmetrisch positiv definiten Matrix $\mathbf{S}_{V V}^\epsilon$ bestimmt werden. Sofern $k_0 > 0$, müssen $\mathbf{x}_{\Psi, k}$ und $\mathbf{x}_{V, k}$ zusätzlich der Bedingung

$$jk_0 \mathbf{x}_{\Psi, k} + \mathbf{x}_{V, k} = 0, \quad (5.124a)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}_{V, k} = -jk_0 \mathbf{x}_{\Psi, k} \quad (5.124b)$$

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | 194.3518j | $4.6 \cdot 10^{-4}$ | $6.2 \cdot 10^{-6}$ | $1.1 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{210} | 307.2972j | $4.9 \cdot 10^{-4}$ | $2.0 \cdot 10^{-5}$ | $8.9 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{120} | 307.2972j | $2.4 \cdot 10^{-3}$ | $5.8 \cdot 10^{-5}$ | $3.3 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{011} | 338.3760j | $5.7 \cdot 10^{-3}$ | $2.9 \cdot 10^{-5}$ | $1.5 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{101} | 338.3760j | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $8.8 \cdot 10^{-7}$ | $7.5 \cdot 10^{-8}$ |
| TM_{111} | 365.2186j | $4.3 \cdot 10^{-3}$ | $3.5 \cdot 10^{-5}$ | $2.1 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{111} | 365.2186j | $3.7 \cdot 10^{-4}$ | $1.5 \cdot 10^{-5}$ | $1.9 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 5.2: Eigenwerte im verlustlosen Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

genügen, was eine reine Skalierung darstellt. Die Eigenwerte und -vektoren können daher immer noch aus jenen der Matrix \mathbf{S}_{VV}^ϵ bestimmt werden. Im Hinblick auf reine Gradientenfelder verhält sich die Systemmatrix demnach wie eine positiv definite Matrix. Die diesen Feldern zugeordneten Eigenwerte entsprechen jenen der Matrix \mathbf{S}_{VV}^ϵ und sind daher verschieden von Null.

5.3.5 Numerische Ergebnisse

Die numerischen Ergebnisse dieses Abschnitts orientieren sich an dem verlustlosen Resonatorproblem aus Abschnitt 5.1. Ein Vergleich der analytisch berechneten Eigenwerte und der numerisch bestimmten Näherungslösungen für die ersten sieben Moden des verlustlosen Resonators ist für die Polynomgrade $p = 1, 2, 3$ in Tabelle 5.2 aufgelistet. Hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den analytisch und numerisch berechneten Eigenwerten. Auch die Genauigkeit der Lösung in Abhängigkeit der polynomiellen Ordnung entspricht jener der Feldformulierung beziehungsweise der Baum-Kobaum-Eichung. Im Gegensatz zur Feldformulierung besitzt die statische Eichung jedoch keine unphysikalischen Eigenwerte, wie anhand von Abbildung 5.3.1 zu erkennen ist.

Um die Frequenzabhängigkeit der Systemmatrix \mathbf{A} aus (5.101b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AcAc}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AcAc}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{AcV}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi Ac}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

zu charakterisieren, ist in Abbildung 5.3.2 die Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ dargestellt. Im Gegensatz zur Feldformulierung bleibt die Konditionszahl im betrachteten Frequenzbereich annähernd konstant und beginnt erst bei hohen Frequenzen, aufgrund der unterschiedlichen Frequenzskalierung der einzelnen Block-Matrizen, anzusteigen.

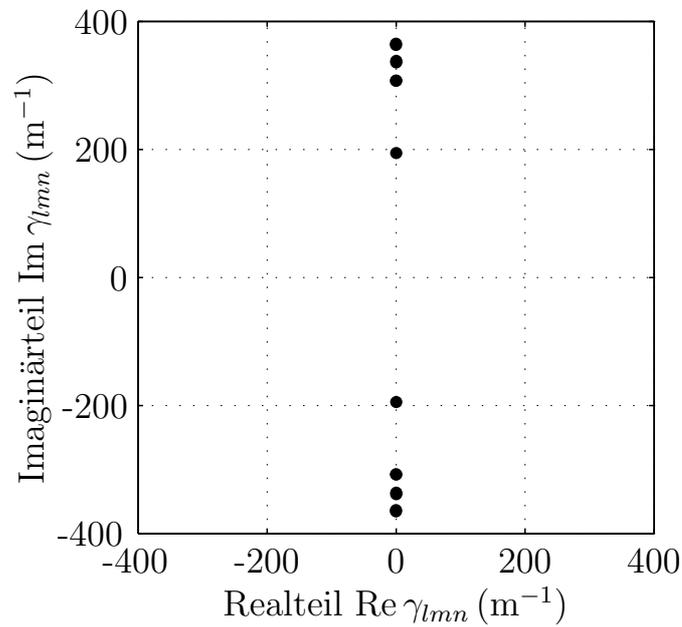


Abbildung 5.3.1: Eigenwertverteilung im verlustlosen Fall: Lage der Eigenwerte des Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte dargestellt.

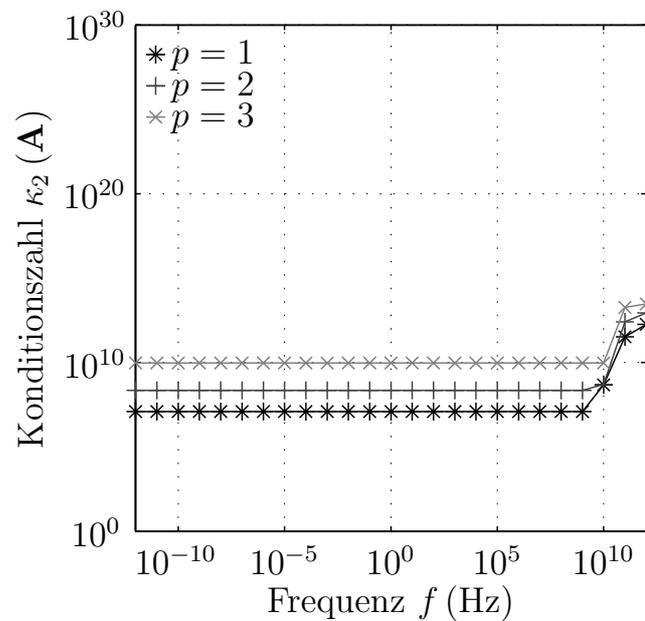


Abbildung 5.3.2: Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

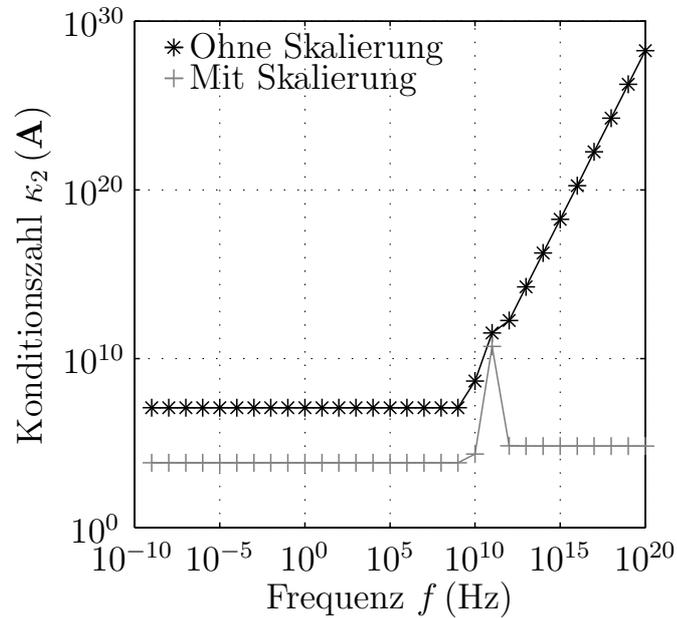


Abbildung 5.3.3: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit und ohne Skalierung.

gen. Durch eine entsprechende Frequenzskalierung kann diesem Problem im Hochfrequenzfall jedoch entgegen gewirkt werden, was in Abbildung 5.3.3 dargestellt ist. Hier verschlechtert sich die Konditionszahl zwar sobald die erste Resonanzfrequenz überschritten wird, aber sie bleibt dennoch im Wesentlichen konstant im betrachteten Frequenzbereich. Der Peak bei $f \approx 100$ GHz ist auch hier durch die Auswertung nahe an einer Eigenfrequenz des Resonators zu erklären.

5.4 Gemischte Formulierung

Als letzte Formulierung für den verlustlosen Fall wird im vorliegenden Abschnitt eine Alternative zur statischen Eichung aus Abschnitt 5.3 vorgestellt. Die explizite Vorgabe einer Eichbedingung führt auch hier dazu, dass wie im Fall der statischen Eichung aus Abschnitt 5.3 keine Reduktion der Anzahl der Unbekannten des linearen Gleichungssystems möglich ist. Im Gegensatz zu der vorherigen Formulierung kann im vorliegenden Fall jedoch auch durch einen mehrstufigen Lösungsprozess die Anzahl der Unbekannten nicht reduziert werden.

5.4.1 Eichbedingung und Randwertproblem

Ausgangspunkt sind die Differenzialgleichungen der ungeeichten Potenzialformulierung (5.7)

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) + (jk_0)^2 \epsilon_r \mathbf{A} + jk_0 \epsilon_r \nabla V = -\eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (5.126a)$$

$$jk_0 \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) = 0. \quad (5.126b)$$

Als zusätzliche Nebenbedingung zur Festlegung der Quellen von \mathbf{A} wird

$$\nabla \cdot \epsilon_r \mathbf{A} = 0 \quad (5.127)$$

vorgegeben, was identisch zu (5.87a) ist. Im Gegensatz zur statischen Eichung wird diese Bedingung jedoch nicht in (5.7b) ausgenutzt, um für das Skalarpotenzial die entsprechende Gleichung der Statik zu erhalten. Stattdessen wird (5.7b) in unveränderter Form übernommen. Für die Potentiale ergeben sich daher die partiellen Differenzialgleichungen

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) + (jk_0)^2 \epsilon_r \mathbf{A} + jk_0 \epsilon_r \nabla V = -\eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (5.128a)$$

$$jk_0 \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) = 0, \quad (5.128b)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{A}) = 0, \quad (5.128c)$$

woraus mit der Aufspaltung nach (5.67a)

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) + (jk_0)^2 (\epsilon_r \mathbf{A} + \nabla \Psi) + jk_0 \epsilon_r \nabla V = \eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (5.129a)$$

$$jk_0 \nabla \cdot [\epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] + \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) = 0, \quad (5.129b)$$

$$\nabla \cdot [\epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] = 0 \quad (5.129c)$$

folgt. Vervollständigt wird die Formulierung durch die Vorgabe geeigneter Randbedingungen auf dem Rand Γ des Feldgebietes. Die Vorgaben erfolgen hier analog zu jenen im Fall der statischen Eichung

$$\mathbf{A}_c \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (5.129d)$$

$$\Psi = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (5.129e)$$

$$V = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (5.129f)$$

auf dem Dirichlet-Rand und

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) \times \hat{\mathbf{n}} = \eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (5.129g)$$

$$[\epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (5.129h)$$

$$(\epsilon_r \nabla V) = -\eta_0 c_0 \mathbf{D}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\eta_0}{jk_0} (\nabla \times \mathbf{H}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H \quad (5.129i)$$

auf dem Neumann-Rand.

5.4.2 Schwache Formulierung

Zur Herleitung der schwachen Formulierung werden (5.129a), (5.129b) bzw. (5.129c) jeweils mit Testfunktionen $\mathbf{a}_c \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$, $\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ bzw. $V \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ multipliziert und über das Feldgebiet Ω integriert, sodass nach partieller Integration

$$S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\epsilon(\nabla V, \mathbf{a}_c) = b_{A_c}^m(\mathbf{a}_c), \quad (5.130a)$$

$$jk_0 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \nabla \psi) + T^\epsilon(\nabla V, \nabla \psi) = b_\Psi^m(\nabla \psi), \quad (5.130b)$$

$$T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \nabla v) = b_V^m(v) \quad (5.130c)$$

folgt, wobei

$$b_{A_c}^m(\mathbf{a}_c) = b_J(\mathbf{a}_c) + b_H(\mathbf{a}_c), \quad (5.131a)$$

$$b_\Psi^m(\nabla \psi) = \frac{1}{jk_0} b_H(\nabla \psi), \quad (5.131b)$$

$$b_V^m(v) = \int_{\Gamma_H} v [\epsilon_r (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (5.131c)$$

angenommen wurde. Wegen der Randbedingung (5.129h) gilt in (5.130c) jedoch

$$b_V^m(v) = 0. \quad (5.132)$$

5.4.3 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Einschränkung der Testfunktionen auf die endlich dimensionalen Räume

$$\mathbf{a}_c \in \mathcal{R}_{c,0}^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E), \quad (5.133a)$$

$$\psi \in \mathcal{V}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \quad (5.133b)$$

sowie

$$v \in \mathcal{V}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \quad (5.133c)$$

und Einsetzen der Darstellung (5.100) für die Felder \mathbf{A}_c , Ψ und V führt auf das unsymmetrische FE -Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{i,m} \mathbf{x}^{i,m} = \mathbf{b}^{i,m} \quad (5.134a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{i,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & jk_0 \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.134b)$$

$$\mathbf{x}^{i,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}, \quad (5.134c)$$

$$\mathbf{b}^{i,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c, H} + \mathbf{b}_{A_c, J} \\ \frac{1}{jk_0} \mathbf{b}_{\Psi, H} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.134d)$$

Sofern $k_0 \neq 0$ gilt, kann durch die Variablentransformation

$$\mathbf{y}_\Psi = jk_0 \mathbf{x}_\Psi \quad (5.135)$$

und Skalierung der dritten Zeile von (5.134b) mit jk_0 die symmetrische Systemmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}}^{i,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.136a)$$

für den modifizierten Vektor der Unbekannten

$$\tilde{\mathbf{x}}^{i,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{y}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} \quad (5.136b)$$

hergeleitet werden. Die rechte Seite des Gleichungssystems bleibt hierbei unverändert. Ist hingegen $k_0 = 0$, so vereinfacht sich (5.134b) zu

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \mathbf{A}^{i,m} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & jk_0 \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.137a)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\Psi V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.137b)$$

Da weiterhin die Identitäten nach (5.78) gültig sind, ist (5.137a) nach Vertauschung der zweiten und dritten Zeile identisch zur Matrix $\mathbf{A}^{i,s}$ der statischen Eichung aus (5.113b).

5.4.4 Frequenzverhalten der Systemmatrix

Die Niederfrequenzstabilität der in diesem Abschnitt behandelten Formulierung folgt direkt aus der Tatsache, dass sie im statischen Grenzfall auf das gleiche lineare Gleichungssystem wie die niederfrequenzstabile statische Eichung aus Abschnitt 5.3 führt. Unterschiede ergeben sich jedoch, sofern das dem Gleichungssystem (5.134a) zugeordnete quadratische Eigenwertproblem

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\Psi V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda_{A_c \Psi V, k}^{i, m} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + (\lambda_{A_c \Psi V, k}^{i, m})^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c, k} \\ \mathbf{x}_{\Psi, k} \\ \mathbf{x}_{V, k} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.138)$$

sowie die Eigenwerte der Matrix (5.134b)

$$\mathbf{A}^{i, m} \mathbf{x}_k^{i, m} = \mu_k^{i, m} \mathbf{x}_k^{i, m} \quad (5.139)$$

in Abhängigkeit der Wellenzahl betrachtet werden. Aus der letzten Zeile von (5.138) folgt unabhängig vom Eigenwert $\lambda_k^{i, m}$

$$\mathbf{x}_{\Psi, k} = (\mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon)^{-1} \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon \mathbf{x}_{A_c, k}. \quad (5.140)$$

Mit (5.140), den Identitäten (5.78) und der Regularität der Matrix $\mathbf{S}_{V V}^\epsilon$ folgt

$$\mathbf{x}_{V, k} = 0. \quad (5.141)$$

Aus (5.140) zusammen mit (5.141) folgt daher, dass das quadratische Eigenwertproblem (5.138) keine reinen Gradientenfelder als Eigenvektoren besitzt. Werden die beiden Zusammenhänge (5.140) und (5.141) in die verbleibende Gleichung eingesetzt, reduziert sich das ursprünglich quadratische Eigenwertproblem (5.138) - wie im Fall der statischen Eichung - auf ein verallgemeinertes lineares Eigenwertproblem der Form

$$\left(\mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (\lambda_{A_c \Psi V, k}^{i, m})^2 (\mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon - \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon (\mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon)^{-1} \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon) \right) \mathbf{x}_{A_c} = 0. \quad (5.142)$$

Da das Niederfrequenzverhalten ausschließlich durch reine Gradientenfelder negativ beeinflusst wird, wird überprüft, ob das Eigenwertproblem (5.139) reine Gradientenfelder

$$\mathbf{x}_{\Psi V, k} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{\Psi, k} \\ \mathbf{x}_{V, k} \end{bmatrix} \quad (5.143)$$

als Eigenvektoren besitzt. Mit dem vorgenannten Ansatz reduziert sich (5.139) zu

$$(jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c\Psi}^\epsilon \mathbf{x}_{\Psi,k} + jk_0 \mathbf{M}_{A_cV}^\epsilon \mathbf{x}_{V,k} = 0, \quad (5.144a)$$

$$\mathbf{S}_{\Psi V}^\epsilon \mathbf{x}_{V,k} = \mu_{A_c\Psi V,k}^{i,m} \mathbf{x}_{\Psi,k}, \quad (5.144b)$$

$$\mathbf{S}_{V\Psi}^\epsilon \mathbf{x}_{\Psi,k} = \mu_{A_c\Psi V,k}^{i,m} \mathbf{x}_{V,k}. \quad (5.144c)$$

Im Fall $k_0 > 0$ folgt aus (5.144a)

$$\mathbf{x}_{V,k} = -jk_0 \mathbf{x}_{\Psi,k} \quad (5.145)$$

und die anderen beiden Gleichungen können mit (5.78) zu

$$\left. \begin{aligned} jk_0 \mathbf{S}_{VV} \mathbf{x}_{\Psi,k} &= \mu_{A_c\Psi V,k}^{i,m} \mathbf{x}_{\Psi,k}, \\ \mathbf{S}_{VV} \mathbf{x}_{\Psi,k} &= jk_0 \mu_{A_c\Psi V,k}^{i,m} \mathbf{x}_{\Psi,k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (jk_0)^2 \mu_{A_c\Psi V,k}^{i,m} \mathbf{x}_{\Psi,k} \stackrel{!}{=} \mu_{A_c\Psi V,k}^{i,m} \mathbf{x}_{\Psi,k} \quad (5.146)$$

umgeformt werden. Die letzte Gleichung hat für reelle und positive k_0 keine Lösungen, sodass im Fall $k_0 > 0$ keine reinen Gradientenfelder als Eigenvektoren möglich sind. Anders verhält es sich im Fall $k_0 = 0$, da (5.144a) keine zusätzlich Bedingung mehr darstellt und somit (5.145) nicht mehr erfüllt sein muss. Stattdessen kann in diesem Fall

$$\mathbf{x}_{V,k} = \mathbf{x}_{\Psi,k} \quad (5.147)$$

gewählt werden, wodurch sowohl (5.144b) als auch (5.144c) zu

$$\mathbf{S}_{VV}^\epsilon \mathbf{x}_{V,k} = \mu_{A_c\Psi V,k}^{i,m} \mathbf{x}_{V,k} \quad (5.148)$$

werden. Wie im Fall der statischen Eichung existieren für

$$k_0 = 0 \quad (5.149)$$

reine Gradienten als Eigenvektoren und die ihnen zugeordneten Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der reellen, symmetrischen und positiv definiten Matrix \mathbf{S}_{VV}^ϵ und sind daher verschieden von null.

5.4.5 Numerische Ergebnisse

Ausgangspunkt der Betrachtungen dieses Abschnitts ist das verlustlose Resonatorproblem aus Abschnitt 5.1. Ein Vergleich der analytisch und numerisch berechneten Eigenwerte der ersten sieben Moden des Resonators ist für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$ in Tabelle 5.3 dargestellt. Wie hieran zu erkennen ist, werden die physikalischen Eigenwerte durch das diskretisierte System sehr gut wiedergegeben. Die zuvor gezeigte Niederfrequenzstabilität wird anhand von Abbildung 5.4.1 deutlich. Im Gegensatz zur Feldformulierung ergeben sich keine unphysikalischen Nulleigenwerte, welche das Niederfrequenzverhalten der Formulierung negativ beeinflussen.

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | $194.3518j$ | $4.6 \cdot 10^{-4}$ | $6.2 \cdot 10^{-6}$ | $1.1 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{120} | $307.2972j$ | $4.9 \cdot 10^{-4}$ | $2.0 \cdot 10^{-5}$ | $8.9 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{210} | $307.2972j$ | $2.4 \cdot 10^{-3}$ | $5.8 \cdot 10^{-5}$ | $3.3 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{011} | $338.3760j$ | $5.7 \cdot 10^{-3}$ | $8.9 \cdot 10^{-7}$ | $7.5 \cdot 10^{-8}$ |
| TM_{101} | $338.3760j$ | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $2.9 \cdot 10^{-5}$ | $1.5 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{111} | $365.2186j$ | $4.3 \cdot 10^{-3}$ | $1.5 \cdot 10^{-5}$ | $1.9 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{111} | $365.2186j$ | $3.7 \cdot 10^{-4}$ | $3.5 \cdot 10^{-5}$ | $2.1 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 5.3: Eigenwerte im verlustlosen Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

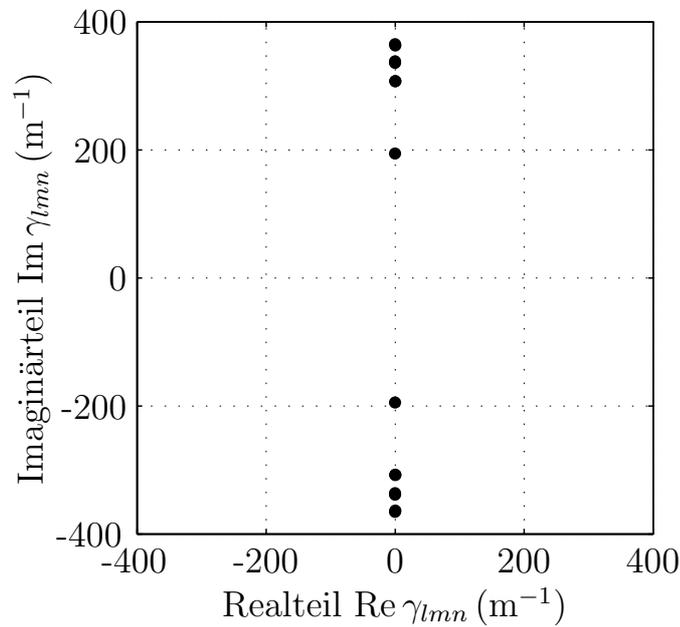


Abbildung 5.4.1: Eigenwertverteilung im verlustlosen Fall: Lage der Eigenwerte des Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte dargestellt.

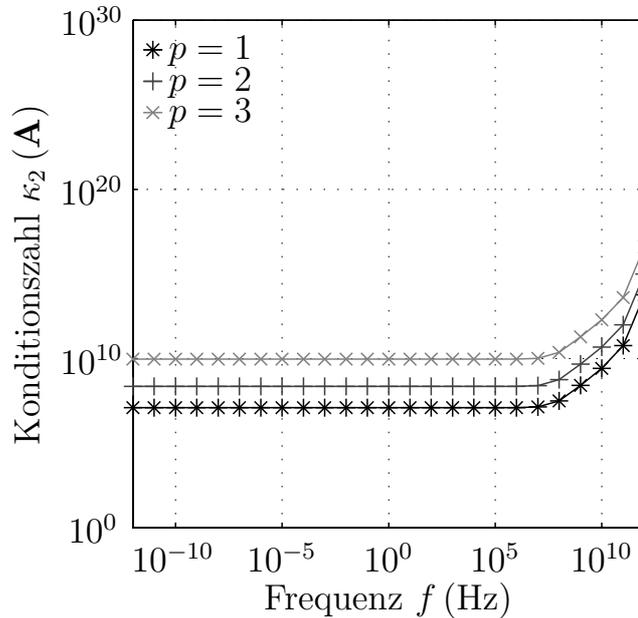


Abbildung 5.4.2: Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

Abschließend ist zur Beurteilung des Frequenzverhaltens der Formulierung in Abbildung 5.4.2 für das Resonatorproblem die Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix \mathbf{A} aus (5.134b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^\epsilon & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & jk_0 \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V \Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.150)$$

in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Erst bei hohen Frequenzen verschlechtert sich bei der betrachteten Formulierung die Konditionierung der Systemmatrix. Über den größten Teil des betrachteten Frequenzbereichs bis hinab in den statischen Grenzfall ist die Konditionszahl der Matrix jedoch annähernd konstant. Um der Verschlechterung der Konditionierung entgegen zu wirken, kann auch in diesem Fall eine Skalierung der Systemmatrix durchgeführt werden, was auf die Verläufe in Abbildung 5.4.3 führt.

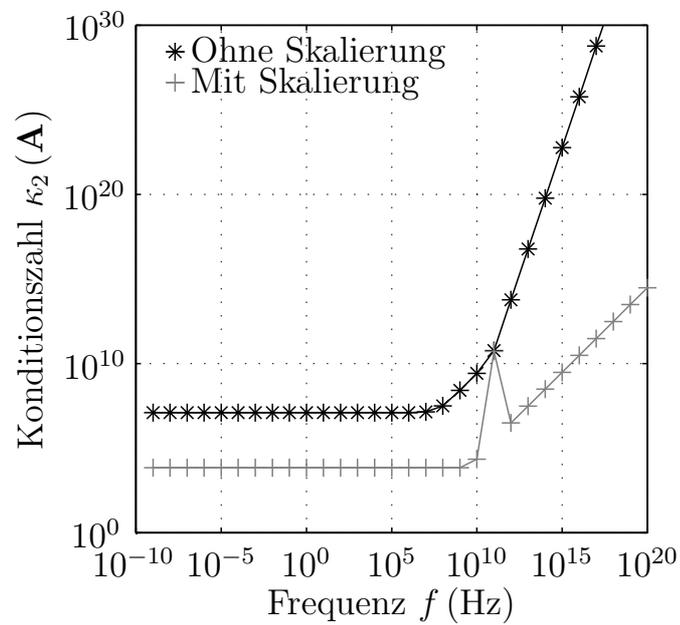


Abbildung 5.4.3: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit und ohne Skalierung.

| Polynomgrad $p=2$ | | Baum-Kobaum- Eichung | Statische Eichung | Gemischte Formulierung |
|--|-------------|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| Unbekannte | | 26814 | 32124 | 32124 |
| Nichtnulleinträge | $f = 0$ Hz | 655050 | 1070791 | 1070791 |
| | $f > 0$ Hz | 1229900 | 1645641 | 2061382 |
| Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ | $f = 0$ Hz | $2.3 \cdot 10^8$ | $2.3 \cdot 10^8$ | $2.3 \cdot 10^8$ |
| | $f = 1$ fHz | $2.3 \cdot 10^8$ | $2.3 \cdot 10^8$ | $2.3 \cdot 10^8$ |
| | $f = 1$ Hz | $2.3 \cdot 10^8$ | $2.3 \cdot 10^8$ | $2.3 \cdot 10^8$ |
| | $f = 1$ THz | $1.0 \cdot 10^{12}$ | $8.6 \cdot 10^{12}$ | $1.0 \cdot 10^{15}$ |

Tabelle 5.4: Eigenschaften der Potenzialformulierungen im verlustlosen Fall: Vergleich der Anzahl der Unbekannten, der Nichtnulleinträge in den Systemmatrizen und der Konditionszahlen der unskalierten Systemmatrizen aller drei Formulierungen für Polynomgrad $p = 2$.

5.5 Vergleich der Formulierungen

Die drei in Abschnitt 5.2, Abschnitt 5.3 und Abschnitt 5.4 vorgestellten Formulierungen beheben alle die aus der Feldformulierung bekannte Niederfrequenzinstabilität. Sie unterscheiden sich jedoch hinsichtlich der Eigenschaften der resultierenden Systemmatrizen deutlich voneinander. Wie gezeigt wurde, führt von den drei vorgestellten Formulierungen lediglich die Baum-Kobaum-Eichung aus Abschnitt 5.2 auf ein symmetrisches Gleichungssystem. Darüber hinaus hat sie den Vorteil, auf rein topologischen Betrachtungen hinsichtlich des FE -Netzes aufzubauen und kommt mit einer, im Vergleich zu den anderen vorgestellten Formulierungen, minimalen Anzahl an Unbekannten aus. Die statische Eichung kann mit geringem zusätzlichem Aufwand auf die gleiche Anzahl an Unbekannten reduziert werden und führt außerdem im statischen Grenzfall auf ein Gleichungssystem mit einer Block-Dreiecksstruktur, welche sich ähnlich effizient faktorisieren lässt wie die Block-Diagonalstruktur der Baum-Kobaum-Eichung. Weiterhin hat die statische Eichung den Vorteil, dass das Skalarpotenzial V immer als elektrostatisches Potenzial interpretierbar ist. Der Nachteil der fehlenden Symmetrie der Systemmatrix kann bei nicht verschwindender Wellenzahl $k_0 > 0$ durch eine Skalierung überwunden werden. Die zuletzt in Abschnitt 5.4 betrachtete gemischte Formulierung bringt die gleichen Nachteile wie die statische Eichung im Hinblick auf die Symmetrie der Systemmatrix und die Anzahl der Unbekannten mit sich. Während auch bei der gemischten Formulierung im Fall $k_0 > 0$ durch eine Skalierung die Symmetrie wieder hergestellt werden kann, so ist es nicht möglich die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren.

Einige wichtige Parameter der linearen Gleichungssysteme der verschiedenen Formulierungen sind in Tabelle 5.4 zusammengestellt. Insbesondere im Hinblick auf die Anzahl der Unbekannten sowie der Nichtnulleinträge in den Systemmatrizen zeigen sich hier deutliche Unterschiede zwischen den Formulierungen. Wie bereits erwähnt,

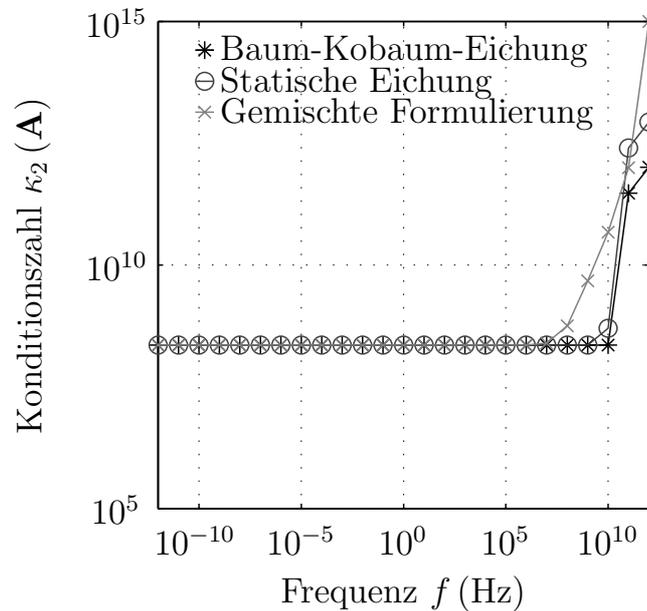


Abbildung 5.5.1: Vergleich der Konditionszahlen der Systemmatrizen im verlustlosen Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrizen für das Resonatorproblem und Polynomgrad $p = 2$ in Abhängigkeit der Frequenz.

stellt die höhere Anzahl an Unbekannten bei der statischen Eichung im Vergleich zur Baum-Kobaum-Eichung keinen Nachteil dar, da ein zweistufiger Lösungsprozess, wie am Ende von Abschnitt 5.3.3 beschrieben, möglich ist. Im Fall der Baum-Kobaum-Eichung wurde bei der Anzahl der Nichtnulleinträge in der Systemmatrix die Symmetrie der Systemmatrix nicht berücksichtigt. Auch bei den Nichtnulleinträgen der anderen Formulierungen wurde nicht berücksichtigt, dass bei geeigneter Skalierung für $k_0 > 0$ ein symmetrisches Gleichungssystem erreicht werden kann.

Ein Vergleich der Konditionszahl der Systemmatrizen für das verlustlose Resonatorproblem aus Abbildung 5.1.2 in Abhängigkeit der Frequenz f ist in Abbildung 5.5.1 für Polynomgrad $p = 2$ dargestellt. Hier zeigt sich, dass das Verhalten der drei vorgestellten Formulierungen über einen weiten Frequenzbereich annähernd identisch ist. Erst bei höheren Frequenzen zeigen sich leichte Vorteile bei der Baum-Kobaum-Eichung und der statischen Eichung im Vergleich zur gemischten Formulierung. Wird eine Diagonalskalierung der Systemmatrizen durchgeführt, um der Verschlechterung der Konditionszahl bei höheren Frequenzen entgegen zu wirken, ergeben sich die Verläufe aus Abbildung 5.5.2. Im Hinblick auf den Absolutwert der Konditionszahl liegt die gemischte Formulierung in diesem Fall etwas besser als die Baum-Kobaum-Eichung, jedoch zeigen beide Formulierungen in etwa das gleiche asymptotische Verhalten. Im Gegensatz dazu bleibt bei der statischen Eichung die Konditionszahl auch bei sehr hohen Frequenzen annähernd konstant.

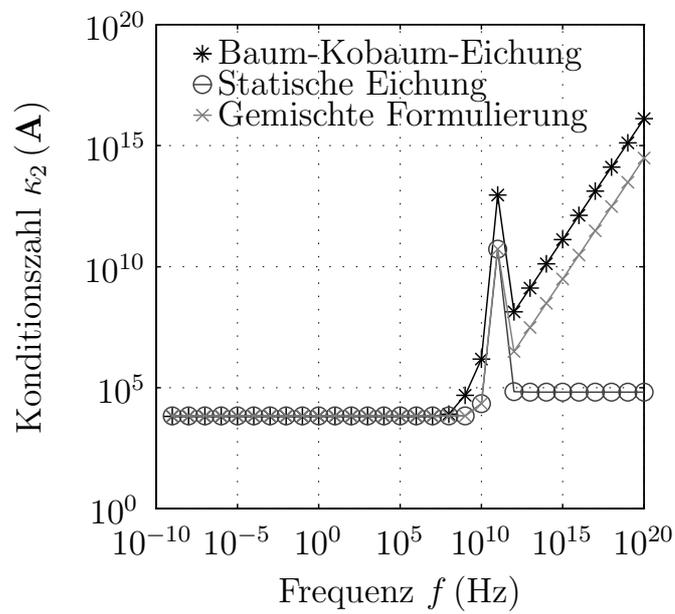


Abbildung 5.5.2: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrizen im verlustlosen Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit Diagonalskalierung.

Kapitel 6

Potenzialformulierung - Verlustbehafteter Fall

Da die in Kapitel 5 vorgestellten Potenzialformulierungen ausschließlich für den verlustlosen Fall die Niederfrequenzinstabilität der Feldformulierung beseitigen, wird im vorliegenden Kapitel der verlustbehaftete Fall behandelt. Wie im vorigen Kapitel erfolgen in Abschnitt 6.1 zunächst einige allgemeine Annahmen hinsichtlich der betrachteten Probleme. Im Anschluss werden in Abschnitt 6.2, 6.3 und 6.4 geeignete Formulierungen zur Behebung der Niederfrequenzinstabilität im verlustbehafteten Fall vorgestellt. Abschließend erfolgt in Abschnitt 6.5 ein Vergleich der unterschiedlichen Potenzialformulierungen.

6.1 Allgemein

Im vorliegenden Kapitel wird davon ausgegangen, dass alle untersuchten Strukturen vollständig verlustbehaftet sind. Den Betrachtungen wird daher ein Feldgebiet Ω wie in Abbildung 6.1.1 zugrunde gelegt. Dieses entspricht jenem aus Abbildung 4.2.1, und auch die weiteren Annahmen, die getroffen werden, sollen jenen der elektrischen Feldformulierung im verlustbehafteten Fall entsprechen. Im Einzelnen bedeutet dies:

- $\kappa > 0$ in Ω ,
- $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H$, $\Gamma_E \cap \Gamma_H = \emptyset$ und $\Gamma_E \neq \emptyset$,
- sowie $\nabla \cdot \mathbf{J}_p = 0$ in Ω , $\mathbf{J}_p \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ auf Γ_E .

Im Gegensatz zum verlustlosen Fall ist am Neumann-Rand eine Normalkomponente der eingepprägten Stromdichte somit erlaubt. Sofern sich Leitfähigkeits- und Permittivitätstensor κ und ϵ nur um einen konstanten Faktor $0 < c \in \mathbb{R}$ unterscheiden,

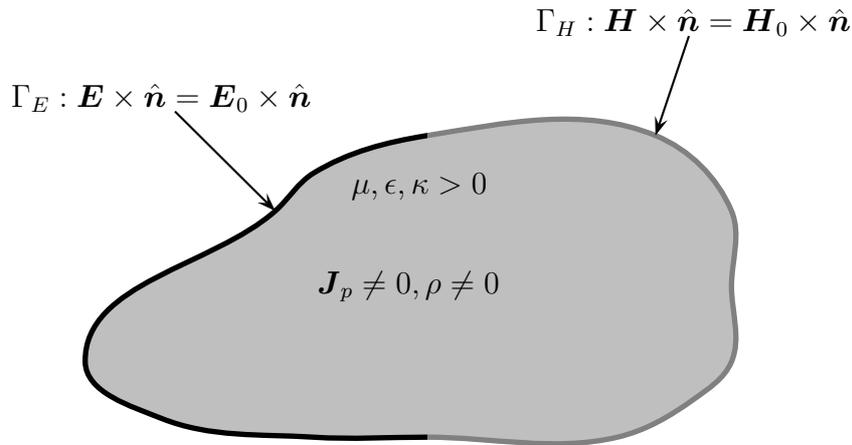
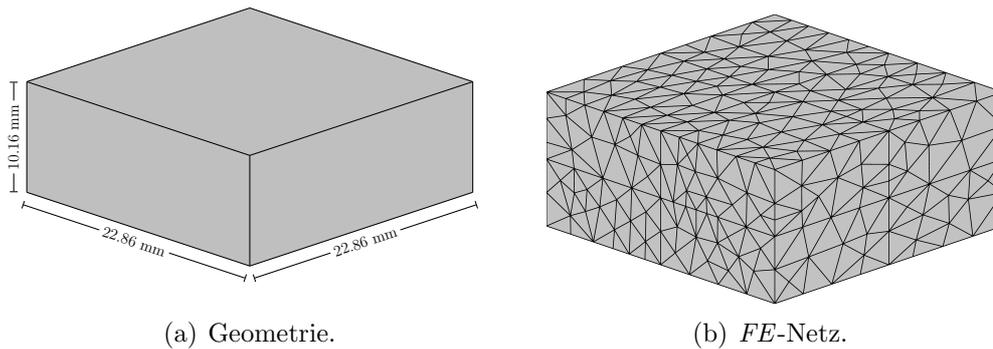


Abbildung 6.1.1: Verlustbehaftetes Randwertproblem.



(a) Geometrie.

(b) *FE*-Netz.

Abbildung 6.1.2: Verlustbehaftetes Randwertproblem zum Testen der Formulierungen. Die zugrunde liegende Geometrie und das *FE*-Netz sind dargestellt. Für die Materialparameter gilt $\mu = \mu_0$, $\epsilon = 2\epsilon_0$, $\kappa = 1$ (Ωm)⁻¹.

das heißt falls

$$\kappa = c\epsilon \tag{6.1}$$

gilt, folgt aus der Quellenfreiheit der Ströme wiederum das Verschwinden der Raumladungsdichte ρ , sodass in diesem Fall $\rho = 0$ im Feldgebiet Ω gilt. Liegt keine solche Beziehung zwischen den Materialtensoren vor, so kann es trotz der Quellenfreiheit der Ströme zur Ausprägung einer nicht verschwindenden Raumladung kommen. Allerdings handelt es sich in diesem Fall nicht um eine eingeprägte Raumladungsdichte, sondern um eine Folge der fließenden Ströme. Als Modellproblem zur Bestimmung der numerischen Ergebnisse wird für alle im Folgenden vorgestellten Formulierungen das verlustbehaftete Randwertproblem aus Abbildung 6.1.2 betrachtet. Im Hinblick auf die Geometrie und das *FE*-Netz entspricht Abbildung 6.1.2 dem bereits im verlustlosen Fall betrachteten Resonator nach Abbildung 5.1.2. Im Unterschied hierzu

wird für die Materialparameter jedoch

$$\mu = \mu_0, \quad (6.2)$$

$$\epsilon = 2\epsilon_0, \quad (6.3)$$

$$\kappa = 1 \frac{1}{\Omega_m} \quad (6.4)$$

angenommen. Als Randbedingung wird vorausgesetzt, dass die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf der gesamten Oberfläche verschwindet, was

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (6.5)$$

entspricht.

6.2 Ungeeichte Formulierung und Baum-Kobaum-Eichung

Wie im verlustfreien Fall, ist die ungeeichte Potenzialformulierung der Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen, bevor in den folgenden Abschnitten 6.3 und 6.4 auf entsprechende Eichungen eingegangen wird. Mit der Betrachtung der ungeeichten Formulierung wird dargelegt, wie sich die Eigenschaften der Potenzialformulierung von jenen der Feldformulierung unterscheiden und wie sich die Niederfrequenzinstabilität der Feldformulierung im Rahmen der Potenzialformulierung ausdrückt.

6.2.1 Randwertproblem und schwache Formulierung

Auch im verlustbehafteten Fall wird für die ungeeichte Formulierung unverändert von der Darstellung der Felder nach (2.28)

$$\mathbf{E} = -\nabla V - jk_0 \mathbf{A}, \quad (6.6a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.6b)$$

ausgegangen, wodurch (2.11a) und (2.11d) per Konstruktion erfüllt sind. Einsetzen von (2.28) und (2.11c) zusammen mit den Konstitutivgleichungen (2.14) in den Durchflutungssatz nach (2.11b) und die Kontinuitätsgleichung (2.11e) führt auf

$$\frac{1}{c_0} \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + (\kappa + j\omega\epsilon) (\nabla V + jk_0 \mathbf{A}) = \mathbf{J}_p, \quad (6.7a)$$

$$\nabla \cdot [(\kappa + j\omega\epsilon) (\nabla V + jk_0 \mathbf{A})] = 0. \quad (6.7b)$$

Die zunächst unbekannte und ursprünglich in der Kontinuitätsgleichung nach (2.11e) noch auftretende Raumladungsdichte ρ kann im Anschluss an die Bestimmung der Potentiale aus der elektrischen Flussbilanz (2.11c) rekonstruiert werden. Wird (6.7)

unter Verwendung der Freiraumwellenzahl k_0 sowie der relativen Materialtensoren umformuliert und weiterhin die Randbedingungen durch die Potenziale ausgedrückt, so lauten die Differenzialgleichungen zur Bestimmung der Potenziale

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) + (\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\nabla V + j k_0 \mathbf{A}) = \eta_0 \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (6.8a)$$

$$\nabla \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\nabla V + j k_0 \mathbf{A})] = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.8b)$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (6.8c)$$

$$V = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (6.8d)$$

sowie den Neumann-Randbedingungen

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}} = \eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (6.8e)$$

$$\begin{aligned} [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\nabla V + j k_0 \mathbf{A})] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= -(\eta_0 \mathbf{J}_0 + j k_0 \mathbf{D}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= -\eta_0 (\nabla \times \mathbf{H}_0 - \mathbf{J}_p) \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (6.8f)$$

Für die schwache Formulierung werden (6.8a) und (6.8b) mit Testfunktionen $\mathbf{a} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ respektive $v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ multipliziert und über das Feldgebiet Ω integriert, sodass sich nach anschließender partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{a} \cdot (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\nabla V + j k_0 \mathbf{A})] \, d\Omega \\ = \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega + \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (6.9a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\nabla V + j k_0 \mathbf{A})] \, d\Omega \\ = \eta_0 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{J}_p \, d\Omega + \eta_0 \int_{\Gamma_H} \nabla v \cdot (\mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (6.9b)$$

ergibt. Unter Verwendung der zuvor eingeführten Linear- und Bilinearformen folgt die alternative Darstellung

$$S^\nu(\mathbf{A}, \mathbf{a}) + T^\kappa(\nabla V + j k_0 \mathbf{A}, \mathbf{a}) + j k_0 T^\epsilon(\nabla V + j k_0 \mathbf{A}, \mathbf{a}) = b_{JH}(\mathbf{a}), \quad (6.10a)$$

$$T^\kappa(\nabla V + j k_0 \mathbf{A}, \nabla v) + j k_0 T^\epsilon(\nabla V + j k_0 \mathbf{A}, \nabla v) = b_{JH}(\nabla v), \quad (6.10b)$$

wobei zusätzlich

$$b_{JH}(\mathbf{v}) = b_J(\mathbf{v}) + b_H(\mathbf{v}) \quad (6.11)$$

angenommen wurde. Analog zum Vorgehen in (5.19) ist eine Darstellung der rechten Seite von (6.10b) mit Hilfe der Stromdichte \mathbf{J} und der elektrischen Flussdichte \mathbf{D} anstelle der magnetischen Erregung \mathbf{H} möglich, worauf im Weiteren jedoch verzichtet wird. Testen von (6.10a) mit reinen Gradientenfelder

$$\nabla a \in \nabla \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \quad (6.12)$$

zeigt, dass (6.10a) und (6.10b) für beliebige Frequenzen beziehungsweise Wellenzahlen linear abhängig sind. Dies spiegelt sich in Abschnitt 6.2.2 in der Tatsache wieder, dass eine Diskretisierung dieser Gleichung auf eine singuläre Systemmatrix führt.

6.2.2 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Um eine Näherungslösung für (6.10) zu bestimmen, werden die Testfunktionen \mathbf{a} und v auf die endlich dimensionalen Teilräume $\mathcal{W}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ und $\mathcal{V}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ eingeschränkt und für die Potenziale die Ansätze nach (5.20)

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{W}_0}} x_{A,k} \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{a}_k \in \mathcal{W}_0^{h,p}, \quad (6.13a)$$

$$V = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} x_{V,k} v_k, \quad v_k \in \mathcal{V}_0^{h,p} \quad (6.13b)$$

gewählt. Insgesamt folgt hiermit das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{c,u} \mathbf{x}^{c,u} = \mathbf{b}^{c,u} \quad (6.14a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{c,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{M}_{AV}^\kappa + jk_0 \mathbf{M}_{AV}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{VA}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{VA}^\epsilon & \mathbf{S}_{VV}^\kappa + jk_0 \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix}, \quad (6.14b)$$

$$\mathbf{x}^{c,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}, \quad (6.14c)$$

$$\mathbf{b}^{c,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A,J} + \mathbf{b}_{A,H} \\ \mathbf{b}_{V,J} + \mathbf{b}_{V,H} \end{bmatrix}, \quad (6.14d)$$

wobei die Definitionen der einzelnen Teilmatrizen jenen der elektrischen Feldformulierung beziehungsweise der Potenzialformulierung im verlustfreien Fall entsprechen, und die Matrizen

$$\mathbf{T}_{AA}^\kappa = \mathbf{T}_{EE}^\kappa, \quad (6.15a)$$

$$\mathbf{M}_{AV}^\kappa = (\mathbf{M}_{VA}^\kappa)^T = \mathbf{T}_{AA}^\kappa \mathbf{G} = \mathbf{T}_{EE}^\kappa \mathbf{G}, \quad (6.15b)$$

$$\mathbf{S}_{VV}^\kappa = \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{AA}^\kappa \mathbf{G} = \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\kappa \mathbf{G} \quad (6.15c)$$

zusätzlich neu eingeführt werden. Der obere Index c, u soll andeuten, dass es sich um den verlustbehafteten Fall (c engl. für *conductor*) und die ungeeichte Formulierung (u engl. für *ungauged*) handelt. Insbesondere ergibt sich aus der Struktur der Matrix $\mathbf{A}^{c,u}$, dass aufgrund der diskreten (exakten) Sequenzeigenschaft (3.3) die zweite Zeile der Matrix linear abhängig von der ersten ist. Ist das Gleichungssystem jedoch konsistent, das heißt falls die rechte Seite im Bildraum der Systemmatrix liegt, so kann auch in diesem Fall eine iterative Lösung des Gleichungssystems erfolgen. Eine direkte Lösung mit Hilfe einer Matrixfaktorisierung ist jedoch nicht möglich. Genauere Betrachtungen zur Eigenwertstruktur der Systemmatrix und zum Niederfrequenzverhalten der ungeeichten Formulierung werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

6.2.3 Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten

Für die folgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass der Dirichlet-Rand Γ_E des betrachteten Feldgebietes Ω einfach zusammenhängend ist, und dass das Feldgebiet darüber hinaus topologisch einfach ist. Infolgedessen ist die erste Kohomologiegruppe $H^1(\Omega, \Gamma_E)$ trivial, und es gilt

$$\beta_1 = \dim H^1(\Omega, \Gamma_E) = 0. \quad (6.16)$$

Der Nullraum der Rotation wird daher ausschließlich durch reine Gradientenfelder gebildet. Das der Matrix $\mathbf{A}^{c,u}$ zugeordnete quadratische Eigenwertproblem lautet

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{M}_{AV}^\kappa \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\kappa \end{bmatrix} + \lambda_k^{c,u} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AA}^\kappa & \mathbf{M}_{AV}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{VA}^\kappa & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix} + (\lambda_k^{c,u})^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AA}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{VA}^\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A,k} \\ \mathbf{x}_{V,k} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.17)$$

Wie in Abschnitt 4.2.4 erwähnt sind allgemeine Aussagen über die Eigenwerte nur bedingt möglich. Aus diesem Grund soll im Folgenden überprüft werden, ob (6.17) Nulleigenwerte besitzt. Mit der Annahme $\lambda_k^{c,u} = 0$ vereinfacht sich (6.17) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{M}_{AV}^\kappa \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A,k} \\ \mathbf{x}_{V,k} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.18)$$

Da \mathbf{S}_{VV}^κ reell, symmetrisch und positiv definit und infolgedessen regulär ist, muss

$$\mathbf{x}_{V,k} = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

gelten. Im Gegensatz dazu ist \mathbf{S}_{AA}^ν nur reell, symmetrisch und positiv semidefinit mit einem nichttrivialen Nullraum bestehend aus reinen Gradientenfeldern der Form

$$\mathbf{x}_{A,k} = \mathbf{G}\mathbf{x}_{\Psi,k}. \quad (6.20)$$

Die zu den Nulleigenwerten gehörenden Eigenvektoren von (6.17) können daher als Linearkombinationen der Spalten der Matrix

$$\mathbf{X}_{G,0}^{u,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

dargestellt werden. Da ausschließlich die reinen Gradientenfelder im Hinblick auf die Niederfrequenzeigenschaften problematisch sind, soll weiterhin für $\lambda_k^{c,u} \neq 0$ überprüft werden, ob (6.17) Lösungen der Form

$$\mathbf{x}_k^{c,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x}_{\Psi,k} \\ \mathbf{x}_{V,k} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

gestattet. Mit diesem Ansatz reduziert sich (6.17) auf die beiden Gleichungen

$$(\mathbf{M}_{AV}^\kappa + \lambda_k^{c,u} \mathbf{M}_{AV}^c) (\lambda_k^{c,u} \mathbf{x}_{\Psi,k} + \mathbf{x}_{V,k}) = 0, \quad (6.23a)$$

$$(\mathbf{S}_{VV}^\kappa + \lambda_k^{c,u} \mathbf{S}_{VV}^c) (\lambda_k^{c,u} \mathbf{x}_{\Psi,k} + \mathbf{x}_{V,k}) = 0, \quad (6.23b)$$

welche beide durch die Wahl

$$\mathbf{x}_{V,k} = -\lambda_k^{c,u} \mathbf{x}_{\Psi,k} \quad (6.24)$$

für beliebiges $\lambda_k^{c,u}$ erfüllt sind. Zu jedem beliebigen λ existiert daher für das Eigenwertproblem (6.17) ein Raum von reinen Gradientenfeldern als Eigenvektoren, welcher durch die Spalten der Matrix

$$\mathbf{X}_{G,\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ -\lambda \mathbf{I}_{N_{V_0}} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

aufgespannt wird. Diese Eigenschaft ist für beliebige Wellenzahlen gegeben und ändert sich - im Gegensatz zur elektrischen Feldformulierung - nicht beim Übergang zum stationären Grenzfall. Wie anhand von (6.18) zu sehen ist, gilt für die Matrix (6.14b) im stationären Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$:

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \mathbf{A}^{c,u} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^c & \mathbf{M}_{AV}^\kappa + jk_0 \mathbf{M}_{AV}^c \\ jk_0 \mathbf{M}_{VA}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{VA}^c & \mathbf{S}_{VV}^\kappa + jk_0 \mathbf{S}_{VV}^c \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{M}_{AV}^\kappa \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\kappa \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Der linke obere Diagonalblock entspricht wie im verlustlosen Fall der Matrix, welche sich im Fall stationärer Magnetfelder für die ungeeichte Potenzialformulierung ergibt [ZC06, S. 74ff]. Der rechte untere Diagonalblock entspricht einer diskretisierten Form der Laplace-Gleichung, welche im Fall stationärer Ströme erfüllt sein muss. Der Nebendiagonal-Block spiegelt die Tatsache wieder, dass die elektrischen und magnetischen Felder im verlustbehafteten Fall auch im stationären Grenzfall nicht vollständig voneinander entkoppelt sind, da das stationäre elektrische Strömungsfeld hierbei immer noch als Anregung für ein stationäres Magnetfeld dient.

6.2.4 Baum-Kobaum-Eichung

Die im vorigen Abschnitt angesprochene Singularität des FE -Gleichungssystems kann analog zum verlustlosen Fall mit Hilfe einer Baum-Kobaum-Eichung der ursprünglich ungeeichten Formulierung beseitigt werden. Hierzu wird wiederum eine Aufspaltung des magnetischen Vektorpotenzials \mathbf{A} in reine Gradientenfelder $\nabla\Psi$ und Felder mit nicht verschwindender Zirkulation \mathbf{A}_c wie in (5.67a) durchgeführt

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_c + \nabla\Psi. \quad (6.28)$$

Im Diskreten entspricht dies einer Darstellung des Koeffizientenvektors \mathbf{x}_A des magnetischen Vektorpotenzials wie in (5.76):

$$\mathbf{x}_A = [\mathbf{C} \quad \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_\Psi \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Weiterhin werden auch die Testfunktionen entsprechend gewählt und in Felder mit nicht verschwindender Zirkulation und reine Gradientenfelder aufgeteilt. Die Baum-Kobaum-Eichung entspricht dann der Forderung $\mathbf{x}_\Psi = \mathbf{0}$, sodass sich das reduzierte Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{c,tc} \mathbf{x}^{c,tc} = \mathbf{b}^{c,tc} \quad (6.30a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{c,tc} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & \mathbf{M}_{A_c V}^\kappa + jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V V}^\kappa + jk_0 \mathbf{S}_{V V}^\epsilon \end{bmatrix}, \quad (6.30b)$$

$$\mathbf{x}^{c,tc} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}, \quad (6.30c)$$

$$\mathbf{b}^{c,tc} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{A_c, H} - \mathbf{b}_{A_c, J} \\ -\mathbf{b}_{V, H} \end{bmatrix} \quad (6.30d)$$

sowie den Teilmatrizen

$$\mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu = \mathbf{C}^T \mathbf{S}_{EE}^\nu \mathbf{C}, \quad (6.31a)$$

$$\mathbf{T}_{A_c A_c}^\kappa = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_{EE}^\kappa, \quad (6.31b)$$

$$\mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{C}, \quad (6.31c)$$

$$\mathbf{M}_{A_c V}^\kappa = (\mathbf{M}_{V A_c}^\kappa)^T = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_{EE}^\kappa \mathbf{G}, \quad (6.31d)$$

$$\mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon = (\mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon)^T = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{G}, \quad (6.31e)$$

$$\mathbf{S}_{V V}^\kappa = \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\kappa \mathbf{G}, \quad (6.31f)$$

$$\mathbf{S}_{V V}^\epsilon = \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{EE}^\epsilon \mathbf{G} \quad (6.31g)$$

ergibt. Für nicht verschwindende Wellenzahlen $k_0 > 0$ ist die Systemmatrix dieses Gleichungssystems regulär, und auch im Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ bleibt eine direkte Lösung

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | $-94.1826 + 100.0798j$ | $6.3 \cdot 10^{-4}$ | $8.6 \cdot 10^{-6}$ | $1.5 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{120} | $-94.1826 + 195.8199j$ | $2.7 \cdot 10^{-3}$ | $6.4 \cdot 10^{-5}$ | $3.6 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{210} | $-94.1826 + 195.8199j$ | $5.4 \cdot 10^{-4}$ | $2.2 \cdot 10^{-5}$ | $9.8 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{011} | $-94.1826 + 219.9518j$ | $6.2 \cdot 10^{-3}$ | $9.6 \cdot 10^{-7}$ | $8.2 \cdot 10^{-8}$ |
| TM_{101} | $-94.1826 + 219.9518j$ | $4.4 \cdot 10^{-4}$ | $3.2 \cdot 10^{-5}$ | $1.6 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{111} | $-94.1826 + 240.4620j$ | $4.7 \cdot 10^{-3}$ | $3.8 \cdot 10^{-5}$ | $2.3 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{111} | $-94.1826 + 240.4620j$ | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $1.6 \cdot 10^{-5}$ | $2.0 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 6.1: Eigenwerte im verlustbehafteten Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

weiterhin möglich, da sich für (6.30b) eine obere (2×2) -Block-Dreieckstruktur der Form

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \mathbf{A}^{c,tc} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AcAc}^\nu & \mathbf{M}_{AcV}^\kappa \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\kappa \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

ergibt. Dabei sind die beiden Diagonalblöcke reell, symmetrisch und positiv definit. Vorteilhaft an der Baum-Kobaum-Eichung ist - wie im verlustlosen Fall - die Tatsache, dass die Anzahl der Unbekannten im Vergleich zur ungeeichten Formulierung um die Anzahl der freien Knoten beziehungsweise Baumkanten reduziert ist. Im Gegensatz zum verlustlosen Fall ergibt sich im verlustbehafteten Fall durch die Baum-Kobaum-Eichung jedoch keine symmetrische Systemmatrix.

6.2.5 Numerische Ergebnisse

Wie auch im verlustlosen Fall beziehen sich die vorgestellten numerischen Ergebnisse dieses Abschnitts auf die Baum-Kobaum-Eichung und das Randwertproblem aus Abschnitt 6.1. In Tabelle 6.1 sind die analytisch berechneten Eigenwerte der ersten sieben Moden des verlustbehafteten Resonators sowie die relativen Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für die Polynomgrade $p = 1, 2, 3$ dargestellt. Wie im verlustlosen Fall werden auch hier die Eigenwerte sehr gut wiedergegeben. Im Gegensatz zum verlustlosen Fall ergeben sich jedoch auch in der geeichten Potenzialformulierung, die in Abschnitt 4.2.4 insbesondere in (4.103b) angesprochenen, unphysikalischen Eigenwerte, welche nicht Null sind. Dieser Umstand ist in Abbildung 6.2.1 zu erkennen. Im Vergleich zu Abbildung 4.2.3 zeigt sich jedoch, dass die unphysikalischen Nulleigenwerte, welche die Niederfrequenzinstabilität hervorrufen nicht mehr vorhanden sind.

Zur weiteren Beurteilung des Niederfrequenzverhaltens ist in Abbildung 6.2.2 die

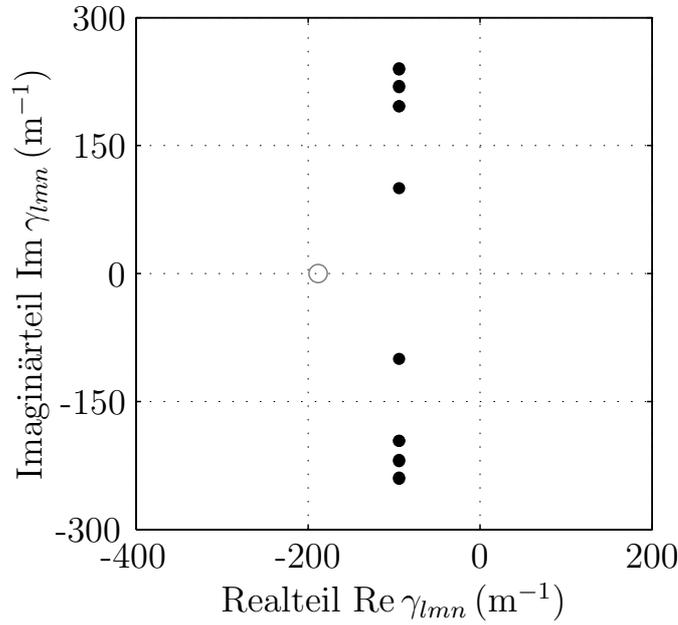


Abbildung 6.2.1: Eigenwertverteilung im verlustbehafteten Fall: Lage der Eigenwerte des Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte und unphysikalische Eigenwerte als graue Kreise dargestellt.

Frequenzabhängigkeit der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & \mathbf{M}_{A_c V}^\kappa + jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{V A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{V V}^\kappa + jk_0 \mathbf{S}_{V V}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

dargestellt. Im Gegensatz zur elektrischen Feldformulierung im verlustbehafteten Fall ist die Konditionszahl der Systemmatrix bis in den stationären Grenzfall hinab endlich und über weite Teile des betrachteten Frequenzbereichs annähernd konstant. Der Anstieg der Konditionszahl bei hohen Frequenzen ist - wie im verlustlosen Fall - auf die unterschiedliche Frequenzskalierung der Anteile des Vektorpotenzials \mathbf{A}_c und des Skalarpotenzials V zurückzuführen. Wie in Abbildung 6.2.3 dargestellt, führt eine einfache Diagonalskalierung der Systemmatrix zu einer leichten Verbesserung der Konditionierung, jedoch ändert sich das asymptotische Verhalten nicht. In abgeschwächter Form ist auch hier der Peak bei $f \approx 100$ GHz zu erkennen, der aus der Auswertung nahe bei einer Eigenfrequenz des Resonators herrührt.

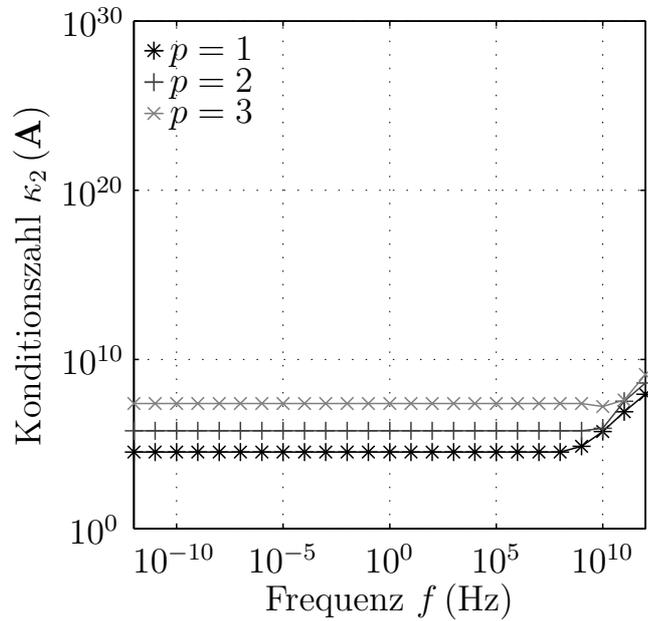


Abbildung 6.2.2: Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

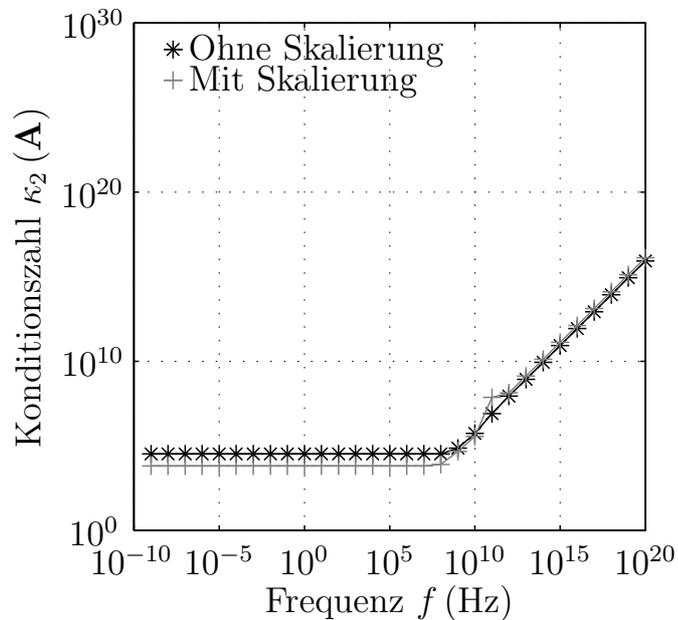


Abbildung 6.2.3: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit und ohne Skalierung.

6.3 Stationäre Eichung

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, ist grundsätzlich auch im verlustbehafteten Fall eine Baum-Kobaum-Eichung möglich, welche auf rein topologischen Betrachtungen des FE -Netzes basiert und zu einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten des Gleichungssystems führt. Im Folgenden werden zwei mögliche alternative Eichungen vorgestellt, welche die Quellen des Vektorpotenzials explizit vorgeben und dadurch auf ein reguläres Gleichungssystem führen. In diesem Abschnitt wird eine zur statischen Eichung aus Abschnitt 5.3 analoge Eichung vorgestellt. Dem betrachteten Randwertproblem liegen wiederum die Annahmen aus Abschnitt 6.1 zugrunde.

6.3.1 Eichbedingung und Randwertproblem

Wie in Abschnitt 6.2 gezeigt wurde, folgt, aufgrund der Eichinvarianz der Felder, ausgehend von den Gleichungen der ungeeichten Formulierung nach (??)

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}) + (\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\nabla V + j k_0 \mathbf{A}) = \eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (6.34a)$$

$$\nabla \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\nabla V + j k_0 \mathbf{A})] = 0 \quad (6.34b)$$

im diskreten Fall kein reguläres Gleichungssystem. Eine direkte Lösung ist somit nicht möglich und das resultierende Gleichungssystem kann bestenfalls iterativ gelöst werden. Im Gegensatz zu (5.6) aus Kapitel 5.2 ist (6.7) jedoch auch im Fall $k_0 \rightarrow 0$ nicht vollständig entkoppelt, sondern aufgrund der zusätzlichen frequenzunabhängigen Kopplung über die elektrische Leitfähigkeit bis in den stationären Grenzfall hinab linear abhängig. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, wird (6.34b) in zwei voneinander unabhängige Gleichungen in der Form

$$\nabla \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) \mathbf{A}] = 0, \quad (6.35a)$$

$$\nabla \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) \nabla V] = 0 \quad (6.35b)$$

aufgeteilt. Erstere kann hierbei wiederum als eine verallgemeinerte Coulomb-Eichung interpretiert werden und letztere folgt durch Einsetzen von (6.35a) in die ursprüngliche Kontinuitätsgleichung (6.34b). Im Gegensatz zur vergleichbaren statischen Eichung aus Abschnitt 5.3 ist die Eichung (6.35) nicht wellenzahlunabhängig. Sie wird im Weiteren dennoch als stationäre Eichung bezeichnet, da sich für (6.35b) im stationären Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$

$$\nabla \cdot (\eta_0 \kappa \nabla V) = 0 \quad (6.36)$$

ergibt, was der verallgemeinerten Laplace-Gleichung entspricht, der stationäre Strömungsfelder in leitfähigen Gebieten genügen müssen. Zusammen mit der Aufspaltung (5.67a)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \quad (6.37)$$

wobei wiederum

$$\nabla \times \mathbf{A}_c \neq \mathbf{0} \quad (6.38)$$

vorausgesetzt wird, lautet das vollständige Randwertproblem zur Bestimmung der Potentiale innerhalb des Feldgebiets Ω

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) + (\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) [\nabla V + j k_0 (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] = \eta_0 \mathbf{J}_p, \quad (6.39a)$$

$$\nabla \cdot \{(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) [\nabla V + j k_0 (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)]\} = 0, \quad (6.39b)$$

$$\nabla \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) \nabla V] = 0, \quad (6.39c)$$

zusammen mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$\mathbf{A}_c \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (6.39d)$$

$$\Psi = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (6.39e)$$

$$V = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (6.39f)$$

und den Neumann-Randbedingungen

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) \times \hat{\mathbf{n}} = -\eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (6.39g)$$

$$[(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (6.39h)$$

$$\begin{aligned} [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) \nabla V] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= -\eta_0 (\nabla \times \mathbf{H}_0 - \mathbf{J}_p) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\ &= -(\eta_0 \mathbf{J}_0 + j k_0 \mathbf{D}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (6.39i)$$

6.3.2 Schwache Formulierung

Multiplikation von (6.39a), (6.39b) und (6.39c) mit Testfunktionen \mathbf{a}_c , ψ und v , wobei

$$\mathbf{a}_c \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E), \quad (6.40a)$$

$$\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E), \quad (6.40b)$$

$$v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E) \quad (6.40c)$$

gilt, Integration über das Feldgebiet Ω und anschließende partielle Integration führt auf die schwache Formulierung

$$\begin{aligned} S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + j k_0 T^\kappa(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \mathbf{a}_c) + (j k_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \mathbf{a}_c) \\ + T^\kappa(\nabla V, \mathbf{a}_c) + j k_0 T^\epsilon(\nabla V, \mathbf{a}) = b_A(\mathbf{a}_c) \end{aligned} \quad (6.41a)$$

$$T^\kappa(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \nabla \psi) + j k_0 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \nabla \psi) = 0, \quad (6.41b)$$

$$T^\kappa(\nabla V, \nabla v) + j k_0 T^\epsilon(\nabla V, \nabla v) = b_V(\nabla v) \quad (6.41c)$$

des Randwertproblems (6.39), wobei erneut die bereits zuvor verwendeten Linear- und Bilinearformen sowie

$$b_A(\mathbf{a}_c) = b_J(\mathbf{a}_c) + b_H(\mathbf{a}_c) \quad (6.42a)$$

$$b_V(\nabla v) = b_J(\nabla v) + b_H(\nabla v) \quad (6.42b)$$

zur abkürzenden Darstellung verwendet werden. Die rechten Seiten von (6.41b) und (6.41c) ergeben sich in der angegebenen Form, wenn in

$$\int_{\Gamma_H} \psi [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (6.43a)$$

und

$$\int_{\Gamma_H} v [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) \nabla V] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (6.43b)$$

die Randbedingungen aus (6.39h) und (6.39i) eingesetzt werden. Formal ist die vorgestellte stationäre Eichung äquivalent zur statischen Eichung aus Abschnitt 5.3, sofern dort in den Eichbedingungen (5.87) der Materialtensor ϵ_r durch $(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r)$ ersetzt wird. Ein Unterschied im Vergleich zum verlustlosen Fall ergibt sich aus der Tatsache, dass bei der Betrachtung leitfähiger Gebiete eine Anregung über magnetische Randbedingungen auch im stationären Fall ohne weitere Forderungen an die eingeprägte magnetische Erregung möglich ist, wie sich an der Skalierung der rechten Seite von (6.41c) erkennen lässt. Dies liegt daran, dass die elektrischen und magnetischen Felder im verlustbehafteten Fall auch beim Übergang zum stationären Grenzwert $k_0 = 0$ nicht vollständig voneinander entkoppelt sind.

6.3.3 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Einschränken der Testfunktionen in (6.41) auf die endlich dimensionalen Teilräume $\mathbf{a}_c \in \mathcal{R}_{c,0}^{h,p} \subset \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$, $\psi \in \mathcal{V}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ und $v \in \mathcal{V}_0^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ sowie Verwendung der Ansätze (5.20) für die Felder \mathbf{A}_c , Ψ und V führt auf das *FE*-Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{c,s} \mathbf{x}^{c,s} = \mathbf{b}^{x,s}, \quad (6.44a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{c,s} & \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{c,s} & \mathbf{A}_{AcV}^{c,s} \\ \mathbf{A}_{\Psi Ac}^{c,s} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{c,s} \end{bmatrix}, \quad (6.44b)$$

$$\mathbf{x}^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac} \\ \mathbf{x}_{\Psi} \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}, \quad (6.44c)$$

$$\mathbf{b}^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Ac}^{c,s} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_V^{c,s} \end{bmatrix} \quad (6.44d)$$

und den Teilmatrizen und -vektoren

$$\mathbf{A}_{AcAc}^{c,s} = \mathbf{S}_{AcAc}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{AcAc}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AcAc}^\epsilon, \quad (6.45a)$$

$$\mathbf{A}_{Ac\Psi}^{c,s} = jk_0 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^\epsilon, \quad (6.45b)$$

$$\mathbf{A}_{AcV}^{c,s} = \mathbf{M}_{AcV}^\kappa + jk_0 \mathbf{M}_{AcV}^\epsilon, \quad (6.45c)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi Ac}^{c,s} = \mathbf{M}_{\Psi Ac}^\kappa + jk_0 \mathbf{M}_{\Psi Ac}^\epsilon, \quad (6.45d)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,s} = \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\kappa + jk_0 \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\epsilon, \quad (6.45e)$$

$$\mathbf{A}_{VV}^{c,s} = \mathbf{S}_{VV}^\kappa + jk_0 \mathbf{S}_{VV}^\epsilon, \quad (6.45f)$$

$$\mathbf{b}_{Ac}^{c,s} = \mathbf{b}_{Ac,J} + \mathbf{b}_{Ac,H}, \quad (6.45g)$$

$$\mathbf{b}_V^{c,s} = \mathbf{b}_{V,J} + \mathbf{b}_{V,H}. \quad (6.45h)$$

Aufgrund der angenommenen Symmetrie der Materialtensoren gilt zusätzlich

$$\mathbf{A}_{AcAc}^{c,s} = (\mathbf{A}_{AcAc}^{c,s})^T, \quad (6.46a)$$

$$\mathbf{A}_{Ac\Psi}^{c,s} = jk_0 (\mathbf{A}_{\Psi Ac}^{c,s})^T, \quad (6.46b)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,s} = (\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,s})^T, \quad (6.46c)$$

$$\mathbf{A}_{VV}^{c,s} = (\mathbf{A}_{VV}^{c,s})^T \quad (6.46d)$$

und das *FE*-Gleichungssystem kann in der alternativen Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{c,s} & jk_0 (\mathbf{A}_{\Psi Ac}^{c,s})^T & \mathbf{A}_{AcV}^{c,s} \\ \mathbf{A}_{\Psi Ac}^{c,s} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{c,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac} \\ \mathbf{x}_{\Psi} \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Ac} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_V \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

angegeben werden. Wie anhand von (6.44b) zu erkennen ist, handelt es sich hierbei, wie bei der zuvor behandelten Baum-Kobaum-Eichung und der entsprechenden statischen Eichung im verlustlosen Fall, um ein unsymmetrisches Gleichungssystem. Nachteilig im Vergleich zur Baum-Kobaum-Eichung ist allerdings die größere Anzahl an Unbekannten, da durch die Eichung zunächst keine Freiheitsgrade eliminiert werden. Ähnlich wie im verlustlosen Fall ist das elektrische Skalarpotenzial V unabhängig von den beiden anderen Potenzialen \mathbf{A}_c und Ψ , sodass die Lösung des

obigen Gleichungssystems in zwei Schritten ausgeführt werden kann:

$$\mathbf{A}_{VV}^{c,s} \mathbf{x}_V = \mathbf{b}_V^{c,s}, \quad (6.48a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{c,s} & jk_0 (\mathbf{A}_{\Psi Ac}^{c,s})^T \\ \mathbf{A}_{\Psi Ac}^{c,s} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac} \\ \mathbf{x}_{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Ac}^{c,s} - \mathbf{A}_{AcV}^{c,s} \mathbf{x}_V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.48b)$$

Da die Dimension des Gleichungssystems (6.48a) in der Regel deutlich geringer ist, als jene von (6.48b), wird der Rechenaufwand zur Lösung dieser beiden Gleichungssysteme im Wesentlichen durch die Lösung von (6.48b) bestimmt. Die Dimension dieses Gleichungssystems ist identisch mit jener des Systems, welches sich bei der Baum-Kobaum-Eichung ergibt, das heißt, obwohl keine der Unbekannten a priori eliminiert wurde, ist der Aufwand zum Bestimmen der Lösung im Fall der vorliegenden Eichung im Wesentlichen identisch mit jenem bei der Baum-Kobaum-Eichung. Bei nicht verschwindender Wellenzahl $k_0 \neq 0$ kann darüber hinaus die zweite Zeile von (6.48b) mit dem Faktor jk_0 skaliert werden, sodass sich in weiterer Folge eine komplex symmetrische Systemmatrix ergibt. Der stationäre Grenzfall $k_0 = 0$ wird in Abschnitt 6.3.4 separat betrachtet.

6.3.4 Eigenwertstruktur und Frequenzverhalten

Ausgehend von der Darstellung des *FE*-Gleichungssystems wie in (6.44a) ergibt sich im stationären Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$:

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \mathbf{A}^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AcAc} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{AcV}^{\kappa} \\ \mathbf{M}_{\Psi Ac}^{\kappa} & \mathbf{S}_{\Psi\Psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^{\kappa} \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Im zugehörigen linearen Gleichungssystem kann der mit \mathbf{x}_V assoziierte Teil wie im Fall $k_0 > 0$ unabhängig von den anderen Größen gelöst werden:

$$\mathbf{x}_V = (\mathbf{S}_{VV}^{\kappa})^{-1} \mathbf{b}_V^{c,s}. \quad (6.50)$$

Die Systemmatrix des verbleibenden Gleichungssystem für die unbekanntenen Größen \mathbf{x}_{Ac} und \mathbf{x}_{Ψ}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AcAc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\Psi Ac}^{\kappa} & \mathbf{S}_{\Psi\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac} \\ \mathbf{x}_{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^{c,s} - \mathbf{M}_{AcV}^{\kappa} (\mathbf{S}_{VV}^{\kappa})^{-1} \mathbf{b}_V^{c,s} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

hat dann die Struktur einer unteren Block-Dreiecksmatrix, deren Regularität aus der Regularität der Diagonalblöcke folgt. Insbesondere kann \mathbf{x}_{Ac} in diesem Fall unabhängig von \mathbf{x}_{Ψ} aus der ersten Zeile in der Form

$$\mathbf{x}_{Ac} = (\mathbf{S}_{AcAc}^{\nu})^{-1} (\mathbf{b}_{Ac}^{c,s} - \mathbf{M}_{AcV}^{\kappa} (\mathbf{S}_{VV}^{\kappa})^{-1} \mathbf{b}_V^{c,s}) \quad (6.52)$$

bestimmt werden. Die physikalischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} sind hierdurch bereits eindeutig festgelegt, da der Gradientenanteil des magnetischen Vektorpotenzials $\nabla\Psi$ im stationären Fall auf diese keinerlei Einfluss hat, wie für $k_0 = 0$ aus (2.28)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c_0} \nabla \times \mathbf{A}_c, \quad (6.53a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (6.53b)$$

ersichtlich wird. Lediglich um die Quellen des Gesamtvektorpotenzials

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_c + \nabla\Psi \quad (6.54)$$

festzulegen, ist eine Bestimmung von \mathbf{x}_Ψ noch erforderlich. Im stationären Fall kann die Berechnung der Unbekannten \mathbf{x}_{A_c} , \mathbf{x}_Ψ und \mathbf{x}_V daher in drei Schritten erfolgen

$$\mathbf{S}_{VV}^\kappa \mathbf{x}_V = \mathbf{b}_V^{c,s}, \quad (6.55a)$$

$$\mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu \mathbf{x}_{A_c} = \mathbf{b}_{A_c}^{c,s} - \mathbf{M}_{A_c V}^\kappa \mathbf{x}_V, \quad (6.55b)$$

$$\mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\kappa \mathbf{x}_\Psi = -\mathbf{M}_{\Psi A_c}^\kappa \mathbf{x}_{A_c}, \quad (6.55c)$$

wobei auf den letzten Schritt verzichtet werden kann, sofern nur der Verlauf der physikalischen Felder von Interesse ist. In diesem Fall ist die stationäre Eichung im stationären Fall äquivalent zur Baum-Kobaum-Eichung aus Abschnitt 6.2.4. Im Fall $k_0 > 0$ ist das vorgestellte Vorgehen nicht möglich, da dann die Kopplungsmatrix

$$\mathbf{A}_{A_c\Psi}^{c,s} = jk_0 (\mathbf{A}_{\Psi A_c}^{c,s})^T \quad (6.56)$$

nicht verschwindet und daher \mathbf{x}_{A_c} und \mathbf{x}_Ψ simultan bestimmt werden müssen. Abschließend wird überprüft, ob das dem Gleichungssystem zugeordnete quadratische Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{A}_0^{c,s} + \lambda_k^{c,s} \mathbf{A}_1^{c,s} + (\lambda_k^{c,s})^2 \mathbf{A}_2^{c,s} \right) \mathbf{x}_k^{c,s} = \mathbf{0} \quad (6.57a)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A}_0^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^\nu & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{A_c V}^\kappa \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\kappa & \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\kappa & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\kappa \end{bmatrix}, \quad (6.57b)$$

$$\mathbf{A}_1^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A_c A_c}^\kappa & \mathbf{M}_{A_c\Psi}^\kappa & \mathbf{M}_{A_c V}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{\Psi A_c}^\epsilon & \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\epsilon \end{bmatrix}, \quad (6.57c)$$

$$\mathbf{A}_2^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A_c A_c}^\epsilon & \mathbf{M}_{A_c\Psi}^\epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.57d)$$

und dem Eigenvektor

$$\mathbf{x}_k^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c,k} \\ \mathbf{x}_{\Psi,k} \\ \mathbf{x}_{V,k} \end{bmatrix} \quad (6.57e)$$

reine Gradientenfelder als Eigenvektoren besitzt. Hierzu wird der Ansatz

$$\mathbf{x}_{G,k}^{c,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{\Psi,k} \\ \mathbf{x}_{V,k} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

in (6.57) eingesetzt, was auf die drei Gleichungen

$$(\mathbf{M}_{AcV}^{\kappa} + \lambda_k^{c,s} \mathbf{M}_{AcV}^{\epsilon}) (\lambda_k^{c,s} \mathbf{x}_{\Psi,k} + \mathbf{x}_{V,k}) = \mathbf{0}, \quad (6.59a)$$

$$(\mathbf{S}_{VV}^{\kappa} + \lambda_k^{c,s} \mathbf{S}_{VV}^{\epsilon}) \mathbf{x}_{\Psi,k} = \mathbf{0}, \quad (6.59b)$$

$$(\mathbf{S}_{VV}^{\kappa} + \lambda_k^{c,s} \mathbf{S}_{VV}^{\epsilon}) \mathbf{x}_{V,k} = \mathbf{0} \quad (6.59c)$$

führt. Die Vektoren $\mathbf{x}_{\Psi,k}$ und $\mathbf{x}_{V,k}$ müssen daher Eigenvektoren des verallgemeinerten Eigenwertproblems (6.59b) beziehungsweise (6.59c) sein. Damit darüber hinaus auch (6.59a) erfüllt ist, muss zusätzlich

$$\mathbf{x}_{V,k} = -\lambda_k^{c,s} \mathbf{x}_{\Psi,k} \quad (6.60)$$

gelten. Die Eigenwerte, die sich für reine Gradientenfelder ergeben, entsprechen somit ebenfalls jenen des verallgemeinerten Eigenwertproblems (6.59b) beziehungsweise (6.59c). Aufgrund der Eigenschaften der darin vorkommenden Matrizen sind alle Eigenwerte reell und negativ. Die den Gradientenfeldern zugeordneten Eigenwerte stellen daher für beliebige $k_0 > 0$ in (6.44a) kein Problem dar.

6.3.5 Numerische Ergebnisse

Die Ergebnisse dieses Kapitels beziehen sich auf das verlustbehaftete Resonatorproblem aus Abschnitt 6.1. Eine Gegenüberstellung der analytisch berechneten Eigenwerte sowie der numerisch bestimmten Näherungslösungen der ersten sieben Moden für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$ ist in Tabelle 6.2 dargestellt. Wie hieran zu erkennen ist, ist die Übereinstimmung sehr gut. Im Gegensatz zum verlustlosen Fall ergeben sich neben den physikalisch sinnvollen Eigenwerten weiterhin die zuvor diskutierten unphysikalischen Eigenwerte. Deren Verteilung in der komplexen Ebene ist zusammen mit den physikalischen Eigenwerten in Abbildung 6.3.1 dargestellt. Auch wenn die Formulierung unphysikalische Eigenwerte besitzt, so existieren im Gegensatz zur elektrischen Feldformulierung jedoch - wie zuvor gezeigt - keine unphysikalischen Nulleigenwerte, welche für eine Niederfrequenzinstabilität der Formulierung sorgen könnten.

Um das Frequenzverhalten der Systemmatrix zu beurteilen, ist in Abbildung 6.3.2 die Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix aus (6.44b) in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Wie im Fall der Baum-Kobaum-Eichung zeigt sich bei der stationären Eichung eine über weite Teile des betrachteten Frequenzbereichs annähernd konstante Konditionszahl, welche erst bei höheren Frequenzen zu steigen beginnt.

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | $-94.1826 + 100.0798j$ | $6.3 \cdot 10^{-4}$ | $8.6 \cdot 10^{-6}$ | $1.5 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{120} | $-94.1826 + 195.8199j$ | $5.4 \cdot 10^{-4}$ | $6.4 \cdot 10^{-5}$ | $9.8 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{210} | $-94.1826 + 195.8199j$ | $2.7 \cdot 10^{-3}$ | $2.2 \cdot 10^{-5}$ | $3.6 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{011} | $-94.1826 + 219.9518j$ | $6.2 \cdot 10^{-3}$ | $3.2 \cdot 10^{-5}$ | $1.6 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{101} | $-94.1826 + 219.9518j$ | $4.4 \cdot 10^{-4}$ | $9.6 \cdot 10^{-7}$ | $8.2 \cdot 10^{-8}$ |
| TE_{111} | $-94.1826 + 240.4620j$ | $4.7 \cdot 10^{-3}$ | $1.6 \cdot 10^{-5}$ | $2.0 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{111} | $-94.1826 + 240.4620j$ | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $3.8 \cdot 10^{-5}$ | $2.3 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 6.2: Eigenwerte im verlustbehafteten Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

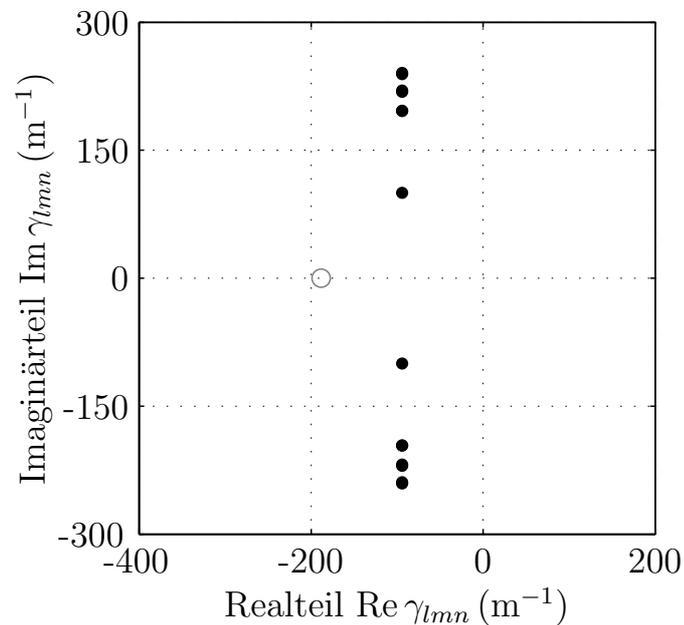


Abbildung 6.3.1: Eigenwertverteilung im verlustbehafteten Fall: Lage der Eigenwerte des Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte und unphysikalische Eigenwerte als graue Kreise dargestellt.

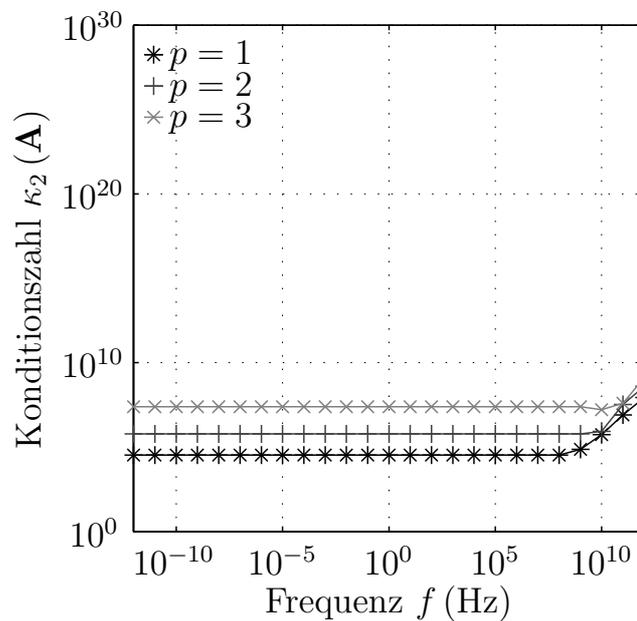


Abbildung 6.3.2: Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

Der Grund hierfür liegt wie im Fall der Baum-Kobaum-Eichung in der unterschiedlichen Frequenzskalierung der einzelnen Matrix-Blöcke. Durch eine geeignete Skalierung kann diesem Problem jedoch entgegen gewirkt werden, wie in Abbildung 6.3.3 dargestellt. Hieraus wird ersichtlich, dass bei der stationären Eichung - im Gegensatz zur Baum-Kobaum-Eichung - auch bei höheren Frequenzen das Ansteigen der Konditionszahl effektiv verhindert werden kann und sich wie im Fall der statischen Eichung in Folge der Skalierung eine annähernd konstante Konditionszahl ergibt.

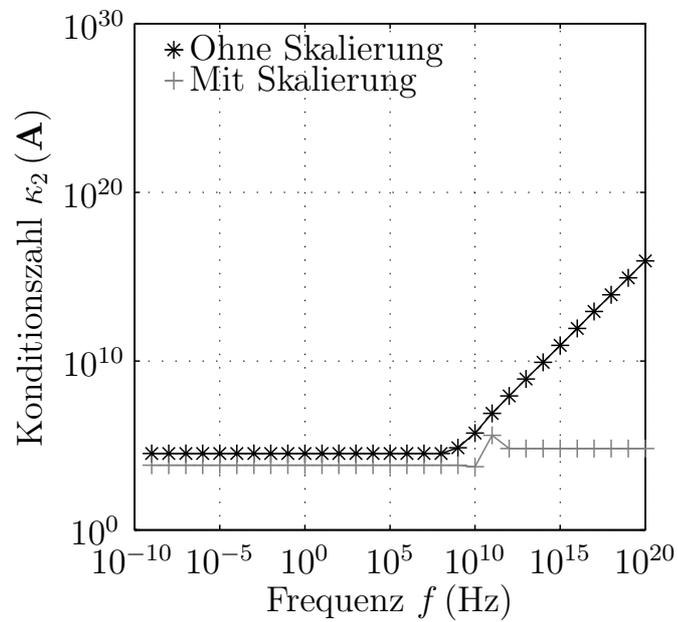


Abbildung 6.3.3: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit und ohne Skalierung.

6.4 Gemischte Formulierung

Alternativ zu den in Abschnitt 6.2 und Abschnitt 6.3 vorgestellten Formulierungen wird in diesem Abschnitt eine weitere Formulierung betrachtet werden, welche in ihrer Struktur im Wesentlichen einer klassischen gemischten Variationsformulierung wie in [Mon08, S. 22,26] entspricht. Die grundsätzliche Eichbedingung unterscheidet sich nicht wesentlich von jener der stationären Eichung, jedoch hat das resultierende Gleichungssystem eine andere Struktur und auch andere Eigenschaften.

6.4.1 Eichbedingung

Wie bereits erwähnt, bleiben der Durchflutungssatz (2.11b) und die Kontinuitätsgleichung (2.11e) bei den hier betrachteten verlustbehafteten Strukturen auch im stationären Grenzfall linear abhängig voneinander, da die Kontinuitätsgleichung immer durch Divergenzbildung aus dem Durchflutungssatz folgt. Wie in (6.35a) aus Abschnitt 6.3 wird ergänzend die Eichbedingung

$$\nabla \cdot (\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) \mathbf{A} = \nabla \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] = 0 \quad (6.61)$$

zur Festlegung der Quellen des Vektorpotenzials vorgegeben. Im Gegensatz zur stationären Eichung wird diese jedoch nicht in der Kontinuitätsgleichung ausgenutzt, um die Gleichungen für das elektrische Skalarpotenzial V auf den Fall der stationären Strömungsfelder zu reduzieren, sondern die Kontinuitätsgleichung wird in ihrer unveränderten Form weiter berücksichtigt. Ergänzt um den Durchflutungssatz und die Kontinuitätsgleichung lauten die Bestimmungsgleichungen für die Potenziale innerhalb des Feldgebietes Ω somit

$$\nabla \times (\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) + (\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) [\nabla V + j k_0 (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] = \eta_0 \mathbf{J}_p \quad \text{in } \Omega, \quad (6.62a)$$

$$\nabla \cdot \{(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) [\nabla V + j k_0 (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)]\} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.62b)$$

$$\nabla \cdot [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.62c)$$

zusammen mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$\mathbf{A}_c \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (6.62d)$$

$$\Psi = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (6.62e)$$

$$V = \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_E \quad (6.62f)$$

sowie den Neumann-Randbedingungen

$$(\nu_r \nabla \times \mathbf{A}_c) \times \hat{\mathbf{n}} = \eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (6.62g)$$

$$[(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) (\mathbf{A}_c + \nabla \Psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (6.62h)$$

$$\begin{aligned} [(\eta_0 \kappa + j k_0 \epsilon_r) \nabla V] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= -\eta_0 (\nabla \times \mathbf{H}_0 - \mathbf{J}_p) \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= -(\eta_0 \mathbf{J}_0 + j k_0 \mathbf{D}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (6.62i)$$

Die Randbedingungen zur Vervollständigung der Eichung stimmen daher mit jenen der stationären Eichung überein.

6.4.2 Schwache Formulierung

Zur Konstruktion der schwachen Form der zuvor angegebenen partiellen Differenzialgleichungen für die Potentiale \mathbf{A}_c , Ψ und V wird das Skalarprodukt der Gleichungen (6.62a), (6.62b) und (6.62c) mit Testfunktionen $\mathbf{a}_c \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$, $\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ und $v \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ gebildet, was nach partieller Integration und Ausnutzung der Randbedingungen zu

$$\begin{aligned} S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + j k_0 T^\kappa(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \mathbf{a}_c) + (j k_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \mathbf{a}_c) \\ + T^\kappa(\nabla V, \mathbf{a}_c) + j k_0 T^\epsilon(\nabla V, \mathbf{a}_c) = b_J(\mathbf{a}_c) + b_H(\mathbf{a}_c) \end{aligned} \quad (6.63a)$$

$$\begin{aligned} j k_0 T^\kappa(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \nabla \psi) + (j k_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \nabla \psi) \\ + T^\kappa(\nabla V, \nabla \psi) + j k_0 T^\epsilon(\nabla V, \nabla \psi) = b_J(\nabla \psi) + b_H(\nabla \psi) \end{aligned} \quad (6.63b)$$

$$T^\kappa(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \nabla v) + j k_0 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \nabla v) = 0 \quad (6.63c)$$

mit den bereits zuvor eingeführten Linear- und Bilinearformen führt. Werden die Gleichungen für das Vektorpotential \mathbf{A} ohne die Aufspaltung

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_c + \nabla \Psi \quad (6.64)$$

betrachtet, kann die schwache Formulierung des Randwertproblems (6.62) in der Form

$$a(\mathbf{A}, \mathbf{a}) + b(\nabla V, \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}), \quad (6.65a)$$

$$b(\mathbf{A}, \nabla v) = g(v) \quad (6.65b)$$

angegeben werden, wobei für die Linear- und Bilinearformen

$$a(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = S^\nu(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) + j k_0 T^\kappa(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) + (j k_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \quad (6.66)$$

$$b(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = T^\kappa(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) + j k_0 T^\epsilon(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \quad (6.67)$$

$$f(\mathbf{w}) = -b_J(\mathbf{w}) - b_H(\mathbf{w}), \quad (6.68)$$

$$g(w) = -b_J(\nabla w) + b_H(\nabla w) \quad (6.69)$$

gilt. Diese Formulierung entspricht der gleichen Sattelpunktstruktur, welche sich typischerweise bei gemischten Variationsformulierungen partieller Differentialgleichungen ergibt [Mon08, S. 22], daher die Bezeichnung *gemischte Formulierung*. Diese Form der Darstellung ist insbesondere bei der Untersuchung der Existenz- und Eindeutigkeit einer Lösung mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden hilfreich.

6.4.3 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Analog zum bisherigen Vorgehen erfolgt auch im vorliegenden Fall die Herleitung des *FE*-Gleichungssystems. Hierzu werden die Testfunktionen in (6.63) auf die endlich dimensionalen Teilräume $\mathbf{a}_{c,k} \in \mathcal{R}_{c,0}^{h,p}$, $\psi_k \in \mathcal{V}_0^{h,p}$ und $v_k \in \mathcal{V}_0^{h,p}$ eingeschränkt und für die Felder \mathbf{A}_c , Ψ und V die Ansätze

$$\mathbf{A}_c = \sum_{l=1}^{N_{\mathcal{R}_{c,0}}} x_{A_c,l} \mathbf{a}_{c,l}, \quad (6.70)$$

$$\Psi = \sum_{l=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} x_{\Psi,l} \psi_l, \quad (6.71)$$

$$V = \sum_l^{N_{\mathcal{V}_0}} x_{V,l} v_l \quad (6.72)$$

mit $\mathbf{a}_{c,l} \in \mathcal{R}_{c,0}^{h,p}$, $\psi_l \in \mathcal{V}_0^{h,p}$ sowie $v_l \in \mathcal{V}_0^{h,p}$ gemacht. Die Einschränkung der vektoriellen Ansatz- und Testfunktionen $\mathbf{a}_{c,k} \in \mathcal{R}_{c,0}^{h,p}$ wird wie zuvor durchgeführt, um die im Kontinuierlichen geforderte Bedingung $\nabla \times \mathbf{A}_c \neq 0$ auch im Diskreten zu erfüllen. Dies entspricht der bereits eingeführten Baum-Kobaum-Zerlegung des Vektorpotenzials. Mit diesen Annahmen lautet das *FE*-Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{c,m} \mathbf{x}^{c,m} = \mathbf{b}^{c,m} \quad (6.73a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{A_c A_c}^{c,m} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{c,m} & \mathbf{A}_{A_c V}^{c,m} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{c,m} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{c,m} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{c,m} \\ \mathbf{A}_{V A_c}^{c,m} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{c,m} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.73b)$$

$$\mathbf{x}^{c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}, \quad (6.73c)$$

$$\mathbf{b}^{c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^{c,m} \\ \mathbf{b}_\Psi^{c,m} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.73d)$$

wobei für die einzelnen Teilmatrizen und -vektoren

$$\mathbf{A}_{AcAc}^{c,m} = \mathbf{S}_{AcAc}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{AcAc}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AcAc}^\epsilon, \quad (6.74a)$$

$$\mathbf{A}_{Ac\Psi}^{c,m} = (\mathbf{A}_{\Psi Ac}^{c,m})^T = jk_0 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^\epsilon, \quad (6.74b)$$

$$\mathbf{A}_{AcV}^{c,m} = (\mathbf{A}_{AcV}^{c,m})^T = \mathbf{M}_{AcV}^\kappa + jk_0 \mathbf{M}_{AcV}^\epsilon, \quad (6.74c)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,m} = jk_0 \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^\epsilon, \quad (6.74d)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi V}^{c,m} = (\mathbf{A}_{V\Psi}^{c,m})^T = \mathbf{S}_{\Psi V}^\kappa + jk_0 \mathbf{S}_{\Psi V}^\epsilon \quad (6.74e)$$

sowie

$$\mathbf{b}_A^{c,m} = \mathbf{b}_{Ac,J} + \mathbf{b}_{Ac,H}, \quad (6.74f)$$

$$\mathbf{b}_\Psi^{c,m} = \mathbf{b}_{\Psi,J} + \mathbf{b}_{\Psi,H} \quad (6.74g)$$

gilt. Wichtig ist hierbei, dass in (6.74) jeweils nur die transponierte und nicht die hermitesche Matrix genommen wird. Hieraus folgt direkt, dass die Systemmatrix $\mathbf{A}^{c,m}$ komplex symmetrisch ist, im Gegensatz zu den nicht symmetrischen Gesamtsystemmatrizen im Fall der Baum-Kobaum-Eichung aus Abschnitt 6.2 oder der stationären Eichung aus Abschnitt 6.3.

Durch den Verzicht auf die Baum-Kobaum-Aufspaltung des Vektorpotenzials kann eine diskrete Variante von (6.65) gewonnen werden. Die Testfunktionen für das Skalarpotenzial werden wiederum auf den Raum $\mathcal{V}_0^{h,p}$ eingeschränkt, während für \mathbf{a} in (6.65) eine Einschränkung auf $\mathcal{W}_0^{h,p}$ anstelle von $\mathcal{R}_{c,0}^{h,p}$ erfolgt. Wird dementsprechend ein Ansatz für die Felder in der Form

$$\mathbf{A} = \sum_{l=1}^{N_{\mathcal{W}_0}} x_{A,l} \mathbf{a}_l, \quad (6.75)$$

$$V = \sum_{l=1}^{N_{\mathcal{V}_0}} x_{V,l} v_l \quad (6.76)$$

mit $\mathbf{a}_l \in \mathcal{W}_0^{h,p}$ und $v_l \in \mathcal{V}_0^{h,p}$ gemacht, ergibt sich die zu (6.73) äquivalente diskrete Form von (6.65):

$$\tilde{\mathbf{A}}^{c,m} \tilde{\mathbf{x}}^{c,m} = \tilde{\mathbf{b}}^{c,m} \quad (6.77a)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}^{c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AA}^{c,m} & \mathbf{A}_{AV}^{c,m} \\ \mathbf{A}_{VA}^{c,m} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.77b)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}, \quad (6.77c)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^{c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^{c,m} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.77d)$$

Auch hier folgt aus

$$\mathbf{A}_{AA}^{c,m} = \mathbf{S}_{AA}^\nu + jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\kappa + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon, \quad (6.78a)$$

$$\mathbf{A}_{AV}^{c,m} = (\mathbf{A}_{VA}^{c,m})^T = \mathbf{T}_{AA}^\kappa \mathbf{G} + jk_0 \mathbf{T}_{AA}^\epsilon \mathbf{G}, \quad (6.78b)$$

dass es sich um eine komplex symmetrische Systemmatrix handelt. Die Äquivalenz der beiden Darstellungen des *FE*-Gleichungssystems (6.73a) und (6.77) ergibt sich aus der Baum-Kobaum-Aufspaltung des Raumes $\mathcal{W}_0^{h,p}$ nach (3.21)

$$\mathcal{W}_0^{h,p} = \mathcal{R}_{c,0}^{h,p} \oplus \mathcal{R}_{t,0}^{h,p} \quad (6.79)$$

und der daraus resultierenden Darstellung des Koeffizientenvektors \mathbf{x}_A gemäß (5.76)

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c} \\ \mathbf{x}_\Psi \end{bmatrix}. \quad (6.80)$$

Diese Darstellung der gemischten Formulierung erlaubt eine zu den Betrachtungen aus (5.2) analoge Beurteilung des Niederfrequenzverhalten, weshalb sie in weiterer Folge in Abschnitt 6.4.4 verwendet wird. Zur effizienten numerischen Lösung solcher Sattelpunkt-Probleme sei an dieser Stelle auf [BGL05] verwiesen.

6.4.4 Eigenwertstruktur und Niederfrequenzverhalten

Im Folgenden wird das Niederfrequenzverhalten der gemischten Formulierung anhand der Wirkung der Systemmatrix auf reine Gradientenfelder betrachtet. Hierzu wird der Rayleigh-Koeffizient $\rho(\mathbf{x}_G)$ der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}^{c,m}$ mit einem Koeffizientenvektor \mathbf{x}_G betrachtet, für welchen

$$\mathbf{x}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

gilt, sodass für $\rho(\mathbf{x}_G)$

$$\rho(\mathbf{x}_G) = \frac{\mathbf{x}_G^H \tilde{\mathbf{A}}^{c,m} \mathbf{x}_G}{\mathbf{x}_G^H \mathbf{x}_G} \quad (6.82a)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AA}^{c,m} & \mathbf{A}_{AV}^{c,m} \\ (\mathbf{A}_{\Psi V}^{c,m})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}}{\mathbf{x}_\Psi^H \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\Psi + \mathbf{x}_V^H \mathbf{x}_V} \quad (6.82b)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,m} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{c,m} \\ (\mathbf{A}_{\Psi V}^{c,m})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\Psi \\ \mathbf{x}_V \end{bmatrix}}{\mathbf{x}_\Psi^H \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\Psi + \mathbf{x}_V^H \mathbf{x}_V} \quad (6.82c)$$

mit den Matrizen $\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,m}$ und $\mathbf{A}_{\Psi V}^{c,m}$ nach (6.74) folgt. Insbesondere gilt somit auch

$$\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{c,m} = jk_0 \mathbf{A}_{\Psi V}^{c,m}. \quad (6.83)$$

Für den Nenner des Rayleigh-Koeffizienten $\rho(\mathbf{x}_G)$ gilt stets

$$\mathbf{x}_\Psi^H \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\Psi + \mathbf{x}_V^H \mathbf{x}_V > 0 \quad (6.84)$$

sofern $\mathbf{x}_G \neq 0$, daher genügt zur Beurteilung des Verhaltens der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}^{c,m}$ in Bezug auf die reinen Gradientenfelder die Betrachtung der Eigenschaften der Matrix

$$\mathbf{A}_G^{c,m} = \begin{bmatrix} jk_0 \mathbf{A}_{VV}^{c,m} & \mathbf{A}_{VV}^{c,m} \\ \mathbf{A}_{VV}^{c,m} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}_{VV}^{c,m} \mathbf{B}^{c,m} \quad (6.85)$$

mit den Matrizen

$$\hat{\mathbf{A}}^{c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{VV}^{c,m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{c,m} \end{bmatrix}, \quad (6.86)$$

$$\mathbf{B}^{c,m} = \begin{bmatrix} jk_0 \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \mathbf{I}_{N_{V_0}} \\ \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.87)$$

Aufgrund der speziellen (2×2) -Blockstruktur der Matrix $\mathbf{B}^{c,m}$ besitzt diese nur die beiden Eigenwerte

$$\beta_{\pm}^{c,m} = \frac{1}{2} \left(jk_0 \pm \sqrt{4 + (jk_0)^2} \right). \quad (6.88)$$

Die Lage dieser Eigenwerte in der komplexen Ebene in Abhängigkeit von k_0 ist in Abbildung 6.4.1 dargestellt. Da es sich bei $\mathbf{B}^{c,m}$ um eine komplex symmetrische und nicht um eine hermitesche Matrix handelt, ist es nicht möglich, diese Matrix für beliebige k_0 mit Hilfe einer orthogonalen Transformation zu diagonalisieren. Aus diesem Grund wird anstatt einer Eigenwert-Zerlegung im vorliegenden Fall eine Schur-Zerlegung [GvL96, S. 313] von $\mathbf{B}_{VV}^{c,m}$ in der Form

$$\mathbf{B}^{c,m} = \mathbf{Q}^{c,m} \mathbf{U}^{c,m} (\mathbf{Q}^{c,m})^H, \quad (6.89a)$$

mit

$$(\mathbf{Q}^{c,m})^H \mathbf{Q}^{c,m} = \mathbf{Q}^{c,m} (\mathbf{Q}^{c,m})^H = \mathbf{I}_{2N_{V_0}} \quad (6.89b)$$

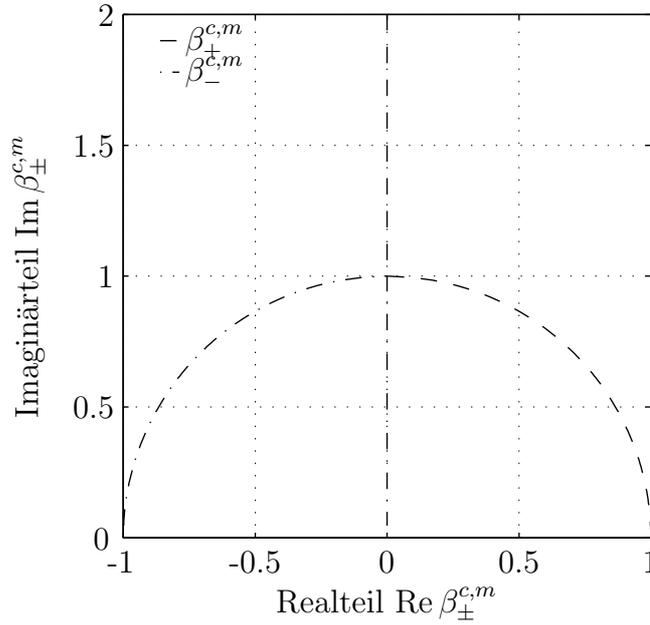
verwendet, wobei zusätzlich

$$(\mathbf{U}^{c,m})_{kl} = \beta_k^{c,m} \delta_{kl} \quad (6.89c)$$

für $k \geq l$ mit

$$\mathbf{B}^{c,m} \beta_k^{c,m} = \beta_k^{c,m} \mathbf{v}_k^{c,m} \quad (6.89d)$$

gilt. Die Existenz einer Schur-Zerlegung kann für jede quadratische Matrix gezeigt werden [TB97, S. 187]. Grundsätzlich ist sie in der oben angegebenen Form jedoch nicht eindeutig, da in jeder Spalte k der Matrix $\mathbf{Q}^{c,m}$ ein Phasenfaktor der Form

Abbildung 6.4.1: Lage von $\beta_{\pm}^{c,m}$ in der komplexen Zahlenebene

$e^{j\phi_k}$ mit $\phi_k \in \mathbb{R}$ eingefügt werden kann, ohne dass sich etwas an den Einträgen der Hauptdiagonalen von $\mathbf{U}^{c,m}$ oder der Unitarität der Matrix $\mathbf{Q}^{c,m}$ ändert [HJ99, S.80f]. Für die Matrix $\mathbf{B}^{c,m}$ aus (6.87) lautet eine mögliche Wahl für $\mathbf{Q}^{c,m}$

$$\mathbf{Q}^{c,m} = \frac{1}{\sqrt{|\beta_+^{c,m}|^2 + 1}} \begin{bmatrix} \beta_+^{c,m} \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \mathbf{I}_{N_{V_0}} \\ \mathbf{I}_{N_{V_0}} & -\bar{\beta}_+^{c,m} \mathbf{I}_{N_{V_0}} \end{bmatrix} \quad (6.90a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\beta_+^{c,m}|^2 + 1}} \begin{bmatrix} \beta_+^{c,m} \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \mathbf{I}_{N_{V_0}} \\ \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \frac{1}{\bar{\beta}_-^{c,m}} \mathbf{I}_{N_{V_0}} \end{bmatrix}, \quad (6.90b)$$

wobei die erste Spalte von $\mathbf{Q}^{c,m}$ gerade dem zu $\beta_+^{c,m}$ gehörenden Eigenvektor entspricht. Bei der letzten Umformung wurde hierbei ausgenutzt, dass für die Eigenwerte (6.88) von $\mathbf{B}^{c,m}$ die Beziehung

$$\beta_+^{c,m} \beta_-^{c,m} = \frac{1}{2} \left(jk_0 + \sqrt{4 + (jk_0)^2} \right) \frac{1}{2} \left(jk_0 - \sqrt{4 + (jk_0)^2} \right) = -1 \quad (6.91)$$

unabhängig von k_0 gilt. Eine mögliche Schur-Zerlegung der Matrix $\mathbf{B}^{c,m}$ lautet daher

$$\mathbf{B}^{c,m} = \frac{1}{|\beta_+^{c,m}|^2 + 1} \begin{bmatrix} \beta_+^{c,m} \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \mathbf{I}_{N_{V_0}} \\ \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \frac{1}{\bar{\beta}_-^{c,m}} \mathbf{I}_{N_{V_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_+^{c,m} \mathbf{I}_{N_{V_0}} & U_{12} \mathbf{I}_{N_{V_0}} \\ \mathbf{0} & \beta_-^{c,m} \mathbf{I}_{N_{V_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\beta}_+^{c,m} \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \mathbf{I}_{N_{V_0}} \\ \mathbf{I}_{N_{V_0}} & \frac{1}{\beta_-^{c,m}} \mathbf{I}_{N_{V_0}} \end{bmatrix}. \quad (6.92)$$

Durch Ausmultiplizieren und Vergleichen der beiden Darstellungen der Matrix $\mathbf{B}^{c,m}$ ergibt sich der Faktor U_{12} aus (6.92) zu

$$U_{12} = 1 + \overline{\beta}_+^{c,m} \beta_-^{c,m} \stackrel{(6.88)}{=} \begin{cases} \frac{jk_0}{2} \left(\sqrt{4 - k_0^2} - jk_0 \right) & k_0 \leq 2, \\ 2 & k_0 > 2. \end{cases} \quad (6.93)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf das Einsetzen der konkreten Darstellung (6.88) der Eigenwerte $\beta_{\pm}^{c,m}$ verzichtet. Wegen der speziellen Blockstruktur der Matrizen $\widehat{\mathbf{A}}_{VV}^{c,m}$ und $\mathbf{Q}^{c,m}$ kommutieren diese, sodass

$$\widehat{\mathbf{A}}_{VV}^{c,m} \mathbf{Q}^{c,m} = \mathbf{Q}^{c,m} \widehat{\mathbf{A}}_{VV}^{c,m} \quad (6.94)$$

und daher für $\mathbf{A}_G^{c,m}$

$$\mathbf{A}_G^{c,m} = \frac{1}{|\beta_+^{c,m}|^2 + 1} \begin{bmatrix} \beta_+^{c,m} \mathbf{I}_{N_{\nu_0}} & \mathbf{I}_{N_{\nu_0}} \\ \mathbf{I}_{N_{\nu_0}} & \frac{1}{\overline{\beta}_+^{c,m}} \mathbf{I}_{N_{\nu_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_+^{c,m} \mathbf{A}_{VV}^{c,m} & \left(1 + \overline{\beta}_+^{c,m} \beta_-^{c,m}\right) \mathbf{A}_{VV}^{c,m} \\ \mathbf{0} & \beta_-^{c,m} \mathbf{A}_{VV}^{c,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_+^{c,m} \mathbf{I}_{N_{\nu_0}} & \mathbf{I}_{N_{\nu_0}} \\ \mathbf{I}_{N_{\nu_0}} & \frac{1}{\overline{\beta}_+^{c,m}} \mathbf{I}_{N_{\nu_0}} \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

gilt. Die Matrix $\mathbf{A}_{VV}^{c,m}$ ist für beliebige k_0 regulär. Der Eigenwert λ_k zum Eigenvektor \mathbf{v}_k kann unter der Annahme $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ durch

$$\lambda_k = \mathbf{v}_k^H \mathbf{A}_{VV}^{c,m} \mathbf{v}_k \quad (6.96)$$

dargestellt werden. Da die Matrix $\mathbf{A}_{VV}^{c,m}$ in der Form

$$\mathbf{A}_{VV}^{c,m} = \mathbf{S}_{VV}^{\kappa} + jk_0 \mathbf{S}_{VV}^{\epsilon} \quad (6.97)$$

angegeben werden kann, folgt für den Eigenwert λ_k aus (6.96)

$$\lambda_k = \mathbf{v}_k^H (\mathbf{S}_{VV}^{\kappa} + jk_0 \mathbf{S}_{VV}^{\epsilon}) \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^H \mathbf{S}_{VV}^{\kappa} \mathbf{v}_k + jk_0 \mathbf{v}_k^H \mathbf{S}_{VV}^{\epsilon} \mathbf{v}_k. \quad (6.98)$$

Aufgrund der Voraussetzungen aus Abschnitt 6.1 sind die Matrizen \mathbf{S}_{VV}^{κ} und $\mathbf{S}_{VV}^{\epsilon}$ reell und symmetrisch positiv definit, sodass diese orthogonal diagonalisiert werden können. Für die entsprechende Darstellung folgt

$$\mathbf{S}_{VV}^{\kappa} = \mathbf{Q}^{\kappa} \mathbf{D}^{\kappa} (\mathbf{Q}^{\kappa})^T, \quad (6.99a)$$

mit

$$(\mathbf{Q}^{\kappa})^T \mathbf{Q}^{\kappa} = \mathbf{I}_{N_{\nu_0}}, \quad (6.99b)$$

$$\mathbf{D}^{\kappa} = \text{diag}\{\lambda_1^{\kappa}, \dots, \lambda_n^{\kappa}\} \quad (6.99c)$$

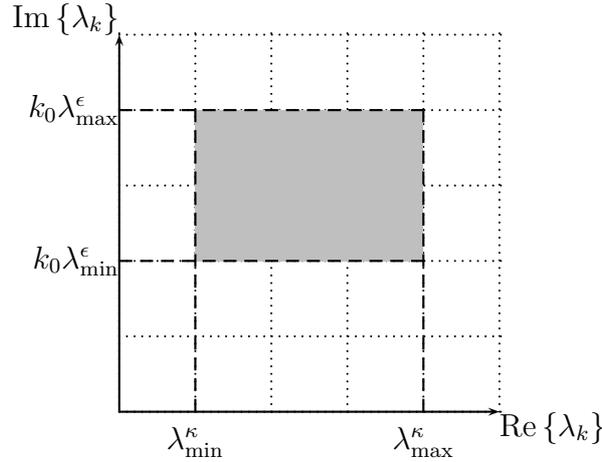


Abbildung 6.4.2: Möglicher Bereich für die Eigenwerte λ_k von $\mathbf{A}_{VV}^{c,m}$.

und

$$\mathbf{S}_{VV}^\epsilon = \mathbf{Q}^\epsilon \mathbf{D}^\epsilon (\mathbf{Q}^\epsilon)^T, \quad (6.99d)$$

mit

$$(\mathbf{Q}^\epsilon)^T \mathbf{Q}^\epsilon = \mathbf{I}_{N_{v_0}}, \quad (6.99e)$$

$$\mathbf{D}^\epsilon = \text{diag}\{\lambda_1^\epsilon, \dots, \lambda_n^\epsilon\}. \quad (6.99f)$$

Für den Eigenwert λ_k bedeutet dies

$$\lambda_k = \mathbf{v}_k^H \mathbf{Q}^\kappa \mathbf{D}^\kappa (\mathbf{Q}^\kappa)^T \mathbf{v}_k + j k_0 \mathbf{v}_k^H \mathbf{Q}^\epsilon \mathbf{D}^\epsilon (\mathbf{Q}^\epsilon)^T \mathbf{v}_k. \quad (6.100a)$$

Insbesondere können Real- und Imaginärteil von λ_k separat aus

$$\text{Re}\{\lambda_k\} = \mathbf{v}_k^H \mathbf{Q}^\kappa \mathbf{D}^\kappa (\mathbf{Q}^\kappa)^T \mathbf{v}_k \quad (6.100b)$$

und

$$\text{Im}\{\lambda_k\} = k_0 \mathbf{v}_k^H \mathbf{Q}^\epsilon \mathbf{D}^\epsilon (\mathbf{Q}^\epsilon)^T \mathbf{v}_k \quad (6.100c)$$

bestimmt werden. Aus (6.100b) und (6.100c) ergeben sich die Abschätzungen

$$\min_k \lambda_k^\kappa = \lambda_{\min}^\kappa \leq \text{Re}\{\lambda_i\} \leq \lambda_{\max}^\kappa = \max_k \lambda_k^\kappa, \quad (6.101a)$$

$$k_0 \min_k \lambda_k^\epsilon = k_0 \lambda_{\min}^\epsilon \leq \text{Im}\{\lambda_i\} \leq k_0 \lambda_{\max}^\epsilon = k_0 \max_k \lambda_k^\epsilon. \quad (6.101b)$$

Der mögliche Bereich der komplexen Zahlenebene, in welchem die Eigenwerte λ_k von $\mathbf{A}_{VV}^{c,m}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl k_0 liegen können, ist in Abbildung 6.4.2 dargestellt. Dies bedeutet, dass die Eigenwerte λ_k asymptotisch gemäß

$$k_0 \ll 1 \text{ m}^{-1} : \quad \lambda_k \approx \lambda_k^\kappa, \quad (6.102a)$$

$$k_0 \gg 1 \text{ m}^{-1} : \quad \lambda_k \approx j k_0 \lambda_k^\epsilon \quad (6.102b)$$

abgeschätzt werden können. Wie anhand von Abbildung 6.4.2 und dieser Abschätzung ersichtlich wird, ist der Bereich, in welchem der Realteil der Eigenwerte liegen kann, von der Frequenz unabhängig und beinhaltet die Null nicht. Demnach ist $\mathbf{A}_{VV}^{c,m}$ für beliebige Frequenzen regulär. Eine mögliche Singularität der Matrix $\mathbf{A}_G^{c,m}$ kann daher höchstens durch die Eigenwerte $\beta_\pm^{c,m}$ hervorgerufen werden. Deren Verlauf in der komplexen Ebene aus Abbildung 6.4.1 zeigt jedoch, dass diese für beliebiges $k_0 < \infty$ verschieden von Null sind. Lediglich im Grenzfall $k_0 \rightarrow \infty$ folgt $\beta_+^{c,m} \rightarrow \infty$ und $\beta_-^{c,m} \rightarrow 0$. Asymptotisch gelten für die Eigenwerte $\beta_\pm^{c,m}$ somit die Darstellungen

$$k_0 \ll 1 \text{ m}^{-1} : \quad \beta_\pm^{c,m} \approx \pm 1 + \frac{j k_0}{2}, \quad (6.103a)$$

$$k_0 \gg 1 \text{ m}^{-1} : \quad \beta_+^{c,m} \approx j k_0, \quad (6.103b)$$

$$\beta_-^{c,m} \approx -\frac{1}{j k_0}. \quad (6.103c)$$

Aus dem asymptotischen Verhalten der Eigenwerte λ_k von $\mathbf{A}_{VV}^{c,m}$ und $\beta_\pm^{c,m}$ von $\mathbf{B}^{c,m}$ folgt somit das asymptotische Verhalten der Eigenwerte $\mu_{k,\pm}^{c,m}$ der Produktmatrix $\mathbf{A}_G^{c,m} = \widehat{\mathbf{A}}_{VV}^{c,m} \mathbf{B}^{c,m}$ mit

$$k_0 \ll 1 \text{ m}^{-1} : \quad \mu_{k,\pm}^{c,m} \approx \lambda_k^\kappa \left(\pm 1 + \frac{j k_0}{2} \right), \quad (6.104a)$$

$$k_0 \gg 1 \text{ m}^{-1} : \quad \mu_{k,+}^{c,m} \approx (j k_0)^2 \lambda_k^\epsilon, \quad (6.104b)$$

$$\mu_{k,-}^{c,m} \approx -\lambda_k^\epsilon. \quad (6.104c)$$

und hieraus die Niederfrequenzstabilität der vorgestellten Formulierung.

6.4.5 Numerische Ergebnisse

Die numerischen Ergebnisse dieses Abschnitts bauen auf dem verlustbehafteten Resonatorproblem aus Abschnitt 6.1 auf. Eine Vergleich der analytisch berechneten Eigenwerte und der numerischen Näherungslösung ist für die ersten sieben Moden und Polynomgrad $p = 1, 2, 3$ in Tabelle 6.3 aufgeführt. Die Übereinstimmung ist für alle sieben Moden sehr gut. Weiterhin stimmen die Genauigkeiten der numerischen Näherungen sowie der Genauigkeitsgewinn bei Erhöhung des Polynomgrades im Wesentlichen mit jenen der Feldformulierung überein. Die Verteilung der Eigenwerte in der komplexen Ebene ist in Abbildung 6.4.3 dargestellt. Auch diese Formulierung zeigt die im Rahmen der verlustbehafteten Feldformulierung diskutierten unphysikalischen Eigenwerte. Da es sich bei diesen jedoch nicht um Nulleigenwerte handelt, ist die Formulierung im Gegensatz zur Feldformulierung auch im stationären Grenzfalle stabil.

Dies wird insbesondere auch durch die Frequenzabhängigkeit der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix \mathbf{A} aus (6.73b) belegt, die in Abbildung 6.4.4 dargestellt ist.

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | $-94.1826 + 100.0798j$ | $6.3 \cdot 10^{-4}$ | $8.6 \cdot 10^{-6}$ | $1.5 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{120} | $-94.1826 + 195.8199j$ | $5.4 \cdot 10^{-4}$ | $2.2 \cdot 10^{-5}$ | $2.1 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{210} | $-94.1826 + 195.8199j$ | $2.7 \cdot 10^{-3}$ | $6.4 \cdot 10^{-5}$ | $3.3 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{011} | $-94.1826 + 219.9518j$ | $6.2 \cdot 10^{-3}$ | $9.6 \cdot 10^{-7}$ | $9.4 \cdot 10^{-8}$ |
| TM_{101} | $-94.1826 + 219.9518j$ | $4.4 \cdot 10^{-4}$ | $3.2 \cdot 10^{-5}$ | $1.3 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{111} | $-94.1826 + 240.4620j$ | $4.7 \cdot 10^{-3}$ | $1.6 \cdot 10^{-5}$ | $2.0 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{111} | $-94.1826 + 240.4620j$ | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $3.8 \cdot 10^{-5}$ | $2.2 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 6.3: Eigenwerte im verlustbehafteten Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

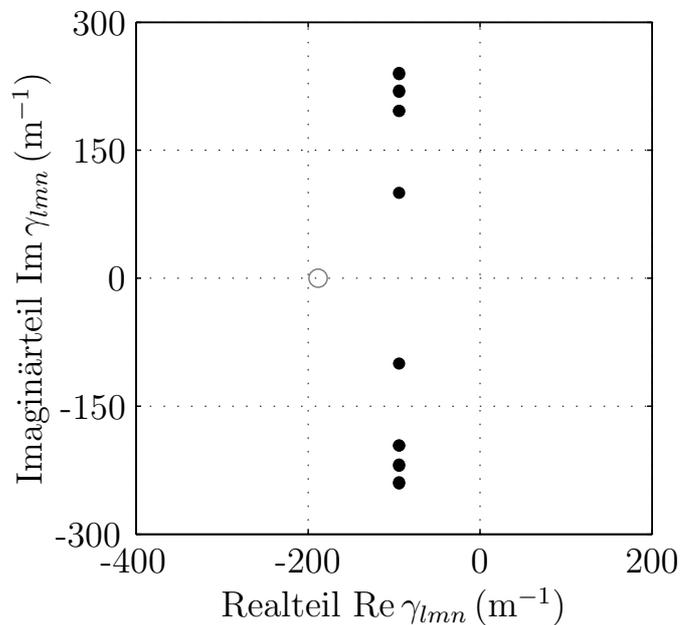


Abbildung 6.4.3: Eigenwertverteilung im verlustbehafteten Fall: Lage der Eigenwerte des Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte und unphysikalische Eigenwerte als graue Kreise dargestellt.

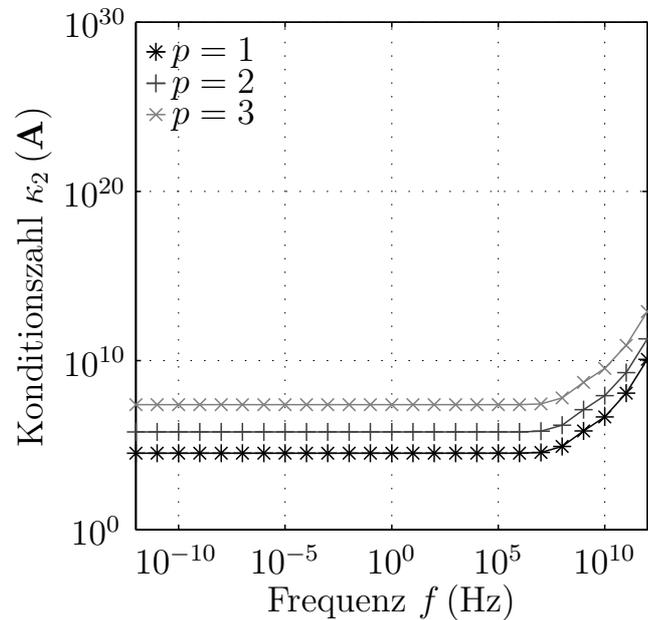


Abbildung 6.4.4: Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrix für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

Wie auch bei den anderen Potenzialformulierungen ist die Konditionszahl über weite Teile des betrachteten Frequenzbereichs im Wesentlichen konstant und verschlechtert sich erst bei vergleichsweise hohen Frequenzen aufgrund der unterschiedlichen Frequenzskalierung der einzelnen Blockmatrizen. Zum Teil kann auch hier durch eine entsprechende Skalierung entgegengewirkt werden, wie in Abbildung 6.4.5 dargestellt. Ähnlich zum Niederfrequenzproblem der Feldformulierung werden für sehr hohe Frequenzen die zweite und dritte Zeile des Gleichungssystems (6.73) fast linear abhängig voneinander, sodass das Ansteigen der Konditionszahl nicht völlig vermieden werden kann.

6.5 Vergleich der Formulierungen

Die drei vorgestellten Potenzialformulierungen zur Vermeidung der Niederfrequenzinstabilität im verlustbehafteten Fall unterscheiden sich in einigen wesentlichen Punkten voneinander. Die Baum-Kobaum-Eichung aus Abschnitt 6.2.4 führt ähnlich wie im verlustfreien Fall zu einer Reduktion der Anzahl der Unbekannten im zu lösenden linearen Gleichungssystem. Nachteilig ist jedoch, dass hier im Gegensatz zum verlustfreien Fall keine symmetrische Formulierung erreicht wird. Für nicht verschwindende Frequenzen kann die Symmetrie durch eine geeignete Skalierung jedoch

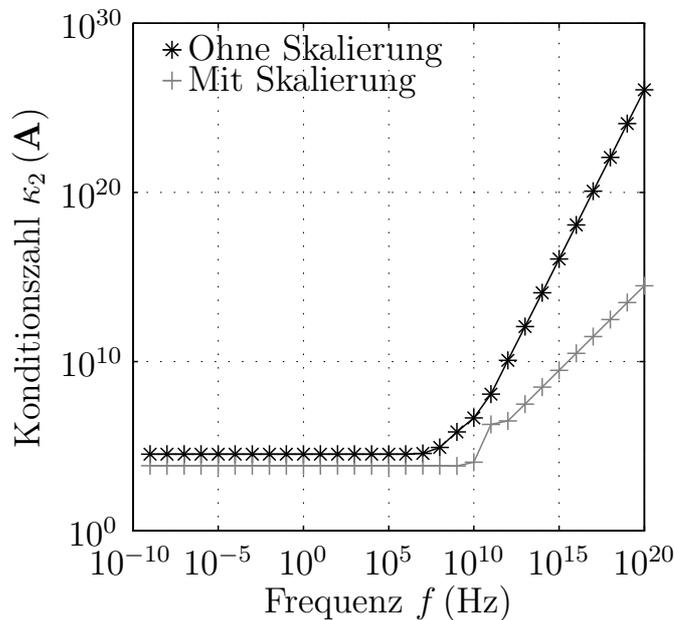


Abbildung 6.4.5: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit und ohne Skalierung.

wieder hergestellt werden. Ähnlich verhält es sich bei der stationären Eichung aus Abschnitt 6.3. Auch bei dieser Formulierung ergibt sich ein unsymmetrisches Gleichungssystem, wobei es in diesem Fall nicht möglich ist, durch eine geeignete Skalierung ein symmetrisches Gleichungssystem zu erhalten. Mit Hilfe eines zweistufigen Lösungsprozesses kann - wie schon im verlustlosen Fall - auch hier eine Reduktion der Anzahl der Unbekannten erreicht werden. Im verbleibenden reduzierten Gleichungssystem kann durch eine geeignete Skalierung eine symmetrische Systemmatrix erreicht werden. Die zuletzt vorgestellte gemischte Variationsformulierung hat den Vorteil, dass sie direkt auf ein symmetrisches Gleichungssystem führt, jedoch ist bei dieser Formulierung eine einfache Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Elimination eines der beiden Skalarpotenziale Ψ oder V wie bei den beiden anderen Formulierungen nicht möglich.

Eine Übersicht über einige wichtige Parameter der linearen Gleichungssysteme der verschiedenen Formulierungen ist in Tabelle 6.4 zusammengestellt. Insbesondere im Hinblick auf die Anzahl der Unbekannten sowie der Anzahl der Nichtnulleinträge in den Systemmatrizen zeigen sich hier deutliche Unterschiede zwischen den Formulierungen. Wie zuvor bereits erwähnt, stellt die höhere Anzahl an Unbekannten bei der stationären Eichung im Vergleich zur Baum-Kobaum-Eichung keinen wirklichen Nachteil dar, da ein zweistufiger Lösungsprozess, wie am Ende von Abschnitt 6.3.3 beschrieben, möglich ist. Im Fall der gemischten Formulierung wurde bei der Anzahl der Nichtnulleinträge in der Systemmatrix die Symmetrie der Systemmatrix nicht

| Polynomgrad p=2 | | Baum-Kobaum- Eichung | stationäre Eichung | gemischte Formulierung |
|--|-------------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|
| Unbekannte | | 26814 | 32124 | 32124 |
| Nichtnulleinträge | $f = 0$ Hz | 942335 | 1358082 | 1358082 |
| | $f > 0$ Hz | 1229908 | 1645655 | 2061402 |
| Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ | $f = 0$ Hz | $6.0 \cdot 10^5$ | $6.0 \cdot 10^5$ | $6.0 \cdot 10^5$ |
| | $f = 1$ fHz | $6.0 \cdot 10^5$ | $6.0 \cdot 10^5$ | $6.0 \cdot 10^5$ |
| | $f = 1$ Hz | $6.0 \cdot 10^5$ | $6.0 \cdot 10^5$ | $6.0 \cdot 10^5$ |
| | $f = 1$ THz | $4.0 \cdot 10^8$ | $4.0 \cdot 10^8$ | $2.0 \cdot 10^{11}$ |

Tabelle 6.4: Eigenschaften der Potenzialformulierungen im verlustlosen Fall: Vergleich der Anzahl der Unbekannten, der Nichtnulleinträge in den Systemmatrizen und der Konditionszahlen aller drei Formulierungen für Polynomgrad $p = 2$.

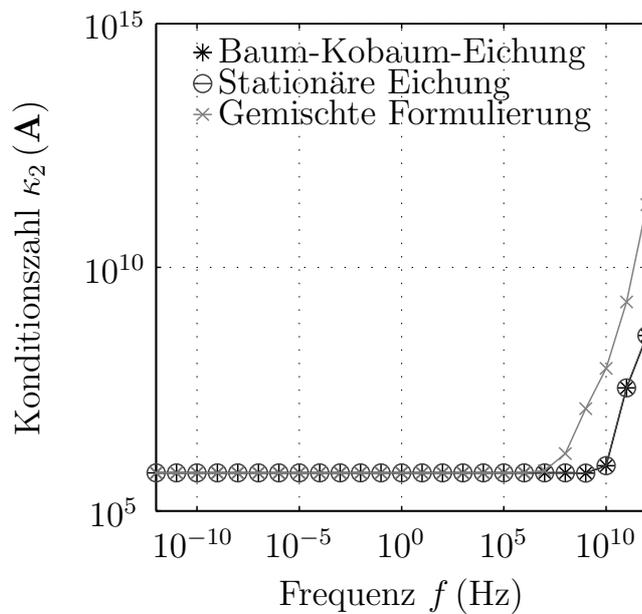


Abbildung 6.5.1: Vergleich der Konditionszahlen der Systemmatrizen im verlustbehafteten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrizen für das verlustbehaftete Resonator-Problem und Polynomgrad $p = 2$ in Abhängigkeit der Frequenz.

berücksichtigt.

Um die Frequenzabhängigkeit der Systemmatrizen der drei Formulierungen zu vergleichen, ist in Abbildung 6.5.1 für $p = 2$ die Konditionszahl der Systemmatrizen in Abhängigkeit der Frequenz für den bereits zuvor betrachteten verlustbehafteten Resonator aus Abbildung 6.1.2 dargestellt. Die Verschlechterung der Konditionszahlen bei hohen Frequenzen ergibt sich wie bereits erwähnt aus den unterschiedlichen Frequenzskalierungen der einzelnen Block-Matrizen. Hier zeigen sich leichte Nachteile

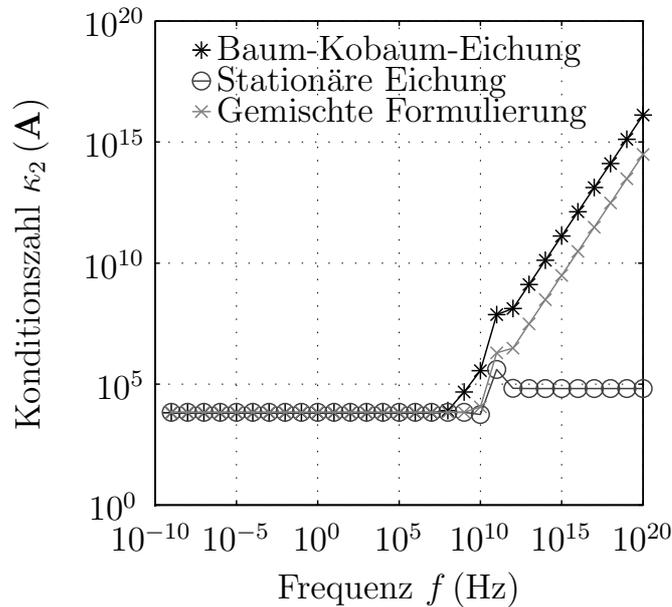


Abbildung 6.5.2: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrizen im verlustbehafteten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit Diagonalskalierung.

der gemischten Formulierung gegenüber den beiden anderen Formulierungen, da bei dieser die Verschlechterung der Konditionszahl des Gleichungssystems bereits früher beginnt. Wird eine Diagonalskalierung der Systemmatrizen durchgeführt, so ergeben sich die Verläufe nach Abbildung 6.5.2. Hier zeigen sich - wie im verlustlosen Fall - deutliche Vorteile bei der stationären Eichung im Vergleich zu den anderen Formulierungen, da diese auch bei hohen Frequenzen eine im Wesentlichen konstante Konditionszahl besitzt. Durch die Skalierung liegt die gemischte Formulierung was den Absolutwert betrifft besser als die Baum-Kobaum-Eichung, jedoch weisen beide Formulierungen ein sehr ähnliches asymptotisches Verhalten auf. Im Niederfrequenzbereich zeigen jedoch alle drei Formulierungen unabhängig ob mit oder ohne Skalierung ein sehr ähnliches Verhalten und weisen keine Niederfrequenzinstabilitäten auf.

Kapitel 7

Kopplung der Formulierungen an Grenzflächen

7.1 Allgemeines

Bisher wurden separat der rein verlustfreie und der rein verlustbehaftete Fall betrachtet und für beide Fälle spezielle Formulierungen hergeleitet, welche im jeweils anderen Fall überhaupt nicht oder nur bedingt anwendbar sind. Deshalb wird in diesem Kapitel auf eine geeignete Kopplung der vorgestellten Formulierungen an Grenzflächen zwischen Leitern und Nichtleitern eingegangen. Insbesondere sind an dieser Stelle die Übergangsbedingungen für die Feldgrößen aus Abschnitt 2.2 relevant, da diese erfüllt sein müssen, um das Auftreten unphysikalischer Quellen zu vermeiden. Das prinzipielle Vorgehen wird hierbei anhand des Modellproblems aus

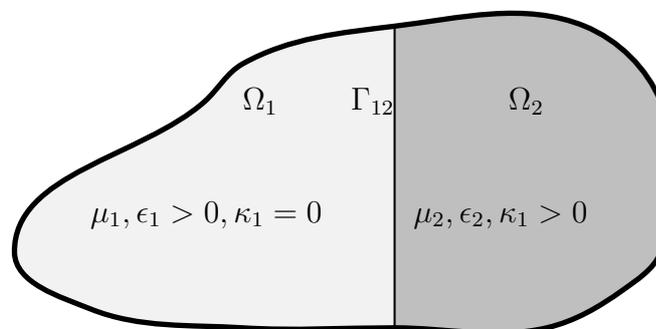


Abbildung 7.1.1: Modellproblem für die Kopplung der Formulierungen.

Abbildung 7.1.1 erläutert, welches aus zwei komplementären Teilgebieten mit

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad (7.1a)$$

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}, \quad (7.1b)$$

$$\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Gamma_{12}, \quad (7.1c)$$

$$\partial\Omega \cap \partial\Omega_1 = \Gamma_1, \quad (7.1d)$$

$$\partial\Omega \cap \partial\Omega_2 = \Gamma_2 \quad (7.1e)$$

besteht, wobei vorausgesetzt wird, dass für die Materialtensoren

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 > 0 & \text{in } \Omega_1 \\ \epsilon_2 > 0 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}, \quad (7.2a)$$

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 > 0 & \text{in } \Omega_1 \\ \mu_2 > 0 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}, \quad (7.2b)$$

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_1 = 0 & \text{in } \Omega_1 \\ \kappa_2 > 0 & \text{in } \Omega_2 \end{cases} \quad (7.2c)$$

gilt. Im Folgenden wird angenommen, dass in den beiden betrachteten Feldgebieten keine eingepprägten Quellen und nur homogene Randbedingungen vorliegen. Werden die Felder im Gebiet Ω_1 mit 1 und jene im Gebiet Ω_2 mit 2 indiziert, so ergeben sich aus Abschnitt 2.2 für die Potenziale auf Γ_{12} die Übergangsbedingungen

$$\mathbf{A}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_{12} = \mathbf{A}_2 \times \hat{\mathbf{n}}_{12}, \quad (7.3a)$$

$$V_1 = V_2. \quad (7.3b)$$

Wird hierbei in der ersten Gleichung die mögliche weitere Aufspaltung des Vektorpotenzials in reine Gradientenfelder und Felder mit nicht verschwindender Rotation berücksichtigt, so kann (7.3) zu den drei Bedingungen

$$\mathbf{A}_{c,1} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} = \mathbf{A}_{c,2} \times \hat{\mathbf{n}}_{12}, \quad (7.4a)$$

$$\Psi_1 = \Psi_2, \quad (7.4b)$$

$$V_1 = V_2 \quad (7.4c)$$

erweitert werden. Da für die Potenziale $\mathbf{A}_c \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega)$, $\Psi \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ und $V \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ gilt, sind diese Bedingungen generell erfüllt. Im Hinblick auf die Kombination der unterschiedlichen Formulierungen werden im Einzelnen die Kopplung

- der Baum-Kobaum-Eichungen aus Abschnitt 5.2.5 und Abschnitt 6.2.4,
- der statischen Eichung aus Abschnitt 5.3 und der stationären Eichung aus Abschnitt 6.3,
- der gemischten Formulierungen aus Abschnitt 5.4 und Abschnitt 6.4,
- sowie abschließend der Baum-Kobaum-Eichung aus Abschnitt 5.2.5 und der gemischten Formulierung aus Abschnitt 6.4

betrachtet.

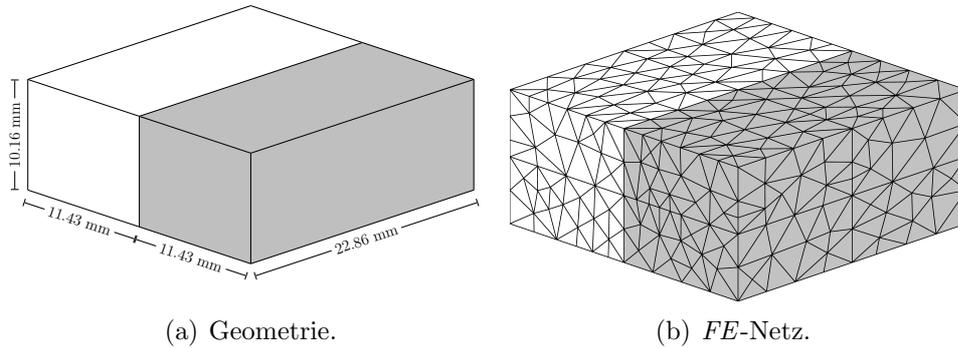


Abbildung 7.2.1: Teilweise mit verlustbehaftetem Dielektrikum gefüllter Resonator: Für die Materialeigenschaften gilt $\mu_1 = \mu_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\kappa_1 = 0$ im weißen Bereich und $\mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$, $\kappa_2 = 1 \frac{1}{\Omega_m}$ im grauen Bereich.

7.2 Testprobleme

Um die verschiedenen Formulierungen vergleichen zu können, werden als numerische Beispiele für alle vier betrachteten Kopplungen der zur Hälfte mit einem verlustbehafteten Dielektrikum gefüllte Resonator aus Abbildung 7.2.1, der Plattenkondensator aus Abbildung 7.2.2, das Koaxialkabel aus Abbildung 7.2.4, und der *RLC*-Serienschwingkreis aus Abbildung 7.2.3 betrachtet. Diese Beispiele werden deshalb zum Testen der Formulierungen herangezogen, da ein weites Spektrum an Phänomenen mit ihrer Hilfe abgebildet werden kann.

7.2.1 Teilweise gefüllter Resonator

Der teilweise gefüllte Resonator hat den Vorteil, dass in diesem Fall eine analytische Lösung des Problems existiert - vgl. [Bal89, S. 394ff], [Har01, S. 159ff] - wodurch eine Überprüfung der Korrektheit der numerisch berechneten Resultate möglich ist. Hierbei wird angenommen, dass das verlustbehaftete Dielektrikum, welches eine Hälfte des Resonators ausfüllt, die Eigenschaften

$$\epsilon_d = 2\epsilon_0, \tag{7.5a}$$

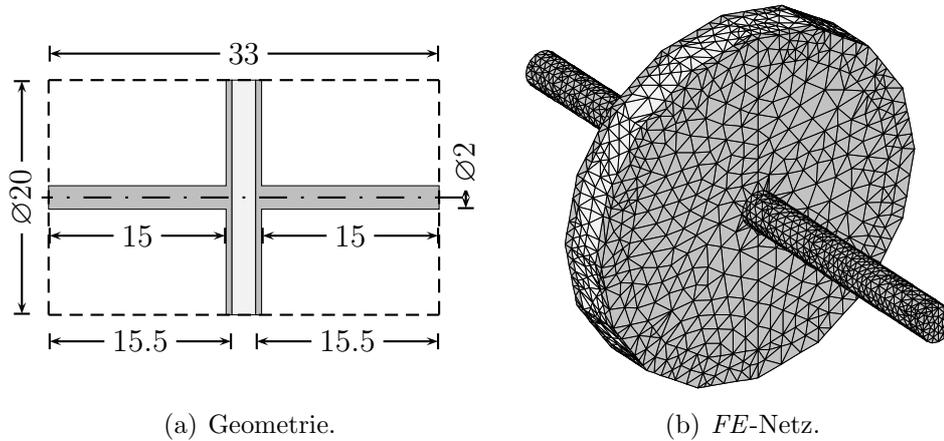
$$\mu_d = \mu_0, \tag{7.5b}$$

$$\kappa_d = 1 \frac{1}{\Omega_m} \tag{7.5c}$$

besitzt, während die Materialeigenschaften der zweiten Hälfte denen des Vakuums entsprechen. Auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ wird angenommen, dass überall

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{7.6}$$

gilt. Die Abmessungen der Struktur sind Abbildung 7.2.1 zu entnehmen.



(a) Geometrie.

(b) FE-Netz.

Abbildung 7.2.2: Plattenkondensator mit verlustlosem Dielektrikum: Das Dielektrikum hat die Materialeigenschaften $\epsilon_d = 2\epsilon_0$, $\mu_d = \mu_0$ und $\kappa_d = 0 \frac{1}{\Omega\text{m}}$. Verluste entstehen ausschließlich durch die Leitungen, welche die Materialeigenschaften $\epsilon_w = \epsilon_0$, $\mu_w = \mu_0$, und $\kappa_w = 10^6 \frac{1}{\Omega\text{m}}$ besitzen. Für die umgebende Luft werden Eigenschaften des Vakuums ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\kappa_a = 0 \frac{1}{\Omega\text{m}}$) angenommen. Alle Maße sind in mm angegeben.

7.2.2 Kondensator mit Dielektrikum

Zur Beurteilung des Niederfrequenzverhaltens der im Folgenden vorgestellten Formulierungen ist die Kondensator-Struktur aus Abbildung 7.2.2 sehr gut geeignet, da hier im Niederfrequenzfall die aus der Netzwerktheorie bekannte Admittanzbeziehung $I = j\omega CU$ zwischen Strom I und Spannung U mit der Kapazität C gilt. Die Geometrie der Struktur ist in Abbildung 7.2.2 abgebildet. Unter Vernachlässigung von Randeffekten entlang der Kanten der Kondensatorplatten kann die Kapazität des Parallelplattenkondensators mit

$$C = 2\epsilon_0 \frac{A}{d} \approx 2.782 \text{ pF} \quad (7.7)$$

angegeben werden. Bei der Berechnung der Kapazität muss darauf geachtet werden, dass die Kondensator-Elektroden durch die Diskretisierung keine Kreise sondern Polygone, im vorliegenden Fall 16-Ecke, darstellen. Die Anregung erfolgt durch die Vorgabe eines konstanten Potentials von 1 V am linken Leiter Γ_l , während am Ende des rechten Leiters Γ_r ein konstantes Potential von 0 V vorgegeben wird. Die ganze Struktur wird in eine zylindrische Umgebung eingebettet, auf deren Rand Γ_e angenommen wird, dass die Normalkomponente der elektrischen und der magnetischen Flussdichte verschwinden, das heißt

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_e \quad (7.8a)$$

$$\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_e. \quad (7.8b)$$

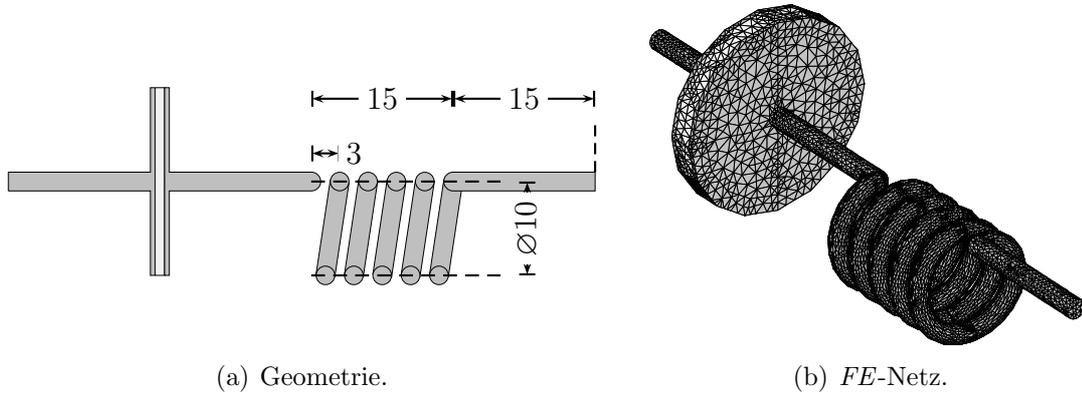


Abbildung 7.2.3: *RLC*-Serienschwingkreis: Die Abmessungen des Kondensators entsprechen jenen aus Abbildung 7.2.2. Alle Abmessungen sind in mm angegeben. Für die Leitungen wird $\epsilon_w = \epsilon_0$, $\mu_w = \mu_0$, $\kappa_w = 10^6 \frac{1}{\Omega\text{m}}$ angenommen. Für das verlustlose Dielektrikum des Plattenkondensators gilt $\epsilon_d = 2\epsilon_0$, $\mu_d = \mu_0$, $\kappa_d = 0 \frac{1}{\Omega\text{m}}$.

Diese beiden Bedingungen sind äquivalent zu

$$\mathbf{A}_c \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_e, \quad (7.9a)$$

$$\{\epsilon [-\nabla V - jk_0 (\mathbf{A}_c + \nabla\Psi)]\} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_e. \quad (7.9b)$$

Insbesondere ergeben sich durch diese Wahl für den Fall $k_0 \rightarrow 0$ homogene Dirichlet-Randbedingungen für das Vektorpotenzial und homogene Neumann-Randbedingungen für das Skalarpotenzial auf dem Rand Γ_e . Diese Wahl der Bedingungen auf dem umgebenden Rand entspricht im Wesentlichen jenen aus [HKO08].

7.2.3 *RLC*-Serienschwingkreis

Der *RLC*-Serienschwingkreis aus Abbildung 7.2.3 ist von Interesse, da hier elektrische und magnetische Phänomene gleichermaßen eine wichtige Rolle spielen. Die Abmessungen des Kondensators des Schwingkreises entsprechen gerade jenen des Kondensators aus Abbildung 7.2.2. Die Spule selbst hat eine Länge $l_i = 15$ mm, einen Durchmesser $d_i = 10$ mm und eine Ganghöhe von $h_i = 3$ mm. Der Durchmesser des Spulendrahtes entspricht jenem der Zuleitungen des Kondensators. Der Widerstand R des Schwingkreises wird nicht explizit modelliert sondern implizit durch die Leitungen mit endlicher Leitfähigkeit zwischen Kondensator und Spule dargestellt. Die Randbedingungen entsprechen jenen des Kondensators, das heißt, die Anregung erfolgt über die Vorgabe eines konstanten Potentials von 1 V am linken Leiter, während das rechte Leiterende auf 0 V gehalten wird. Ebenso wie der Kondensator wird die Struktur in eine zylindrische Umgebung eingebettet, auf deren Rand wie in Abschnitt 7.2.2 das Verschwinden der elektrischen und der magnetischen Flussdichte angenommen wird.

7.2.4 Koaxialkabel

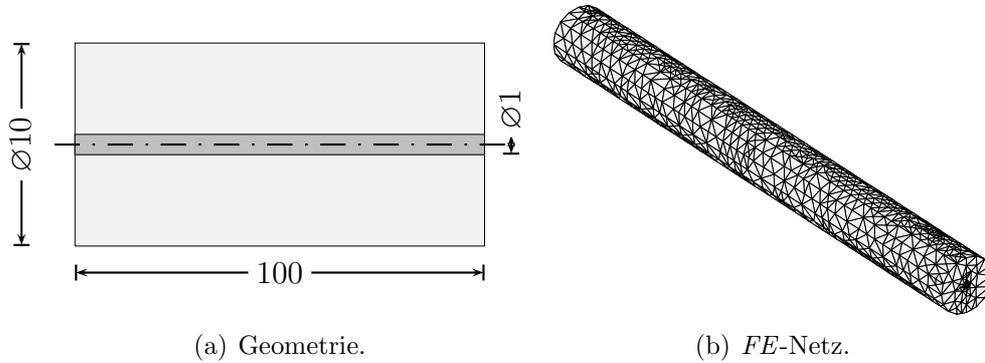


Abbildung 7.2.4: Stück eines Koaxialkabels: Alle Abmessungen sind in mm angegeben. Für das Dielektrikum zwischen Außen- und Innenleiter gilt $\mu_d = \mu_0$, $\epsilon_d = 2.25\epsilon_0$, $\kappa_d = 0 \frac{1}{\Omega\text{m}}$ und für den Innenleiter $\mu_c = \mu_0$, $\epsilon_c = \epsilon_0$, $\kappa_c = 10^4 \frac{1}{\Omega\text{m}}$.

Anhand des Koaxialkabels soll deutlich gemacht werden, dass die vorgestellten Formulierungen, obwohl zur Beseitigung einer Niederfrequenzinstabilität entworfen, auch Wellenphänomene korrekt abbilden. Um zu kleine Eindringtiefen bei höheren Frequenzen zu vermeiden, wird die Leitfähigkeit des Innenleiters κ_c des Koaxial-Kabels mit $10^4 (\Omega\text{m})^{-1}$ geringer angenommen, als jene der Leitungen in den beiden Beispielen aus Abschnitt 7.2.2 und Abschnitt 7.2.3. Diese Annahme erfolgt, da die Auflösung der geringen Eindringtiefen ansonsten sehr feine Netze in der Grenzschicht zwischen Leiter und umgebendem Medium erfordert. Weiterhin wird angenommen, dass das Dielektrikum aus Polyethylen besteht, woraus sich eine relative Permittivität von $\epsilon_{d,r} \approx 2.25$ ergibt. Für die Rechnungen wird das Koaxialkabel am rechten Rand kurzgeschlossen, sodass der rechte Rand sowie der Außenleiter als homogene Dirichlet-Randbedingungen modelliert werden können. Am linken Rand wird für den Leiter ein örtlich konstantes, zeitharmonisches Potenzial von 1 V vorgegeben, während auf dem umgebenden Dielektrikum das Verschwinden der Normalkomponenten der elektrischen und der magnetischen Flussdichten angenommen wird.

7.3 Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen

7.3.1 Schwache Formulierung

Ausgangspunkt zur Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen sind die jeweiligen Gleichungen (5.15) und (6.10) der schwachen Formulierungen in den Einzelgebieten. Dabei muss auf der rechten Seite jeweils das entsprechende Oberflächenintegral über die Grenzfläche Γ_{12} berücksichtigt werden. Weiterhin wird für die vektoriel-

len Testfunktionen sowie das Vektorpotenzial vorausgesetzt, dass sie eine nicht verschwindende Rotation besitzen. Somit gilt

$$S^{\nu_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \mathbf{a}_{c,1}) = b_H^{12}(\mathbf{a}_{c,1}), \quad (7.10a)$$

$$jk_0 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \nabla v_1) + T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \nabla v_1) = \frac{b_H^{12}(\nabla v_1)}{jk_0} \quad (7.10b)$$

in Ω_1 und

$$S^{\nu_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) = b_H^{21}(\mathbf{a}_{c,2}), \quad (7.11a)$$

$$jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \nabla v_2) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \nabla v_2) + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \nabla v_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \nabla v_2) = b_H^{21}(\nabla v_2) \quad (7.11b)$$

in Ω_2 . Für die verwendeten Bilinear- und Linearformen gilt hierbei

$$S^{\nu_i}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega_i} \nabla \times \mathbf{w} \cdot (\nu_{i,r} \nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (7.12a)$$

$$T^{\kappa_i}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \eta_0 \int_{\Omega_i} \mathbf{w} \cdot (\kappa_i \mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (7.12b)$$

$$T^{\epsilon_i}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega_i} \mathbf{w} \cdot (\epsilon_{i,r} \mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (7.12c)$$

$$b_H^{ij}(\mathbf{w}) = \eta_0 \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}_{ij}) \, d\Gamma. \quad (7.12d)$$

Da vorausgesetzt wird, dass keine Flächenstromdichte \mathbf{K}_{12} innerhalb der Grenzfläche Γ_{12} vorliegt, sind dort die Tangentialkomponenten der magnetischen Erregung nach (2.18) stetig, und mit $\hat{\mathbf{n}}_{12} = -\hat{\mathbf{n}}_{21}$ folgt

$$b_H^{12}(\mathbf{a}_{c,1}) = -b_H^{21}(\mathbf{a}_{c,2}) \quad \forall \mathbf{a}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,2} \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega) \quad (7.13)$$

sofern

$$\mathbf{a}_{c,1} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} = \mathbf{a}_{c,2} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} \quad \text{auf } \Gamma_{12} \quad (7.14)$$

gilt. Die Durchflutungssätze in den beiden Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 können daher zu

$$S^{\nu_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \mathbf{a}_{c,1}) + S^{\nu_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) = 0. \quad (7.15)$$

zusammengefasst werden. Für zwei Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ gilt darüber hinaus

$$S^{\nu_1}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + S^{\nu_2}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega_1} \nabla \times \mathbf{w} \cdot (\nu_{1,r} \nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \nabla \times \mathbf{w} \cdot (\nu_{2,r} \nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (7.16a)$$

$$= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \nabla \times \mathbf{w} \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (7.16b)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w} \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{v}) \, d\Omega = S^\nu(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (7.16c)$$

und analog für die anderen Bilinearformen

$$T^{\kappa_1}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + T^{\kappa_2}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \eta_0 \int_{\Omega_1} \mathbf{w} \cdot (\kappa_1 \mathbf{v}) \, d\Omega + \eta_0 \int_{\Omega_2} \mathbf{w} \cdot (\kappa_2 \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (7.17a)$$

$$= \eta_0 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \mathbf{w} \cdot (\kappa \mathbf{v}) \, d\Omega = \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\kappa \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (7.17b)$$

$$= T^\kappa(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (7.17c)$$

$$T^{\epsilon_1}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + T^{\epsilon_2}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega_1} \mathbf{w} \cdot (\epsilon_{1,r} \mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \mathbf{w} \cdot (\epsilon_{2,r} \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (7.18a)$$

$$= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \mathbf{w} \cdot (\epsilon \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\epsilon \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (7.18b)$$

$$= T_\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (7.18c)$$

Daher kann anstatt der beiden getrennten Gleichungen (7.10a) in Ω_1 und (7.11a) in Ω_2 zusammen mit den Übergangsbedingungen (2.18) entlang der Grenzfläche auch

$$S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\kappa(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + T^\kappa(\nabla V, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\epsilon(\nabla V, \mathbf{a}_c) = 0 \quad (7.19)$$

in ganz $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ betrachtet werden.

Anders verhält es sich bei den beiden verbleibenden Gleichungen (7.10b) und (7.11b), da der Durchflutungssatz im verlustfreien Gebiet durch die elektrische Flussbilanz und im verlustbehafteten Gebiet durch die Kontinuitätsgleichung ergänzt werden

muss. In den jeweiligen Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 lauten deren schwache Formulierungen nach (5.15) beziehungsweise (6.10) unter Berücksichtigung des Γ_{12} zugeordneten Grenzflächenterms

$$jk_0 T^{\epsilon_1} (\mathbf{A}_{c,1}, \nabla v_1) + T^{\epsilon_1} (\nabla V_1, \nabla v_1) = \frac{1}{jk_0} b_H^{12} (\nabla v_1), \quad (7.20a)$$

$$jk_0 T^{\kappa_2} (\mathbf{A}_{c,2}, \nabla v_2) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2} (\mathbf{A}_{c,2}, \nabla v_2) + T^{\kappa_2} (\nabla V_2, \nabla v_2) + jk_0 T^{\epsilon_2} (\nabla V_2, \nabla v_2) = b_H^{21} (\nabla v_2). \quad (7.20b)$$

Eine direkte Addition der Gleichungen ist in diesem Fall nicht sinnvoll, da sie unterschiedliche physikalische Einheiten besitzen. Eine generelle Skalierung von (7.10b) mit jk_0 führt zwar zu kompatiblen Dimensionen der Gleichungen, hat jedoch den Nachteil, dass hierdurch im statischen Grenzfall der Beitrag des verlustfreien Gebietes zum Gleichungssystem nicht mehr berücksichtigt wird und somit eine singuläre Systemmatrix resultiert. Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems besteht in der separaten Betrachtung der unterschiedlichen Testfunktionen. Hierfür sind die folgenden drei Fälle von Bedeutung:

- $v_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$,
- $v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$,
- $v_{12} \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_{12}) = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid v \neq 0 \text{ auf } \Gamma_{12}\}$.

In den ersten beiden Fällen ist eine Kopplung der Gleichungen nicht erforderlich. Im ersten Fall liegt der Träger der Testfunktion vollständig innerhalb des verlustlosen Gebietes Ω_1 und im zweiten Fall liegt der Träger vollständig innerhalb des verlustbehafteten Gebietes Ω_2 . Infolgedessen ergeben sich keine Beiträge der Randterme auf Γ_{12} und die Formulierungen der Einzelgebiete können beibehalten werden. Im dritten Fall gibt es jedoch Beiträge, sowohl aus dem verlustfreien Gebiet Ω_1 als auch aus dem verlustbehafteten Gebiet Ω_2 , sodass eine geeignete Kopplung durchgeführt werden muss. Es zeigt sich allerdings, dass in diesem Fall eine einfache Skalierung der Gleichungen des verlustfreien Gebietes mit jk_0 und eine anschließende Addition der beiden Formulierungen möglich ist. Somit folgen für die drei Fälle die Gleichungen

$$jk_0 T^{\epsilon_1} (\mathbf{A}_{c,1}, \nabla v_1) + T^{\epsilon_1} (\nabla V_1, \nabla v_1) = 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1), \quad (7.21a)$$

$$jk_0 T^{\kappa_2} (\mathbf{A}_{c,2}, \nabla v_2) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2} (\mathbf{A}_{c,2}, \nabla v_2) + T^{\kappa_2} (\nabla V_2, \nabla v_2) + jk_0 T^{\epsilon_2} (\nabla V_2, \nabla v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1), \quad (7.21b)$$

$$(jk_0)^2 T^{\epsilon_1} (\mathbf{A}_{c,1}, \nabla v_{12}) + jk_0 T^{\epsilon_1} (\nabla V_1, \nabla v_{12}) + jk_0 T^{\kappa_2} (\mathbf{A}_{c,2}, \nabla v_{12}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2} (\mathbf{A}_{c,2}, \nabla v_{12}) + T^{\kappa_2} (\nabla V_2, \nabla v_{12}) + jk_0 T^{\epsilon_2} (\nabla V_2, \nabla v_{12}) = 0 \quad \forall v_{12} \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_{12}). \quad (7.21c)$$

In den ersten beiden Gleichungen fällt die rechte Seite weg, da die Testfunktionen auf der Grenzfläche verschwinden, während sich die Terme der rechten Seiten in der letzten Gleichung aufgrund entgegengesetzter Vorzeichen beim Bilden der Linearkombination gegenseitig aufheben. Insgesamt ergibt sich daher für das gesamte Feldgebiet Ω die schwache Formulierung

$$S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\kappa(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + (jk_0)^2 T_\epsilon(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + T_\kappa(\nabla V, \mathbf{a}_c) + jk_0 T_\epsilon(\nabla V, \mathbf{a}_c) = 0 \quad \forall \mathbf{a}_c \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega), \quad (7.22a)$$

$$jk_0 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_c, \nabla v_1) + T_{\epsilon_1}(\nabla V, \nabla v_1) = 0 \quad \forall v_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1), \quad (7.22b)$$

$$jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_c, \nabla v_2) + (jk_0)^2 T_{\epsilon_2}(\mathbf{A}_c, \nabla v_2) + T^{\kappa_2}(\nabla V, \nabla v_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V, \nabla v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2), \quad (7.22c)$$

$$(jk_0)^2 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_c, \nabla v_{12}) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V, \nabla v_{12}) + jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_c, \nabla v_{12}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_c, \nabla v_{12}) + T^{\kappa_2}(\nabla V, \nabla v_{12}) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V, \nabla v_{12}) = 0 \quad \forall v_{12} \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_{12}). \quad (7.22d)$$

7.3.2 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Auf der Grundlage des in Abschnitt 7.3.1 erläuterten Vorgehens wird im Folgenden gezeigt, wie die entsprechende Kopplung für die *FE*-Gleichungssysteme durchgeführt werden kann. Ausgangspunkt sind hierbei die Gleichungssysteme der Teilformulierungen (5.84) und (6.30)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^{\nu_1} + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^{\epsilon_1} & jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^{\epsilon_1} \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^{\epsilon_1} & \mathbf{S}_{V V}^{\epsilon_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}_V^{\bar{\Omega}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c, H}^{\bar{\Omega}_1} \\ \frac{1}{jk_0} \mathbf{b}_{V, H}^{\bar{\Omega}_1} \end{bmatrix}, \quad (7.23)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A_c A_c}^{\nu_2} + jk_0 \mathbf{T}_{A_c A_c}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^{\epsilon_2} & \mathbf{M}_{A_c V}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^{\epsilon_2} \\ jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{V A_c}^{\epsilon_2} & \mathbf{S}_{V V}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{S}_{V V}^{\epsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{x}_V^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c, H}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{b}_{V, H}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Für die Kopplung wird im Weiteren eine Aufspaltung der Variablen in jene innerhalb der Teilgebiete und jene am Rand von Ω_1 und Ω_2 durchgeführt:

$$\mathbf{x}^{\Omega_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\Gamma_{12}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

$$\mathbf{x}^{\Omega_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\Gamma_{21}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}. \quad (7.26)$$

In der gleichen Art und Weise werden auch die Systemmatrizen und die rechten Seiten aufgeteilt. Das Gesamtgleichungssystem kann hiermit in der Form

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\overline{\Omega}} \widehat{\mathbf{x}}^{\overline{\Omega}} = \widehat{\mathbf{b}}^{\overline{\Omega}}, \quad (7.27a)$$

mit

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\overline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\overline{\Omega}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\overline{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.27b)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}^{\overline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\overline{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}^{\overline{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.27c)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}^{\overline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\overline{\Omega}_1} \\ \mathbf{b}^{\overline{\Omega}_2} \end{bmatrix} \quad (7.27d)$$

sowie

$$\mathbf{A}^{\overline{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_1\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_1\Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_1\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1\Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{\Gamma_{12}\Omega_1}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Gamma_{12}\Omega_1}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Gamma_{12}}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Gamma_{12}}^{\Omega_1} \\ \mathbf{A}_{\Gamma_{12}\Omega_1}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1} \end{bmatrix}, \quad (7.27e)$$

$$\mathbf{x}^{\overline{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{\Omega_1}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{\Gamma_{12}}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \end{bmatrix}, \quad (7.27f)$$

$$\mathbf{b}^{\overline{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{Ac,H}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{b}_{V,H}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.27g)$$

$$\mathbf{A}^{\overline{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_2\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{\Gamma_{21}\Omega_2}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}\Omega_2}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}}^{\Omega_2} \\ \mathbf{A}_{\Gamma_{21}\Omega_2}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad (7.27h)$$

$$\mathbf{x}^{\overline{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_{\Omega_2}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_{\Gamma_{21}}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad (7.27i)$$

$$\mathbf{b}^{\overline{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{Ac,H}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{b}_{V,H}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.27j)$$

angegeben werden. Die eingangs erwähnten Stetigkeitsbedingungen für die Felder (7.3) führen im Diskreten aufgrund der gewählten Ansätze zu

$$\mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{12}} = \mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{21}}, \quad (7.28a)$$

$$\mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}} = \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}}, \quad (7.28b)$$

sodass der Vektor der unbekanntenen Koeffizienten $\mathbf{x}^{\bar{\Omega}}$ in der Form

$$\widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{W} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}}, \quad (7.29)$$

mit

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Omega_1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Omega_2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.30a)$$

$$\mathbf{x}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \quad (7.30b)$$

angegeben werden kann. Mit N_{Ω_1} , $N_{\Gamma_{12}}$ und N_{Ω_2} wird hierbei die jeweilige Dimension der Vektoren \mathbf{x}^{Ω_1} , $\mathbf{x}^{\Gamma_{12}}$ und \mathbf{x}^{Ω_2} bezeichnet. Somit verbleibt nur der reduzierte Koeffizientenvektor und die entsprechende Systemmatrix des *FE*-Gleichungssystems ergibt sich aus der Multiplikation der ursprünglichen Systemmatrix von rechts mit der Matrix \mathbf{W} aus (7.30a). Um ein eindeutig lösbares Gleichungssystem mit einer quadratischen Systemmatrix zu erhalten, wird das Gleichungssystem von links mit der Matrix \mathbf{V}^T

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Omega_1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{\Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Omega_2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.31a)$$

mit

$$\mathbf{V}_{\Gamma_{12}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12},Ac}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & jk_0 \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12},V}} \end{bmatrix} \quad (7.31b)$$

multipliziert, was der Bildung der in Abschnitt 7.3.1 angesprochenen Linearkombinationen der Gleichungen für die Unbekannten auf der Grenzfläche entspricht. Für die rechte Seite $\mathbf{b}^{\bar{\Omega}}$ von (7.27a) führt dies dazu, dass die Grenzflächenbeiträge wegen

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Omega_1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{\Gamma_{12}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Omega_2}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.32)$$

entfallen. Für die Systemmatrix $\mathbf{A}^{\bar{\Omega}}$ ergibt sich infolgedessen die Darstellung

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\Omega_1} & \mathbf{A}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_{\Gamma_{12}}^T \mathbf{A}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{V}_{\Gamma_{12}}^T \mathbf{A}^{\Gamma_{12}} + \mathbf{A}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}^{\Gamma_{21} \Omega_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad (7.33)$$

$$\mathbf{x}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{W} \widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}}, \quad (7.34)$$

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}}. \quad (7.35)$$

Insbesondere im statischen beziehungsweise stationären Grenzfall ergibt sich, aufgrund des Faktors jk_0 in der Matrix $\mathbf{V}_{\Gamma_{12}}$ nach (7.31a), dass die Unbekannten $\mathbf{x}_V^{\Omega_1}$ des verlustfreien Gebietes Ω_1 keinen Einfluss mehr auf die Unbekannten $\mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}}$ der Grenzfläche Γ_{12} haben. Dies stellt jedoch keine Niederfrequenzinstabilität der kombinierten Formulierung dar, sondern spiegelt die Tatsache wider, dass im Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ die stationären Strömungsfelder innerhalb des leitfähigen Gebietes Ω_2 unabhängig von der nicht leitenden Umgebung bestimmt werden können. Die sich hieraus ergebende Lösung im verlustbehafteten Gebiet kann dann als zusätzliche Randbedingung bei der Bestimmung der Lösung im verlustfreien Gebiet verwendet werden. Bei einer nicht verschwindenden Wellenzahl $k_0 > 0$ sind die Felder in beiden Gebieten jedoch über die Randterme miteinander gekoppelt.

7.3.3 Numerische Ergebnisse

Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit der Formulierung, welche sich durch Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen ergibt, werden im Folgenden die vier Beispiele aus Abschnitt 7.2 betrachtet. Für den teilweise gefüllten Resonator wird nur das zugeordnete Eigenwertproblem betrachtet, während für die anderen drei Beispiele ein Anregungsproblem gelöst wird.

Teilweise gefüllter Resonator

Ein Vergleich der analytisch bestimmten Eigenwerte sowie der numerisch berechneten Eigenwerte für das Resonator-Problem ist in Tabelle 7.1 für die ersten dominanten Moden und $p = 1, 2, 3$ dargestellt. Wie im rein verlustlosen und im rein verlustbehafteten Fall zeigt sich auch hier eine sehr gute Übereinstimmung zwischen analytischer und numerischer Lösung. Die resultierenden relativen Fehler liegen hierbei in etwa in der Größenordnung, wie sie für das betrachtete Beispiel bereits in der Literatur [GBB⁺96], [ZC02] angegeben sind. Wie aus Abbildung 7.3.1 hervorgeht, treten auch bei der Kopplung der gemischten Formulierungen die im Rahmen der Feldformulierung diskutierten unphysikalischen, rein reellen und negativen Eigenwerte auf. Im Hinblick auf die Niederfrequenzeigenschaften stellen diese kein Problem dar, da sie alle ungleich null sind.

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|------------------------|------------------------|
| TE_{110} | $-80.9938 + 137.8768j$ | $1.5 \cdot 10^{-2}$ | $1.6564 \cdot 10^{-3}$ | $8.0646 \cdot 10^{-5}$ |
| TE_{120} | $-86.9455 + 225.1187j$ | $4.0 \cdot 10^{-4}$ | $4.7698 \cdot 10^{-4}$ | $1.3291 \cdot 10^{-5}$ |
| TM_{111} | $-90.1138 + 236.9469j$ | $5.0 \cdot 10^{-3}$ | $6.3790 \cdot 10^{-4}$ | $1.6659 \cdot 10^{-5}$ |
| TE_{101} | $-88.0214 + 247.8733j$ | $7.1 \cdot 10^{-3}$ | $4.6030 \cdot 10^{-5}$ | $7.4168 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{210} | $-37.2556 + 264.4426j$ | $1.5 \cdot 10^{-2}$ | $1.5222 \cdot 10^{-3}$ | $4.7722 \cdot 10^{-5}$ |
| TE_{111} | $-88.7995 + 267.3251j$ | $5.7 \cdot 10^{-3}$ | $1.0601 \cdot 10^{-3}$ | $2.3509 \cdot 10^{-6}$ |
| TM_{121} | $-91.1661 + 290.7462j$ | $7.8 \cdot 10^{-4}$ | $3.5157 \cdot 10^{-3}$ | $9.8319 \cdot 10^{-6}$ |

Tabelle 7.1: Eigenwerte im gemischten Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des teilweise mit einem verlustbehafteten Dielektrikum gefüllten Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

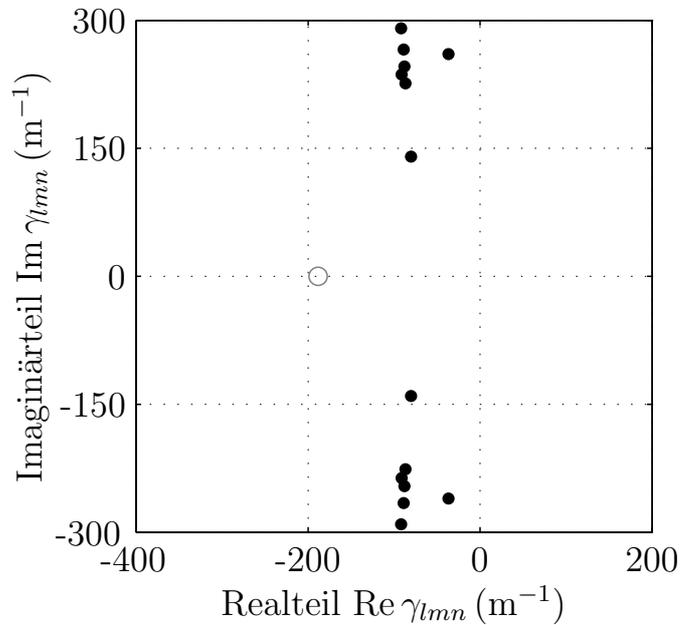


Abbildung 7.3.1: Eigenwertverteilung im gemischten Fall: Lage der Eigenwerte des teilweise gefüllten Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte, unphysikalische Eigenwerte als Kreise dargestellt.

Kondensator

Als erstes Anregungsproblem wird der Kondensator aus Abbildung 7.2.2 betrachtet. Die resultierenden Feldverläufe für die elektrische Feldstärke \mathbf{E} , die elektrische Stromdichte

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (7.36)$$

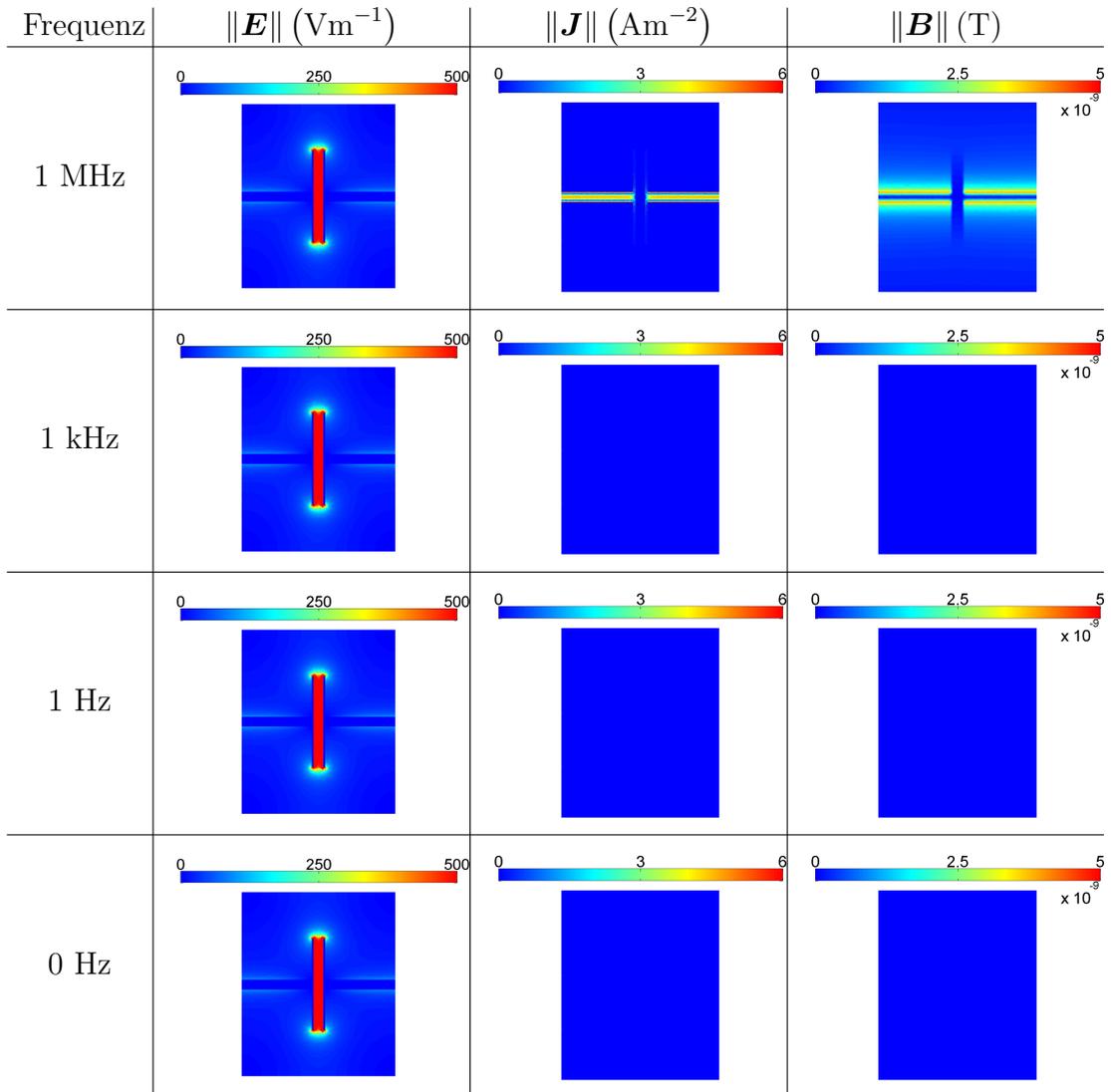


Abbildung 7.3.2: Feldverläufe des Kondensator-Beispiels für die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

und die magnetische Flussdichte \mathbf{B} sind für die Frequenzen $f = 1 \text{ MHz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ Hz}$ sowie den statischen Grenzfall $f = 0 \text{ Hz}$ in Abbildung 7.3.2 dargestellt. Das elektrische Feld ist bei den betrachteten Frequenzen im wesentlichen auf den Bereich zwischen den Kondensatorplatten beschränkt. Nennenswerte Ströme und damit auch Magnetfelder treten erst bei höheren Frequenzen auf. Hier zeigt sich im Verlauf der elektrischen Stromdichte dann auch deutlich der Skineneffekt. In Abbildung 7.3.3 ist der Verlauf des Betrags der Admittanz

$$Y = \frac{I}{U} \quad (7.37)$$

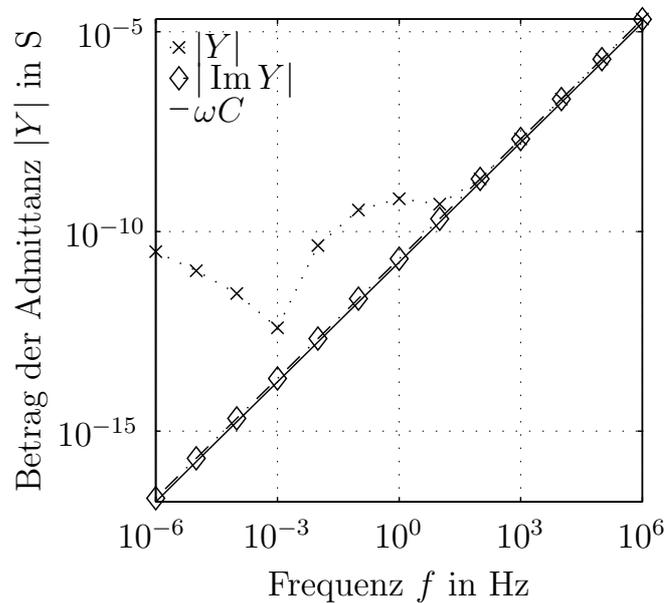


Abbildung 7.3.3: Admittanz des Kondensators: Verlauf der Admittanz $Y = \frac{I}{U}$ der Kondensator-Struktur in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$.

in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Zusätzlich ist jeweils der Verlauf der Größe

$$Y_C = j\omega C \quad (7.38)$$

mit der Kapazität C aus (7.7) zum Vergleich dargestellt. Bei höheren Frequenzen zeigt sich grundsätzlich eine gute Übereinstimmung zwischen numerisch und analytisch berechneter Kapazität. Insbesondere die lineare Abhängigkeit von der Frequenz wird sehr gut wiedergegeben. Die Abweichungen in diesem Bereich lassen sich im Wesentlichen durch die Vernachlässigung von Randeffekten bei der Bestimmung von C nach (7.7) erklären. Bei niedrigeren Frequenzen kommt es jedoch zu deutlichen Abweichungen. Der Grund hierfür sind Rundungsfehler bei der Bestimmung der elektrischen Feldstärke. Wie anhand von Abbildung 7.3.2 zu erkennen ist, liegt der Betrag der elektrischen Feldstärke in der Größenordnung von 10^3 Vm^{-1} . Aufgrund der rundungsfehlerbehafteten Rechnungen liegt der Betrag der Feldstärke bei diesen niedrigen Frequenzen innerhalb der Zuleitung in der Größenordnung von 10^{-10} Vm^{-1} . Im Vergleich zu den maximal vorkommenden Feldstärken ist dies aus numerischer Sicht quasi null. Zur Berechnung des Leitungsstroms werden diese Feldstärken jedoch mit einer Leitfähigkeit $\kappa = 10^6 (\Omega\text{m})^{-1}$ multipliziert, sodass sich Stromdichten von etwa 10^{-4} Am^{-2} ergeben. Zur Berechnung der Admittanz müssen diese Stromdichten über den Leiterquerschnitt integriert werden, welcher ca. 10^{-6} m^2 beträgt, sodass hieraus insgesamt Ströme im Bereich 10^{-10} A folgen. Ist die Frequenz entsprechend klein, dominieren diese reellen Fehlerströme im Vergleich zu den sehr kleinen, aber immernoch korrekt berechneten Imaginärteilen, welche ebenfalls in Abbildung 7.3.3 zu sehen sind. Um dies weiter zu verdeutlichen, ist in Abbildung 7.3.4 noch einmal

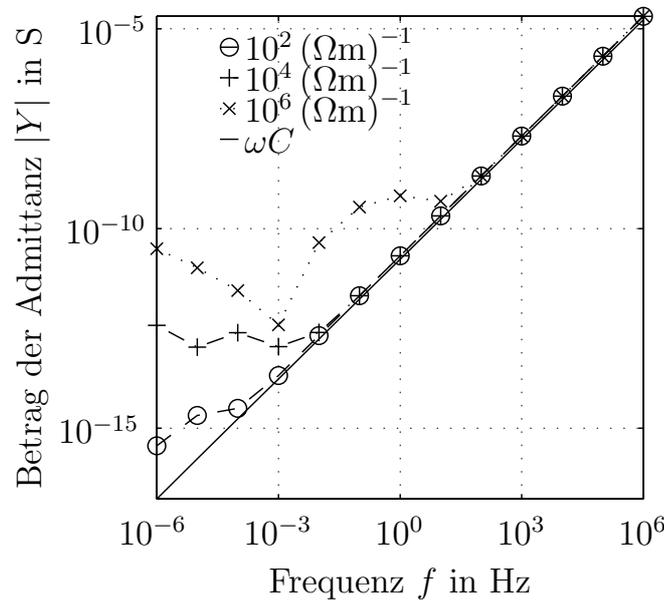


Abbildung 7.3.4: Einfluss der Leitfähigkeit auf die berechnete Admittanz des Kondensators: Verlauf der Admittanz $Y = \frac{I}{U}$ der Kondensator-Struktur für $\kappa = 10^2, 10^4, 10^6 (\Omega\text{m})^{-1}$ in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$.

der Verlauf der Admittanz dargestellt, jedoch für verschiedene Werte der Leitfähigkeit κ . Hier zeigt sich, dass mit sinkender Leitfähigkeit - und somit auch sinkender Verstärkung - der Rundungsfehler innerhalb des leitfähigen Bereichs abnimmt. Die numerisch bestimmte Admittanz folgt daher über einen immer breiteren Frequenzbereich dem erwarteten, zur Frequenz proportionalen Verlauf.

RLC-Serienschwingkreis

In Abbildung 7.3.5 sind die numerisch berechneten Feldverläufe des *RLC*-Schwingkreises für $f = 1$ MHz, 1 kHz, 1 Hz und den statischen Grenzfall $f = 0$ Hz dargestellt. Aufgrund des Kondensators treten nennenswerte Ströme und somit auch Magnetfelder erst bei höheren Frequenzen auf. Im Verlauf der elektrischen Stromdichte ist der Skineneffekt gut erkennbar. Im Gegensatz zum Kondensatorbeispiel ist das Magnetfeld im vorliegenden Fall im Wesentlichen auf das Innere der Spule beschränkt.

Koaxialkabel

Als abschließendes Beispiel wird das am rechten Ende kurzgeschlossene Koaxialkabel aus Abbildung 7.2.4 betrachtet. In Abbildung 7.3.6 sind die Feldverläufe für die

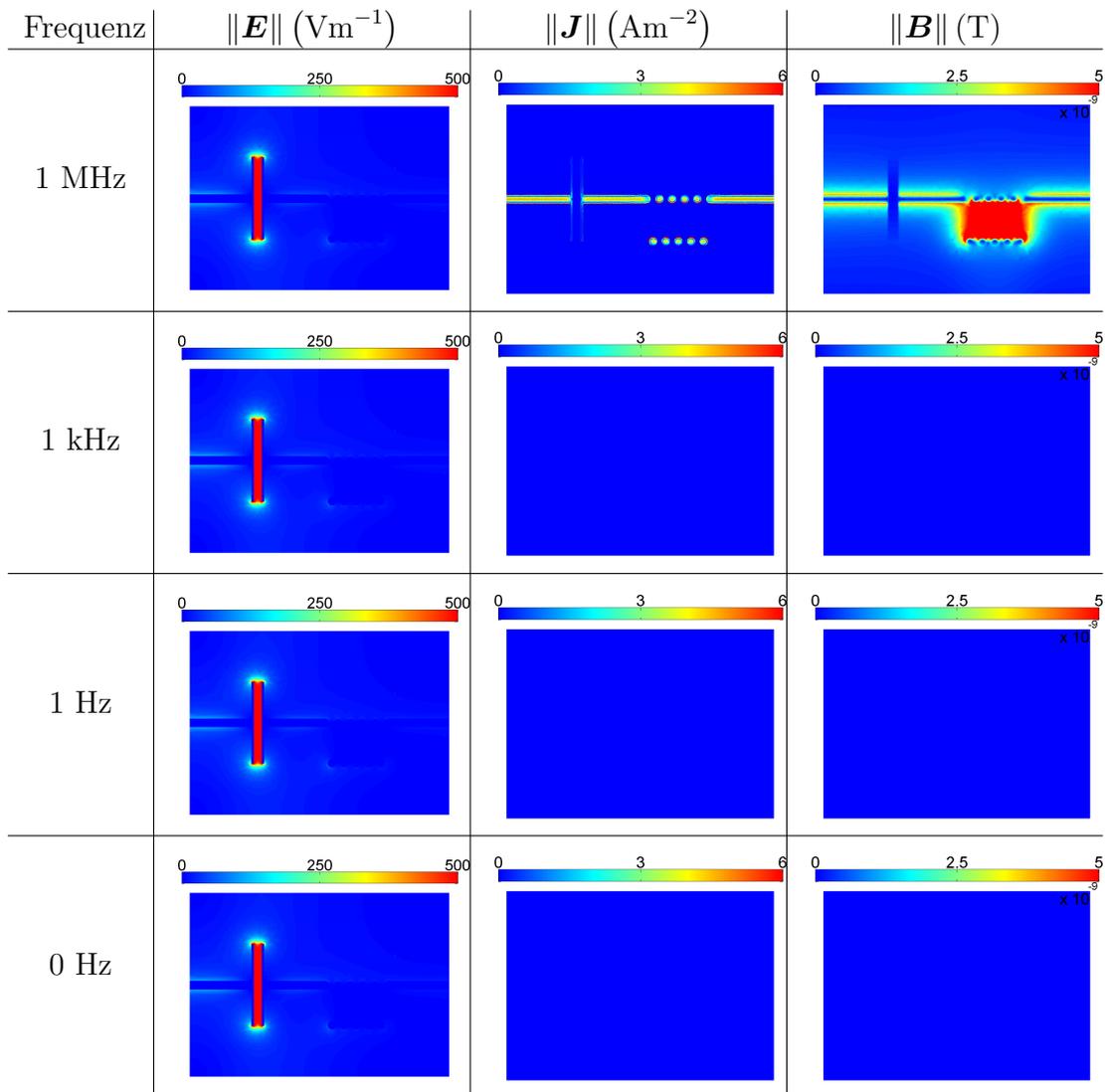


Abbildung 7.3.5: Feldverläufe des RLC -Schwingkreis-Beispiels für die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

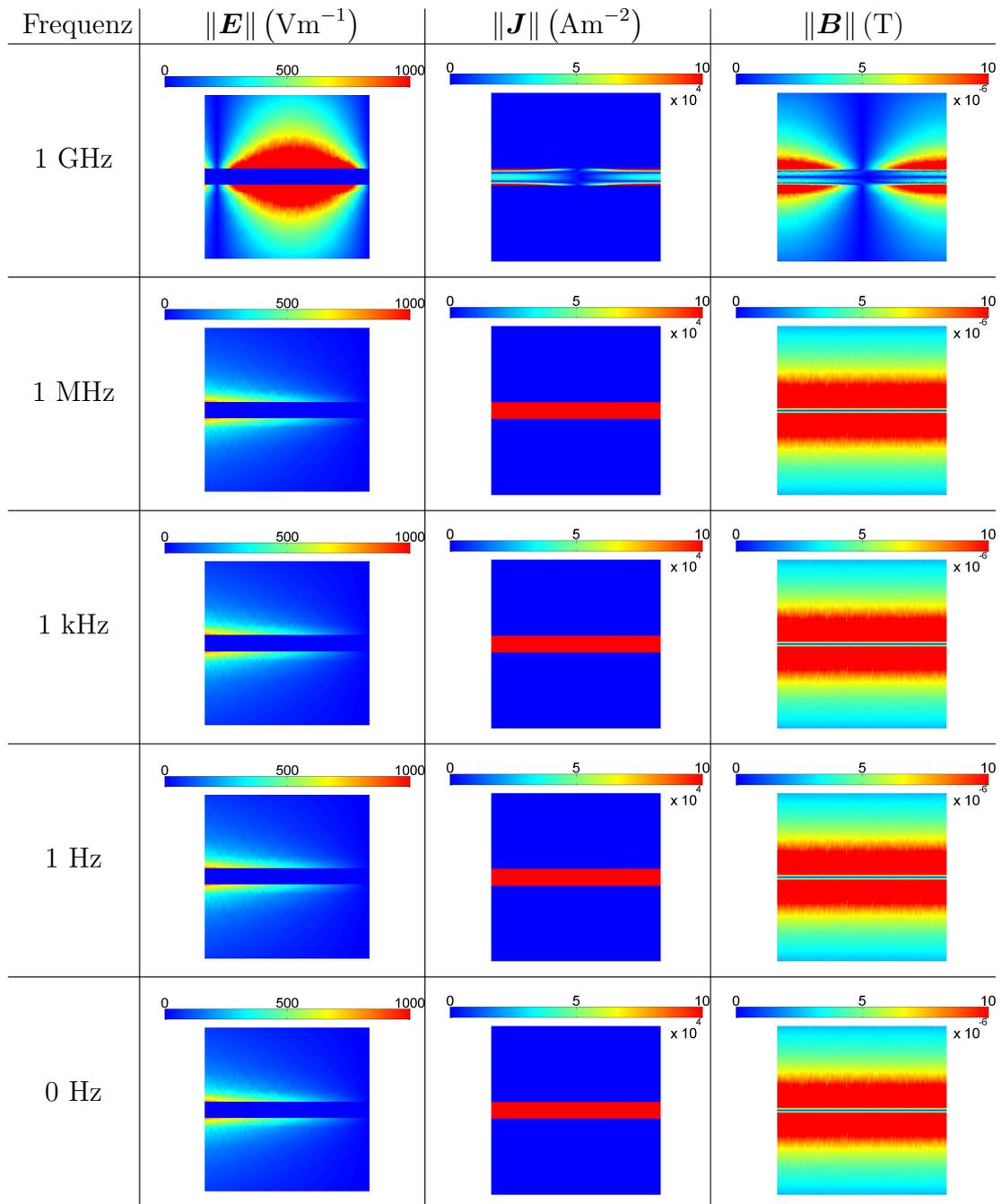


Abbildung 7.3.6: Feldverläufe des Koaxialkabel-Beispiels für die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}, 1 \text{ GHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

elektrische Feldstärke, die elektrische Stromdichte und die magnetische Flussdichte für die Fälle $f \in \{1 \text{ GHz}, 1 \text{ MHz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ Hz}\}$ sowie den statischen Grenzfall $f = 0 \text{ Hz}$ dargestellt. Bei $f = 1 \text{ GHz}$ zeigt sich wie erwartet die Ausbildung einer

stehenden Welle entlang des Koaxialkabels. Aufgrund der niedriger angenommenen Leitfähigkeit tritt der Skineneffekt hier erst bei deutlich höheren Frequenzen als in den zuvor betrachteten Beispielen auf, da bei $f = 1$ MHz die Eindringtiefe δ ungefähr gleich dem Radius des Innenleiters ist.

7.4 Kopplung der statischen Eichung und der stationären Eichung

7.4.1 Schwache Formulierung

Das Vorgehen bei der Kopplung der statischen Eichung im verlustlosen Gebiet mit der stationären Eichung im verlustbehafteten Gebiet verläuft analog zu jener der Baum-Kobaum-Eichungen aus Abschnitt 7.3. Ausgangspunkt sind wiederum die schwachen Formulierungen (5.96) für Ω_1 und (6.41) für Ω_2 :

$$S^{\nu_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1} + \nabla\Psi_1, \mathbf{a}_{c,1}) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \mathbf{a}_{c,1}) = b_H^{\Gamma_{12}}(\mathbf{a}_{c,1}), \quad (7.39a)$$

$$T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1} + \nabla\Psi_1, \nabla\psi_1) = \frac{1}{(jk_0)^2} b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla\psi_1), \quad (7.39b)$$

$$T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \nabla v_1) = \frac{1}{jk_0} b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla v_1), \quad (7.39c)$$

$$S^{\nu_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \mathbf{a}_{c,2}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \mathbf{a}_{c,2}) + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) = b_H^{\Gamma_{21}}(\mathbf{a}_{c,2}), \quad (7.39d)$$

$$T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \nabla\psi_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \nabla\psi_2) = \frac{1}{jk_0} b_H^{\Gamma_{21}}(\nabla\psi_2), \quad (7.39e)$$

$$T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \nabla v_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \nabla v_2) = b_H^{\Gamma_{21}}(\nabla v_2). \quad (7.39f)$$

Wie im vorherigen Abschnitt wird angenommen, dass keine äußeren Quellen oder Anregungen über inhomogene Randbedingungen vorliegen, sodass die auftretenden Randterme auf den rechten Seiten der Gleichungen ausschließlich durch die Grenzfläche Γ_{12} hervorgerufen werden. Die Stetigkeitsbedingungen für die Felder \mathbf{A}_c , Ψ und V auf der Grenzfläche Γ_{12} lauten in diesem Fall wie bereits erwähnt

$$\mathbf{A}_{c,1} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} = \mathbf{A}_{c,2} \times \hat{\mathbf{n}}_{12}, \quad (7.40a)$$

$$\Psi_1 = \Psi_2, \quad (7.40b)$$

$$V_1 = V_2. \quad (7.40c)$$

Diese Bedingungen folgen letztlich aus den Stetigkeitsbedingungen für die physikalischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} , wobei hier zu berücksichtigen ist, dass sie auch im statischen Grenzfall gelten müssen. Aus dieser Forderung ergeben sich die erste und die letzte Gleichung. Die zweite folgt dann aus der Gültigkeit der Übergangsbedingungen bei nicht verschwindenden Wellenzahlen. Wegen

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} = -\hat{\mathbf{n}}_{12} \quad (7.41)$$

und der Forderung nach Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Erregung \mathbf{H} an Grenzflächen in Abwesenheit von Oberflächenströmen \mathbf{K} gilt zusätzlich

$$b_H^{\Gamma_{12}}(\mathbf{a}_{c,1}) = -b_H^{\Gamma_{21}}(\mathbf{a}_{c,2}) \quad \forall \mathbf{a}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,2} \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega), \quad (7.42)$$

sofern

$$\mathbf{a}_{c,1} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} = \mathbf{a}_{c,2} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} \quad \text{auf } \Gamma_{12} \quad (7.43)$$

erfüllt ist. Der Durchflutungssatz in den beiden Teilgebieten kann daher, wie bei der Baum-Kobaum-Eichung in Abschnitt 7.3, zu einer Gleichung für das Gesamtgebiet zusammengefasst werden, ohne dass Randterme, welche von der Grenzfläche herrühren, Beiträge zur rechten Seite des Gleichungssystems liefern. Es gilt daher

$$S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) = S^{\nu_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + S^{\nu_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) \quad (7.44a)$$

für

$$\mathbf{A}_{c,1} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A}_{c,2} \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_{12}, \quad (7.44b)$$

$$\mathbf{a}_{c,1} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_{c,2} \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_{12}. \quad (7.44c)$$

Ähnlich dem Fall der Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen ergibt sich bei den verbleibenden beiden Gleichungen das Problem, dass deren rechte Seiten eine unterschiedliche Skalierung in Abhängigkeit von der Wellenzahl und daher auch abweichende physikalische Dimensionen aufweisen. Eine direkte Addition der beiden Gleichungen ist daher nicht zulässig. Ein Problem stellt dies nur für jene Test- und Ansatzfunktionen dar, deren Träger sich über die Grenzfläche hinweg erstreckt. Zur Vermeidung dieses Problems, wird auch hier eine entsprechende Skalierung der Gleichungen des verlustfreien Gebietes vorgenommen, sodass anschließend eine Kopplung ohne weiteres möglich ist. Für die Kopplung sind daher die drei Fälle

- $\psi_1, v_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$,
- $\psi_2, v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$,
- $\psi_{12}, v_{12} \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_{12}) \subset \mathcal{H}^1(\Omega) = \{f \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid v \neq 0 \text{ auf } \Gamma_{12}\}$

zu unterscheiden, wobei in den ersten beiden Fällen der Träger der Testfunktionen vollständig innerhalb eines der beiden Gebiete liegt und daher die Teilbereichsformulierungen ohne Modifikation zum Einsatz kommen. Eine Kopplung der Formulierungen und eine damit verbundene Skalierung der Gleichungen des verlustfreien Gebietes ist somit nicht erforderlich. Im letzten Fall, in welchem sich der Träger der Testfunktionen über die Grenzfläche hinweg erstreckt und die Testfunktionen daher auf der Grenzfläche Γ_{12} nicht verschwinden, muss eine entsprechende Kopplung durchgeführt werden. Eine Skalierung der Gleichungen des verlustfreien Gebietes mit dem Faktor jk_0 führt hierbei auf

$$jk_0 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \nabla \psi_{12}) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla \Psi_1, \nabla \psi_{12}) = \frac{1}{jk_0} b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla \psi_{12}), \quad (7.45a)$$

$$jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \nabla v_{12}) = b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla v). \quad (7.45b)$$

Ein Vergleich von (7.45) mit (6.41) zeigt, dass die Gleichungen in beiden Gebieten nach der Skalierung die gleiche physikalische Dimension aufweisen und die rechten Seiten zueinander kompatibel sind. Nach der Skalierung können die Gleichungen daher zusammengefasst werden, sodass

$$jk_0 T_{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \nabla \psi_{12}) + T_{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \nabla \psi_{12}) + jk_0 T_{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \nabla \psi_{12}) \\ + jk_0 T_{\epsilon_1}(\nabla \Psi_1, \nabla \psi_{12}) + T_{\kappa_2}(\nabla \Psi_2, \nabla \psi_{12}) + jk_0 T_{\epsilon_2}(\nabla \Psi_2, \nabla \psi_{12}) = 0 \quad (7.46a)$$

beziehungsweise

$$jk_0 T_{\epsilon_1}(\nabla V_1, \nabla v_{12}) + T_{\kappa_2}(\nabla V_2, \nabla v_{12}) + jk_0 T_{\epsilon_2}(\nabla V_2, \nabla v_{12}) = 0 \quad (7.46b)$$

folgt, was weiter zu

$$T_{\kappa}(\mathbf{A}_c, \nabla \psi_{12}) + jk_0 T_{\epsilon}(\mathbf{A}_c, \nabla \psi_{12}) + T_{\kappa}(\nabla \Psi, \nabla \psi_{12}) \\ + jk_0 T_{\epsilon}(\nabla \Psi, \nabla \psi_{12}) = 0 \quad (7.47a)$$

und

$$T_{\kappa}(\nabla V, \nabla v_{12}) + jk_0 T_{\epsilon}(\nabla V, \nabla v_{12}) = 0 \quad (7.47b)$$

zusammengefasst werden kann. Wie anhand von (7.46b) deutlich wird, verschwindet auch hier, wie im Fall der Baum-Kobaum-Eichung, im stationären Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ die Rückwirkung des elektrischen Skalarpotenzials V im verlustlosen Gebiet auf das verlustbehaftete Gebiet. Weiterhin bleibt die ursprüngliche Eigenschaft der beiden Teilformulierungen, dass das elektrische Skalarpotenzial grundsätzlich unabhängig von den beiden anderen Potenzialen bestimmt werden kann, erhalten.

7.4.2 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Im diskreten Fall führt ein analoges Vorgehen zu einer gekoppelten Formulierung für das gesamte Feldgebiet. Als Ausgangspunkt dienen die linearen Gleichungssysteme (5.101a) für das verlustfreie Gebiet Ω_1 sowie (6.44a) für das verlustbehaftete

Gebiet Ω_2

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{A}_{AcV}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{A}_{\Psi Ac}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\bar{\Omega}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}_V^{\bar{\Omega}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Ac}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{b}_V^{\bar{\Omega}_1} \end{bmatrix}, \quad (7.48a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{AcV}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{A}_{\Psi Ac}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{x}_V^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Ac}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{b}_V^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.48b)$$

mit den zuvor eingeführten Teilmatrizen

$$\mathbf{A}_{AcAc}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{S}_{AcAc}^{\nu_1} + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AcAc}^{\epsilon_1}, \quad (7.49a)$$

$$\mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\bar{\Omega}_1} = (jk_0)^2 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^{\epsilon_1}, \quad (7.49b)$$

$$\mathbf{A}_{AcV}^{\bar{\Omega}_1} = jk_0 \mathbf{M}_{AcV}^{\epsilon_1}, \quad (7.49c)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi Ac}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{M}_{\Psi Ac}^{\epsilon_1}, \quad (7.49d)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^{\epsilon_1}, \quad (7.49e)$$

$$\mathbf{A}_{VV}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{S}_{VV}^{\epsilon_1} \quad (7.49f)$$

für das verlustlose Gebiet sowie

$$\mathbf{A}_{AcAc}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{S}_{AcAc}^{\nu_1} + jk_0 \mathbf{T}_{AcAc}^{\kappa_2} (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AcAc}^{\epsilon_1}, \quad (7.50a)$$

$$\mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\bar{\Omega}_2} = jk_0 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^{\epsilon_2}, \quad (7.50b)$$

$$\mathbf{A}_{AcV}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{M}_{AcV}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{M}_{AcV}^{\epsilon_2}, \quad (7.50c)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi Ac}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{M}_{\Psi Ac}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{M}_{\Psi Ac}^{\epsilon_2}, \quad (7.50d)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^{\epsilon_2}, \quad (7.50e)$$

$$\mathbf{A}_{VV}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{S}_{VV}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{S}_{VV}^{\epsilon_2} \quad (7.50f)$$

für das verlustbehaftete Gebiet. Im Weiteren werden die Vektoren der unbekanntenen Koeffizienten wie bei der Baum-Kobaum-Eichung gemäß

$$\mathbf{x}^{\Omega_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\Gamma_{12}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad (7.51a)$$

$$\mathbf{x}^{\Omega_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\Gamma_{21}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}, \quad (7.51b)$$

in die dem jeweiligen Feldgebiet und die der Grenzfläche zugeordneten Anteile aufgespalten. Für das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Koeffizientenvektoren folgt hieraus:

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} \widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}}, \quad (7.52a)$$

mit

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.52b)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.52c)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{b}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix} \quad (7.52d)$$

sowie

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Omega_1} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad (7.52e)$$

$$\left(\mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1}\right)^T = \left[\left(\mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_1}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_1}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_V^{\Omega_1}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{12}}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{12}}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}}\right)^T \right], \quad (7.52f)$$

$$\left(\mathbf{b}^{\bar{\Omega}_1}\right)^T = \left[\left(\mathbf{b}_{A_c}^{\Omega_1}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_1}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_V^{\Omega_1}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_{A_c}^{\Gamma_{12}}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_{\Psi}^{\Gamma_{12}}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_V^{\Gamma_{12}}\right)^T \right] \quad (7.52g)$$

und

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Omega_2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}, \quad (7.52h)$$

$$\left(\mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2}\right)^T = \left[\left(\mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_2}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_2}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_V^{\Omega_2}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{21}}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21}}\right)^T \quad \left(\mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}}\right)^T \right], \quad (7.52i)$$

$$\left(\mathbf{b}^{\bar{\Omega}_2}\right)^T = \left[\left(\mathbf{b}_{A_c}^{\Omega_2}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_2}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_V^{\Omega_2}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_{A_c}^{\Gamma_{21}}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_{\Psi}^{\Gamma_{21}}\right)^T \quad \left(\mathbf{b}_V^{\Gamma_{21}}\right)^T \right]. \quad (7.52j)$$

Da für die Potenziale $\mathbf{A}_{c,i}$, Ψ_i , V_i für $i \in \{1, 2\}$

$$\mathbf{A}_{c,i} \in \mathcal{R}_{c,0}^{h,p} \subset \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega_i, \Gamma_{12}), \quad (7.53)$$

$$\Psi_i \in \mathcal{V}^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega_i, \Gamma_{12}), \quad (7.54)$$

$$V_i \in \mathcal{V}^{h,p} \subset \mathcal{H}^1(\Omega_i, \Gamma_{12}) \quad (7.55)$$

gilt, entsprechen die Stetigkeitsanforderungen an die Felder (7.40) der Forderung nach Gleichheit der entsprechenden Koeffizienten im Vektor der Unbekannten. Im

Diskreten gilt somit auf Γ_{12} :

$$\mathbf{A}_{c,1} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} = \mathbf{A}_{c,2} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{12}} = \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{21}}, \quad (7.56a)$$

$$\Psi_1 = \Psi_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{12}} = \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21}}, \quad (7.56b)$$

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}} = \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}}. \quad (7.56c)$$

Der Vektor der Unbekannten $\hat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}}$ kann mit (7.56) in der Form

$$\hat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{W} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}} \quad (7.57a)$$

angegeben werden, wobei

$$\mathbf{x}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad (7.57b)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Omega_1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Omega_2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.57c)$$

gilt. Zur Realisierung der im Rahmen der schwachen Formulierung angesprochenen Linearkombinationen der Gleichungen auf der Grenzfläche wird das Gleichungssystem (7.52a) von links mit der Matrix \mathbf{V}^T multipliziert, wobei

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Omega_1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{\Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Omega_2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.58a)$$

mit

$$\mathbf{V}_{\Gamma_{12}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12},A_c}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & jk_0 \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12},\Psi}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & jk_0 \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12},V}} \end{bmatrix} \quad (7.58b)$$

gilt, sodass sich als zu lösendes Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{b}^{\bar{\Omega}}, \quad (7.59a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} \mathbf{W}, \quad (7.59b)$$

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}} \quad (7.59c)$$

ergibt. Die hieraus folgende Systemmatrix $\mathbf{A}^{\bar{\Omega}}$ hat die Blockstruktur

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\Omega_1} & \mathbf{A}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_{\Gamma_{12}}^T \mathbf{A}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{V}_{\Gamma_{12}}^T \mathbf{A}^{\Gamma_{12}} + \mathbf{A}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}^{\Gamma_{21} \Omega_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}^{\Omega_2} \end{bmatrix}. \quad (7.60)$$

Aufgrund der Wellenzahlabhängigkeit der Teilmatrix $\mathbf{V}_{\Gamma_{12}}$ entfällt im Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ der Einfluss der skalaren Unbekannten des verlustfreien Gebietes Ω_1 auf die skalaren Unbekannten der Grenzfläche Γ_{12} und des verlustbehafteten Gebietes Ω_2 . Wie bereits vorher im Rahmen der Baum-Kobaum-Eichung erwähnt, handelt es sich dabei nicht um eine Instabilität der Formulierung, sodass die resultierenden Matrizen auch in diesem Grenzfall regulär bleiben. Aufgrund der Struktur der Matrizen \mathbf{V} aus (7.58a) und \mathbf{W} aus (7.57b) sowie der Tatsache, dass die ursprüngliche Systemmatrix $\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}}$ aus (7.52a) wegen der nicht symmetrischen Formulierung in den Teilgebieten nicht symmetrisch ist, ist auch die Systemmatrix für das Gesamtgebiet $\mathbf{A}^{\bar{\Omega}}$ eine unsymmetrische Matrix. Die den beiden Teilformulierungen gemeinsame Eigenschaft, dass das elektrische Skalarpotenzial V grundsätzlich unabhängig von den beiden anderen Potenzialen \mathbf{A}_c und Ψ bestimmt werden kann, bleibt jedoch auch in der gekoppelten Formulierung für das Gesamtgebiet erhalten. Zur Verdeutlichung werden in (7.60) ausschließlich jene Zeilen des Gleichungssystems betrachtet, die dem Skalarpotenzial V zugeordnet sind

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & jk_0 \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & jk_0 \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{12}} + \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{21} \Omega_2} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c}^{\Omega_1} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_1} \\ \mathbf{b}_V^{\Omega_1} \\ \mathbf{b}_{A_c}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{b}_V^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{b}_{A_c}^{\Omega_2} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_2} \\ \mathbf{b}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix}. \quad (7.61)$$

Werden hierin die Unbekannten so umsortiert, dass erst die dem Vektorpotenzial \mathbf{A}_c und dem Skalarpotenzial Ψ zugeordneten Unbekannten aufgelistet werden, ergibt sich

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & jk_0 \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & jk_0 \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{12}} + \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{21} \Omega_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c}^{\Omega_1} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_1} \\ \mathbf{b}_{A_c}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{b}_{A_c}^{\Omega_2} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_2} \\ \mathbf{b}_V^{\Omega_1} \\ \mathbf{b}_V^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{b}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad (7.62)$$

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | $-80.9938 + 137.8768j$ | $1.9 \cdot 10^{-3}$ | $1.2 \cdot 10^{-5}$ | $5.7 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{120} | $-86.9455 + 225.1187j$ | $4.4 \cdot 10^{-3}$ | $7.7 \cdot 10^{-5}$ | $4.6 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{111} | $-90.1138 + 236.9469j$ | $1.5 \cdot 10^{-4}$ | $3.1 \cdot 10^{-5}$ | $3.2 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{101} | $-88.0214 + 247.8733j$ | $6.5 \cdot 10^{-3}$ | $1.4 \cdot 10^{-5}$ | $1.4 \cdot 10^{-7}$ |
| TE_{210} | $-37.2556 + 264.4426j$ | $2.2 \cdot 10^{-3}$ | $2.4 \cdot 10^{-5}$ | $1.2 \cdot 10^{-6}$ |
| TE_{111} | $-88.7995 + 267.3251j$ | $5.2 \cdot 10^{-3}$ | $3.6 \cdot 10^{-5}$ | $3.4 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{121} | $-91.1661 + 290.7462j$ | $1.2 \cdot 10^{-3}$ | $1.4 \cdot 10^{-4}$ | $1.1 \cdot 10^{-6}$ |

Tabelle 7.2: Eigenwerte im gemischten Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des teilweise mit einem verlustbehafteten Dielektrikum gefüllten Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

woraus folgt, dass die Unbekannten $\mathbf{x}_V^{\Omega_1}$, $\mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}}$ und $\mathbf{x}_V^{\Omega_2}$ unabhängig von den anderen bestimmt werden können. Der zweistufige Lösungsprozess, der bei den Teilformulierungen in Abschnitt 5.3.3 und Abschnitt 6.3.3 bereits erwähnt wurde und in welchem zunächst die dem Skalarpotenzial V zugeordneten Unbekannten eliminiert werden, ist somit auch in der gekoppelten Formulierung durchführbar.

7.4.3 Numerische Ergebnisse

Zur Beurteilung der Robustheit der Formulierung, welche sich durch Kopplung der statischen und der stationären Eichung ergibt, werden im Folgenden wiederum die vier Beispiele aus Abschnitt 7.2 betrachtet. Es werden die gleichen Rechnungen wie im Fall der Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen in Abschnitt 7.3.3 durchgeführt, das heißt für das Resonator-Beispiel wird ausschließlich das zugeordnete Eigenwertproblem und für die restlichen drei Beispiele jeweils ein Anregungsproblem gelöst.

Teilweise gefüllter Resonator

Ein Vergleich der analytisch bestimmten Eigenwerte mit den numerisch berechneten Eigenwerten des Resonator-Problems ist in Tabelle 7.1 für die ersten dominanten Moden und Polynomgrad $p = 1, 2, 3$ dargestellt. Auch bei der Kopplung der statischen und der stationären Eichung zeigt sich - wie im rein verlustlosen und im rein verlustbehafteten Fall - eine sehr gute Übereinstimmung zwischen analytischer und numerischer Lösung, vergleichbar mit jener bei der Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen und den dort angegebenen Referenzen. In Abbildung 7.4.1 ist die Verteilung der numerisch bestimmten Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene dargestellt. Auch hier ergeben sich die im Rahmen der Feldformulierung bekannten

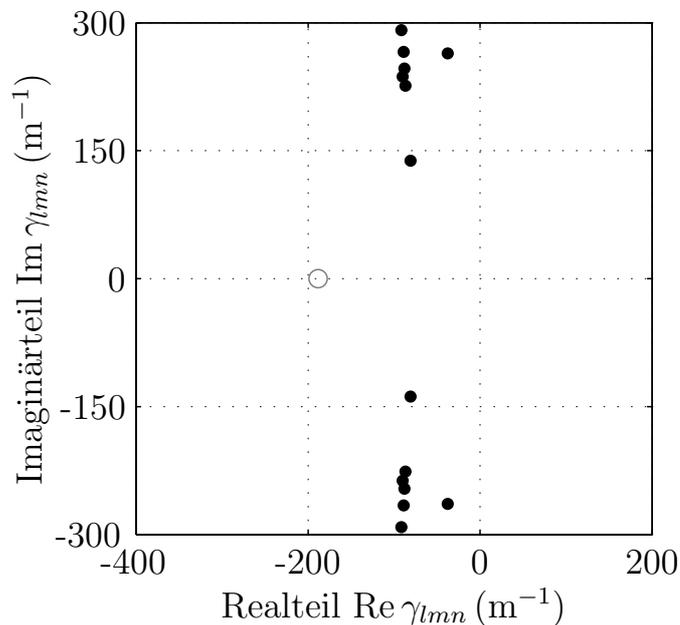


Abbildung 7.4.1: Eigenwertverteilung im gemischten Fall: Lage der Eigenwerte des teilweise gefüllten Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte, unphysikalische Eigenwerte als Kreise dargestellt.

unphysikalischen Eigenwerte. Diese entsprechen den zuvor diskutierten reinen Gradientenfeldern. Die zugeordneten Eigenwerte sind jedoch alle rein reell und negativ und stellen daher im Hinblick auf die Niederfrequenzeigenschaften der Formulierung kein Problem dar.

Kondensator

Die Verläufe der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Stromdichte sowie der magnetischen Flussdichte, welche sich für das Kondensator-Problem aus Abbildung 7.2.2 im Fall der Kopplung der statischen und der stationären Eichung ergeben, sind in Abbildung 7.4.2 für $f = 1$ MHz, 1 kHz, 1 Hz sowie den statischen Grenzfall $f = 0$ Hz und Polynomgrad $p = 2$ dargestellt. Lediglich bei $f = 1$ MHz zeigen sich nennenswerte Ströme und Magnetfelder. Auch der Skineffekt innerhalb der Zuleitungen ist deutlich erkennbar. Für niedrigere Frequenzen liegen im Hinblick auf die Feldverläufe im Wesentlichen statische Verhältnisse vor. In Abbildung 7.4.3 ist der Verlauf des Betrags der Admittanz

$$Y = \frac{I}{U} \quad (7.63)$$

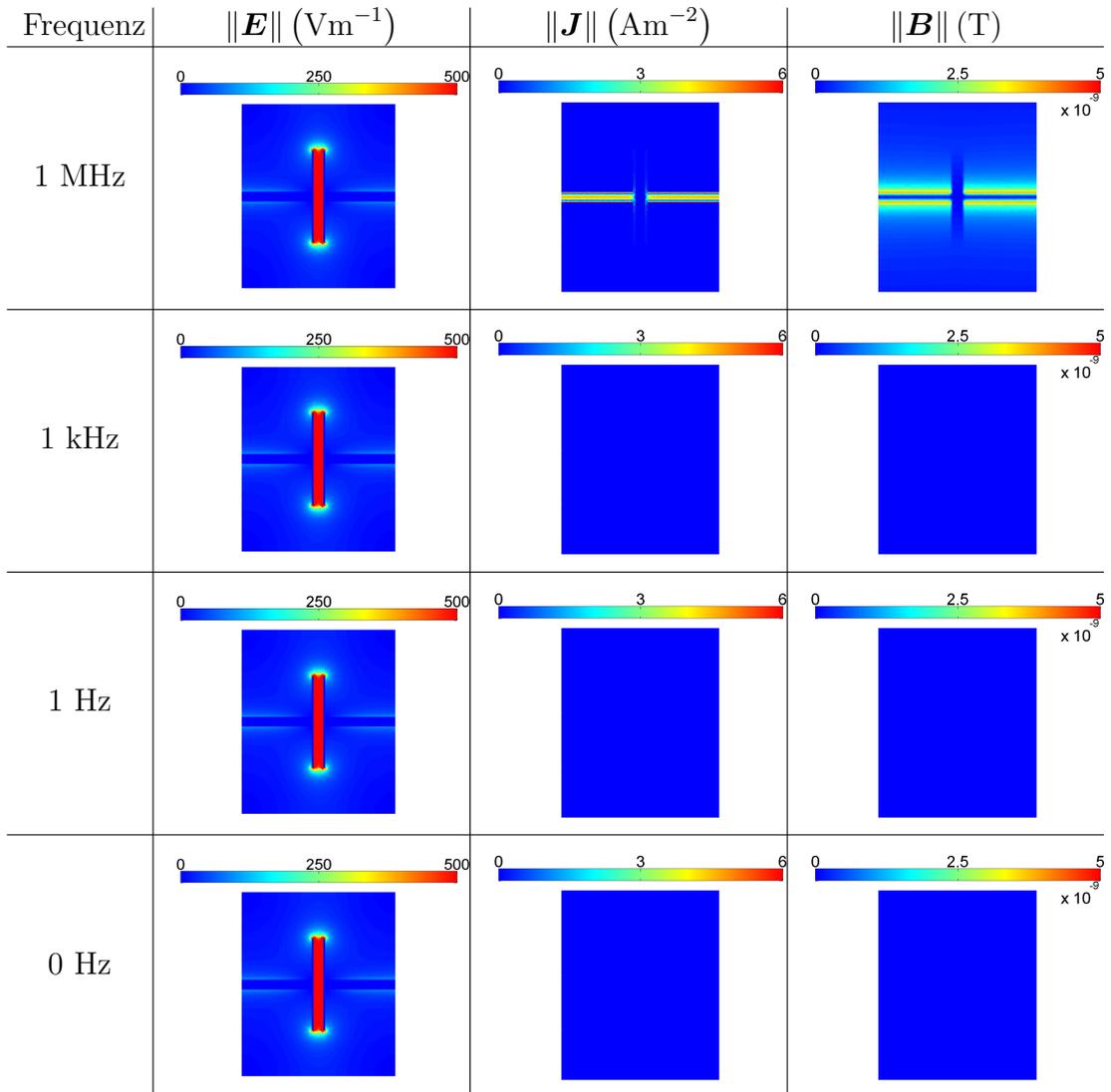


Abbildung 7.4.2: Feldverläufe des Kondensator-Beispiels für die Kopplung der statischen und der stationären Eichung: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

zusammen mit

$$Y_C = j\omega C \quad (7.64)$$

in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt, wobei C der Kapazität aus (7.7) entspricht. Die resultierenden Verläufe entsprechen im Wesentlichen jenen, welche sich im Rahmen der Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen ergeben haben und es zeigen sich auch die gleichen Abweichungen im Niederfrequenzfall. Für eine detaillierte Analyse der Ursachen dieser Abweichungen im Niederfrequenzfall wird auf den entsprechenden Unterabschnitt in 7.3.3 verwiesen. Der dort als Ursache ausgemachte

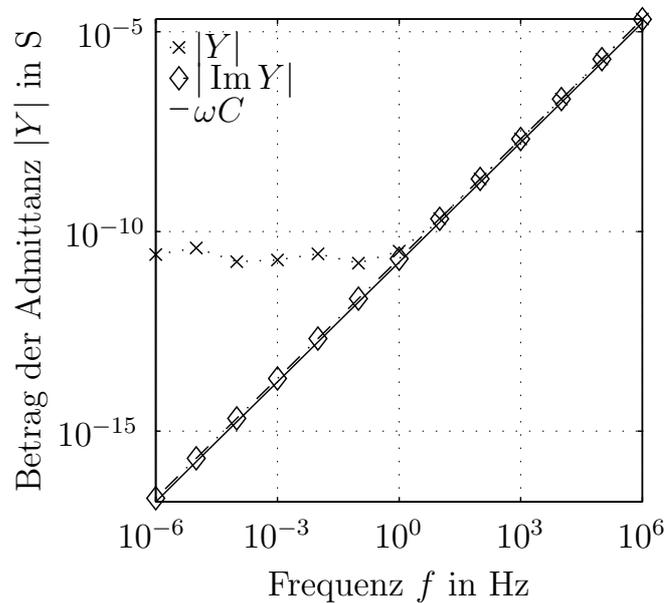


Abbildung 7.4.3: Admittanz des Kondensators: Verlauf der Admittanz $Y = \frac{I}{U}$ der Kondensator-Struktur in Abhängigkeit der Frequenz für $p = 1$.

Einfluss der Leitfähigkeit κ ist in Abbildung 7.4.4 auch für die Kopplung der statischen und der stationären Eichung dargestellt.

RLC-Serienschwingkreis

Die numerisch berechneten Feldverläufe für das *RLC*-Serienschwingkreis-Beispiel sind in Abbildung 7.3.5 für die Frequenzen $f = 1$ MHz, 1 kHz, 1 Hz und den statischen Grenzfall $f = 0$ Hz für Polynomgrad $p = 2$ dargestellt. Die Resultate stimmen mit jenen der Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen überein. Auch hier zeigt sich, dass aufgrund des Kondensators erst bei höheren Frequenzen nennenswerte Ströme und damit auch Magnetfelder auftreten. Der Skineneffekt in den Leitungen wird auch bei der Kopplung der statischen und der stationären Eichung gut abgebildet.

Koaxialkabel

Als abschließendes Beispiel wird auch für die Kopplung der statischen und der stationären Eichung das am rechten Ende kurzgeschlossene Koaxialkabel aus Abbildung 7.2.4 betrachtet. In Abbildung 7.3.6 sind die Feldverläufe für die elektrische Feldstärke, die elektrische Stromdichte und die magnetische Flussdichte für die Fälle $f \in \{1 \text{ GHz}, 1 \text{ MHz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ Hz}\}$ sowie den statischen Grenzfall $f = 0$ Hz darge-

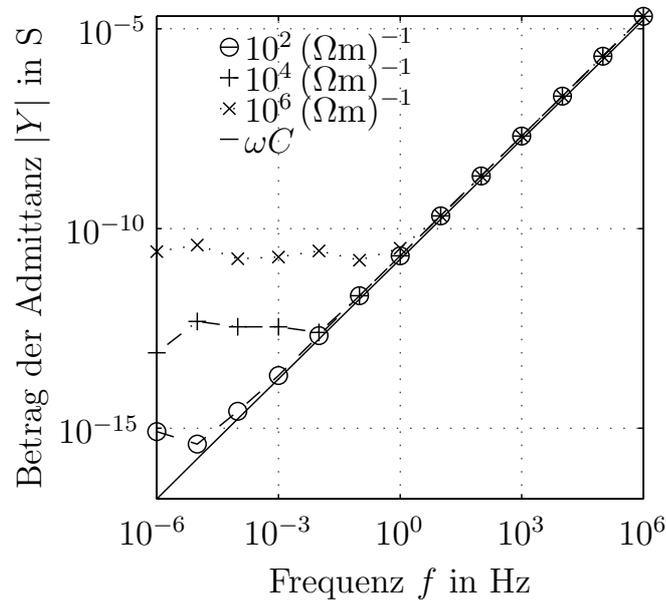


Abbildung 7.4.4: Einfluss der Leitfähigkeit auf die berechnete Admittanz des Kondensators: Verlauf der Admittanz $Y = \frac{I}{U}$ der Kondensator-Struktur für $\kappa = 10^2, 10^4, 10^6 (\Omega\text{m})^{-1}$ in Abhängigkeit der Frequenz für $p = 1$.

stellt. Auch hier ergeben sich bis hinab in den statischen Grenzfall keine Schwierigkeiten bei der Formulierung. Weiterhin wird die stehende Welle, welche sich bei $f = 1$ GHz ausbildet, korrekt wiedergegeben. Wegen der deutlich niedriger angenommenen Leitfähigkeit tritt bei den betrachteten Frequenzen, welche kleiner als 1 GHz sind, kein nennenswerter Skineneffekt auf, sodass die resultierenden Feldverteilungen im Wesentlichen jenen des statischen Grenzfalls entsprechen.

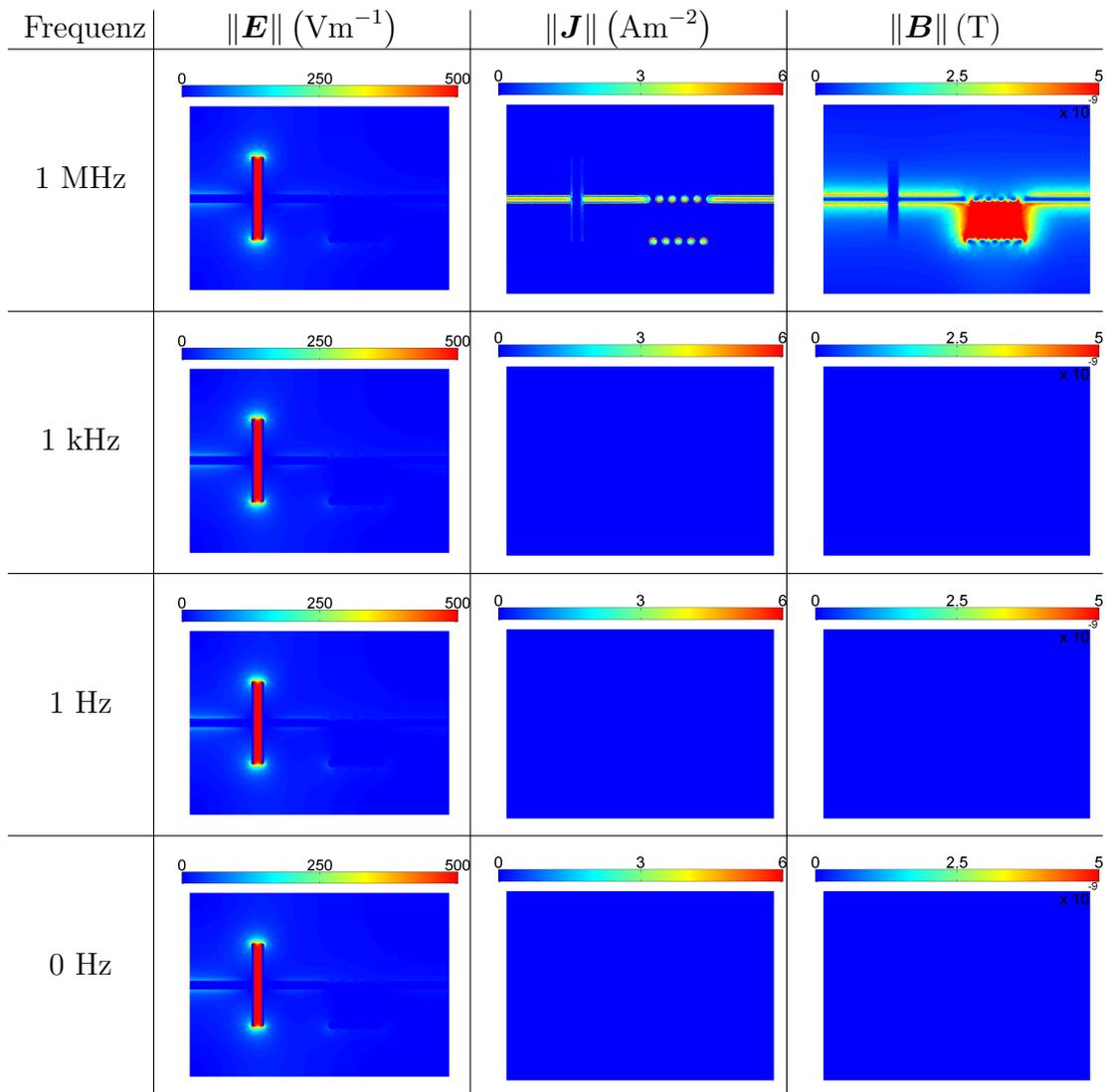


Abbildung 7.4.5: Feldverläufe des RLC -Schwingkreis-Beispiels für die Kopplung der statischen und der stationären Eichtung: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

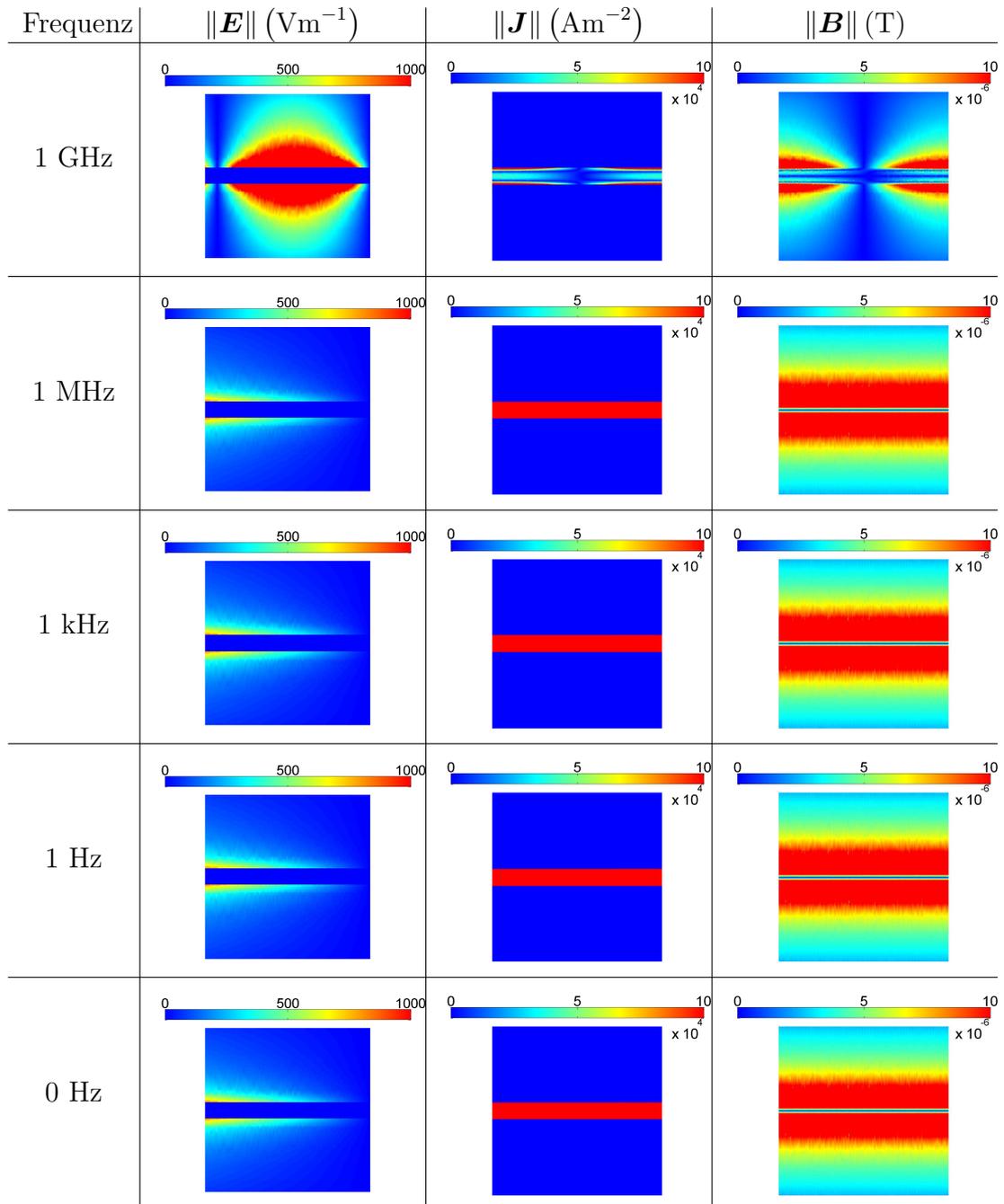


Abbildung 7.4.6: Feldverläufe des Koaxialkabel-Beispiels für die Kopplung der statischen und der stationären Eichung: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}, 1 \text{ GHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

7.5 Kopplung der gemischten Formulierungen

7.5.1 Schwache Formulierung

Die Kopplung der Teilformulierungen für den Fall der gemischten Formulierungen verläuft, ausgehend von den schwachen Formen (5.130) und (6.63) für die einzelnen Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 mit

$$S^{\nu_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + (jk_0)^2 T_{\epsilon_1}(\nabla\Psi_1, \mathbf{a}_{c,1}) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \mathbf{a}_{c,1}) = b_H^{\Gamma_{12}}(\mathbf{a}_{c,1}), \quad (7.65a)$$

$$jk_0 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1} + \nabla\Psi_1, \nabla\psi_1) + T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \nabla\psi_1) = \frac{1}{jk_0} b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla\psi_1), \quad (7.65b)$$

$$T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1} + \nabla\Psi_1, \nabla v_1) = \frac{1}{jk_0} b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla v_1), \quad (7.65c)$$

$$S^{\nu_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \mathbf{a}_{c,2}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \mathbf{a}_{c,2}) + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) = b_H^{\Gamma_{21}}(\mathbf{a}_{c,2}), \quad (7.66a)$$

$$jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \nabla\psi_2) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \nabla\psi_2) + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \nabla\psi_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \nabla\psi_2) = b_H^{\Gamma_{21}}(\nabla\psi_2), \quad (7.66b)$$

$$T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \nabla v_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla\Psi_2, \nabla v_2) = b_H^{\Gamma_{21}}(\nabla v_2) \quad (7.66c)$$

und den Stetigkeitsbedingungen (2.18), im Wesentlichen analog zu den bereits vorgestellten Kopplungen. Da der Durchflutungssatz in beiden Gebieten gleich angesetzt wird, ist hier kein besonderes Vorgehen erforderlich und ein einfaches Zusammenfassen der Gleichungen der Teilgebiete möglich. Wegen

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} = -\hat{\mathbf{n}}_{21}, \quad (7.67)$$

der Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Erregung in Abwesenheit von Flächenstromdichten auf Γ_{12} , das heißt

$$\mathbf{H}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_{12} = \mathbf{H}_2 \times \hat{\mathbf{n}}_{12} \quad (7.68)$$

und der Wahl

$$\mathbf{a}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,2} \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega) \quad (7.69)$$

folgt für die rechten Seiten der beiden Formulierungen in den Teilgebieten (5.130a) und (6.63a)

$$b_H^{\Gamma_{12}}(\mathbf{a}_{c,1}) = -b_H^{\Gamma_{21}}(\mathbf{a}_{c,2}), \quad (7.70)$$

sodass sich diese beim Bilden der Summe gerade gegenseitig aufheben und die Grenzfläche Γ_{12} keinen weiteren Beitrag zu den Gleichungen liefert. Für die verbleibenden Gleichungen werden im Hinblick auf die Testfunktionen wiederum drei Fälle unterschieden:

- $\psi_1, v_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$,
- $\psi_2, v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$,
- sowie $\psi_{12}, v_{12} \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_{12}) = \{f \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid f \neq 0 \text{ auf } \Gamma_{12}\} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$.

In den ersten beiden Fällen ist keine Kopplung der beiden Formulierungen erforderlich, da jeweils nur eines der beiden Teilgebiete einen Beitrag liefert, da die Träger der Testfunktionen vollständig in Ω_1 oder in Ω_2 liegen. Im dritten Fall liefern jedoch sowohl die Formulierung des verlustfreien Gebiets Ω_1 als auch jene des verlustbehafteten Gebiets Ω_2 einen Beitrag zu den Bestimmungsgleichungen für die Potenziale. Eine Skalierung der Gleichungen des verlustfreien Gebietes Ω_1 , bei welcher die Testfunktionen auf der Grenzfläche Γ_{12} nicht verschwinden, mit dem Faktor jk_0 führt auf

$$(jk_0)^2 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1} + \nabla \Psi_1, \nabla \psi_{12}) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \nabla \psi_{12}) = b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla \psi_{12}), \quad (7.71a)$$

$$jk_0 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1} + \nabla \Psi_1, \nabla v_{12}) = b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla v_{12}), \quad (7.71b)$$

was der Formulierung des verlustbehafteten Gebietes für den Fall

$$\kappa_1 = 0 \quad (7.72)$$

entspricht. Nach dieser Skalierung können daher die Gleichungen für die skalaren Unbekannten wie im Falle des Durchflutungssatzes zusammengefasst werden und die Grenzflächenbeiträge der beiden Teilformulierungen heben sich gegenseitig auf.

7.5.2 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Für das *FE*-Gleichungssystem im diskreten Fall führt das gleiche Vorgehen wie bei den zuvor diskutierten Kopplungen zu einer geeigneten Formulierung für das gesamte Feldgebiet Ω . Aus den Gleichungen (5.134a) für das verlustfreie Gebiet Ω_1

sowie (6.73a) für das verlustbehaftete Gebiet Ω_2 folgt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{A}_{V A_c}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}_V^{\bar{\Omega}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{b}_V^{\bar{\Omega}_1} \end{bmatrix}, \quad (7.73a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{A}_{V A_c}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{x}_V^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A_c}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{b}_V^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.73b)$$

mit den Teilmatrizen

$$\mathbf{A}_{A_c A_c}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{S}_{A_c A_c}^{\nu_1} + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^{\epsilon_1}, \quad (7.74a)$$

$$\mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\bar{\Omega}_1} = (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^{\epsilon_1}, \quad (7.74b)$$

$$\mathbf{A}_{A_c V}^{\bar{\Omega}_1} = jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^{\epsilon_1}, \quad (7.74c)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\bar{\Omega}_1} = jk_0 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^{\epsilon_1}, \quad (7.74d)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\bar{\Omega}_1} = jk_0 \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^{\epsilon_1}, \quad (7.74e)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi V}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{S}_{\Psi V}^{\epsilon_1}, \quad (7.74f)$$

$$\mathbf{A}_{V A_c}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{M}_{V A_c}^{\epsilon_1}, \quad (7.74g)$$

$$\mathbf{A}_{V \Psi}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{M}_{V \Psi}^{\epsilon_1} \quad (7.74h)$$

im verlustlosen Teilgebiet Ω_1 sowie

$$\mathbf{A}_{A_c, 2 A_c, 2}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{S}_{A_c A_c}^{\nu_2} + jk_0 \mathbf{T}_{A_c A_c}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{A_c A_c}^{\epsilon_2}, \quad (7.75a)$$

$$\mathbf{A}_{A_c, 2 \Psi_2}^{\bar{\Omega}_2} = jk_0 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{A_c \Psi}^{\epsilon_2}, \quad (7.75b)$$

$$\mathbf{A}_{A_c, 2 V_2}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{M}_{A_c V}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{M}_{A_c V}^{\epsilon_2}, \quad (7.75c)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi_2 A_c, 2}^{\bar{\Omega}_2} = jk_0 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{\Psi A_c}^{\epsilon_2}, \quad (7.75d)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi_2 \Psi_2}^{\bar{\Omega}_2} = jk_0 \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{S}_{\Psi \Psi}^{\epsilon_2}, \quad (7.75e)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi_2 V_2}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{S}_{\Psi V}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{S}_{\Psi V}^{\epsilon_2}, \quad (7.75f)$$

$$\mathbf{A}_{V_2 A_c, 2}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{M}_{V A_c}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{M}_{V A_c}^{\epsilon_2}, \quad (7.75g)$$

$$\mathbf{A}_{V_2 \Psi_2}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{M}_{V \Psi}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{M}_{V \Psi}^{\epsilon_2} \quad (7.75h)$$

im verlustbehafteten Teilgebiet Ω_2 . Wird weiterhin eine Aufteilung der Unbekannten in jene, welche den Teilgebieten Ω_1 bzw. Ω_2 sowie jene, welche der Grenzfläche Γ_{12}

zugeordnet sind, durchgeführt, das heißt

$$\mathbf{x}^{\Omega_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\Gamma_{12}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad (7.76a)$$

$$\mathbf{x}^{\Omega_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\Gamma_{21}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}, \quad (7.76b)$$

folgt die zu (7.52) analoge Darstellung für das Gesamtgebiet

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} \widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}}, \quad (7.77a)$$

mit

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.77b)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.77c)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{b}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix} \quad (7.77d)$$

sowie

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{V A_c}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\Omega_1} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{V A_c}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{V A_c}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{V A_c}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.78a)$$

$$\mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1, T} = [\mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_1, T} \quad \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_1, T} \quad \mathbf{x}_V^{\Omega_1, T} \quad \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{12}, T} \quad \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{12}, T} \quad \mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}, T}], \quad (7.78b)$$

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}_1, T} = [\mathbf{b}_{A_c}^{\Omega_1, T} \quad \mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_1, T} \quad \mathbf{b}_V^{\Omega_1, T} \quad \mathbf{b}_{A_c}^{\Gamma_{12}, T} \quad \mathbf{b}_{\Psi}^{\Gamma_{12}, T} \quad \mathbf{b}_V^{\Gamma_{12}, T}] \quad (7.78c)$$

und

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{V A_c}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\Omega_2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{V A_c}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{A_c A_c}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{A_c \Psi}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{A_c V}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi A_c}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi \Psi}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{V A_c}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\Gamma_{21} \Omega_2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{V A_c}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{V \Psi}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.79a)$$

$$\mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2, T} = [\mathbf{x}_{A_c}^{\Omega_2, T} \quad \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_2, T} \quad \mathbf{x}_V^{\Omega_2, T} \quad \mathbf{x}_{A_c}^{\Gamma_{21}, T} \quad \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21}, T} \quad \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}, T}], \quad (7.79b)$$

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}_2, T} = [\mathbf{b}_{A_c}^{\Omega_2, T} \quad \mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_2, T} \quad \mathbf{b}_V^{\Omega_2, T} \quad \mathbf{b}_{A_c}^{\Gamma_{21}, T} \quad \mathbf{b}_{\Psi}^{\Gamma_{21}, T} \quad \mathbf{b}_V^{\Gamma_{21}, T}]. \quad (7.79c)$$

Mit den Matrizen \mathbf{V} aus (7.58a) und \mathbf{W} aus (7.57b)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Omega_1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{\Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Omega_2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.80a)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Omega_1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Omega_2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{12}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.80b)$$

ergibt sich die für das gesamte Feldgebiet Ω gültige Formulierung

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{b}^{\bar{\Omega}}, \quad (7.81a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} \mathbf{W}, \quad (7.81b)$$

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}}. \quad (7.81c)$$

Die Systemmatrix $\mathbf{A}^{\bar{\Omega}}$ aus (7.81b) hat die gleiche Blockstruktur wie jene aus (7.60), welche sich im Fall der Kopplung der statischen und stationären Eichung ergibt:

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\Omega_1} & \mathbf{A}^{\Omega_1 \Gamma_{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_{\Gamma_{12}}^T \mathbf{A}^{\Gamma_{12} \Omega_1} & \mathbf{V}_{\Gamma_{12}}^T \mathbf{A}^{\Gamma_{12}} + \mathbf{A}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}^{\Gamma_{21} \Omega_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\Omega_2 \Gamma_{21}} & \mathbf{A}^{\Omega_2} \end{bmatrix}. \quad (7.82)$$

Allerdings unterscheiden sich die Teilblöcke in ihrer Gestalt. Auch hier zeigt sich wie bereits zuvor, dass die dem elektrischen Skalarpotenzial zugeordneten Unbekannten des verlustbehafteten Teilgebiets Ω_2 im statischen bzw. stationären Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ unabhängig von jenen des verlustfreien Teilgebiets Ω_1 bestimmt werden können. Die so erhaltene Teillösung kann anschließend als Randbedingung für das verlustfreie Gebiet verwendet werden, um den noch fehlenden Teil der Lösung zu bestimmen. Da die gemischte Formulierung im verlustfreien Fall zu einem nicht symmetrischen Gleichungssystem führt, ist auch die gekoppelte Formulierung für das gesamte Feldgebiet nicht symmetrisch. Eine Skalierung der Gleichungen für die skalaren Unbekannten des Gebietes Ω_1 mit dem Faktor jk_0 führt jedoch auf ein symmetrisches Gleichungssystem. Wichtig ist hierbei, dass nur jene Gleichungen skaliert werden, welche Unbekannten im Teilgebiet Ω_1 entsprechen und nicht auf der Grenzfläche Γ_{12} liegen, da diese Gleichungen bereits im Rahmen der Kopplung durch die Multiplikation mit der Matrix \mathbf{V}^T entsprechend skaliert wurden.

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | $-80.9938 + 137.8768j$ | $1.9 \cdot 10^{-3}$ | $1.1 \cdot 10^{-5}$ | $6.1 \cdot 10^{-5}$ |
| TE_{120} | $-86.9455 + 225.1187j$ | $4.3 \cdot 10^{-3}$ | $7.8 \cdot 10^{-5}$ | $5.2 \cdot 10^{-6}$ |
| TM_{111} | $-90.1138 + 236.9469j$ | $1.5 \cdot 10^{-4}$ | $3.1 \cdot 10^{-5}$ | $9.7 \cdot 10^{-6}$ |
| TE_{101} | $-88.0214 + 247.8733j$ | $6.5 \cdot 10^{-3}$ | $1.4 \cdot 10^{-5}$ | $5.4 \cdot 10^{-6}$ |
| TE_{210} | $-37.2556 + 264.4426j$ | $2.2 \cdot 10^{-3}$ | $2.5 \cdot 10^{-5}$ | $4.5 \cdot 10^{-5}$ |
| TE_{111} | $-88.7995 + 267.3251j$ | $5.2 \cdot 10^{-3}$ | $3.6 \cdot 10^{-5}$ | $7.1 \cdot 10^{-6}$ |
| TM_{121} | $-91.1661 + 290.7462j$ | $1.2 \cdot 10^{-3}$ | $1.4 \cdot 10^{-4}$ | $6.3 \cdot 10^{-6}$ |

Tabelle 7.3: Eigenwerte im gemischten Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des teilweise mit einem verlustbehafteten Dielektrikum gefüllten Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

7.5.3 Numerische Ergebnisse

Teilweise gefüllter Resonator

Für das Eigenwertproblem des teilweise gefüllten Resonators ist ein Vergleich der analytisch bestimmten Eigenwerte mit den numerisch berechneten Eigenwerten in Tabelle 7.3 für die ersten dominanten Moden und $p = 1, 2, 3$ dargestellt. Wie im rein verlustlosen und im rein verlustbehafteten Fall zeigt sich auch hier eine sehr gute Übereinstimmung zwischen analytischer und numerischer Lösung. Wie aus Abbildung 7.5.1 hervorgeht, ergeben sich auch in dieser Formulierung unphysikalische rein reelle Eigenwerte, welche aber wiederum alle ungleich Null und daher im Hinblick auf die Niederfrequenzeigenschaften der gekoppelten Formulierung unkritisch sind.

Kondensator

Für das Kondensator-Beispiel sind die numerisch berechneten Feldverläufe der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Stromdichte sowie der magnetischen Flussdichte für verschiedene Frequenzen und Polynomgrad $p = 2$ in Abbildung 7.5.2 dargestellt. Rein qualitativ stimmen die erzielten Ergebnisse gut mit jenen der anderen Formulierungen überein und spiegeln die relevanten physikalischen Effekte korrekt wieder. Zur quantitativen Beurteilung der Ergebnisse ist in Abbildung 7.5.3 der Verlauf der Admittanz der Struktur im Vergleich zur Admittanz $Y_C = j\omega C$ in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt, wobei für die Kapazität C (7.7) gilt. Während bei höheren Frequenzen eine gute Übereinstimmung vorliegt und insbesondere die lineare Abhängigkeit zwischen Admittanz und Frequenz gut wiedergegeben wird, ergeben sich im Niederfrequenzfall die bereits in Abschnitt 7.3.3 diskutierten Probleme aufgrund des Einflusses der Leitfähigkeit κ . Der Einfluss der Leitfähigkeit auf den Verlauf der Admittanz ist gesondert noch einmal in Abbildung 7.5.4 dargestellt.

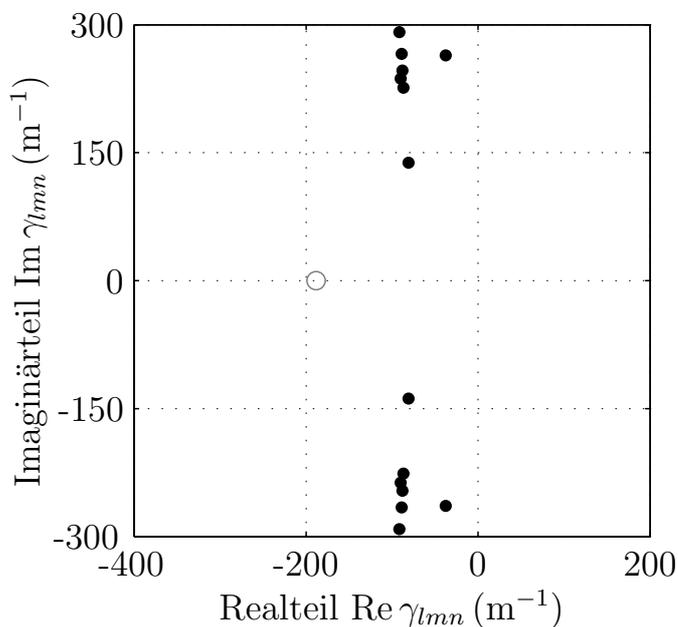


Abbildung 7.5.1: Eigenwertverteilung im gemischten Fall: Lage der Eigenwerte des teilweise gefüllten Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte, unphysikalische Eigenwerte als Kreise dargestellt.

RLC-Serienschwingkreis

In Abbildung 7.5.5 sind die Feldverläufe für das *RLC*-Serienschwingkreis-Beispiel aus Abschnitt 7.2.3 für verschiedene Frequenzen bis hinab zum statischen Grenzfall dargestellt. Die wichtigsten physikalischen Effekte, welche mit diesem Beispiel dargestellt werden sollen, werden alle korrekt wiedergegeben. Insbesondere entspricht die Feldverteilung des elektrischen Feldes im Außenraum im gesamten betrachteten Frequenzbereich im Wesentlichen jener des statischen Grenzfalls, sodass das Feld hauptsächlich auf den Bereich zwischen den Kondensatorplatten konzentriert ist. Die Leitungsstromdichte und somit auch die magnetische Flussdichte sind weitgehend gleich Null. Erst bei der höchsten betrachteten Frequenz von 1 MHz treten nennenswerte Verschiebungsströme im Kondensator auf, sodass in weiterer Folge auch Leitungsströme beobachtet werden können. An deren Verlauf wird der Skineneffekt deutlich sichtbar. Mit den Leitungsströmen nimmt auch die magnetische Flussdichte zu, welche - wie erwartet - im Inneren der Spule ihre höchsten Werte annimmt.

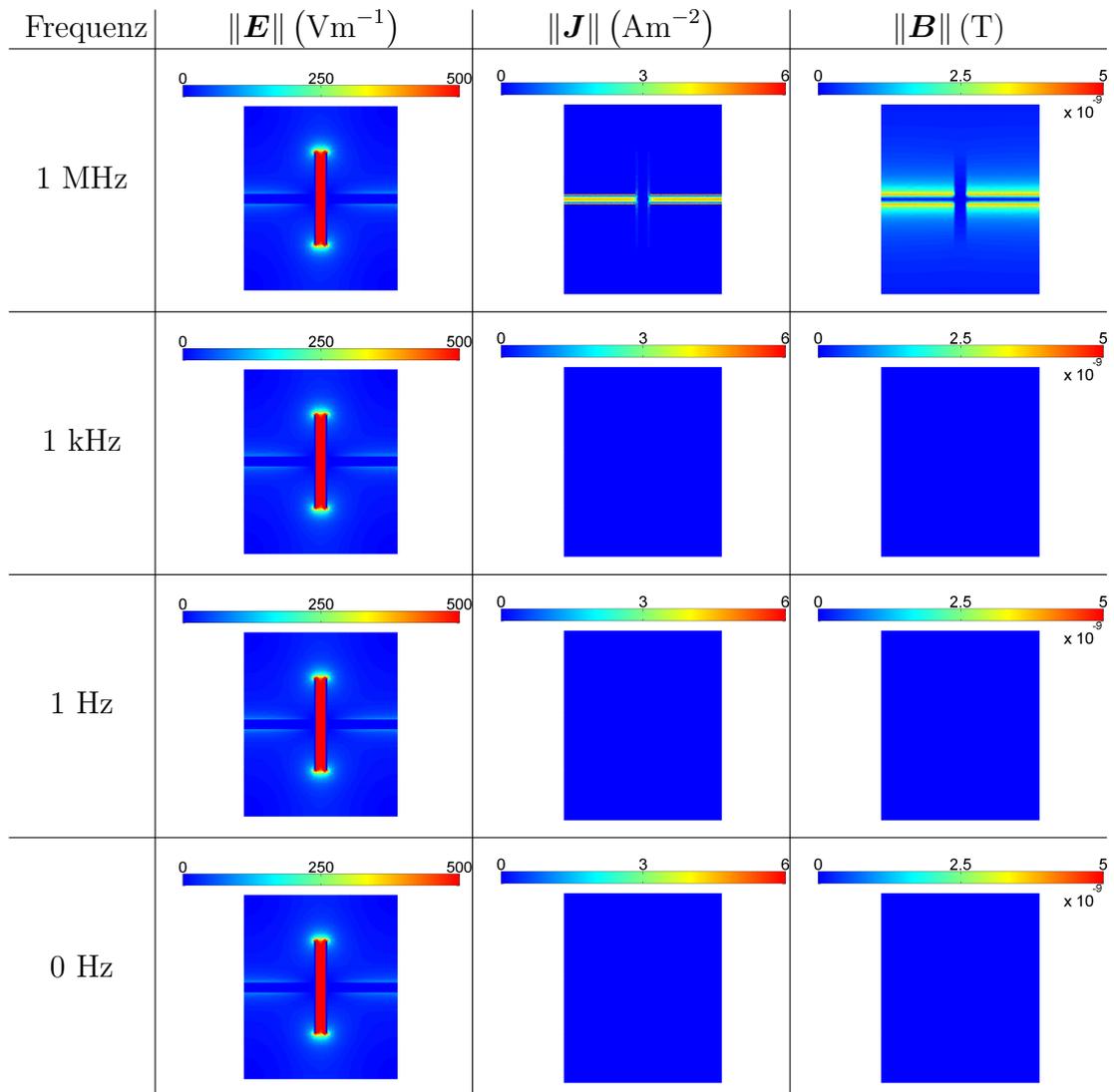


Abbildung 7.5.2: Feldverläufe des Kondensator-Beispiels für die Kopplung der gemischten Formulierungen: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

Koaxialkabel

Die durch die Kopplung der gemischten Formulierungen numerisch berechneten Verläufe der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Stromdichte sowie der magnetischen Flussdichte sind in Abbildung 7.5.6 in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Da die Leitfähigkeit niedriger angenommen wurde als bei den beiden zuvor betrachteten Beispielen spielt der Skineneffekt erst bei deutlich höheren Frequenzen eine Rolle. Bei $f = 1 \text{ MHz}$ liegt im Hinblick auf die Feldverläufe im Wesentlichen eine statische Verteilung vor, während es bei $f = 1 \text{ GHz}$ zur Ausbildung einer ste-

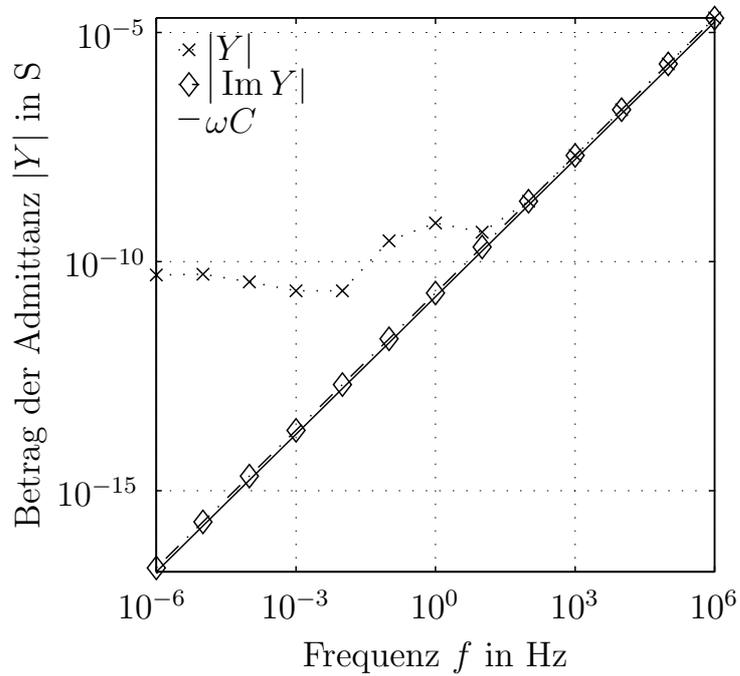


Abbildung 7.5.3: Admittanz des Kondensators: Verlauf der Admittanz $Y = \frac{I}{U}$ der Kondensator-Struktur in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$.

henden Welle entlang des Koaxialkabels kommt. Auch der Skineffekt im Innenleiter wird im letzten Fall anhand der Verteilung der Stromdichte deutlich sichtbar.

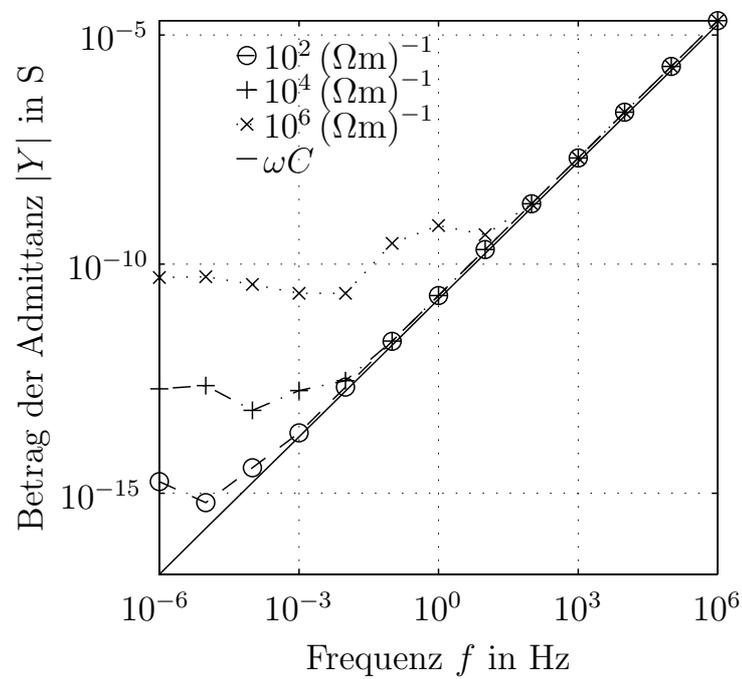


Abbildung 7.5.4: Einfluss der Leitfähigkeit auf die berechnete Admittanz des Kondensators: Verlauf der Admittanz $Y = \frac{I}{U}$ der Kondensator-Struktur für $\kappa = 10^2, 10^4, 10^6 (\Omega\text{m})^{-1}$ in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$.

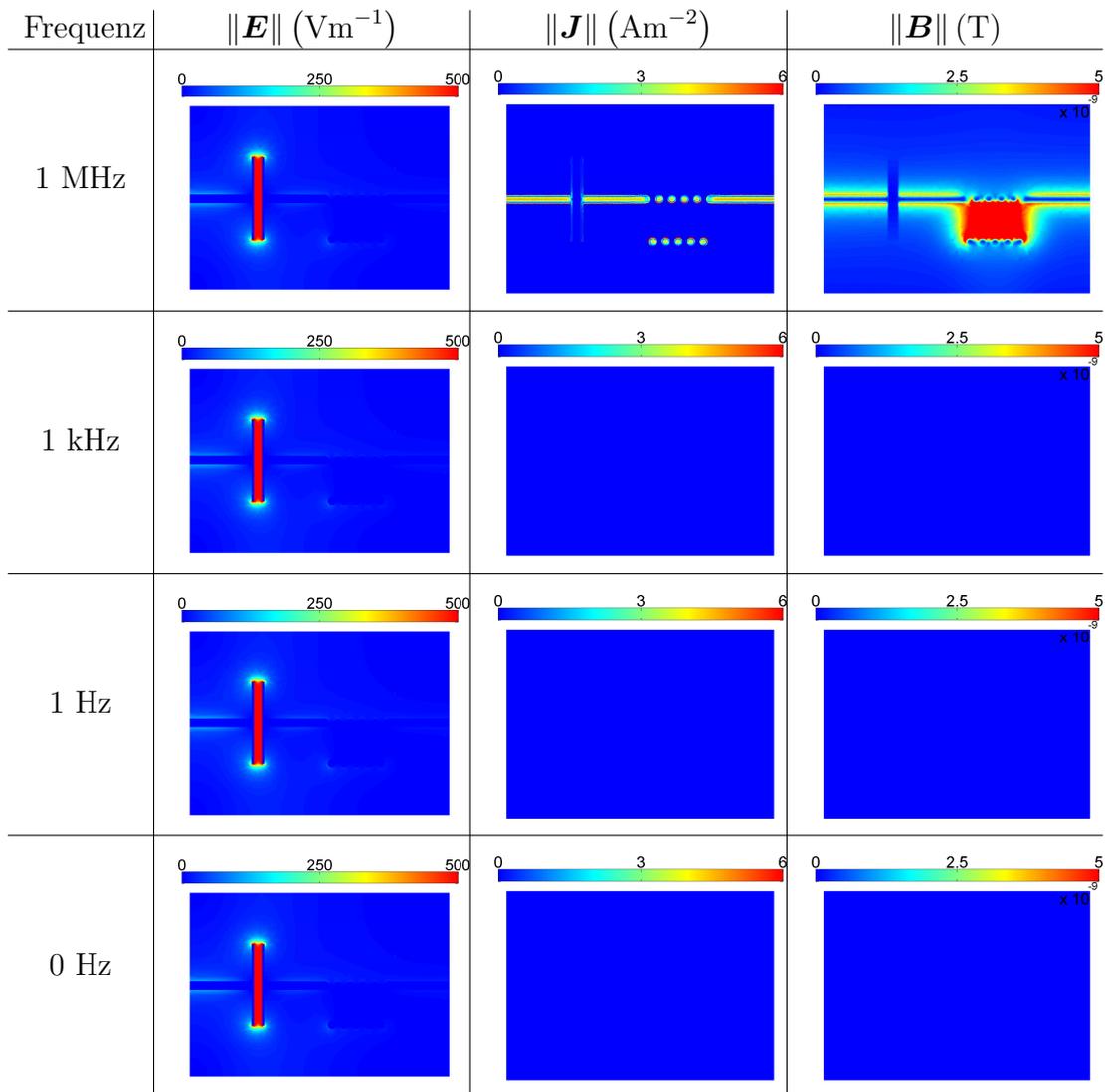


Abbildung 7.5.5: Feldverläufe des *RLC*-Schwingkreis-Beispiels für die Kopplung der gemischten Formulierungen: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}\}$ und für Polynomgrad $p = 2$.

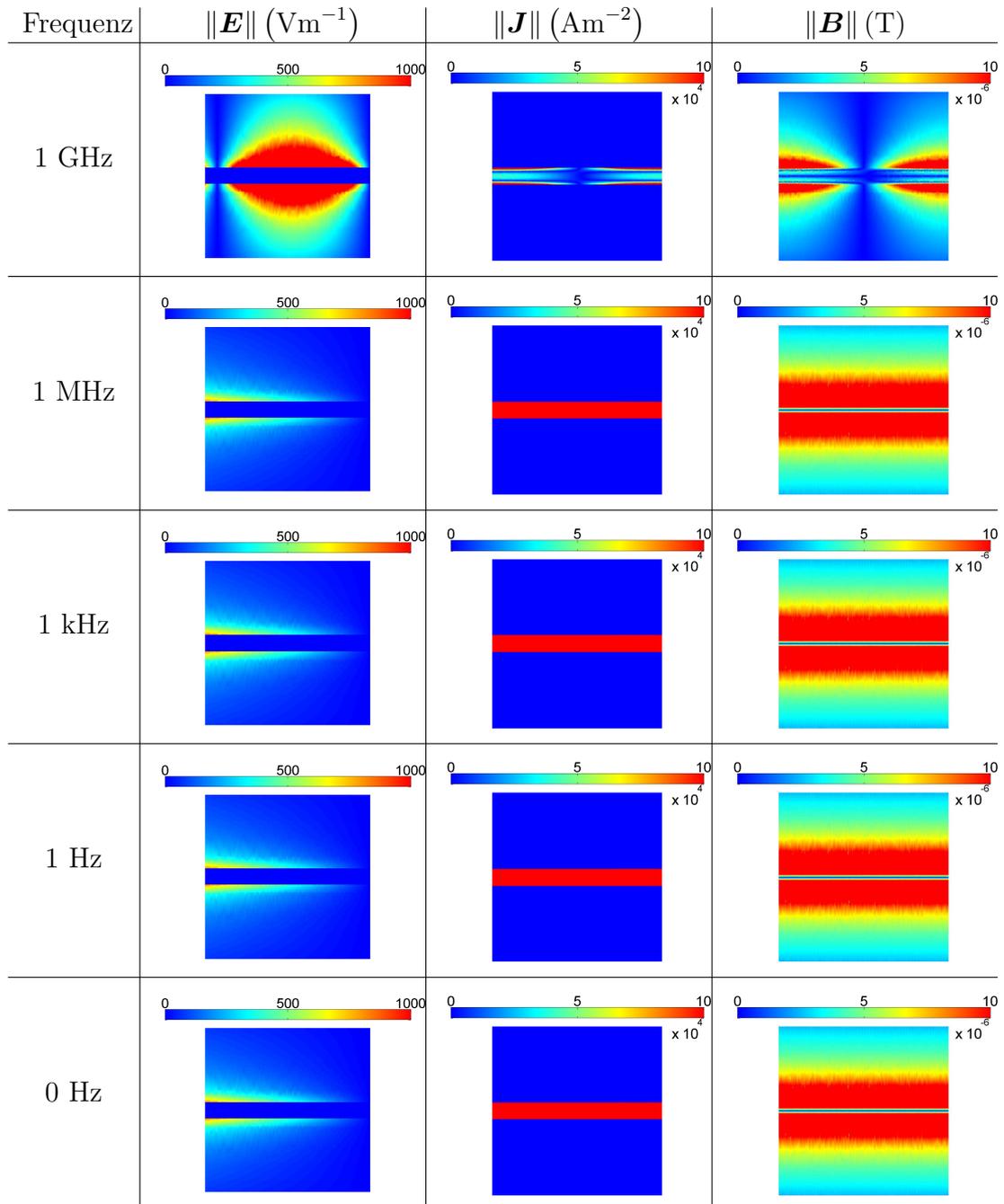


Abbildung 7.5.6: Feldverläufe des Koaxialkabel-Beispiels für die Kopplung der gemischten Formulierungen: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}, 1 \text{ GHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

7.6 Kopplung der Baum-Kobaum-Eichung im verlustfreien Gebiet und der gemischten Formulierung im verlustbehafteten Gebiet

7.6.1 Schwache Formulierung

Als letzte in dieser Arbeit betrachtete Formulierung für das Gesamtgebiet Ω wird in diesem Abschnitt die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichung im verlustfreien Teilgebiet Ω_1 mit der gemischten Formulierung im verlustbehafteten Gebiet Ω_2 vorgestellt. Ausgangspunkt sind, wie bereits bei den bisherigen Kopplungen, die schwachen Formulierungen (5.15) und (6.63) in den beiden Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 :

$$S^{\nu_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1}) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \mathbf{a}_{c,1}) = b_H^{\Gamma_{12}}(\mathbf{a}_{c,1}), \quad (7.83a)$$

$$jk_0 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \nabla v_1) + T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \nabla v_1) = \frac{1}{jk_0} b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla v_1), \quad (7.83b)$$

$$S^{\nu_2}(\mathbf{A}_{c,2}, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \mathbf{a}_{c,2}) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \mathbf{a}_{c,2}) \\ + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \mathbf{a}_{c,2}) = b_H^{\Gamma_{21}}(\mathbf{a}_{c,2}), \quad (7.83c)$$

$$jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \nabla \psi_2) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \nabla \psi_2) \\ + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \nabla \psi_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \nabla \psi_2) = b_H^{\Gamma_{21}}(\nabla \psi_2), \quad (7.83d)$$

$$T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \nabla v_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \nabla v_2) = b_V^{\Gamma_{21}}(v_2), \quad (7.83e)$$

wobei im Fall des verlustlosen Teilgebiets im Gegensatz zu (5.15) die Ansatz- und Testfunktionen auf den Raum

$$\mathbf{A}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,1} \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \quad (7.84)$$

eingeschränkt werden. Da der Durchflutungssatz in beiden Teilgebieten angesetzt wird, ergibt sich aufgrund der Stetigkeitsbedingungen der Felder sowie der Wahl der Testfunktionen $\mathbf{a}_{c,1}, \mathbf{a}_{c,2} \in \mathcal{H}^c(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ die Formulierung für das Gesamtgebiet Ω als Summe der beiden Teilformulierungen mit

$$S^\nu(\mathbf{A}_c, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\kappa(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \mathbf{a}_c) + (jk_0)^2 T^\epsilon(\mathbf{A}_c + \nabla \Psi, \mathbf{a}_c) \\ + T^\kappa(\nabla V, \mathbf{a}_c) + jk_0 T^\epsilon(\nabla V, \mathbf{a}_c) = 0. \quad (7.85)$$

Das Verschwinden der rechten Seite ergibt sich hierbei aus

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} = -\hat{\mathbf{n}}_{21} \quad \Rightarrow \quad b_H^{\Gamma_{12}}(\mathbf{a}_{c,1}) = -b_H^{\Gamma_{21}}(\mathbf{a}_{c,2}) \quad (7.86)$$

sofern für die Testfunktionen $\mathbf{a}_{c,1}$ und $\mathbf{a}_{c,2}$ auf Γ_{12}

$$\mathbf{a}_{c,1} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} = \mathbf{a}_{c,2} \times \hat{\mathbf{n}}_{12} \quad (7.87)$$

gilt. Für die noch verbleibenden Gleichungen zur Bestimmung der Skalarpotenziale ergibt sich das Problem, dass aufgrund der Baum-Kobaum-Eichung im verlustfreien Fall nur das Skalarpotenzial V_1 angesetzt wurde, während im verlustbehafteten Teilgebiet zwei Potenziale Ψ_2 und V_2 vorliegen. Im Hinblick auf die Kopplung der Teilformulierungen können jedoch erneut die drei Fälle

- $v_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$,
- $\psi_2, v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$,
- $v_1, \psi_2, v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_{12}) = \{f \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid v \neq 0 \text{ auf } \Gamma_{12}\}$.

unterschieden werden. In den ersten beiden Fällen liegt der Träger der jeweiligen Testfunktionen vollständig innerhalb eines der beiden Gebiete, sodass eine Kopplung der Gleichungen nicht erforderlich ist. Da im verbleibenden Fall beide Teilgebiete einen Beitrag zu den Gleichungen liefern, muss hier eine physikalisch sinnvolle Kopplung durchgeführt werden. Aufgrund der Stetigkeit der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke und der Tatsache, dass das elektrische Skalarpotenzial im statischen beziehungsweise stationären Grenzfall in Abwesenheit elektrischer Doppelschichten an Grenzflächen stetig ist, ergibt sich für die Skalarpotenziale auf Γ_{12} die Bedingung

$$V_1 = V_2 + jk_0\Psi_2. \quad (7.88)$$

Unter der zusätzlichen Bedingung für die Testfunktionen

$$v_1 = \psi_2 \quad \text{auf } \Gamma_{12} \quad (7.89)$$

und der vorausgesetzten Stetigkeit der Tangentialkomponenten der magnetischen Erregung folgt darüber hinaus

$$b_H^{\Gamma_{12}}(\nabla v_1) = -b_H^{\Gamma_{21}}(\nabla \psi_2). \quad (7.90)$$

Durch Skalierung der elektrischen Flussbilanz (5.15b) im verlustfreien Fall mit dem Faktor jk_0 folgt aus dieser die Kontinuitätsgleichung für das verlustfreie Gebiet, sodass im Anschluss eine Linearkombination mit der Kontinuitätsgleichung des verlustbehafteten Gebiets (6.63b) in der Form

$$\begin{aligned} (jk_0)^2 T^{\epsilon_1}(\mathbf{A}_{c,1}, \nabla v_1) + jk_0 T^{\epsilon_1}(\nabla V_1, \nabla v_1) \\ + jk_0 T^{\kappa_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \nabla \psi_2) + (jk_0)^2 T^{\epsilon_2}(\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \nabla \psi_2) \\ + T^{\kappa_2}(\nabla V_2, \nabla \psi_2) + jk_0 T^{\epsilon_2}(\nabla V_2, \nabla \psi_2) = 0 \end{aligned} \quad (7.91)$$

möglich ist. Wegen (7.90) heben sich die Randterme beim Bilden der Linearkombination gegenseitig auf. Aus Gründen der Symmetrie wird weiterhin eine Linearkombination der unskalierten elektrischen Flussbilanz des verlustfreien Falls mit der Eichbedingung des verlustbehafteten Teil betrachtet, sodass

$$\begin{aligned} & jk_0 T^{\epsilon_1} (\mathbf{A}_{c,1}, \nabla v_1) + T^{\epsilon_1} (\nabla V_1, \nabla v_1) \\ & + T^{\kappa_2} (\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \nabla v_2) + jk_0 T^{\epsilon_2} (\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2, \nabla v_2) = \frac{1}{jk_0} b_H^{\Gamma_{12}} (\nabla v_1) + b_V^{\Gamma_{21}} (v_2) \end{aligned} \quad (7.92)$$

folgt. Ohne zusätzliche Annahmen heben sich die Beiträge auf der rechten Seite an dieser Stelle nicht auf. Allerdings besteht im Rahmen der Vorgabe der Eichbedingung die Möglichkeit, eine entsprechende Randbedingung auf der Grenzfläche vorzugeben, welche sicherstellt, dass die zuvor erwähnte Linearkombination der rechten Seiten verschwindet. Im vorliegenden Fall lautet die zusätzliche Bedingung, welche der Eichung auf Γ_{12} hinzugefügt werden muss,

$$[(\eta_0 \kappa_2 + jk_0 \epsilon_{2,r}) (\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2)] \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} \quad (7.93)$$

beziehungsweise

$$[(\eta_0 \kappa_2 + jk_0 \epsilon_{2,r}) (\mathbf{A}_{c,2} + \nabla \Psi_2)] \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} = [\epsilon_{r,1} (\nabla V_1 + jk_0 \mathbf{A}_{c,1})] \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (7.94)$$

Diese Bedingung führt dazu, dass die Skalarpotenziale des verlustbehafteten Gebietes Ω_2 im statischen beziehungsweise stationären Grenzfall nicht mehr völlig unabhängig von jenen des verlustfreien Gebiets bestimmt werden können. Dieser Umstand steht im Gegensatz zu den Eigenschaften der bisher vorgestellten Formulierungen. Das für das physikalische Feld \mathbf{E} im statischen beziehungsweise stationären Grenzfall relevante Skalarpotenzial V kann jedoch im verlustbehafteten Gebiet immernoch unabhängig von den Größen des verlustfreien Gebietes bestimmt werden. Lediglich für das im Rahmen der Eichung im verlustbehafteten Gebiet hinzugekommene Potenzial Ψ besteht auch in der Statik beziehungsweise im Stationären immernoch eine Kopplung zu den Feldern des verlustfreien Gebiets. Der große Vorteil der Formulierung besteht darin, dass sie - als einzige der bisher vorgestellten - nach der Diskretisierung auf ein symmetrisches Gleichungssystem führt.

7.6.2 Finite-Elemente-Gleichungssystem

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 7.6.1 erfolgt die Herleitung der gekoppelten Formulierung im Diskreten. Ausgangspunkt sind die diskretisierten schwachen Formulierungen der beiden Teilgebiete (5.84) und (6.73)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_1} \\ \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Ac}^{\Omega_1} \\ \mathbf{b}_V^{\Omega_1} \end{bmatrix} \quad (7.95a)$$

und

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{AcV}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{A}_{\Psi Ac}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{A}_{VAc}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{A}_{V\Psi}^{\bar{\Omega}_2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{x}_V^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Ac}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{b}_{\Psi}^{\bar{\Omega}_2} \\ \mathbf{b}_V^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.95b)$$

wobei für die einzelnen Teilmatrizen die Darstellungen

$$\mathbf{A}_{AcAc}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{S}_{AcAc}^{\nu_1} + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AcAc}^{\epsilon_1}, \quad (7.96a)$$

$$\mathbf{A}_{AcV}^{\bar{\Omega}_1} = jk_0 \mathbf{M}_{AcV}^{\epsilon_1}, \quad (7.96b)$$

$$\mathbf{A}_{VAc}^{\bar{\Omega}_1} = jk_0 \mathbf{M}_{VAc}^{\epsilon_1}, \quad (7.96c)$$

$$\mathbf{A}_{VV}^{\bar{\Omega}_1} = \mathbf{S}_{VV}^{\epsilon_1} \quad (7.96d)$$

im verlustlosen Teilgebiet Ω_1 und

$$\mathbf{A}_{AcAc}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{S}_{AcAc}^{\nu_2} + jk_0 \mathbf{T}_{AcAc}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{T}_{AcAc}^{\epsilon_2}, \quad (7.97a)$$

$$\mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\bar{\Omega}_2} = jk_0 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{Ac\Psi}^{\epsilon_2}, \quad (7.97b)$$

$$\mathbf{A}_{AcV}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{M}_{AcV}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{M}_{AcV}^{\epsilon_2}, \quad (7.97c)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi Ac}^{\bar{\Omega}_2} = jk_0 \mathbf{M}_{\Psi Ac}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{M}_{\Psi Ac}^{\epsilon_2}, \quad (7.97d)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\bar{\Omega}_2} = jk_0 \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^{\kappa_2} + (jk_0)^2 \mathbf{S}_{\Psi\Psi}^{\epsilon_2}, \quad (7.97e)$$

$$\mathbf{A}_{\Psi V}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{S}_{\Psi V}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{S}_{\Psi V}^{\epsilon_2}, \quad (7.97f)$$

$$\mathbf{A}_{VAc}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{M}_{VAc}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{M}_{VAc}^{\epsilon_2}, \quad (7.97g)$$

$$\mathbf{A}_{V\Psi}^{\bar{\Omega}_2} = \mathbf{S}_{V\Psi}^{\kappa_2} + jk_0 \mathbf{S}_{V\Psi}^{\epsilon_2} \quad (7.97h)$$

im verlustbehafteten Teilgebiet Ω_2 gelten. Mit der Aufspaltung der Unbekannten in jene im Teilgebiet Ω_1 beziehungsweise Ω_2 und jene auf dem Rand Γ_{12} beziehungsweise Γ_{21}

$$\mathbf{x}^{\Omega_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_{\Omega_1}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\Gamma_{12}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{x}_{\Gamma_{12}}^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad (7.98a)$$

$$\mathbf{x}^{\Omega_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}_V^{\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\Gamma_{21}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_2} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}, \quad (7.98b)$$

kann das Gleichungssystem in der Form

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} \widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}}, \quad (7.99a)$$

mit

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\bar{\Omega}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.99b)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix}, \quad (7.99c)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\bar{\Omega}_1} \\ \mathbf{b}^{\bar{\Omega}_2} \end{bmatrix} \quad (7.99d)$$

und

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_1\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_1\Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1} & \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_1\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{VV}^{\Omega_1\Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{AcAc}^{\Gamma_{12}\Omega_1} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Gamma_{12}\Omega_1} & \mathbf{A}_{AcAc}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Gamma_{12}} \\ \mathbf{A}_{VAc}^{\Gamma_{12}\Omega_1} & \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{12}\Omega_1} & \mathbf{A}_{VAc}^{\Gamma_{12}} & \mathbf{A}_{VV}^{\Gamma_{12}} \end{bmatrix}, \quad (7.100a)$$

$$\mathbf{x}^{\bar{\Omega}_1,T} = [\mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_1,T} \quad \mathbf{x}_V^{\Omega_1,T} \quad \mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{12}} \quad \mathbf{x}_V^{\Gamma_{12},T}], \quad (7.100b)$$

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}_1,T} = [\mathbf{b}_{Ac}^{\Omega_1,T} \quad \mathbf{b}_V^{\Omega_1,T} \quad \mathbf{b}_{Ac}^{\Gamma_{12},T} \quad \mathbf{b}_V^{\Gamma_{12},T}] \quad (7.100c)$$

sowie

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{AcAc}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Omega_2,\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{\Psi Ac}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi Ac}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Omega_2,\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{V\Psi}^{\Omega_2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VAc}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{V\Psi}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\Gamma_{21}\Omega_2}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}\Omega_2}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}\Omega_2}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}}^{\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}}^{\Omega_2} \\ \mathbf{A}_{AcAc}^{\Gamma_{21}\Omega_2} & \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\Gamma_{21}\Omega_2} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Gamma_{21}\Omega_2} & \mathbf{A}_{AcAc}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{Ac\Psi}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{AcV}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{\Gamma_{21}\Omega_2}^{\Gamma_{21}\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\Gamma_{21}\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Gamma_{21}\Omega_2} & \mathbf{A}_{\Gamma_{21}}^{\Psi} & \mathbf{A}_{\Psi\Psi}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{\Psi V}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{A}_{VAc}^{\Gamma_{21}\Omega_2} & \mathbf{A}_{V\Psi}^{\Gamma_{21}\Omega_2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{VAc}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}_{V\Psi}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.101a)$$

$$\mathbf{x}^{\bar{\Omega}_2,T} = [\mathbf{x}_{Ac}^{\Omega_2,T} \quad \mathbf{x}_{\Psi}^{\Omega_2,T} \quad \mathbf{x}_V^{\Omega_2,T} \quad \mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{21}} \quad \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21},T} \quad \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21},T}], \quad (7.101b)$$

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}_2,T} = [\mathbf{b}_{Ac}^{\Omega_2,T} \quad \mathbf{b}_{\Psi}^{\Omega_2,T} \quad \mathbf{b}_V^{\Omega_2,T} \quad \mathbf{b}_{Ac}^{\Gamma_{21},T} \quad \mathbf{b}_{\Psi}^{\Gamma_{21},T} \quad \mathbf{b}_V^{\Gamma_{21},T}] \quad (7.101c)$$

dargestellt werden. Die Stetigkeitsbedingungen der Feldgrößen auf der Grenzfläche Γ_{12} führen im Diskreten zu den Bedingungen

$$\mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{12}} = \mathbf{x}_{Ac}^{\Gamma_{21}} \quad (7.102)$$

sowie

$$\mathbf{x}_V^{\Gamma_{12}} = \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}} + jk_0 \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21}} = [jk_0 \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{21},\Psi}} \quad \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{21},V}}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\Psi}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}_V^{\Gamma_{21}} \end{bmatrix}. \quad (7.103)$$

Mit dem neuen Vektor der Unbekannten $\mathbf{x}^{\bar{\Omega}}$

$$\mathbf{x}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\Omega_1} \\ \mathbf{x}^{\Gamma_{21}} \\ \mathbf{x}^{\Omega_2} \end{bmatrix} \quad (7.104)$$

kann die Beziehung zwischen $\widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}}$ und $\mathbf{x}^{\bar{\Omega}}$ in der Form

$$\widehat{\mathbf{x}}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}\mathbf{x}^{\bar{\Omega}} \quad (7.105)$$

mit der Matrix \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Omega_1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{\Gamma_{21}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Omega_2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{21}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.106a)$$

$$\mathbf{V}_{\Gamma_{12}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{21},Ac}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & jk_0\mathbf{I}_{N_{\Gamma_{21},\Psi}} & \mathbf{I}_{N_{\Gamma_{21},V}} \end{bmatrix} \quad (7.106b)$$

angegeben werden. Die im Rahmen der schwachen Formulierungen angesprochenen Linearkombinationen der Gleichungen auf der Grenzfläche können durch eine Multiplikation des ursprünglichen Gleichungssystems (7.99a) von links mit der Matrix \mathbf{V}^T realisiert werden, sodass sich als Gleichungssystem zur Bestimmung von $\mathbf{x}^{\bar{\Omega}}$

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}}\mathbf{x}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{b}^{\bar{\Omega}}, \quad (7.107a)$$

mit

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}}\mathbf{V}, \quad (7.107b)$$

$$\mathbf{b}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T\widehat{\mathbf{b}}^{\bar{\Omega}} \quad (7.107c)$$

ergibt. Die Gesamtsystemmatrix $\mathbf{A}^{\bar{\Omega}}$ besitzt infolgedessen die Blockstruktur

$$\mathbf{A}^{\bar{\Omega}} = \mathbf{V}^T\widehat{\mathbf{A}}^{\bar{\Omega}}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\Omega_1} & \mathbf{A}^{\Omega_1\Gamma_{12}}\mathbf{V}_{\Gamma_{21}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_{\Gamma_{21}}^T\mathbf{A}^{\Gamma_{12}\Omega_1} & \mathbf{V}_{\Gamma_{21}}^T\mathbf{A}^{\Gamma_{12}}\mathbf{V}_{\Gamma_{21}} + \mathbf{A}^{\Gamma_{21}} & \mathbf{A}^{\Gamma_{21}\Omega_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\Omega_2\Gamma_{21}} & \mathbf{A}^{\Omega_2} \end{bmatrix}. \quad (7.108)$$

Da die Formulierungen in den beiden Teilgebieten Ω_1 und Ω_2 jeweils auf komplex symmetrische Matrizen führen, genügen die Teilmatrizen den Beziehungen

$$\mathbf{A}^{\Omega_1} = \mathbf{A}^{\Omega_1,T}, \quad (7.109a)$$

$$\mathbf{A}^{\Omega_1\Gamma_{12}} = \mathbf{A}^{\Gamma_{12}\Omega_1,T}, \quad (7.109b)$$

$$\mathbf{A}^{\Omega_2} = \mathbf{A}^{\Omega_2,T}, \quad (7.109c)$$

$$\mathbf{A}^{\Omega_2\Gamma_{21}} = \mathbf{A}^{\Gamma_{21}\Omega_2,T}, \quad (7.109d)$$

woraus folgt, dass die vorgestellte Formulierung als einzige der betrachteten Formulierung für das Gesamtgebiet zu einer komplex symmetrischen Systemmatrix $\mathbf{A}^{\bar{\Omega}}$ führt. Beim Lösen des entsprechenden Gleichungssystems kann diese Eigenschaft vorteilhaft ausgenutzt werden, vgl. [vdVM90].

| Mode | $\gamma_{lmn} \left(\frac{1}{m}\right)$ | $e_{lmn,1}$ | $e_{lmn,2}$ | $e_{lmn,3}$ |
|------------|---|---------------------|---------------------|---------------------|
| TE_{110} | $-80.9938 + 137.8768j$ | $5.6 \cdot 10^{-3}$ | $1.7 \cdot 10^{-4}$ | $3.2 \cdot 10^{-5}$ |
| TE_{120} | $-86.9455 + 225.1187j$ | $4.0 \cdot 10^{-3}$ | $1.3 \cdot 10^{-4}$ | $2.9 \cdot 10^{-6}$ |
| TM_{111} | $-90.1138 + 236.9469j$ | $1.6 \cdot 10^{-4}$ | $3.0 \cdot 10^{-5}$ | $1.8 \cdot 10^{-5}$ |
| TE_{101} | $-88.0214 + 247.8733j$ | $6.5 \cdot 10^{-3}$ | $1.5 \cdot 10^{-5}$ | $3.0 \cdot 10^{-6}$ |
| TE_{210} | $-37.2556 + 264.4426j$ | $6.0 \cdot 10^{-3}$ | $1.7 \cdot 10^{-4}$ | $3.2 \cdot 10^{-6}$ |
| TE_{111} | $-88.7995 + 267.3251j$ | $5.2 \cdot 10^{-3}$ | $4.0 \cdot 10^{-5}$ | $4.5 \cdot 10^{-7}$ |
| TM_{121} | $-91.1661 + 290.7462j$ | $1.2 \cdot 10^{-3}$ | $1.3 \cdot 10^{-4}$ | $6.6 \cdot 10^{-6}$ |

Tabelle 7.4: Eigenwerte im gemischten Fall: Analytisch berechnete Eigenwerte des teilweise mit einem verlustbehafteten Dielektrikum gefüllten Resonators und relative Fehler der numerisch berechneten Näherungslösungen für Polynomgrad $p = 1, 2, 3$.

7.6.3 Numerische Ergebnisse

Um die Stabilität der Formulierung zu beurteilen, werden die Beispiele aus Abschnitt 7.2 betrachtet. Im Fall des Resonators wird ausschließlich das zugeordnete Eigenwertproblem betrachtet, während für die anderen Beispiele das entsprechende Anregungsproblem gelöst wird.

Teilweise gefüllter Resonator

In Tabelle 7.4 ist ein Vergleich der analytisch und numerisch berechneten Eigenwerte für den teilweise gefüllten Resonator und Polynomgrad $p = 1, 2, 3$ dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen analytischer und numerischer Lösung ist wie im rein verlustlosen und im rein verlustbehafteten Fall sehr gut und vergleichbar mit jener der anderen Formulierungen. Die resultierenden relativen Fehler entsprechen größenordnungsmäßig jenen, welche für das gleiche Beispiel in der Literatur [GBB⁺96], [ZC02] für andere Simulationsverfahren angegeben sind. Weiterhin ist in Abbildung 7.6.1 die Verteilung der Eigenwerte in der komplexen Ebene dargestellt. Die aus der Feldformulierung bekannten unphysikalischen Eigenwerte sind deutlich zu erkennen, stellen für die Niederfrequenzeigenschaften der Formulierung jedoch kein Problem dar, da sie alle ungleich Null sind.

Kondensator

Für das Kondensator-Beispiel sind die Feldverläufe der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Stromdichte und der magnetischen Flussdichte für verschiedene Frequenzen einschließlich dem statischen Grenzfall in Abbildung 7.6.2 dargestellt. Qualitativ geben die Ergebnisse die relevanten physikalischen Effekte korrekt wieder.

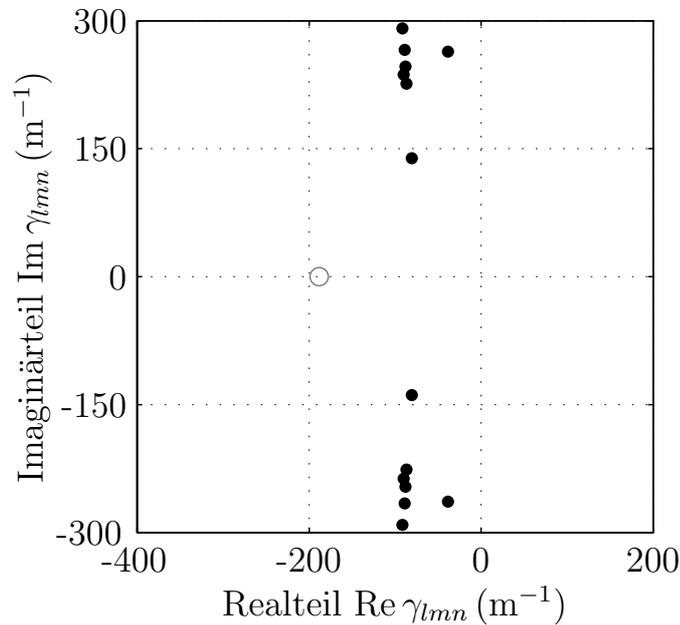


Abbildung 7.6.1: Eigenwertverteilung im gemischten Fall: Lage der Eigenwerte des teilweise gefüllten Resonators in der komplexen Ebene für Polynomgrad $p = 1$. Physikalische Eigenwerte sind als schwarze Punkte, unphysikalische Eigenwerte als Kreise dargestellt.

Insbesondere zeigt sich erst bei höheren Frequenzen die Ausbildung nennenswerter Ströme sowie Magnetfelder, während das elektrische Feld über den gesamten Frequenzbereich im Wesentlichen auf den Bereich zwischen den Kondensatorplatten konzentriert ist. Weiterhin ist der Skineneffekt im Verlauf der elektrischen Stromdichte sehr gut zu erkennen. Um auch eine quantitative Aussage über die Ergebnisse zu machen, ist in Abbildung 7.6.3 der Verlauf des Betrags der Admittanz Y in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Zum Vergleich ist außerdem die Admittanz eines idealen Kondensators

$$Y_C = j\omega C \quad (7.110)$$

mit C aus (7.7) sowie der Verlauf des Imaginärteils von Y aufgetragen. Wie bei den anderen vorgestellten Formulierungen zeigt sich bei höheren Frequenzen eine gute Übereinstimmung zwischen numerisch und analytisch berechneter Admittanz. Insbesondere die lineare Abhängigkeit zwischen Admittanz und Frequenz wird gut wiedergegeben. Im Niederfrequenzfall ergeben sich jedoch die bereits in Abschnitt 7.3.3 diskutierten Probleme aufgrund des Einflusses der Leitfähigkeit κ . Die Auswirkung, welche die Leitfähigkeit auf den Verlauf der Admittanz hat, ist gesondert noch einmal in Abbildung 7.6.4 dargestellt.

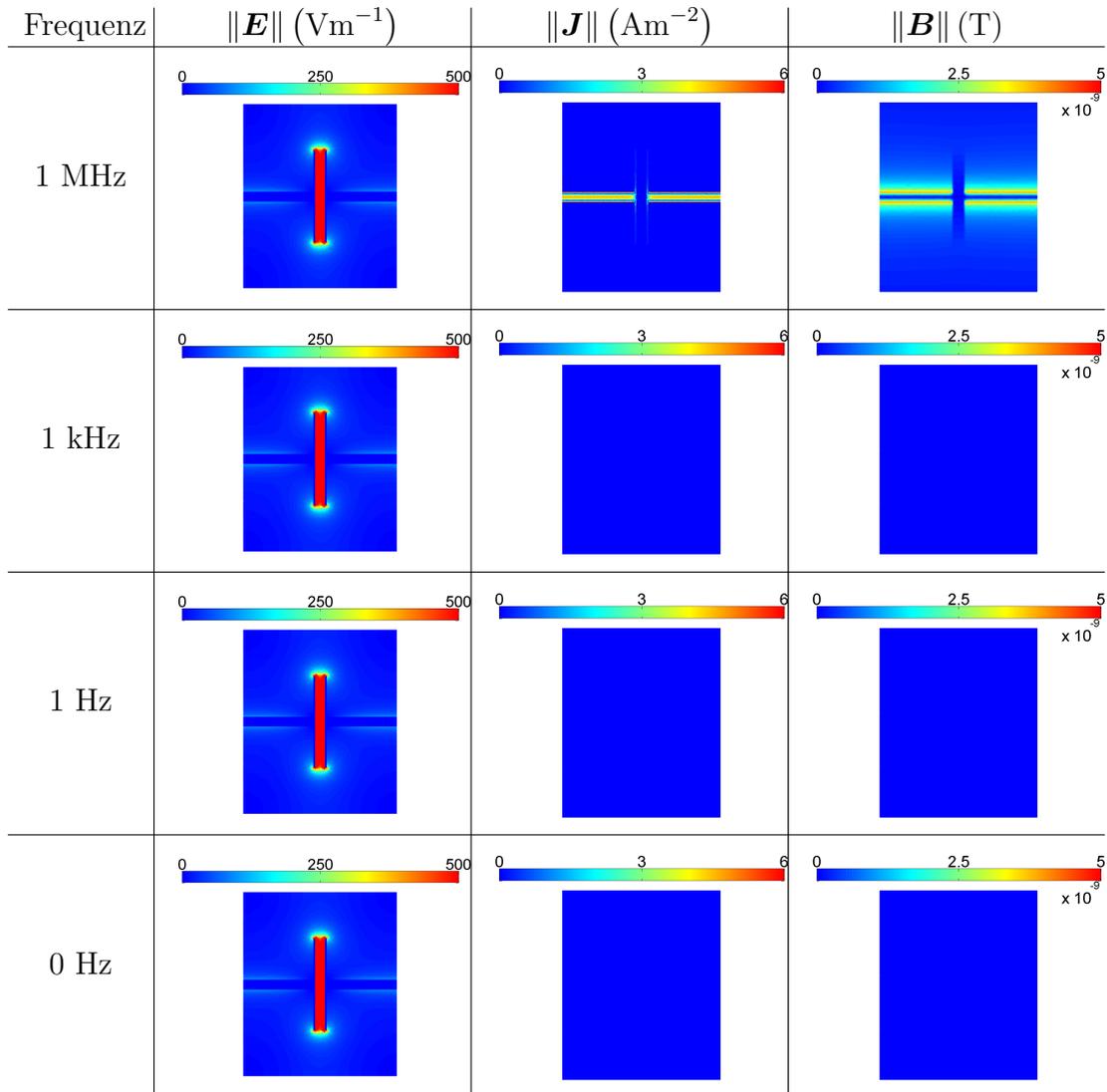


Abbildung 7.6.2: Feldverläufe des Kondensator-Beispiels für die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichung und der gemischten Formulierung: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

RLC-Serienschwingkreis

Als vorletztes Beispiel wird der *RLC*-Schwingkreis aus Abschnitt 7.2.3 betrachtet. Die numerisch berechneten Feldbilder für dieses Beispiel sind in Abbildung 7.6.5 für verschiedene Frequenzen dargestellt. Die dargestellten Feldverläufe entsprechen jenen, welche mit Hilfe der anderen Formulierungen bestimmt wurden. Hieraus ergibt sich, dass auch die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichung und der gemischten Formulierung die relevanten physikalischen Effekte korrekt abbildet. Insbesondere

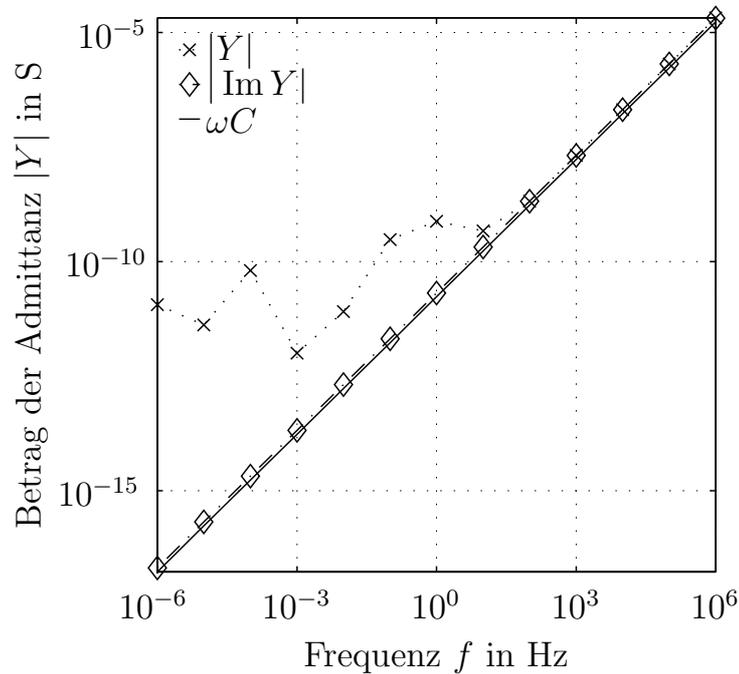


Abbildung 7.6.3: Admittanz des Kondensators: Verlauf der Admittanz $Y = \frac{I}{U}$ der Kondensator-Struktur in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$.

re die weitgehend statische Natur der elektrischen Feldstärke im Außenraum, die Ausprägung des Skineffekts bei höheren Frequenzen sowie die Konzentration der magnetischen Flussdichte auf das Innere der Spule sind gut erkennbar.

Koaxialkabel

Als letztes Beispiel dient das am rechten Ende kurzgeschlossene Koaxialkabel nach Abschnitt 7.2.4, für welches die Feldbilder der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Stromdichte sowie der magnetischen Flussdichte in Abbildung 7.6.6 in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt sind. Die Ausbildung einer stehenden Welle bei der höchsten betrachteten Frequenz $f = 1$ GHz und die Ausprägung des Skineffekts werden richtig wiedergegeben. Im statischen Grenzfall werden sowohl das elektrostatische Feld zwischen Innen- und Außenleiter als auch das stationäre Strömungsfeld innerhalb des Innenleiters sowie das hieraus resultierende magnetostatische Feld korrekt dargestellt.

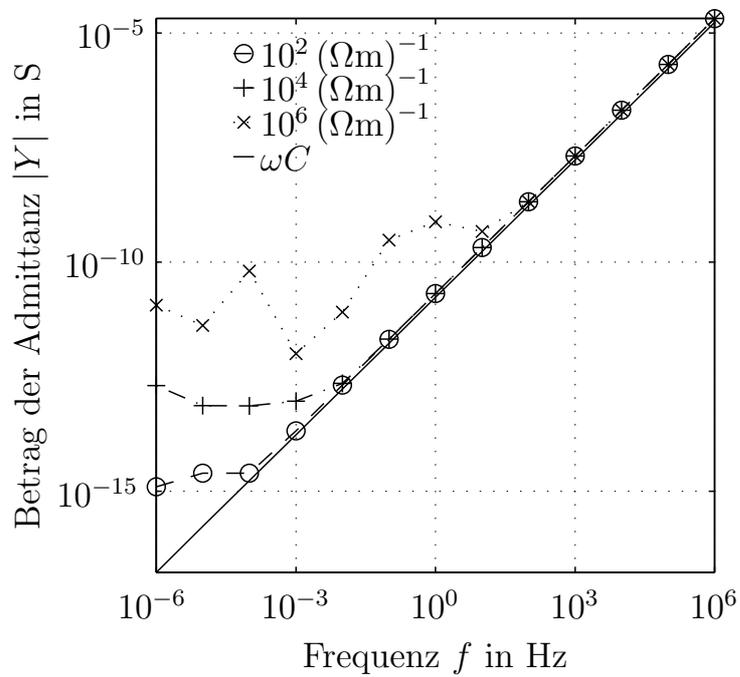


Abbildung 7.6.4: Einfluss der Leitfähigkeit auf die berechnete Admittanz des Kondensators: Verlauf der Admittanz $Y = \frac{I}{U}$ der Kondensator-Struktur für $\kappa = 10^2, 10^4, 10^6 (\Omega\text{m})^{-1}$ in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$.

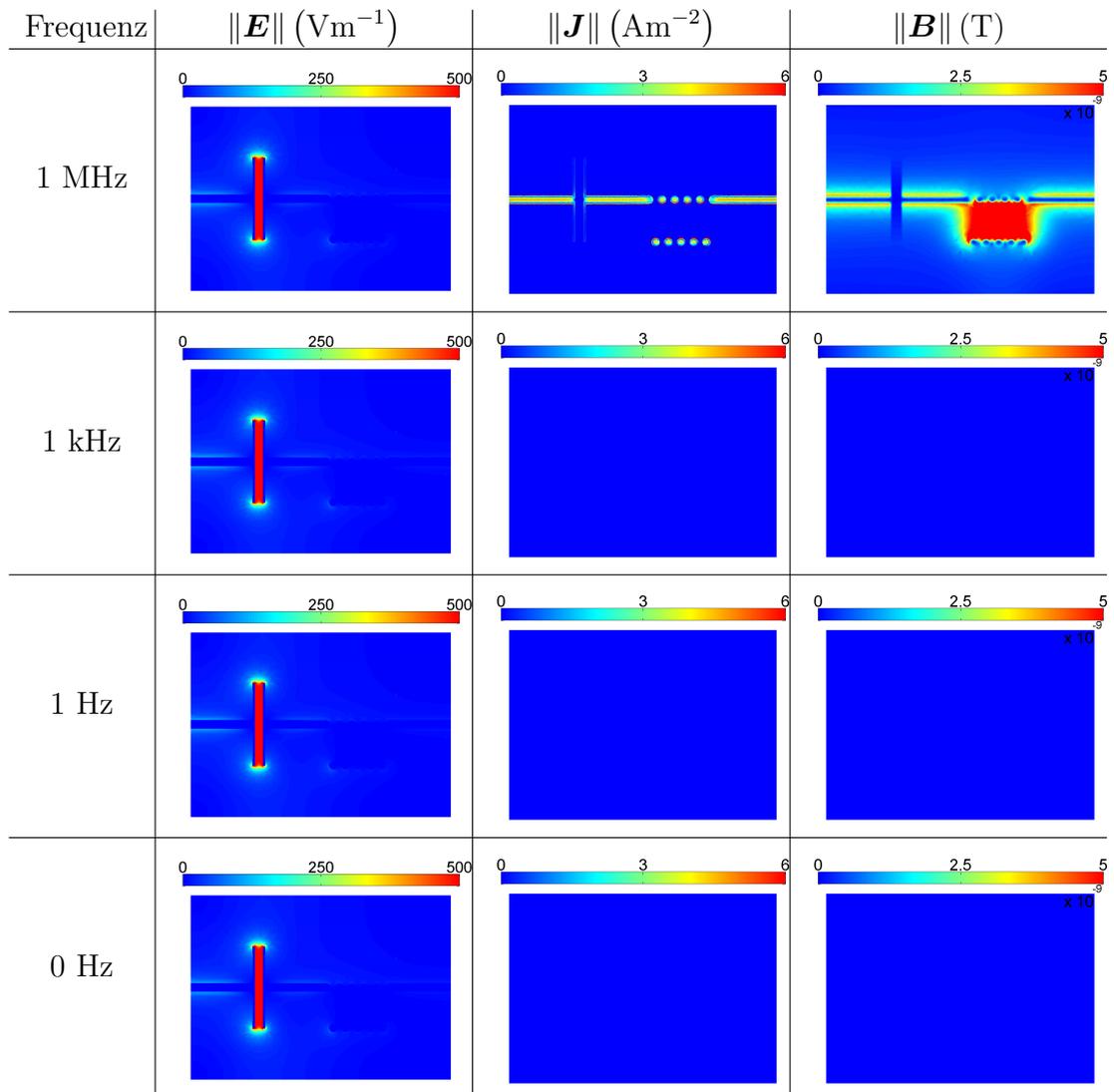


Abbildung 7.6.5: Feldverläufe des RLC -Schwingkreis-Beispiels für die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichung und der gemischten Formulierung: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

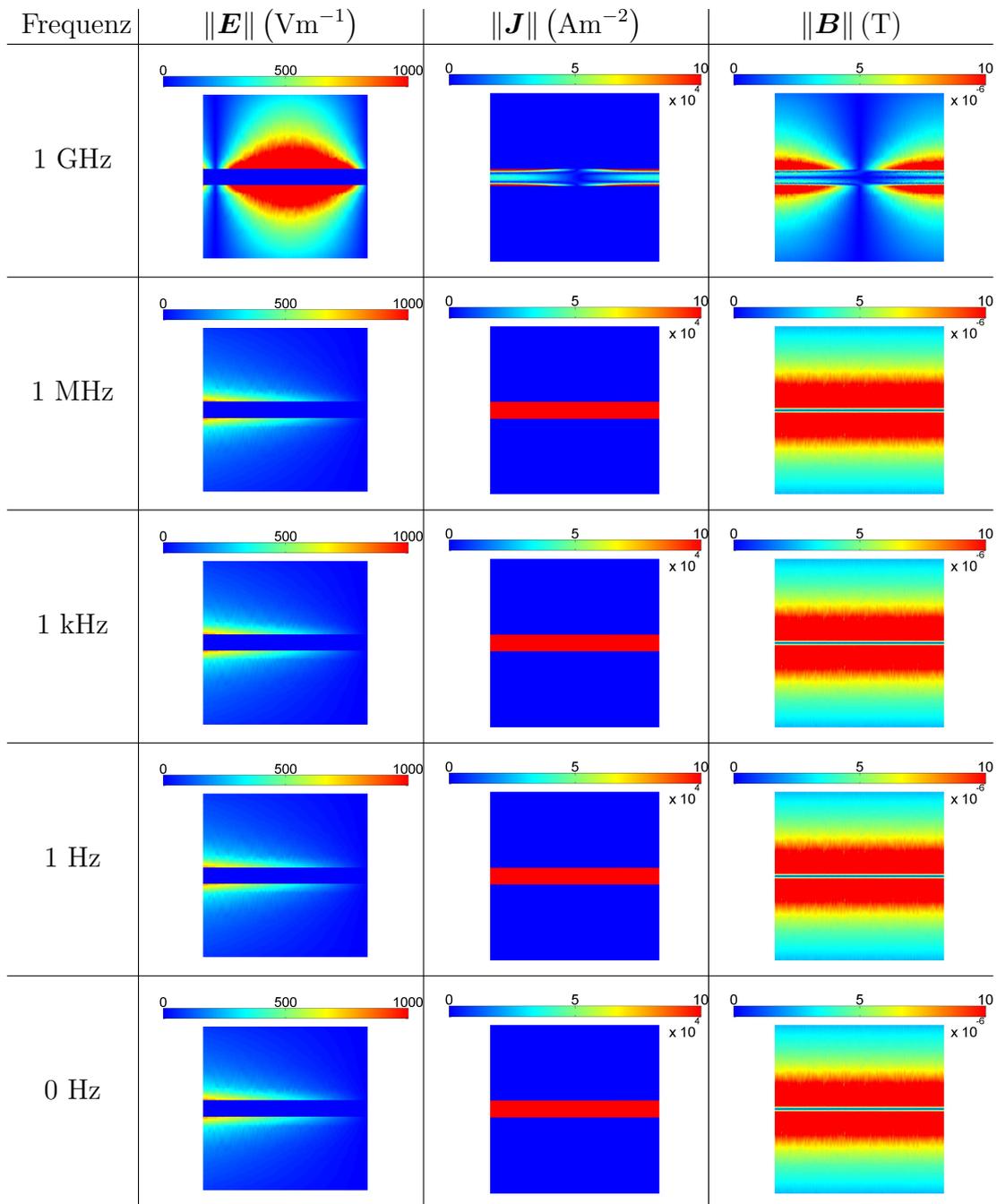


Abbildung 7.6.6: Feldverläufe des Koaxialkabel-Beispiels für die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichung und der gemischten Formulierung: Dargestellt sind die Verläufe der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , des Leitungsstroms \mathbf{J} sowie der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} für die Frequenzen $f \in \{0 \text{ Hz}, 1 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 1 \text{ MHz}, 1 \text{ GHz}\}$ und Polynomgrad $p = 2$.

7.7 Vergleich der Formulierungen

Die in den Abschnitten 7.3, 7.4, 7.5 und 7.6 vorgestellten Formulierungen zur Behandlung von Randwertproblemen, welche sowohl verlustfreie als auch verlustbehaftete Teilgebiete beinhalten, unterscheiden sich in den Eigenschaften der resultierenden linearen Gleichungssysteme mitunter deutlich voneinander. Die in Abschnitt 7.3 vorgestellte Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen hat im Vergleich zu den anderen Formulierungen den Vorteil, dass sie mit einer minimalen Anzahl an Unbekannten auskommt und die Eichung aufgrund rein topologischer Betrachtungen des FE -Netzes durchgeführt werden kann. Allerdings ergibt sich ein nicht symmetrisches Gleichungssystem, da die entsprechende Formulierung für das verlustbehaftete Gebiet nicht symmetrisch ist. Grundsätzlich ist im Fall einer nicht verschwindenden Wellenzahl $k_0 > 0$ jedoch eine Skalierung der Gleichungen möglich, welche auf ein symmetrisches Gleichungssystem führt. In dieser Hinsicht verhält sich die in Abschnitt 7.4 vorgestellte Formulierung, welche sich aus der Kopplung der statischen und der stationären Eichung ergibt, sehr ähnlich. Diese Art der Formulierung für das Gesamtgebiet führt zunächst zwar auf ein Gleichungssystem mit einer größeren Anzahl an Unbekannten als die Baum-Kobaum-Eichung. Allerdings kann das Skalarpotenzial V - wie in den Teilbereichsformulierungen - in einem ersten Lösungsschritt unabhängig von den verbleibenden Größen \mathbf{A}_c und Ψ bestimmt werden. Das verbleibende Gleichungssystem hat dann die gleiche Dimension wie jenes, welches im Rahmen der Baum-Kobaum-Eichung zu lösen ist und kann durch eine geeignete Skalierung auch symmetrisiert werden. Im Fall der in Abschnitt 7.5 vorgestellten Kopplung der gemischten Formulierungen kann ebenfalls bei nicht verschwindender Wellenzahl $k_0 > 0$ durch eine Skalierung der Gleichungen für die Skalarpotenziale des verlustfreien Gebietes ein symmetrisches Gleichungssystem erreicht werden. Eine Reduktion der Anzahl der Unbekannten ist in diesem Fall jedoch nicht möglich. Im Gegensatz zu den anderen drei Formulierungen ergibt sich bei der Kopplung der Baum-Kobaum-Eichung mit der gemischten Formulierung nach Abschnitt 7.6 ein symmetrisches Gleichungssystem und im verlustfreien Teilgebiet wird die Anzahl der Unbekannten genauso gering gehalten wie bei der Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen. Im verlustbehafteten Gebiet muss bei dieser Formulierung ein zusätzliches Skalarpotenzial berücksichtigt werden.

Anhand des Resonator-Beispiels aus Abschnitt 7.2.1 wird ein Vergleich der Eigenschaften der linearen Gleichungssysteme der vier Formulierungen durchgeführt. Die Verläufe der Konditionszahlen der unskalierten Gesamtsystemmatrizen sind in Abbildung 7.7.1 für Polynomgrad $p = 2$ in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Hier zeigt sich, dass das Verhalten der vier vorgestellten Formulierungen über weite Teile des betrachteten Frequenzbereichs sehr ähnlich ist. Erst bei höheren Frequenzen zeigen sich leichte Nachteile bei der Kopplung der gemischten Formulierungen. Werden hingegen die Verläufe der Konditionszahl betrachtet, die sich bei einer Diagonalskalierung der Systemmatrizen ergeben sich deutlichere Unterschiede zwischen den For-

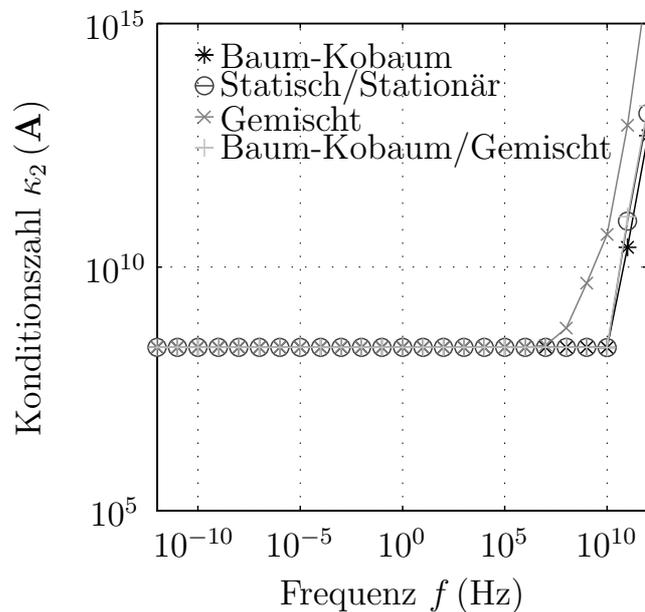


Abbildung 7.7.1: Vergleich der Konditionszahlen der Systemmatrizen im gemischten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ der Systemmatrizen für das gemischte Resonator-Problem und Polynomgrad $p = 2$ in Abhängigkeit der Frequenz.

mulierungen, wie in Abbildung 7.7.2 dargestellt. Die Kopplung der Baum-Kobaum-Eichungen, der gemischten Formulierungen sowie der Baum-Kobaum-Eichung und der gemischten Formulierung zeigen asymptotisch im Wesentlichen das gleiche Verhalten. Lediglich der Absolutwert der Konditionszahl ist bei der Kopplung der gemischten Formulierungen etwas geringer als bei den beiden anderen Kopplungen. Deutliche Vorteile zeigen sich hier - wie auch im verlustfreien und verlustbehafteten Fall - bei der Kopplung der statischen und stationären Eichung, da diese auch bei höheren Frequenzen eine im Wesentlichen konstante Konditionszahl besitzt.

Die Daten der linearen Gleichungssysteme sind in Tabelle 7.5 aufgeführt, wobei dort die Konditionszahlen der unskalierten Systemmatrizen aufgeführt sind. In Tabelle 7.5 wurde die Symmetrie der Systemmatrix im Falle der Kopplung der Baum-Kobaum-Eichung und der gemischten Formulierung nach Abschnitt 7.6 bei der Anzahl der zu speichernden Nichtnulleinträge in der Systemmatrix nicht berücksichtigt. Die geringere Anzahl an Unbekannten in den linearen Gleichungssystemen ist grundsätzlich ein Vorteil der Formulierungen aus Abschnitt 7.3 sowie Abschnitt 7.6. Durch einen zweistufigen Lösungsprozess kann die Formulierung aus Abschnitt 7.4 jedoch ebenfalls auf entsprechend kleinere Teilprobleme herunter gebrochen werden. Eine solche Möglichkeit bietet sich bei der Formulierung nach Abschnitt 7.5 nicht, sodass hier eine Reduktion der Anzahl der Unbekannten nicht möglich ist.

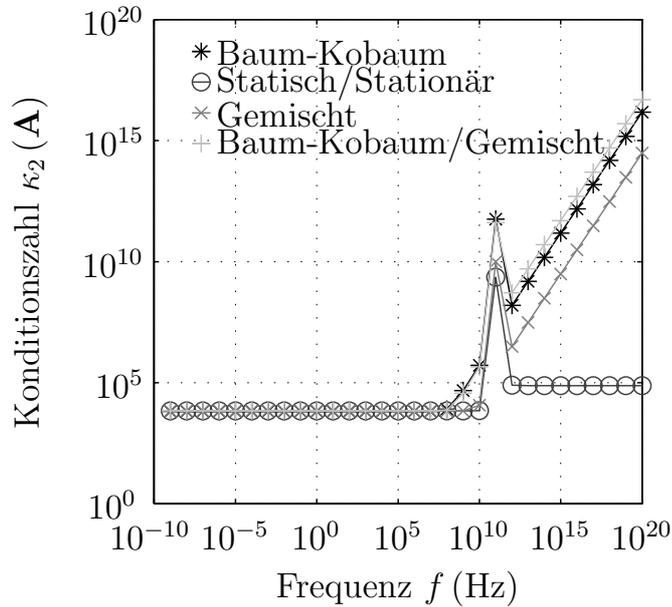


Abbildung 7.7.2: Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl der Systemmatrizen im gemischten Fall: Verlauf der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ für das Resonatorproblem in Abhängigkeit der Frequenz für Polynomgrad $p = 1$ mit Diagonalskalierung.

| Polynomgrad $p=2$ | | Baum-Kobaum-Eichungen | statische + stationäre Eichungen | gemischte Formulierungen | Baum-Kobaum-Eichung + gemischte Formulierung |
|---------------------------------------|------------|-----------------------|----------------------------------|--------------------------|--|
| Unbekannte | | 26814 | 32124 | 32124 | 29513 |
| Nichtnull-einträge von \mathbf{A} | $f = 0$ Hz | 795122 | 1203744 | 1203744 | 1004363 |
| | $f > 0$ Hz | 1229906 | 1645652 | 2061398 | 1657276 |
| Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A})$ | 0 Hz | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ |
| | 1 fHz | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ |
| | 1 Hz | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ |
| | 1 THz | $5.0 \cdot 10^{12}$ | $1.4 \cdot 10^{13}$ | $8.1 \cdot 10^{15}$ | $2.0 \cdot 10^{13}$ |

Tabelle 7.5: Eigenschaften der gekoppelten Formulierungen im gemischten Fall: Vergleich der Anzahl der Unbekannten, der Nichtnulleinträge in den Systemmatrizen und der Konditionszahlen der unskalierten Systemmatrizen aller vier Formulierungen anhand des Resonatorbeispiels für Polynomgrad $p = 2$.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene niederfrequenzstabile Potenzialformulierungen zur FE -Simulation elektromagnetischer Strukturen im Frequenzbereich vorgestellt.

In Kapitel 4 wurde das Niederfrequenzverhalten und die damit verbundene Instabilität der elektrischen Feldformulierung untersucht. Auch wenn die Untersuchungen anhand der elektrischen Feldformulierung durchgeführt wurden, gelten die Ergebnisse auch für die magnetische Feldformulierung. Eine Eigenwertanalyse der Feldformulierung zeigt, dass das Versagen der Feldformulierung auf unphysikalische Eigenvektoren, welche reinen Gradientenfeldern entsprechen, zurückzuführen ist. Deren zugehöriger Eigenwert konvergiert mit sinkender Frequenz gegen Null. Diese reinen Gradientenfelder treten als Eigenvektoren auf, da bei Verwendung der elektrischen Feldformulierung im verlustlosen Fall die elektrische Flussbilanz und im verlustbehafteten Fall die Kontinuitätsgleichung nur implizit und in frequenzabhängiger Form in den Gleichungen berücksichtigt werden. Bei den unphysikalischen Gradientenfeldern handelt sich daher um Felder, welche der Flussbilanz beziehungsweise der Kontinuitätsgleichung nicht genügen. Insbesondere wurde gezeigt, dass die Niederfrequenzinstabilität aufgrund unterschiedlicher Frequenzabhängigkeiten im verlustlosen Fall schneller zum Versagen der Formulierung führt als im verlustbehafteten Fall. Anhand eines numerischen Beispiels wurden die beschriebenen Eigenschaften der Formulierung jeweils aufgezeigt.

Ausgehend von der Charakterisierung der Niederfrequenzinstabilität der Feldformulierung wurde in Kapitel 5 der rein verlustlose Fall betrachtet und es wurden drei unterschiedliche Potenzialformulierungen zur Behebung der Niederfrequenzinstabilität vorgestellt. Alle drei Formulierungen basieren auf der expliziten Berücksichtigung der elektrischen Flussbilanz sowie der Vorgabe einer geeigneten Eichbedingung, um die Niederfrequenzstabilität zu gewährleisten. Während die vorgestellte Baum-Kobaum-Eichung bereits bekannt war, wurden die beiden anderen vorgestell-

ten Formulierungen in dieser Form bisher nicht verwendet. Wie gezeigt wurde, wird die Niederfrequenzinstabilität der Feldformulierung durch alle drei Formulierungen beseitigt und keine der Formulierungen weist unphysikalische Nulleigenwerte in Form reiner Gradientenfelder auf. Weiterhin wurde anhand eines numerischen Beispiels gezeigt, dass die physikalischen Eigenwerte sinnvoll abgebildet werden, und dass die Formulierungen auch im Niederfrequenzfall auf gut konditionierte Gleichungssysteme führen. Zum Abschluss des Kapitels wurde ein Vergleich der verschiedenen Formulierungen im Hinblick auf die Eigenschaften der resultierenden Gleichungssysteme durchgeführt.

In Kapitel 6 wurde der vollständig verlustbehaftete Fall betrachtet. Hier wurden - analog zu Kapitel 5 - ebenfalls drei neue Potenzialformulierungen zur Behebung der Niederfrequenzinstabilität der Feldformulierung vorgestellt. Im Gegensatz zum verlustlosen Fall wurde nicht die elektrische Flussbilanz, sondern die Kontinuitätsgleichung zusammen mit einer Eichbedingung in den Gleichungen berücksichtigt. Die hieraus resultierenden Formulierungen weisen, wie gezeigt wurde, zwar weiterhin unphysikalische Eigenwerte in Form reiner Gradientenfelder auf, im Gegensatz zur elektrischen Feldformulierung sind diese jedoch rein reell und ungleich null, sodass sie zu keiner Niederfrequenzinstabilität führen. Anhand eines numerischen Beispiels wurde die Robustheit der Formulierungen nachgewiesen und gezeigt, dass die Gleichungssysteme auch im Niederfrequenzfall gut konditioniert bleiben. Wie im verlustlosen Fall bildet ein Vergleich der verschiedenen Formulierungen anhand der Eigenschaften der Gleichungssysteme den Abschluss des Kapitels.

Auf den Resultaten aus Kapitel 5 und Kapitel 6 aufbauend, wurde in Kapitel 7 der gemischte Fall mit teilweise verlustlosen und teilweise verlustbehafteten Materialbereichen vorgestellt. Da dieser Fall durch keine der zuvor vorgestellten Formulierungen abgedeckt wird, wurden durch geeignete Kopplung der Teilbereichsformulierungen an Grenzflächen vier neue Formulierungen für das Gesamtgebiet vorgestellt, welche auch im Niederfrequenzfall stabil sind. Insbesondere wurden im Rahmen der Kopplung der Formulierungen keine zusätzlichen, einschränkenden Näherungen durchgeführt, um die Formulierungen für das Gesamtgebiet zu erhalten. Anhand verschiedener numerischer Beispiele wurde die Robustheit und Zuverlässigkeit der Formulierungen vom statischen Grenzfall bis in den Hochfrequenzbereich gezeigt. Ein Vergleich der gekoppelten Formulierungen bildet den Abschluss dieser Arbeit.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass von den vorgestellten Formulierungen die statische Eichung im verlustlosen Fall, die stationäre Eichung im verlustbehafteten Fall sowie die Kopplung dieser beiden Formulierungen im gemischten Fall die vielversprechendsten Ergebnisse gezeigt haben. Durch einen zweistufigen Lösungsprozess ist der Aufwand zur Lösung der linearen Gleichungssysteme bei diesen Formulierungen nicht wesentlich höher als bei der Feldformulierung oder der Baum-Kobaum-Eichung. Die vergleichsweise niedrigen Konditionszahlen der Systemmatrizen dieser Formulierungen auch bei hohen Frequenzen sind vor allem im

Hinblick auf iterative Löser von großer Bedeutung, zumal sich bei diesen Formulierungen aus der Block-Dreiecksstruktur der Systemmatrizen im Grenzfall $k_0 \rightarrow 0$ sehr leicht ein Vorkonditionierer für iterative Lösungsverfahren konstruieren lässt.

In der vorliegenden Arbeit wurden ausschließlich Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen betrachtet. Abstrahlungs- oder Impedanzrandbedingungen, welche in der Praxis eine wichtige Rolle spielen, wurden bewusst nicht berücksichtigt, da diese in der Regel selbst Näherungen für den Fall mittlerer oder hoher Frequenzen darstellen und somit selbst zu Niederfrequenzproblemen führen können. Eine geeignete Modellierung dieser Effekte von der Statik bis in den Hochfrequenzfall steht noch aus. Im Hinblick auf die verwendeten Anregungen ist insbesondere die Verwendung niederfrequenzstabiler Eigenmode-Löser für Wellenleiter, wie zum Beispiel in [FHDE04] vorgestellt, von Interesse. Hier müssten weitere Untersuchungen angestellt werden, die das Einbringen dieser Anregung in die vorgestellten Formulierungen ermöglichen.

Obwohl die vorgestellten Potenzialformulierungen die Niederfrequenzinstabilität der elektrischen Feldformulierung vollständig beseitigen, stellen Bereiche mit sehr hohen Leitfähigkeiten noch aus zweierlei Gründen eine Herausforderung dar. Zum einen im Hinblick auf die *FE*-Netze bei hohen Frequenzen, da dann aufgrund sehr kleiner Eindringtiefen extrem anisotrope Netze benötigt werden, was gerade bei der Verwendung von Tetraedern ein Problem darstellt. Zum anderen ergeben sich im statischen Grenzfall, wie anhand des Kondensator-Beispiels gezeigt, mitunter Schwierigkeiten mit Rundungsfehlern aufgrund der stark unterschiedlichen Skalierung der Felder in den Teilbereichen.

Einen alternativen Ansatz zur Behebung der Niederfrequenzinstabilität könnten stabilisierte Zwei-Feld-Formulierungen ähnlich zu [ZC01] darstellen. Entsprechende Ansätze zur Berechnung der Ausbreitungseigenschaften transversal inhomogener Wellenleiter sind Gegenstand aktueller Forschung des Instituts. Die Vorteile dieses Ansatzes liegen darin, dass diese Art der Formulierung zum einen nur linear von der Frequenz abhängt und zum anderen direkt eine Port-Hamiltonsche Struktur [vdSM02] aufweist, was eine Kopplung mit anderen physikalischen Domänen in systematischer Weise zulässt.

Abbildungsverzeichnis

| | |
|---|----|
| 2.1.1 Beispielhaftes Feldgebiet. | 8 |
| 2.2.1 Grenzfläche zwischen zwei Materialbereichen. | 12 |
| 2.2.2 Übergangsbedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{H} | 13 |
| 2.2.3 Übergangsbedingungen für \mathbf{D} , \mathbf{B} und \mathbf{J} | 14 |
| 2.5.1 De Rham-Komplex. | 22 |
| 2.5.2 Tonti-Diagramm für die Maxwell-Gleichungen. | 23 |
| 3.1.1 De Rham-Komplex im Diskreten. | 27 |
| 3.3.1 Beispielhaftes 2D FE -Netz. | 32 |
| 3.3.2 Baum-Kobaum-Aufspaltung des FE -Netzes | 33 |
| 4.1.1 Verlustloses Randwertproblem. | 36 |
| 4.1.2 Verlustloser Hohlraumresonator. | 48 |
| 4.1.3 Eigenwertverteilung der Feldformulierung im verlustlosen Fall | 50 |
| 4.1.4 Konditionierung der Feldformulierung im verlustlosen Fall | 50 |
| 4.2.1 Verlustbehaftetes Randwertproblem. | 51 |
| 4.2.2 Resonator mit verlustbehaftetem Dielektrikum. | 61 |
| 4.2.3 Eigenwertverteilung der Feldformulierung im verlustbehafteten Fall | 63 |
| 4.2.4 Konditionszahl für die Feldformulierung im verlustbehafteten Fall | 63 |

| | |
|--|-----|
| 5.1.1 Verlustloses Randwertproblem. | 68 |
| 5.1.2 Verlustloses Randwertproblem zum Testen der Formulierungen. | 68 |
| 5.2.1 Eigenwertverteilung im verlustlosen Fall | 87 |
| 5.2.2 Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall | 88 |
| 5.2.3 Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 88 |
| 5.3.1 Eigenwertverteilung im verlustlosen Fall | 98 |
| 5.3.2 Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall | 98 |
| 5.3.3 Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 99 |
| 5.4.1 Eigenwertverteilung im verlustlosen Fall | 105 |
| 5.4.2 Konditionszahl der Systemmatrix im verlustlosen Fall | 106 |
| 5.4.3 Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 107 |
| 5.5.1 Vergleich der Konditionszahlen im verlustlosen Fall | 109 |
| 5.5.2 Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 110 |
| 6.1.1 Verlustbehaftetes Randwertproblem. | 112 |
| 6.1.2 Verlustbehaftetes Randwertproblem zum Testen der Formulierungen. | 112 |
| 6.2.1 Eigenwertverteilung im verlustbehafteten Fall | 120 |
| 6.2.2 Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall | 121 |
| 6.2.3 Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 121 |
| 6.3.1 Eigenwertverteilung im verlustbehafteten Fall | 129 |
| 6.3.2 Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall | 130 |
| 6.3.3 Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 131 |
| 6.4.1 Lage von $\beta_{\pm}^{c,m}$ in der komplexen Zahlenebene | 138 |
| 6.4.2 Möglicher Bereich für die Eigenwerte λ_k von $\mathbf{A}_{VV}^{c,m}$ | 140 |
| 6.4.3 Eigenwertverteilung im verlustbehafteten Fall | 142 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 6.4.4 | Konditionszahl der Systemmatrix im verlustbehafteten Fall | 143 |
| 6.4.5 | Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 144 |
| 6.5.1 | Vergleich der Konditionszahlen im verlustbehafteten Fall | 145 |
| 6.5.2 | Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 146 |
| 7.1.1 | Modellproblem für die Kopplung der Formulierungen. | 147 |
| 7.2.1 | Teilweise mit verlustbehaftetem Dielektrikum gefüllter Resonator . . . | 149 |
| 7.2.2 | Plattenkondensator mit verlustlosem Dielektrikum | 150 |
| 7.2.3 | <i>RLC</i> -Serienschwingkreis | 151 |
| 7.2.4 | Stück eines Koaxialkabels. | 152 |
| 7.3.1 | Eigenwertverteilung im gemischten Fall | 160 |
| 7.3.2 | Feldverläufe des Kondensator-Beispiels | 161 |
| 7.3.3 | Admittanz des Kondensators | 162 |
| 7.3.4 | Einfluss der Leitfähigkeit auf die berechnete Admittanz | 163 |
| 7.3.5 | Feldverläufe des <i>RLC</i> -Schwingkreis-Beispiels | 164 |
| 7.3.6 | Feldverläufe des Koaxialkabel-Beispiels | 165 |
| 7.4.1 | Eigenwertverteilung im gemischten Fall | 174 |
| 7.4.2 | Feldverläufe des Kondensator-Beispiels | 175 |
| 7.4.3 | Admittanz des Kondensators | 176 |
| 7.4.4 | Einfluss der Leitfähigkeit auf die berechnete Admittanz | 177 |
| 7.4.5 | Feldverläufe des <i>RLC</i> -Schwingkreis-Beispiels | 178 |
| 7.4.6 | Feldverläufe des Koaxialkabel-Beispiels | 179 |
| 7.5.1 | Eigenwertverteilung im gemischten Fall | 186 |
| 7.5.2 | Feldverläufe des Kondensator-Beispiels | 187 |
| 7.5.3 | Admittanz des Kondensators | 188 |

| | |
|---|-----|
| 7.5.4 Einfluss der Leitfähigkeit auf die berechnete Admittanz | 189 |
| 7.5.5 Feldverläufe des <i>RLC</i> -Schwingkreis-Beispiels | 190 |
| 7.5.6 Feldverläufe des Koaxialkabel-Beispiels | 191 |
| 7.6.1 Eigenwertverteilung im gemischten Fall | 199 |
| 7.6.2 Feldverläufe des Kondensator-Beispiels | 200 |
| 7.6.3 Admittanz des Kondensators | 201 |
| 7.6.4 Einfluss der Leitfähigkeit auf die berechnete Admittanz | 202 |
| 7.6.5 Feldverläufe des <i>RLC</i> -Schwingkreis-Beispiels | 203 |
| 7.6.6 Feldverläufe des Koaxialkabel-Beispiels | 204 |
| 7.7.1 Vergleich der Konditionszahlen im gemischten Fall | 206 |
| 7.7.2 Einfluss der Skalierung auf die Konditionszahl | 207 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Elektromagnetische Feldgrößen und ihre SI-Einheiten. | 8 |
| 3.1 | Basis des $\tilde{\mathcal{V}}^{h,p}$ | 28 |
| 3.2 | Basis des $\tilde{\mathcal{R}}^{h,p}$ | 30 |
| 4.1 | Eigenwerte der Feldformulierung im verlustlosen Fall | 49 |
| 4.2 | Eigenwerte der Feldformulierung im verlustbehafteten Fall | 62 |
| 5.1 | Eigenwerte im verlustlosen Fall | 86 |
| 5.2 | Eigenwerte im verlustlosen Fall | 97 |
| 5.3 | Eigenwerte im verlustlosen Fall | 105 |
| 5.4 | Eigenschaften der Potenzialformulierungen im verlustlosen Fall | 108 |
| 6.1 | Eigenwerte im verlustbehafteten Fall | 119 |
| 6.2 | Eigenwerte im verlustbehafteten Fall | 129 |
| 6.3 | Eigenwerte im verlustbehafteten Fall | 142 |
| 6.4 | Eigenschaften der Potenzialformulierungen im verlustbehafteten Fall . | 145 |
| 7.1 | Eigenwerte im gemischten Fall | 160 |
| 7.2 | Eigenwerte im gemischten Fall | 173 |
| 7.3 | Eigenwerte im gemischten Fall | 185 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 7.4 | Eigenwerte im gemischten Fall | 198 |
| 7.5 | Eigenschaften der gekoppelten Formulierungen im gemischten Fall . . | 207 |

Literaturverzeichnis

- [AR88] ALBANESE, R. und G. RUBINACCI: *Integral formulation for 3D eddy-current computation using edge elements*. Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A, 135(7):457–462, september 1988.
- [AR90] ALBANESE, R. und G. RUBINACCI: *Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 29(3):515–532, 1990.
- [Bal89] BALANIS, C. A.: *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 1989.
- [BC07] BUFFA, ANNALISA und SNORRE H. CHRISTIANSEN: *A dual finite element complex on the barycentric refinement*. Math. Comput., 76(260):1743–1769, 2007.
- [Beb00] BEBENDORF, MARIO: *Approximation of boundary element matrices*. Numerische Mathematik, 86:565–589, 2000.
- [Ber94] BERENGER, JEAN-PIERRE: *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*. Journal of Computational Physics, 114(2):185 – 200, 1994.
- [BGL05] BENZI, M., G. H. GOLUB und J. LIESEN: *Numerical solution of saddle point problems*. Acta Numerica, 14(-1):1–137, 2005.
- [Boo03] BOOTHBY, W. M.: *An Introduction To Differentiable Manifolds And Riemannian Geometry*. Academic Press, 2003.
- [Bos97] BOSSAVIT, A.: *Computational Electromagnetism*. Academic Press, 1997.
- [BP89] BIRO, O. und K. PREIS: *On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents*. Magnetics, IEEE Transactions on, 25(4):3145–3159, 1989.

- [BPR95] BIRO, O., K. PREIS und K.R. RICHTER: *Various FEM formulations for the calculation of transient 3D eddy currents in nonlinear media*. Magnetics, IEEE Transactions on, 31(3):1307–1312, 1995.
- [BT80] BAYLISS, A. und E. TURKEL: *Radiation boundary conditions for wave-like equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 33(6):707–725, 1980.
- [Cen91] CENDES, Z. J.: *Vector finite elements for electromagnetic field computation*. Magnetics, IEEE Transactions on, 27(5):3958 – 3966, September 1991.
- [Che89] CHENG, D. K.: *Field and Wave Electromagnetics*. Addison-Wesley, 1989.
- [Cia78] CIARLET, P. G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [CJM97] CHEW, W.C., J.-M. JIN und E. MICHELSEN: *Complex coordinate system as a generalized absorbing boundary condition*. In: *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1997. IEEE., 1997 Digest*, Band 3, Seiten 2060–2063 vol.3, July 1997.
- [CK97] CHEN, Q. und A. KONRAD: *A review of finite element open boundary techniques for static and quasi-static electromagnetic field problems*. Magnetics, IEEE Transactions on, 33(1):663 –676, jan 1997.
- [CLRS09] CORMEN, T. H., C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST und C. STEIN: *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 2009.
- [CRW93] COIFMAN, R., V. ROKHLIN und S. WANDZURA: *The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription*. Antennas and Propagation Magazine, IEEE, 35(3):7 –12, june 1993.
- [CW01] CLEMENS, M. und T. WEILAND: *Discrete Electromagnetism with the Finite Integration Technique*. Progress in Electromagnetics Research-pier, PIER 32:65–87, 2001.
- [DEB96] DYCZIJ-EDLINGER, R. und O. BIRO: *A joint vector and scalar potential formulation for driven high frequency problems using hybrid edge and nodal finite elements*. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, 44(1):15 –23, Januar 1996.
- [DEPL99] DYCZIJ-EDLINGER, R., G. PENG und J.-F. LEE: *Efficient finite element solvers for the Maxwell equations in the frequency domain*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 169(3–4):297 – 309, 1999.

- [DEPL00] DYCZIJ-EDLINGER, R., G. PENG und J.-F. LEE: *Stability conditions for using TVFEMs to solve Maxwell equations in the frequency domain*. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 13(2-3):245–260, 2000.
- [Des81] DESCHAMPS, G. A.: *Electromagnetics and differential forms*. Proceedings of the IEEE, 69(6):676–696, June 1981.
- [DV98] DEMKOWICZ, L. und L. VARDAPETYAN: *Modeling of electromagnetic absorption/scattering problems using hp-adaptive finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 152(1–2):103 – 124, 1998.
- [EEHJ96] ERIKSSON, K., D. ESTEP, P. HANSBO und C. JOHNSON: *Computational Differential Equations*. Studentlitteratur, 1996.
- [Fas05] FASCHING, G.: *Werkstoffe für die Elektrotechnik*. Springer, 2005.
- [FDE10] FARLE, O. und R. DYCZIJ-EDLINGER: *Numerically Stable Moment Matching for Linear Systems Parameterized by Polynomials in Multiple Variables With Applications to Finite Element Models of Microwave Structures*. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 58(11):3675 – 3684, nov. 2010.
- [FHDE04] FARLE, O., V. HILL und R. DYCZIJ-EDLINGER: *Finite-element waveguide solvers revisited*. Magnetics, IEEE Transactions on, 40(2):1468 – 1471, März 2004.
- [FHIDE08] FARLE, O., V. HILL, P. INGELSTRÖM und R. DYCZIJ-EDLINGER: *Multi-parameter polynomial order reduction of linear finite element models*. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 14(5):421–434, 2008.
- [For07] FORSTER, O.: *Analysis 3*. Vieweg, 2007.
- [Fra03] FRANKEL, T.: *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press, 2003.
- [Fre03] FREUND, R. W.: *Model reduction methods based on Krylov subspaces*. Acta Numerica, 12:267–319, 4 2003.
- [GBB⁺96] GROISS, S., I. BARDI, O. BIRO, K. PREIS und K.R. RICHTER: *Parameters of lossy cavity resonators calculated by the finite element method*. Magnetics, IEEE Transactions on, 32(3):894–897, 1996.
- [Giv91] GIVOLI, DAN: *Non-reflecting boundary conditions*. Journal of Computational Physics, 94(1):1 – 29, 1991.

- [Giv04] GIVOLI, DAN: *High-order local non-reflecting boundary conditions: a review*. Wave Motion, 39(4):319 – 326, 2004. `jce:title`; New computational methods for wave propagation/`ce:title`.
- [GK11] GROSS, P. W. und P. R. KOTIUGA: *Electromagnetic Theory and Computation*. Cambridge University Press, 2011.
- [GR87] GREENGARD, L. und V. ROKHLIN: *A fast algorithm for particle simulations*. Journal of Computational Physics, 73(2):325–348, Dezember 1987.
- [GS89] GÖCKELER, M. und T. SCHÜCKER: *Differential geometry, gauge theories and gravity*. Cambridge University Press, 1989.
- [GT94] GOLIAS, N.A. und T.D. TSIBOUKIS: *Magnetostatics with edge elements: a numerical investigation in the choice of the tree*. Magnetism, IEEE Transactions on, 30(5):2877–2880, September 1994.
- [GvL96] GOLUB, G. H. und C. F. VAN LOAN: *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [GWC09] GÖDEL, N., T. WARBURTON und M. CLEMENS: *GPU accelerated Discontinuous Galerkin FEM for electromagnetic radio frequency problems*. In: *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2009. APSURSI '09. IEEE*, Seiten 1–4, 2009.
- [Hac99] HACKBUSCH, W.: *A Sparse Matrix Arithmetic Based on H -Matrices . Part I : Introduction to H -Matrices*. Computing, 62(2):89–108, 1999.
- [Hal61] HALE, H. W.: *A Logic for Identifying the Trees of a Graph*. Power Apparatus and Systems, Part III. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 80(3):195 –197, april 1961.
- [Har01] HARRINGTON, R. F.: *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. IEEE Press / John Wiley & Sons, 2001.
- [HFDE03] HILL, V., O. FARLE und R. DYCZIJ-EDLINGER: *A stabilized multilevel vector finite-element solver for time-harmonic electromagnetic waves*. Magnetism, IEEE Transactions on, 39(3):1203 – 1206, Mai 2003.
- [HFDE04] HILL, V., O. FARLE und R. DYCZIJ-EDLINGER: *Finite element basis functions for nested meshes of nonuniform refinement level*. Magnetism, IEEE Transactions on, 40(2):981 – 984, März 2004.
- [HFIDE07] HILL, V., O. FARLE, P. INGELSTROM und R. DYCZIJ-EDLINGER: *Efficient Implementation of Nonuniform Refinement Levels in a Geometric Multigrid Finite-Element Method for Electromagnetic Waves*. Magnetism, IEEE Transactions on, 43(4):1521 –1524, April 2007.

- [Hil06] HILL, V.: *Schnelle Finite-Elemente-Methoden zur Simulation elektromagnetischer Felder im Frequenzbereich*. Dissertation, Universität des Saarlandes, 2006.
- [HJ99] HORN, R. A. und C. R. JOHNSON: *Matrix Ana.* Cambridge University Press, 1999.
- [HKO08] HIPTMAIR, R., F. KRAMER und J. OSTROWSKI: *A Robust Maxwell Formulation for All Frequencies*. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 44(6):682–685, Juni 2008.
- [HO03] HEHL, F. W. und Y. N. OBUKHOV: *Foundations of classical electrodynamics*. Birkhäuser, 2003.
- [Hum01] HUMMEL, R. E.: *Electronic Properties of Matter*. Springer, 2001.
- [HW08] HESTHAVEN, J. S. und T. WARBURTON: *Nodal Discontinuous Galerkin Methods*. Springer, 2008.
- [Ing06] INGELSTROM, P.: *A new set of $H(\text{curl})$ -conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes*. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 54(1):106–114, Januar 2006.
- [Jac06] JACKSON, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter, 2006.
- [Jin02] JIN, J.: *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley-IEEE Press, 2002.
- [KBOH09] KRÄMER, F., M. BEBENDORF, J. OSTROWSKI und R. HIPTMAIR: *Hierarchical matrix preconditioners for eddy current problems*. In: *Electromagnetics in Advanced Applications, 2009. ICEAA '09. International Conference on*, Seiten 724–727, sept. 2009.
- [KFB99] KETTUNEN, L., K. FORSMAN und A. BOSSAVIT: *Gauging in Whitney spaces*. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 35(3):1466–1469, Mai 1999.
- [KH05] KE, H. und T. HUBING: *A Modified LU Recombination Technique for Improving the Performance of Boundary Element Methods at Low Frequencies*. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, 20(3):178–185, November 2005.
- [KH08] KE, H. und T. HUBING: *Low-Frequency Full-Wave Finite Element Modeling Using the LU Recombination Method*. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, 23(4):303–308, December 2008.
- [Kle65] KLEINMAN, R.E.: *The Rayleigh region*. *Proceedings of the IEEE*, 53(8):848–856, 1965.

- [KMEK90] KANAYAMA, H., H. MOTOYAMA, K. ENDO und F. KIKUCHI: *Three-dimensional magnetostatic analysis using Nedelec's elements*. Magnetics, IEEE Transactions on, 26(2):682–685, mar 1990.
- [Kön04] KÖNIGSBERGER, K: *Analysis 2*. Springer, 2004.
- [Kru56] KRUSKAL, J. B.: *On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem*. In: *Proc Amer Math Soc*, Band 7, Seiten 48–50, 1956.
- [Leh04] LEHNER, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie*. Springer, 2004.
- [LS04] LEE, R. und D.-K. SUN: *p-Type multiplicative Schwarz (pMUS) method with vector finite elements for modeling three-dimensional waveguide discontinuities*. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, 52(3):864–870, 2004.
- [LVZL05] LEE, S.-C., M. N. VOUVAKIS, K. ZHAO und J.-F. LEE: *Analysing microwave devices using a symmetric coupling of finite and boundary elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 64(4):528–546, 2005.
- [Max62] MAXWELL, J. C.: *On physical lines of force*. Philosophical Magazine and Journal of Science - Fourth Series, 23(151):12–24, 1862.
- [Max65] MAXWELL, J. C.: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 155:459–512, 1865.
- [Max73a] MAXWELL, J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Band I. Clarendon Press, 1873.
- [Max73b] MAXWELL, J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Band II. Clarendon Press, 1873.
- [MC95] MANGES, J.B. und Z.J. CENDES: *A generalized tree-cotree gauge for magnetic field computation*. Magnetics, IEEE Transactions on, 31(3):1342–1347, may 1995.
- [Mon08] MONK, P.: *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computing. Oxford University Press, 2008.
- [Mun02] MUNTEANU, I.: *Tree-cotree condensation properties*. Int. COMPUTAG Soc. Newslett. (ICS), 64:10–14, 2002.
- [Néd80] NÉDÉLEC, J. C.: *Mixed finite elements in R^3* . Numerische Mathematik, 35(3):315–341, September 1980.

- [Ned01] NEDELEC, J. C.: *Acoustic And Electromagnetic Equations*. Springer, 2001.
- [Nol06] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik*. Springer, 8. Auflage, 2006.
- [OBHka10] OSTROWSKI, J.M., M. BEBENDORF, R. HIPTMAIR und F. KRA" ANDMER: *cal H -Matrix-Based Operator Preconditioning for Full Maxwell at Low Frequencies*. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(8):3193–3196, aug. 2010.
- [OL05] OHM, J.-R. und H. D. LÜKE: *Signalübertragung*. Springer, 2005.
- [Par98] PARLETT, B N: *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Band 20 der Reihe *Classics in applied mathematics*. SIAM, 1998.
- [Phi00] PHILIPPOW, E.: *Grundlagen der Elektrotechnik*. Verlag Technik, 2000.
- [Poz05] POZAR, D. M.: *Microwave Eng.* John Wiley & Sons, 2005.
- [PPY+12] PAN, XIAO-MIN, WEI-CHAO PI, MING-LIN YANG, ZHEN PENG und XIN-QING SHENG: *Solving Problems With Over One Billion Unknowns by the MLFMA*. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 60(5):2571–2574, may 2012.
- [PRM97] PETERSON, A., S. RAY und R. MITTRA: *Computational Methods for Electromagnetics*. The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. IEEE Press, 1997.
- [QC09] QIAN, Z.-G. und W. C. CHEW: *Fast Full-Wave Surface Integral Equation Solver for Multiscale Structure Modeling*. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 57(11):3594–3601, November 2009.
- [RC09] ROTHWELL, E. J. und M. J. CLOUD: *Electromagnetics*. CRC Press, 2009.
- [Red98] REDDY, B. D.: *Introductory Functional Analysis*. Springer, 1998.
- [RH73] REED, W. H. und T. R. HILL: *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. *Technischer Bericht*, Los Alamos National Laboratory, 1973.
- [Rok85] ROKHLIN, V.: *Rapid solution of integral equations of classical potential theory*. *Journal of Computational Physics*, 60(2):187–207, September 1985.
- [Sch99] SCHUTZ, B.: *Geometrical Methodes of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1999.

- [SF96] SILVESTER, P. P. und R. L. FERRARI: *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, 1996.
- [SF08] STRANG, G. und G. FIX: *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge, 2nd Auflage, Mai 2008.
- [SFDE09] SCHULTSCHIK, A., O. FARLE und R. DYCZIJ-EDLINGER: *An Adaptive Multi-Point Fast Frequency Sweep for Large-Scale Finite Element Models*. Magnetics, IEEE Transactions on, 45(3):1108–1111, march 2009.
- [SKLL95] SACKS, Z. S., D. M. KINGSLAND, R. LEE und J.-F. LEE: *A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition*. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 43(12):1460–1463, December 1995.
- [SLC97] SONG, J., CAI-CHENG LU und WENG CHO CHEW: *Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects*. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 45(10):1488–1493, oct 1997.
- [SSBS10] SCHWARZBACH, C, R STREICH, R BÖRNER und KLAUS SPITZER: *Low frequency stable numerical solution of Maxwell's equations*. 20th EMIW Workshop, Seiten 18–21, 2010.
- [Str07] STRATTON, J. A.: *Electromagnetic Theory*. The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. IEEE Press / John Wiley & Sons, 2007.
- [TB97] TREFETHEN, L. N. und D. BAU: *Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997.
- [TK01] TARHASAARI, T. und L. KETTUNEN: *Topological Approach to Computational Electromagnetism*. Progress in Electromagnetics Research-pier, PIER 32:189–206, 2001.
- [TM01] TISSEUR, FRANÇOISE und KARL MEERBERGEN: *The Quadratic Eigenvalue Problem*. SIAM Review, 43(2):235–286, 2001.
- [Ton01] TONTI, E.: *Finite Formulation of the Electromagnetic Field*. Progress In Electromagnetics Research, 32:1–44, 2001.
- [TYO05] TASKINEN, M. und P. YLÄ-OIJALA: *Current and charge Integral equation formulation*. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 54(1):58–67, Jan. 2005.
- [vB07] BLADEL, J. VAN: *Electromagnetic Fields*. The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. IEEE Press / John Wiley & Sons, 2007.

- [vdSM02] SCHAFT, A.J. VAN DER und B.M. MASCHKE: *Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow*. Journal of Geometry and Physics, 42(1–2):166 – 194, 2002.
- [vdVM90] VORST, H.A. VAN DER und J.B.M. MELISSEN: *A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax=b$, where A is symmetric complex*. Magnetics, IEEE Transactions on, 26(2):706 –708, mar 1990.
- [Web99] WEBB, J.P.: *Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements*. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 47(8):1244 –1253, August 1999.
- [Wei96] WEILAND, T.: *Time Domain Electromagnetic Field Computation With Finite Difference Methods*. International Journal of Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields, 9(4):295–319, 1996.
- [Wer05] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer, 2005.
- [Yee66] YEE, K.: *Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media*. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 14(3):302 –307, may 1966.
- [ZC01] ZHU, Y. und A.C. CANGELLARIS: *A new finite element model for reduced order electromagnetic modeling*. Microwave and Wireless Components Letters, IEEE, 11(5):211–213, May 2001.
- [ZC02] ZHU, Y. und A.C. CANGELLARIS: *Robust finite-element solution of lossy and unbounded electromagnetic eigenvalue problems*. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, 50(10):2331–2338, 2002.
- [ZC06] ZHU, Y. und A. CANGELLARIS: *Multigrid Finite Element Methods for Electromagnetic Field Modeling*. The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. IEEE Press / John Wiley & Sons, 2006.
- [ZJ10a] ZHU, J. und D. JIAO: *Eliminating the Low-Frequency Breakdown Problem in 3-D Full-Wave Finite-Element-Based Analysis of Integrated Circuits*. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, 58(10):2633 –2645, Oktober 2010.
- [ZJ10b] ZHU, J. und D. JIAO: *A rigorous method for fundamentally eliminating the low-frequency breakdown in full-wave finite-element-based analysis: Combined dielectric-conductor case*. In: *Electrical Performance of Electronic Packaging and Systems (EPEPS), 2010 IEEE 19th Conference on*, Seiten 69–72, October 2010.

- [ZJ10c] ZHU, J. und D. JIAO: *A Theoretically Rigorous Full-Wave Finite-Element-Based Solution of Maxwell's Equations From dc to High Frequencies*. Advanced Packaging, IEEE Transactions on, 33(4):1043 – 1050, November 2010.
- [ZJ11] ZHU, J. und D. JIAO: *A Rigorous Solution to the Low-Frequency Breakdown in Full-Wave Finite-Element-Based Analysis of General Problems Involving Inhomogeneous Lossless/Lossy Dielectrics and Nonideal Conductors*. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, 59(12):3294 – 3306, Dezember 2011.
- [ZJ12a] ZHU, J. und D. JIAO: *A fast and accurate $O(1)$ solution to the low-frequency breakdown problem of fullwave solvers*. In: *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2012 IEEE International Symposium on*, Seiten 189–192, August 2012.
- [ZJ12b] ZHU, J. und D. JIAO: *Fast Full-Wave Solution That Eliminates the Low-Frequency Breakdown Problem in a Reduced System of Order One*. Components, Packaging and Manufacturing Technology, IEEE Transactions on, 2(11):1871–1881, November 2012.
- [ZVL06] ZHAO, K., M.N. VOUVAKIS und J.-F. LEE: *Solving electromagnetic problems using a novel symmetric FEM-BEM approach*. Magnetics, IEEE Transactions on, 42(4):583 – 586, april 2006.